

# Respuestas del primer examen (versión a) - TEL224

Viernes 13/03/2015

## Teoría

1. 5 puntos Diseñe una señal discreta exponencial que no converja.

**Respuesta:**

$$x[n] = 2^n u[n], \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. 5 puntos Defina y ejemplifique una FIR.

**Respuesta:** FIR significa "Finite-duration Impulse Response". Un sistema FIR es un sistema con respuesta al impulso de duración finita. El sistema siguiente es un sistema FIR:

$$h[n] = 2\delta[n]$$

3. 5 puntos ¿Qué es lo que sucede cuando una exponencial compleja (autofunción) atraviese un SLIT?

**Respuesta:** La salida de un SLIT atravesado por una exponencial compleja  $x[n] = e^{j\omega n}$  es la misma exponencial compleja multiplicada por el autovalor  $H(e^{j\omega})$ , o sea la respuesta en frecuencia del SLIT en la frecuencia  $\omega$ :

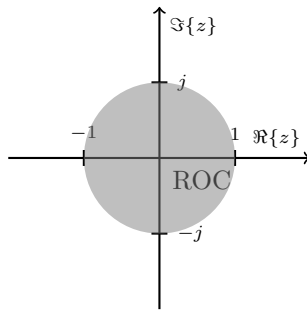
$$y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$$

con

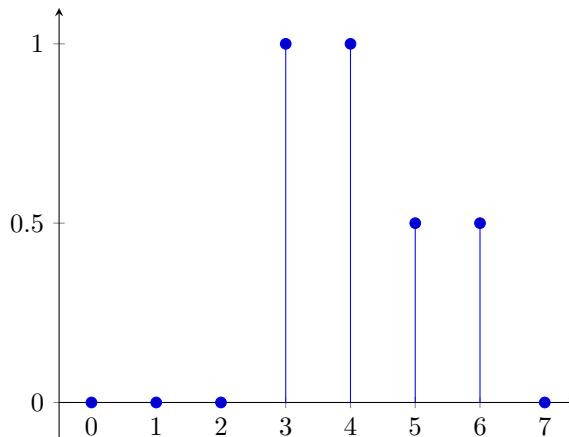
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$$

4. 5 puntos Dibujar la región de convergencia de la transformada Z de una señal limitada por la derecha con un único polo en  $z = j$

**Respuesta:** La región de convergencia de la transformada Z de una señal limitada por la derecha es el disco de rayo igual al módulo del polo menor. En este caso, existe un único polo, de módulo igual a 1, así que la región de convergencia esta definida por el disco  $|z| < 1$ .



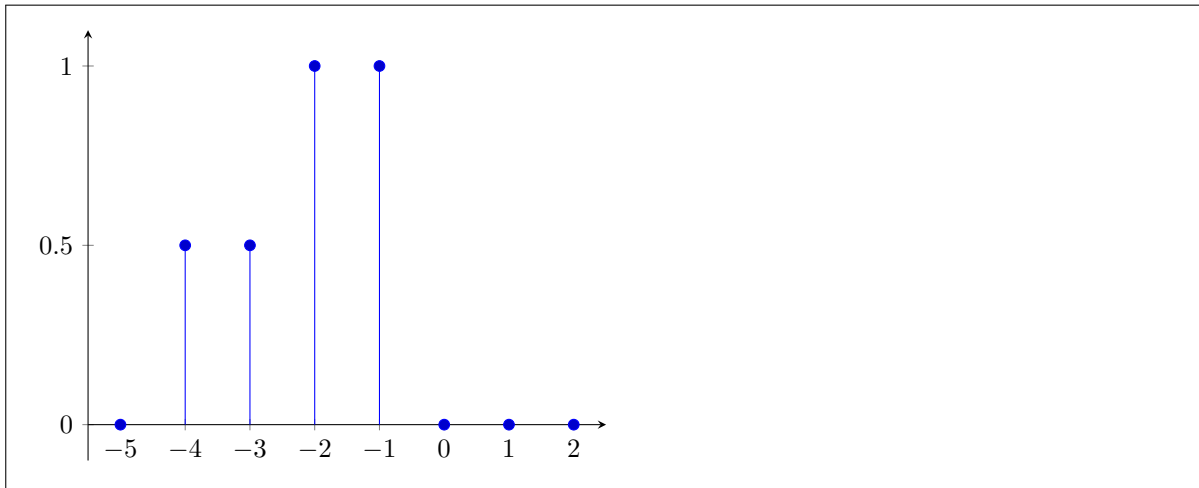
5. 5 puntos Dada la siguiente señal  $x[n]$ , dibuje  $x[-(n-2)]$ .



**Respuesta:**

Los únicos valores diferentes de cero son para  $n = 3, \dots, 6$ , se transforman de la manera siguiente:

- $x[3] = 1$  se vuelve  $x[-1] = 1$
- $x[4] = 1$  se vuelve  $x[-2] = 1$
- $x[5] = 0.5$  se vuelve  $x[-3] = 0.5$
- $x[6] = 0.5$  se vuelve  $x[-4] = 0.5$



6. 5 puntos Si la entrada del sistema es:  $x[n] = u[n]$  y su respuesta al impulso es:  $h[n] = \frac{1}{4}^{n-1} u[n-1]$ , encuentre su salida. Recuerde:  $y[n] = x[n] * h[n]$

**Respuesta:**

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * h[n] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} h[n-k], \quad \text{porque } x[n] = 0 \quad \forall n < 0 \text{ y } x[n] = 1 \quad \forall n \geq 0 \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4}^{n-k-1} u[n-k-1] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4}^{n-k-1}, \quad \text{porque } u[n-k-1] = 1 \quad \forall n-k-1 \geq 0 \text{ o sea } k \leq n-1 \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{4}^l, \quad \text{haciendo el cambio de variable } l = n-k-1 \\
 &= \frac{1 - (\frac{1}{4})^n}{1 - \frac{1}{4}}, \quad \forall n \\
 y[n] &= \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right), \quad \forall n
 \end{aligned}$$

7. 10 puntos Encuentre la transformada Z unilateral de la señal:  $y[n] = 5x[n-2] - x[n]$ .

**Respuesta:**

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (5x[n-2] - x[n]) z^{-n} \\
 &= 5 \sum_{n=0}^{\infty} x[n-2] z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
 &= 5 (x[-2] + x[-1] z^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x[n-2] z^{-n}) - \mathcal{X}(z) \\
 &= 5 (x[-2] + x[-1] z^{-1} + z^{-2} \sum_{n=2}^{\infty} x[n-2] z^{-(n-2)}) - \mathcal{X}(z) \\
 &= 5 (x[-2] + x[-1] z^{-1} + z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}) - \mathcal{X}(z) \\
 &= 5 (x[-2] + x[-1] z^{-1} + z^{-2} \mathcal{X}(z)) - \mathcal{X}(z) \\
 &= 5x[-2] + 5x[-1] z^{-1} + (5z^{-2} - 1) \mathcal{X}(z)
 \end{aligned}$$