Vektoren und Matrizen

Ergänzungsfach Informatik, 2021/2022, pro@kswe.ch

16. November 2021

Lernziele:

- Sie notieren einen Vektor und eine Matrix.
- Sie bestimmen die Dimension eines Vektors und einer Matrix.
- Sie führen die grundlegenden Operationen durch: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Transponieren und Norm bestimmen.
- Sie erstellen in Python einen Vektor, eine Matrix und führen die grundlegenden Operationen durch.

1 Vektoren

Ein Vektor ist eine *senkrechte* oder *waagrechte* Notation von Werten. In den allermeisten Fällen werden wir als Werte reelle Zahlen verwenden. Alle Beispiele verwenden von nun an Zahlen.

1.1 Spaltenvektor

Notieren wir die Zahlen **untereinander**, dann sprechen wir von einem **Spaltenvektor**. Die Notation erfolgt typischerweise durch grosse Klammern. Möchten wir einen Vektor mit einem Namen abkürzen, dann verwenden wir einen kleinen Pfeil über dem Namen. Damit soll deutlich gemacht werden, dass es ein Vektor ist.

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 42 \end{bmatrix}$$

1.2 Zeilenvektor

Notieren wir die Zahlen **nebeneinander**, dann sprechen wir von einem **Zeilenvektor**.

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 42 \end{bmatrix}$$

1.3 Dimension

Die Dimension eines Vektors ist die Anzahl der Elemente ("Zahlen"). Wir schreiben $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, falls der Vektor $\vec{x}$ die Dimension n besitzt.

Beispiel: Der Vektor $\vec{x}$ besitzt die Dimension 3.

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 42 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \vec{x} \in \mathbb{R}^3$$

1.4 Transponieren

Zeilenvektor und Spaltenvektor sind nicht dasselbe, es gilt daher:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 42 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 5 & 42 \end{bmatrix}$$

Möchte man einen Spaltenvektor in einen Zeilenvektor "umwandeln" (oder umgekehrt), dann kann man einen Vektor transponieren. Wir verwenden folgende Notation:

Es ist der Spaltenvektor $\vec{x}$ gegeben: $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 42 \end{bmatrix}$

Wir können durch das Transponieren einen Zeilenvektor erzeugen: $\vec{x}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 42 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 42 \end{bmatrix}$

Hinweis zur Notation: Mit $\vec{x}$ ist immer ein Spaltenvektor gemeint. Mit $\vec{x}^T$ der dazugehörige Zeilenvektor. Es gilt $(\vec{x}^T)^T = \vec{x}$ (zweimal transponieren ergibt wieder den ursprünglichen Vektor).

1.5 Addition und Subtraktion

Man kann zwei Vektoren addieren bzw. subtrahieren, indem man die Addition bzw. Subtraktion für jedes Element individuell durchführt. Man erhält wieder einen Vektor.

Beispiel:

$$\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.6 Multiplikation

Beim Multiplizieren muss man unterscheiden, ob ein Vektor mit einer "Zahl" multipliziert wird oder ob zwei Vektoren miteinander multipliziert werden.

1.6.1 Skalarmultiplikation

Wir multiplizieren einen Vektor mit einem Skalar (reelle Zahl), indem wir jedes Element individuell multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder ein Vektor.

Beispiel:

$$0,5 \cdot \overrightarrow{x_1} = 0,5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.6.2 Skalarprodukt

Wir multiplizieren zwei Vektoren mithilfe des **Standardskalarprodukts**. Wir multiplizieren die Elemente der gleichen Position miteinander und addieren die Ergebnisse. Es gilt: "Vektor mal Vektor gleich Zahl".

Beispiel:

$$\overrightarrow{x_1} \cdot \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 5 + 12 + 21 = 38.$$

1.7 Norm

Die Norm eines Vektors wird auch als Länge eines Vektors bezeichnet. Wir interessieren uns typischerweise für die 2-er Norm. Wir notieren die 2-er Norm eines Vektors wie folgt: $||\overrightarrow{x}||_2$. Wir berechnen die Norm, in dem wir jedes Element quadrieren, alle Elemente summieren und dann die Quadratwurzel ermitteln.

Beispiel:

$$||\overrightarrow{x_1}||_2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \approx 3,74$$

2 Matrizen

Eine Matrix (Mehrzahl Matrizen) ist eine *senkrechte* **und** *waagrechte* Notation von Werten. In den allermeisten Fällen werden wir als Werte reelle Zahlen verwenden. Alle Beispiele verwenden von nun an Zahlen.

Beispiele: $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & 0 \\ 42 & 9 & 2,5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 80 \\ -2 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

Wir verwenden für Matrizen immer einen Grossbuchstaben. Eine Matrix besteht aus m Zeilen und n Spalten. Wir notieren dies kurz als $m \times n$. Es werden immer zuerst die Anzahl der Zeilen genannt und dann die Anzahl der Spalten.

Beispiele: Matrix A hat 3 Zeilen und 3 Spalten (3×3). Matrix B hat 3 Zeilen und 2 Spalten (3×2). Matrix C hat 2 Zeilen und 3 Spalten (2×3).

2.1 Dimension

Die Dimension einer Matrix entspricht der Anzahl der Zeilen m und der Anzahl der Spalten n und wird wie folgt notiert: $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Beispiel: Matrix A besitzt die Dimension 3×3, das heisst $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Anmerkung: **Ein Vektor ist eine Matrix mit Dimension $m \times 1$.**

2.2 Spezielle Matrizen

Erklärung 2.1 (Quadratische Matrizen) *Ist die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten identisch, dann spricht man von einer quadratischen Matrix. Diese Matrizen besitzen die Dimension* $\mathbb{R}^{n \times n} = \mathbb{R}^{m \times m}$.

Erklärung 2.2 (Einheitsmatrix) *Die Einheitsmatrix (auch Identitätsmatrix genannt) ist eine quadratische Matrix. Alle Elemente aus die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind* 0. *Die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind* 1.

Beispiel: Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Transponieren

Wir können eine Matrix transponieren, in dem wir die Elemente an der Hauptdiagonalen spiegeln. Wir notieren dies wie folgt: A^T.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Es gilt: $(A^T)^T = A$ (zweimal transponieren ergibt wieder die ursprüngliche Matrix).

2.4 Matrix-Vektor-Produkt

Multipliziere eine Matrix mit einem Vektor. Prinzip: "jede Zeile der Matrix mit dem Vektor multiplizieren". Man erhält dadurch einen Vektor.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $A \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{bmatrix}$

2.5 Matrixmultiplikation

Die Matrixmultiplikation multipliziert zwei Matrizen miteinander ("Matrix mal Matrix"), das heisst $A \cdot B = C$. Das Ergebnis ist wieder eine Matrix. Prinzip: Skalarprodukt der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B ergibt das erste Element von C (erste Zeile, erste Spalte). Dann das Skalarprodukt der zweiten Zeile von A mit der ersten Spalte von B ergibt das zweite Element von C (zweite Zeile, erste Spalte). Dies wiederholt sich für alle Zeilen und Spalten.

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{bmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 16 & 1 \cdot 11 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 17 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 18 \\ 4 \cdot 10 + 5 \cdot 13 + 6 \cdot 16 & 4 \cdot 11 + 5 \cdot 14 + 6 \cdot 17 & 4 \cdot 12 + 5 \cdot 15 + 6 \cdot 18 \\ 7 \cdot 10 + 8 \cdot 13 + 9 \cdot 16 & 7 \cdot 11 + 8 \cdot 14 + 9 \cdot 17 & 7 \cdot 12 + 8 \cdot 15 + 9 \cdot 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 90 & 96 & 102 \\ 216 & 231 & 246 \\ 342 & 366 & 390 \end{bmatrix}$$

Achtung, die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Es gilt daher $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Spezielle Matrixmultiplikation: Multipliziere eine Matrix mit einer "anderen" Matrix, sodass die Einheitsmatrix entsteht: $A \cdot A^{-1} = I$
Die Matrix A^{-1} wird Inverse von A genannt und muss berechnet werden. Dies erfolgt in der Regel durch ein lineares Gleichungssystem (besser nicht von Hand...).

3 Aufgaben

1. Notieren Sie einen Spaltenvektor $\vec{a}$ der Dimension 4. Berechnen Sie die Norm des Vektors.
   Lösungsvorschlag:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ||\vec{a}||_2 = \left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{5^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 0 + 1 + 4} = \sqrt{30} \approx 5,48$$

2. Transponieren Sie den Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix}$.

   Lösungsvorschlag:

$$\vec{b}^T = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 25 \end{bmatrix}$$

3. Multiplizieren Sie den Vektor $\vec{a}$ mit $0,25$.

   Lösungsvorschlag:

$$0,25 \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0 \\ -0,25 \\ 0,5 \end{bmatrix}$$

4. Berechnen Sie das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

   Lösungsvorschlag: Da $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unterschiedliche Dimensionen haben ist die Berechnung des Skalarprodukts nicht möglich.

5. Drücken Sie das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot \vec{x}$ ("Skalarprodukt mit sich selbst") durch die 2-er Norm aus.

   Lösungsvorschlag: Das Skalarprodukt von $\vec{x}$ und $\vec{x}$ ("Skalarprodukt mit sich selbst") ergibt $\vec{x} \circ \vec{x} = x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \cdots + x_n \cdot x_n = x_1^2 + x_2^2 \cdot x_3^2 + \cdots + x_n^2$

   Im letzten Schritt kann man erkennen, dass die Summe der Quadrate sehr ähnlich ist zur Berechnung der Norm eines Vektors. Es "fehlt" einfach die Quadratwurzel. Man kann eine Quadratwurzel "eliminieren", wenn man mit 2 quadriert. Wir können also folgende Gleichung festhalten:

$$\vec{x} \circ \vec{x} = ||\vec{x}||_2^2$$

   Dies gilt, weil folgende Gleichung erfüllt ist:

$$||\vec{x}||_2^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\right)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \vec{x} \circ \vec{x}$$

   Ein Beispiel bestätigt das Resultat:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \left(\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}\right)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

6. Notieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$.

   Lösungsvorschlag:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix}$$

7. Führen Sie das Matrix-Vektor-Produkt mit A und $\vec{a}$ aus.

$$A \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 34 \\ 58 \\ 82 \\ 106 \\ 130 \end{bmatrix}$$

8. Wie müssen die Dimensionen für eine Matrix und einen Vektor lauten, damit das Matrix-Vektor-Produkt durchgeführt werden kann?

   Lösungsvorschlag: Hat die Matrix die Dimension $m \times n$ dann muss der Vektor die Dimension $n \times 1$ haben, also n-Elemente besitzen. Umgangssprachlich bedeutet dies, dass die Anzahl der Spalten in der Matrix mit der Anzahl der Zeilen des Vektors übereinstimmen müssen.

9. Das Standardskalarprodukt ist ein Spezialfall des Matrix-Vektor-Produkts. Drücken Sie das Standardskalarprodukt von $\vec{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $\vec{b}$ als Matrix-Vektor-Produkt aus.

   Lösungsvorschlag: Wir können den Vektor $\vec{c}$ transponieren und als Matrix mit 1 Zeile und 3 Spalten auffassen:

$$\vec{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

   Da $\vec{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix}$ ein Spaltenvektor ist, können wir diesen als Matrix mit 3 Zeilen und 1 Spalte auffassen. Für die Matrixmultiplikation müssen die Dimensionen übereinstimmen. Wir haben für $\vec{c}$ die Dimension 1×3 und für $\vec{b}$ die Dimension 3×1. Die Dimensionen "passen" somit und wir erhalten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 25 = 91$$

10. Wie lautet die Dimension von A^T?

    Lösungsvorschlag: Da $A \in \mathbb{R}^{6 \times 4}$ gilt ist $A^T \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$.

11. Führen Sie die Matrixmultiplikation von T und U aus. Welche Matrix entsteht? Wie wird diese Matrix genannt? Wie wird U auch genannt?

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

    Lösungsvorschlag:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -0,5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

    Die Matrix die entsteht wird Einheitsmatrix genannt. Sie hat die Dimension 2×2 und wird deshalb meist mit I_2 abgekürzt. Die Matrix U ist die Inverse Matrix von T, da T multipliziert mit U die Einheitsmatrix ergibt. Allgemeint gilt: $T \cdot T^{-1} = I$.

12. Wie müssen die Dimensionen zweier Matrizen lauten, damit eine Matrixmultiplikation möglich ist?

    Lösungsvorschlag: Die Anzahl der Spalten der ersten Matrix müssen mit der Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen. Formaler kann man dies wie folgt ausdrücken: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

13. Installieren Sie via PyCharm das Modul `numpy` (unten gibt es ein Tab `Python Packages`). Führen Sie die Berechnungen nun in Python durch. Erstellen Sie einen neuen Ordner `vektoren_matrizen`. Vektoren und Matrizen werden über Arrays realisiert. Informieren Sie sich über den Unterschied zu Listen (`https://numpy.org` nach "What's the difference between a Python list and a NumPy array?" in der Dokumentation suchen.). Wie kann man zwei Matrizen miteinander multiplizieren (`@`-Operator suchen). Wie kann man eine Matrix transponieren? Wie wird die Inverse einer Matrix berechnet?

    Lösungsvorschlag:

    What's the difference between a Python list and a NumPy array?

    NumPy gives you an enormous range of fast and efficient ways of creating arrays and manipulating numerical data inside them. While a Python list can contain different data types within a single list, all of the elements in a NumPy array should be homogeneous. The mathematical operations that are meant to be performed on arrays would be extremely inefficient if the arrays weren't homogeneous.

    What is an array?

    An array is a central data structure of the NumPy library. An array is a grid of values and it contains information about the raw data, how to locate an element, and how to interpret an element. It has a grid of elements that can be indexed in various ways. The elements are all of the same type, referred to as the array dtype.

    An array can be indexed by a tuple of nonnegative integers, by booleans, by another array, or by integers. The rank of the array is the number of dimensions. The shape of the array is a tuple of integers giving the size of the array along each dimension.

    Alle Lösungen zu den Rechenoperationen finden Sie in der Python-Datei `aufgabe_13.py`.