



III. HAFTA

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

Bu bölümde faydalanılan kaynaklar:

Sajjan G. Shjiva , 1998, Introduction to Logic Design, Markel Dekker Inc.

Sayfa: 52-97



BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

► De Morgan Kuralları

- De Morgan kuralları VEDEĞİL ve VEYADEĞİL işlemlerinden elde edilen ve mantık devrelerinde kolaylık sağlayan bir yöntemdir.

$$\boxed{\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B}} \quad \text{and} \quad \boxed{\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B}}$$

- **ÖRNEK:** $(\overline{A \cdot B}) + (\overline{A + B})$ ile verilen boolean ifadesini De Morgan kuralını kullanarak sadeleştiriniz.

1. ifadeye De Morgan kuralı uygulanırsa

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B} = A + \bar{B} \quad \text{burada } \bar{\bar{A}} = A \text{ dır.}$$

İfadesi elde edilir. İkinci ifade ise

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} = A \cdot \bar{B} \text{ buradan}$$

$$(\overline{A \cdot B}) + (\overline{A + B}) = (A + \bar{B}) + A \cdot \bar{B}$$

İfadedeki parantez çıkarılarak $A + A \cdot \bar{B} + \bar{B}$ ifadesi elde edilir.

$$A + A \cdot \bar{B} = A \text{ olduğundan } (\overline{A \cdot B}) + (\overline{A + B}) = A + \bar{B} \text{ olur.}$$

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

Venn Diyagramı:

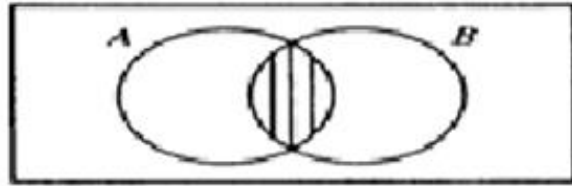
Venn diyagramı boolean değişkenleri arasındaki bağıntıyı şekiller ile gösterme yöntemidir. Bu yöntemde her bir değişken bir daire ile gösterilir. Dairenin içine kalan alan değişkenin kendini, dışında kalan alan ise DEĞİL'ini ifade eder



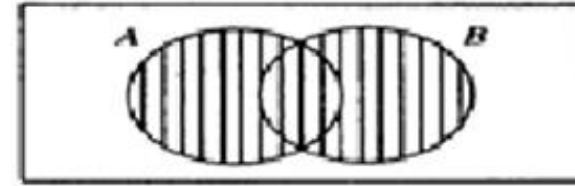
(a) A



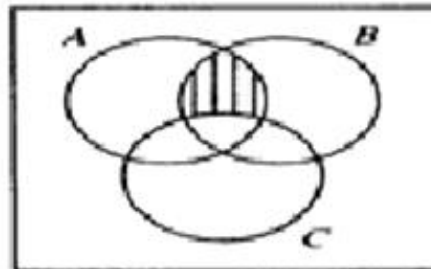
(b) A'



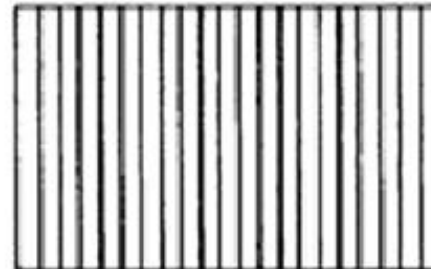
(c) $A \cdot B$
(area common to A and B)



(d) $A + B$



(e) $A \cdot B \cdot C'$

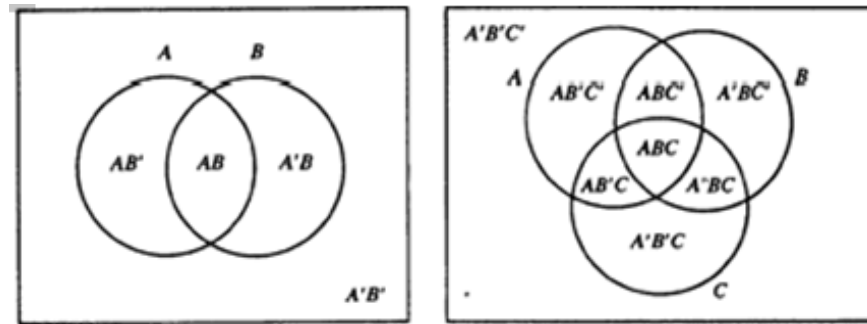


(f) 1

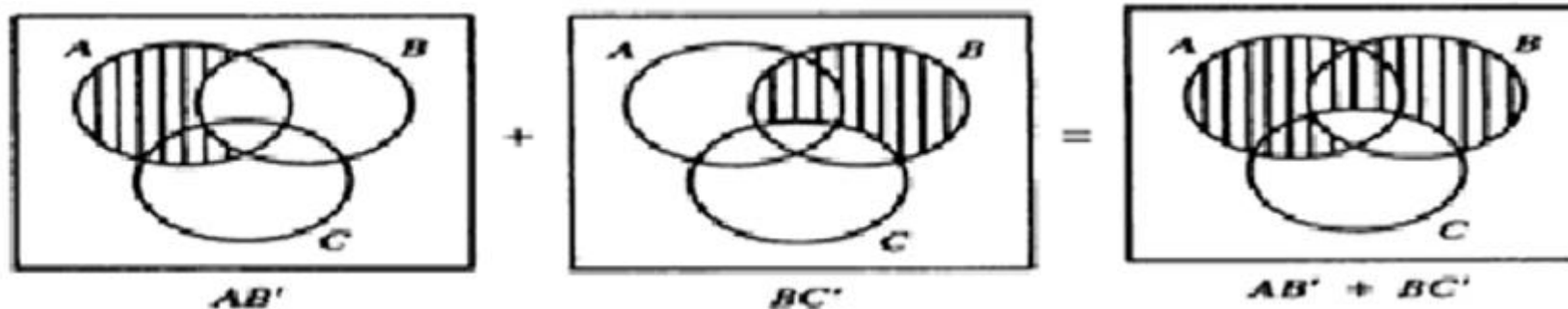
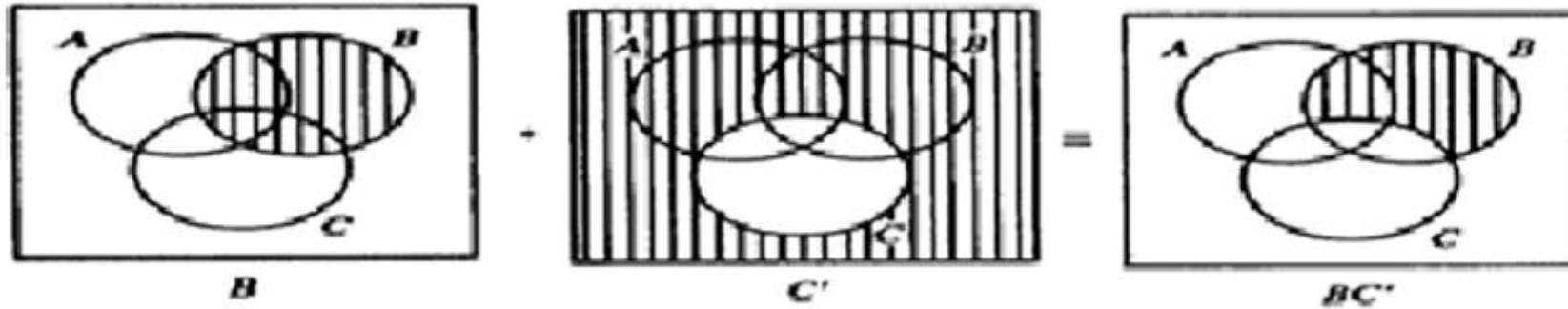
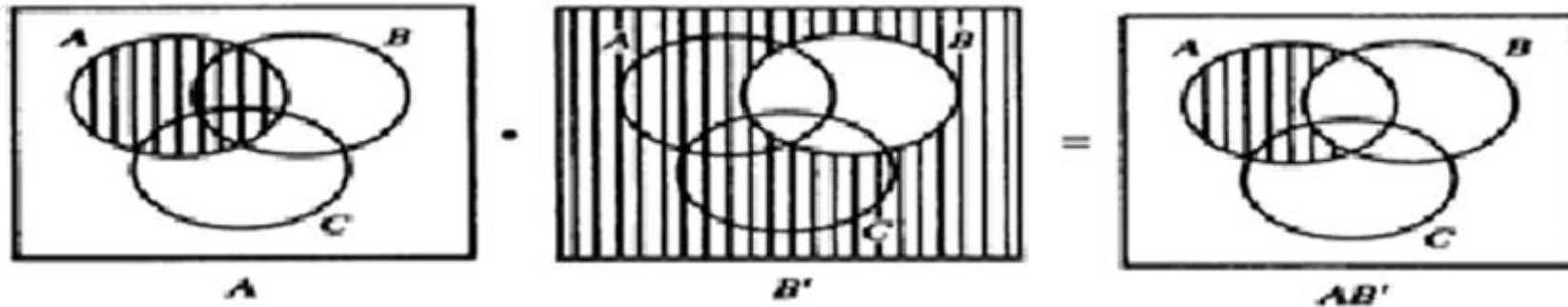


(g) 0

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI



Örnek: $AB' + BC'$ ifadesini Venn diyagramıyla gösteriniz



BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

Temel Açılımlar ve Standart İfadeler

Boolean ifadesinde çarpma terimi VE ifadesine karşılık gelmektedir. ABC' , $A'B'C$ ifadeleri çarpma terimidir. Eğer bir çarpma terimi bütün elemanları veya tümleyenini kapsıyorsa minterm olarak ifade edilir. Toplama terimi ise VEYA işlemine karşılık gelmektedir. $A+B+C'$, $A+B'+C'$ ifadeleri de toplama terimidir. Eğer bir toplama terimi bütün elemanları veya tümleyenini kapsıyorsa maxterm olarak ifade edilir.

Bir boolean ifadesi **minterm “çarpımların toplamı (ÇT)”** veya **maxterm “toplamların çarpımı (TÇ)”** şeklinde ifade edilebilir.

$Q(A, B, C) = AB' + A'C + B'C$ ifadesi çarpımların toplamıdır.

$P(X, Y, Z) = (X + Y')(X' + Y + Z)$ ifadesi toplamların çarpımıdır.

Eğer fonksiyon içindeki çarpma terimlerinin hiç biri diğerini kapsamıyorsa buna normal çarpımların toplamı denir.

$$Q = AB + AC$$

$$Q = X + Y + Z$$

$$P = AB'C + A'CD + AC'D'$$

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

- Eğer fonksiyon içindeki toplama terimlerinin hiç biri diğerini kapsamıyorsa buna da normal toplamaların çarpımı denir.
- $P = (X + Y')(X' + Y + Z')$
- $Q = (A + B')(A' + B + C')(A + B + C)$
- Eğer bir çarpımların toplamı fonksiyonunda her bir çarpma terimi bütün elemanların kendisini veya tümleyenini içeriyorsa buna kanunsal (canonical) çarpımların toplamı denilmektedir.
- $Q = A'B'C + AB'C + A'B'C'$ kanunsal ÇT formunda
- $Q = A'B + ABC + A'C$ kanunsal ÇT formunda değil
- Benzer durum TÇ formundaki bir fonksiyon içinde söylenebilir. Eğer fonksiyondaki çarpma ifadeleri bütün elemanların kendisini veya tümleyenini içeriyorsa buna kanunsal TÇ denmektedir.
- $Q = (A' + B + C')(A + B' + C')(A + B + C)$ Kanunsal TÇ formunda
- $Q = (A' + B)(A + B' + C')(A' + B' + C)$ Kanunsal TÇ formunda değil.

Değişken			Mintermler		Maxtermler	
A	B	C	Terim	İsim	Terim	İsim
0	0	0	$A'B'C'$	m_0	$A+B+C$	M_0
0	0	1	$A'B'C$	m_1	$A+B+C'$	M_1
0	1	0	$A'BC'$	m_2	$A+B'+C$	M_2
0	1	1	$A'BC$	m_3	$A+B'+C'$	M_3
1	0	0	$AB'C'$	m_4	$A'+B+C$	M_4
1	0	1	$AB'C$	m_5	$A'+B+C'$	M_5
1	1	0	ABC'	m_6	$A'+B'+C$	M_6
1	1	1	ABC	m_7	$A'+B'+C'$	M_7

Tablo 4.1. Üç değişkenli bir sistemde oluşabilecek minterm ve maxterm terimleri.

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

➤ ÖRNEK: Verilen doğruluk tablosunu ÇT ve TÇ formunda yazınız.

➤ Doğruluk tablosundan ÇT elde edilirken

1. Fonksiyonun 1 olduğu satırdaki elemanlardan çarpım terimi oluştur.

2. Eğer elemanın değeri 1 ise kendisini 0 ise tümleyenini al.

Şekildeki doğruluk tablosunda fonksiyon 1,3,4,5

Satırlarda 1 değerini almaktadır. 1. satırda C değeri

1 olduğundan kendisi, diğerlerinin tümleyeni alınır. O halde 1. satır $A'B'C$ olacaktır. Diğer satırlarda benzer olarak yapıp bütün çarpma terimleri toplanır.

$$Q = A'B'C + A'BC + AB'C' + AB'C$$

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

Doğruluk tablosundan TÇ elde edilirken

1. Fonksiyonun 0 olduğu satırdaki elemanlardan toplam terimi oluştur.

2. Eğer elemanın değeri 0 ise kendisini 1 ise tümleyenini al.

Şekildeki doğruluk tablosunda fonksiyon 0,2,6,7 satırlarda 0'dır. 0. satırda bütün elemanların değeri 0 olduğundan $A+B+C$ olarak yazılır. Bütün toplam ifadeleri yazıldıktan sonra toplam ifadeleri çarpım olarak birleştirilir.

$$Q = (A + B + C)(A + B' + C)(A' + B' + C)(A' + B' + C')$$

Kanunsal çarpma formundaki bir fonksiyonun her bir çarpma terimi minterm dir. Kanunsal çarpma fonksiyonu mintermlerin toplamı olarak adlandırılır ve $P(A, B, C) = \sum m(1, 3, 4, 5)$ dir.

Kanunsal toplama formundaki bir fonksiyonun her bir toplama terimi de maxterm dır. Kanunsal toplama fonksiyonu mintermlerin çarpımı olarak adlandırılır ve $P(A, B, C) = \prod M(0, 2, 6, 7)$ dir.

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

ÖRNEK: Verilen tabloyu ÇT ve TÇ formunda yazınız.

	A B C	P	Product term (MINTERM)	Sumterm (MAXTERM)
0	0 0 0	1	$A'B'C'$	
1	0 0 1	0		$A + B + C'$
2	0 1 0	0		$A + B' + C$
3	0 1 1	0		$A + B' + C'$
4	1 0 0	1	$AB'C'$	
5	1 0 1	1	$AB'C$	
6	1 1 0	0		$A' + B' + C$
7	1 1 1	0		$A' + B' + C'$

$$P = A'B'C + AB'C' + AB'C$$

$$P = (A + B + C')(A + B' + C)(A + B' + C')(A' + B' + C)(A' + B' + C')$$

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

Minterm toplamları ve Maxterm çarpımları ifadelerinin elde edilmesi

Sadeleştirilmiş olarak verilen bir fonksiyondan mintermler toplamını elde etmek için her çarpma ifadesindeki kayıp değerler $(x+x')$ formunda eklenir ve diğer değişkenler ile VE işlemine tabi tutulur.

ÖRNEK: $F(X, Y, Z) = YZ' + X'$ fonksiyonunu minterm toplamı olarak yazınız.

1. ifadede X değişkeni olmadığından $YZ'(X+X')$ yazılır. Dağılım yapıldığında $YZ'X+YZ'X'$ elde edilir.

2. ifadede Y ve Z bulunmamaktadır. Önce Y sonra Z ekleyelim. $X'(Y+Y') = X'Y+X'Y'$ her bir ifade $(Z+Z')$ ile genişletilerek $X'YZ+X'YZ'+X'Y'Z+X'Y'Z'$ elde edilir. O halde

$$F(X, Y, Z) = XYZ' + X'YZ' + X'YZ + \textcolor{red}{X'YZ'} + X'Y'Z + X'Y'Z'$$

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

- Tekrarlanan terimler çıkarılarak
- $F(X, Y, Z) = XYZ' + X'YZ' + X'YZ + X'Y'Z + X'Y'Z'$ elde edilir.
- Mintermlerin toplamı ifadesinde çarpma terimlerinde değişkenler 1 ile tümleyeni 0 ile gösterilerek satır numaraları bulunur.

$$= \boxed{XYZ' + X'YZ' + X'YZ + X'Y'Z + X'Y'Z'}$$

Minterm kodları

110	010	011	001	000
-----	-----	-----	-----	-----

- Buradan çarpım terimlerinin 0, 1, 2, 3 ve 6 olduğu görülmektedir. Bu yüzden $F(X, Y, Z) = \sum m(0, 1, 2, 3, 6)$ dir.

Maxtermlerin çarpımı formunda verilen bir fonksiyonda kayıp değişkenlerin bulunduğu toplam ifadesine kayıp değişkenin tümleyeni ile çarpımı eklenir.

ÖRNEK: $F(X, Y, Z) = (X + Y')Z'$ ifadesini maxtermlerin çarpımı formunda yazınız.

BÖLÜM 4: BOOLEAN KURALLARI

(a) Kayıp değişkenler eklenerek:

$$n = (X + Y' + ZZ')(Z' + XX' + YY')$$

(b) İfade genişletilerek

$$n = (X + Y' + Z)(X + Y' + Z')(Z' + XX' + Y)(Z' + XX' + Y')$$

$$n = (X + Y' + Z)(X + Y' + Z')(Z' + X + Y)(Z' + X' + Y)(Z' + X + Y')(Z' + X' + Y')$$

(c) Tekrarlanan ifadeleri çıkar:

$$(X + Y' + Z)(X + Y' + Z')(X + Y + Z')(X' + Y + Z')(X' + Y' + Z')$$

Değişkenlere 0 tümleyenine 1 yaz

010 011 001 101 111 Decimal formda 2 3 1 5 7

Bu yüzden, $F = \prod M(1, 2, 3, 5, 7)$