Respuestas del primer examen (versión a) - TEL224

Viernes 13/03/2015

Teoría

1. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Diseñe una señal discreta exponencial que no converja.

Respuesta:

$$x[n] = 2^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Defina y ejemplifique una FIR.

Respuesta: FIR significa "Finite-duration Impulse Response". Un sistema FIR es un sistema con respuesta al impulso de duración finita. El sistema siguiente es un sistema FIR:

$$h[n] = 2\delta[n]$$

3. $\boxed{\text{5 puntos}}$ ¿Qué es lo que sucede cuando una exponencial compleja (autofunción) atraviese un SLIT?

Respuesta: La salida de un SLIT atravesado por una exponencial compleja $x[n] = e^{j\omega n}$ es la misma exponencial compleja multiplicada por el autovalor $H\left(e^{j\omega}\right)$, o sea la respuesta en frecuencia del SLIT en la frecuencia ω:

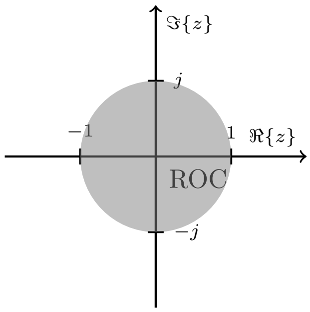
$$y[n] = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}$$

con

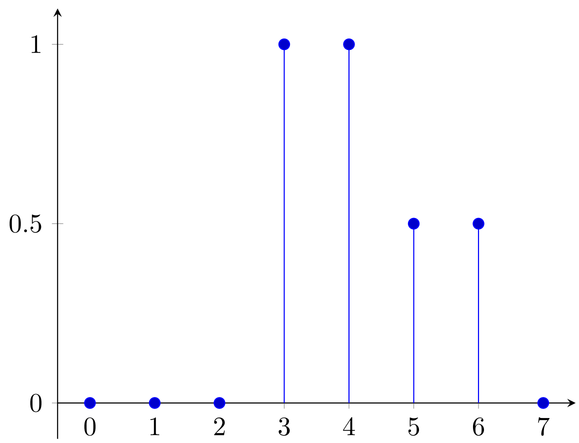
$$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

4. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Dibujar la región de convergencia de la transformada Z de una señal limitada por la derecha con un único polo en $z = j$

Respuesta: La región de convergencia de la transformada Z de una señal limitada por la derecha es el disco de rayo igual al módulo del polo menor. En este caso, existe un único polo, de módulo igual a 1, así que la región de convergencia esta definida por el disco $|z| < 1$.



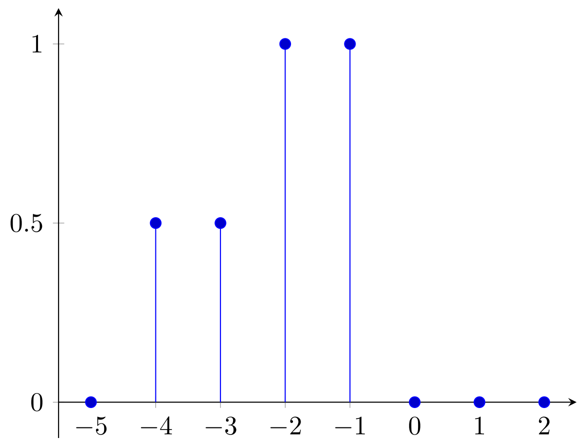
5. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Dada la siguiente señal $x[n]$, dibuje $x[-(n-2)]$.



Respuesta:

Los únicos valores diferentes de cero son para $n = 3, ..., 6$, se transforman de la manera siguiente:

- $x[3] = 1$ se vuelve $x[-1] = 1$
- $x[4] = 1$ se vuelve $x[-2] = 1$
- $x[5] = 0.5$ se vuelve $x[-3] = 0.5$
- $x[6] = 0.5$ se vuelve $x[-4] = 0.5$



6. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Si la entrada del sistema es: $x[n] = u[n]$ y su respuesta al impulso es: $h[n] = \frac{1}{4}^{n-1} u[n-1]$, encuentre su salida. Recuerde: $y[n] = x[n] * h[n]$

Respuesta:

$$\begin{aligned}
y[n] &= x[n] * h[n] \\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} h[n-k], \quad \text{porque } x[n] = 0 \quad \forall n < 0 \text{ y } x[n] = 1 \quad \forall n \geq 0 \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}^{n-k-1} u[n-k-1] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{n-k-1}, \quad \text{porque } u[n-k-1] = 1 \quad \forall n-k-1 \geq 0 \text{ o sea } k \leq n-1 \\
&= \textstyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{l}, \quad \text{haciendo el cambio de variable } l = n-k-1 \\
&= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}, \quad \forall n \\
y[n] &= \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right), \quad \forall n
\end{aligned}$$

7. $\boxed{\text{10 puntos}}$ Encuentre la transformada Z unilateral de la señal: $y[n] = 5x[n-2] - x[n]$.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Y}(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(5x[n-2] - x[n]\right) z^{-n} \\
&= 5\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x[n-2]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} x[n-2]z^{-n}\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\textstyle\sum_{n=2}^{\infty} x[n-2]z^{-(n-2)}\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\mathscr{X}(z)\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5x[-2] + 5x[-1]z^{-1} + \left(5z^{-2} - 1\right)\mathscr{X}(z)
\end{aligned}$$

8. Del siguiente sistema: $y[n] = x[n] - x[n-1]$, siendo $x[n]$ la entrada y $y[n]$ la salida:

   (a) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Demuestre que es un sistema lineal invariante en el tiempo.

Respuesta: Mostremos que es un sistema lineal:

$$
\begin{aligned}
T\left\{ax_1[n]+bx_2[n]\right\} &= \left(ax_1[n]+bx_2[n]\right)-\left(ax_1[n-1]+bx_2[n-1]\right)\\
&= a\left(x_1[n]-x_1[n-1]\right)+b\left(x_2[n]-x_2[n-1]\right)\\
&= aT\left\{x_1[n]\right\}+bT\left\{x_2[n]\right\}
\end{aligned}
$$

Mostremos que es invariante en el tiempo. Si $x_1[n]=x_[n-n_0]$,

$$
\begin{aligned}
T\left\{x_1[n]\right\} &= x_1[n]-x_1[n-1]\\
&= x[n-n_0]-x[n-n_0-1]\\
&= T\left\{x[n-n_0]\right\}
\end{aligned}
$$

(b) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Obtener $h[n]$ y $H\left(e^{j\omega}\right)$.

Respuesta:

$$
\begin{aligned}
h[n] &= T\left\{\delta[n]\right\}\\
&= \delta[n]-\delta[n-1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H\left(e^{j\omega}\right) &= \mathcal{F}\left\{\delta[n]-\delta[n-1]\right\}\\
&= 1-e^{-j\omega}\\
&= e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(e^{\frac{j\omega}{2}}-e^{-\frac{j\omega}{2}}\right)\\
&= 2j\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{j\omega}{2}}\\
&= 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}}
\end{aligned}
$$

(c) $\boxed{\text{5 puntos}}$ $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ y $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$.

Respuesta:
El módulo es:

$$
\begin{aligned}
\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| &= \left|2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}}\right|\\
&= 2\left|\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|
\end{aligned}
$$

La fase es:

$$
\begin{aligned}
\angle H\left(e^{j\omega}\right) &= \angle 2\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}}\\
&= \frac{\pi-\omega}{2}
\end{aligned}
$$

(d) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Obtener $h_i[n]$ tal que $h_i[n]*h[n]=\delta[n]$.

Respuesta:

$$
\begin{aligned}
h_i[n]*h[n] &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_i[k]h[n-k]\\
&= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_i[k]\left(\delta[n-k]-\delta[n-k-1]\right)\\
&= h_i[n]-h_i[n-1]
\end{aligned}
$$

Para que $h_i[n]*h[n]=h_i[n]-h_i[n-1]=\delta[n]$, es necesario que:

$$
\left\{\begin{array}{ll}
h_i[n]-h_i[n-1]=0, & \forall n<0\\
h_i[n]-h_i[n-1]=1, & n=0\\
h_i[n]-h_i[n-1]=0, & \forall n>0
\end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{ll}
h_i[n]=h_i[n-1], & \forall n<0\\
h_i[0]=1+h_i[-1], & n=0\\
h_i[n]=h_i[n-1], & \forall n>0
\end{array}\right.
$$

Esta relación esta verificada para todas las señales $h_i[n] = A + u[n], \quad \forall A \in \mathbb{C}$