Respuestas del primer examen (versión a) - TEL224

Viernes 13/03/2015

Teoría

1. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Diseñe una señal discreta exponencial que no converja.

> **Respuesta:**
> $$x[n] = 2^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Defina y ejemplifique una FIR.

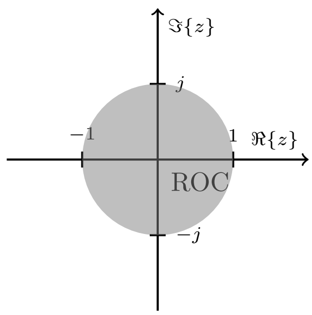
> **Respuesta:** FIR significa "Finite-duration Impulse Response". Un sistema FIR es un sistema con respuesta al impulso de duración finita. El sistema siguiente es un sistema FIR:
> $$h[n] = 2\delta[n]$$

3. $\boxed{\text{5 puntos}}$ ¿Qué es lo que sucede cuando una exponencial compleja (autofunción) atraviese un SLIT?

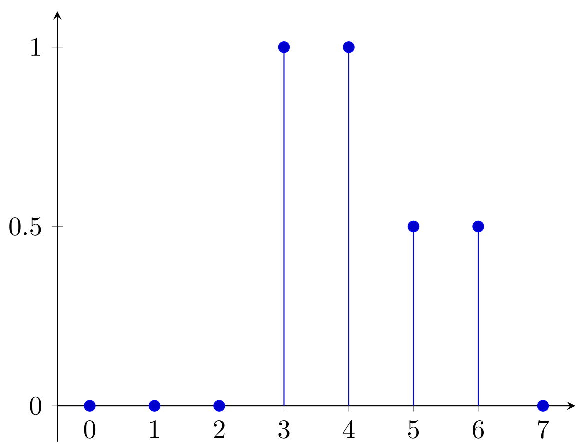
> **Respuesta:** La salida de un SLIT atravesado por una exponencial compleja $x[n] = e^{j\omega n}$ es la misma exponencial compleja multiplicada por el autovalor $H\left(e^{j\omega}\right)$, o sea la respuesta en frecuencia del SLIT en la frecuencia ω:
> $$y[n] = H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n}$$
> con
> $$H\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$
> Se demuestra de la siguiente manera:
> $$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}\right) e^{j\omega n} \end{aligned}$$

4. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Dibujar la región de convergencia de la transformada Z de una señal limitada por la derecha con un único polo en $z = j$

Respuesta: La región de convergencia de la transformada Z de una señal limitada por la derecha es el disco de rayo igual al módulo del polo menor. En este caso, existe un único polo, de módulo igual a 1, así que la región de convergencia esta definida por el disco $|z| < 1$.



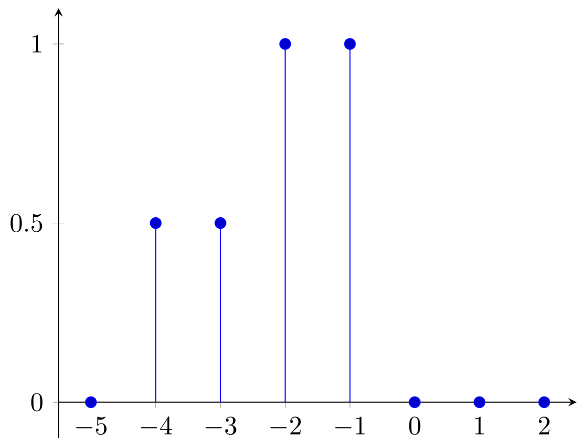
5. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Dada la siguiente señal $x[n]$, dibuje $x[-(n-2)]$.



Respuesta:

Los únicos valores diferentes de cero son para $n = 3, ..., 6$, se transforman de la manera siguiente:

- $x[3] = 1$ se vuelve $x[-1] = 1$
- $x[4] = 1$ se vuelve $x[-2] = 1$
- $x[5] = 0.5$ se vuelve $x[-3] = 0.5$
- $x[6] = 0.5$ se vuelve $x[-4] = 0.5$



6. $\boxed{\text{5 puntos}}$ Si la entrada del sistema es: $x[n] = u[n]$ y su respuesta al impulso es: $h[n] = \frac{1}{4}^{n-1}u[n-1]$, encuentre su salida. Recuerde: $y[n] = x[n] * h[n]$

Respuesta:

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} h[n-k], \quad \text{porque } x[n] = 0 \quad \forall n < 0 \text{ y } x[n] = 1 \quad \forall n \geq 0 \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}^{n-k-1} u[n-k-1] \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{n-k-1}, \quad \text{porque } u[n-k-1] = 1 \quad \forall n-k-1 \geq 0 \text{ o sea } k \leq n-1 \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{l}, \quad \text{haciendo el cambio de variable } l = n-k-1 \end{aligned}$$

Si $n < 0$, entonces:

$$y[n] = 0$$

y si $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}, \quad \forall n \\ y[n] &= \tfrac{4}{3}\left(1-\left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right), \quad \forall n \end{aligned}$$

Entonces el resultado para todo n es:

$$y[n] = \frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u[n], \quad \forall n$$

Para la penúltima línea, utilizamos la formula de las series geométricas: `https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_geom%C3%A9trica#F.C3.B3rmula`. Demostración:

$$\begin{aligned} \left(1-\tfrac{1}{4}\right)\textstyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{l} &= \textstyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{l} - \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{l} \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{l} - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4}^{l} \\ &= \left(\tfrac{1}{4}\right)^0 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \\ &= 1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

Podemos demostrar de otra forma utilizando la transformada Z:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Escribiendo $h_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$,

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

y por la propiedad de desplazamiento temporal de la transformada Z:

$$H(z) = z^{-1}H_1(z) = \frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Obtenemos:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

con

$$A = \left(1 - z^{-1}\right) Y(z)\big|_{z=1} = \left.\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

con

$$B = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) Y(z)\bigg|_{z=\frac{1}{4}} = \left.\frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{4}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

Entonces

$$Y(z) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$

Finalmente, por simple inspección, obtenemos la señal de salida $y[n]$:

$$y[n] = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) u[n], \quad \forall n$$

7. $\boxed{\text{10 puntos}}$ Encuentre la transformada Z unilateral de la señal: $y[n] = 5x[n-2] - x[n]$.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\mathscr{Y}(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(5x[n-2] - x[n]\right) z^{-n} \\
&= 5\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x[n-2]z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} x[n-2]z^{-n}\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\textstyle\sum_{n=2}^{\infty} x[n-2]z^{-(n-2)}\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5\left(x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\mathscr{X}(z)\right) - \mathscr{X}(z) \\
&= 5x[-2] + 5x[-1]z^{-1} + \left(5z^{-2} - 1\right)\mathscr{X}(z)
\end{aligned}$$

8. Del siguiente sistema: $y[n] = x[n] - x[n-1]$, siendo $x[n]$ la entrada y $y[n]$ la salida:

   (a) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Demuestre que es un sistema lineal invariante en el tiempo.

   Respuesta: Mostremos que es un sistema lineal:

$$\begin{aligned} T\left\{ax_1[n]+bx_2[n]\right\} &= (ax_1[n]+bx_2[n]) - (ax_1[n-1]+bx_2[n-1]) \\ &= a\left(x_1[n]-x_1[n-1]\right) + b\left(x_2[n]-x_2[n-1]\right) \\ &= aT\left\{x_1[n]\right\} + bT\left\{x_2[n]\right\} \end{aligned}$$

Mostremos que es invariante en el tiempo. Si $x_1[n] = x_[n-n_0]$,

$$\begin{aligned} T\left\{x_1[n]\right\} &= x_1[n] - x_1[n-1] \\ &= x[n-n_0] - x[n-n_0-1] \\ &= T\left\{x[n-n_0]\right\} \end{aligned}$$

(b) 5 puntos Obtener $h[n]$ y $H\left(e^{j\omega}\right)$.

Respuesta:

$$\begin{aligned} h[n] &= T\left\{\delta[n]\right\} \\ &= \delta[n] - \delta[n-1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H\left(e^{j\omega}\right) &= \mathcal{F}\left\{\delta[n]-\delta[n-1]\right\} \\ &= 1 - e^{-j\omega} \\ &= e^{-\frac{j\omega}{2}}\left(e^{\frac{j\omega}{2}} - e^{-\frac{j\omega}{2}}\right) \\ &= 2j\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)e^{-\frac{j\omega}{2}} \\ &= 2\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}} \end{aligned}$$

Para la penúltima línea, se utiliza la formula siguiente:

$$\sin(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2j}$$

(c) 5 puntos $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$ y $\angle H\left(e^{j\omega}\right)$.

Respuesta:
El módulo es:

$$\begin{aligned} \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| &= \left|2\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}}\right| \\ &= 2\left|\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right| \end{aligned}$$

La fase es:

$$\begin{aligned} \angle H\left(e^{j\omega}\right) &= \angle 2\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}} \\ &= \angle 2\left|\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right|\operatorname{sign}\left(\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right)\right)e^{\frac{j(\pi-\omega)}{2}} \end{aligned}$$

Tenemos, para $\frac{\omega}{2} \in [0, 2\pi]$:

$$\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) = \begin{cases} 1 &= e^{j0} \quad \forall\frac{\omega}{2} \in [0+2\pi k, \pi+2\pi k], \forall k \in \mathbb{Z} \\ -1 &= e^{-j\pi} \quad \forall\frac{\omega}{2} \in [\pi+2\pi k, 2\pi+2\pi k], \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Finalmente obtenemos la fase:

$$\angle H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} \frac{\pi-\omega}{2} & \forall\omega \in [4\pi k, 4\pi k+2\pi], \forall k \in \mathbb{Z} \\ \frac{-\pi-\omega}{2} & \forall\omega \in [4\pi k+2\pi, 4\pi k+4\pi)], \forall k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(d) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Obtener $h_i[n]$ tal que $h_i[n] * h[n] = \delta[n]$.

Respuesta:

$$\begin{aligned} h_i[n] * h[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i[k]h[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_i[k]\left(\delta[n-k] - \delta[n-k-1]\right) \\ &= h_i[n] - h_i[n-1] \end{aligned}$$

Para que $h_i[n] * h[n] = h_i[n] - h_i[n-1] = \delta[n]$, es necesario que:

$$\begin{cases} h_i[n] - h_i[n-1] = 0, & \forall n < 0 \\ h_i[n] - h_i[n-1] = 1, & n = 0 \\ h_i[n] - h_i[n-1] = 0, & \forall n > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h_i[n] = h_i[n-1], & \forall n < 0 \\ h_i[0] = 1 + h_i[-1], & n = 0 \\ h_i[n] = h_i[n-1], & \forall n > 0 \end{cases}$$

Esta relación esta verificada para todas las señales $h_i[n] = A + u[n], \quad \forall A \in \mathbb{C}$

9. Si la entrada $x[n]$ de un SLIT es $x[n] = u[n]$, la salida es: $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n+1]$.

(a) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Hallar $H(z)$ y su diagrama polo-cero.

Respuesta:

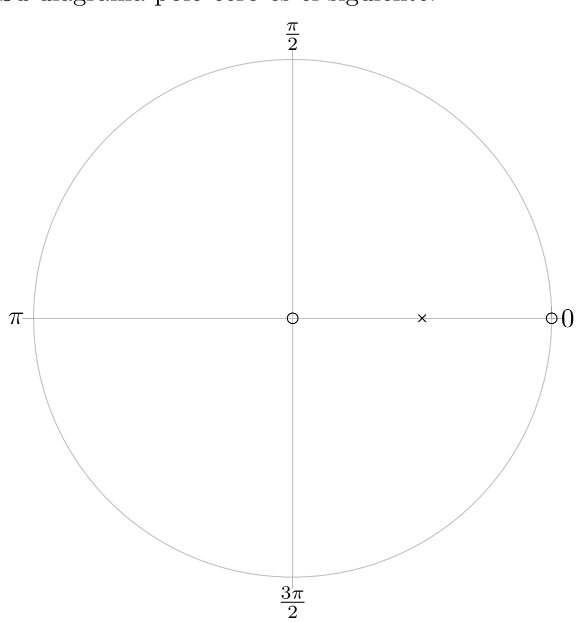
$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

$$Y(z) = \frac{4z}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Entonces la función de transferencia es:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad |z| > \tfrac{1}{2} \\ &= \frac{4z\left(1-z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \tfrac{1}{2} \\ &= \frac{4z(z-1)}{z-\frac{1}{2}}, \quad |z| > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Su diagrama polo-cero es el siguiente:



(b) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Obtener la respuesta al impulso: $h[n]$:

Respuesta:

$$\begin{aligned} H(z) &= \tfrac{4z\left(1-z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \tfrac{1}{2} \\ &= \tfrac{4z}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \tfrac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Por simple inspección, obtenemos la transformada Z inversa:

$$\begin{aligned} h[n] &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} u[n] \\ &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \left(u[n+1] - 2u[n]\right) \\ &= 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \left(\delta[n+1] - u[n]\right) \end{aligned}$$

(c) $\boxed{\text{5 puntos}}$ ¿Es el sistema estable?, ¿por qué?

Respuesta: El sistema es estable porque la región de convergencia, definida por $|z| > \frac{1}{2}$ contiene la circunferencia unidad.

(d) $\boxed{\text{5 puntos}}$ ¿Es el sistema causal?, ¿por qué?

Respuesta: El sistema no es causal, porque no cumple con la condición $h[n] = 0, \quad \forall n < 0$. En efecto:

$$h[-1] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+1} \left(\delta[-1+1] - u[-1]\right) = 4 \neq 0$$

10. Encontrando la respuesta al impulso del siguiente sistema. Determine:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$$

(a) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Si es un sistema con o sin memoria.

Respuesta: Primer calculemos la función de transferencia del sistema. La transformada Z de la ecuación en diferencia nos da:

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) Y(z) = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right) X(z)$$

lo que permite calcular la función de transferencia (la región de convergencia es $|z| > \frac{1}{2}$ porque el sistema es causal):

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{4}\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Por inspección podemos calcular la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned} h[n] &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} u[n] - \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \left(2u[n] - u[n-1]\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \left(u[n] + \delta[n]\right) \end{aligned}$$

El sistema es con memoria, porque es un filtra a respuesta infinita (IIR), en efecto depende de todos los valores del pasado de la entrada.

(b) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Lineal o no lineal.

Respuesta: Todo sistema que se define como una ecuación en diferencias lineales con coeficientes constantes es un SLIT, entonces es lineal.

(c) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Invariante o variante con el tiempo.

Respuesta: Todo sistema que se define como una ecuación en diferencias lineales con coeficientes constantes es un SLIT, entonces es invariante con el tiempo.

(d) $\boxed{\text{5 puntos}}$ Estable en el sentido BIBO y estable en el sentido de respuesta al impulso absolutamente sumable.

Respuesta: El sistema es estable en el sentido BIBO porque su región de convergencia, $|z| > \frac{1}{2}$ contiene la circunferencia unidad.

Calculamos la suma absoluta de la respuesta al impulso:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} (u[n] + \delta[n])\right| \\ &< \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} (1+1)\right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n}\right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

Es finita, entonces el sistema es estable en el sentido de respuesta al impulso absolutamente sumable.