



FİZİK-I DERSİ

BÖLÜM 11: TORK VE AÇISAL MOMENTUM

Ders kaynakları:

1. YOUNG ve FREEDMAN, 12 Baskı, Türkçesi

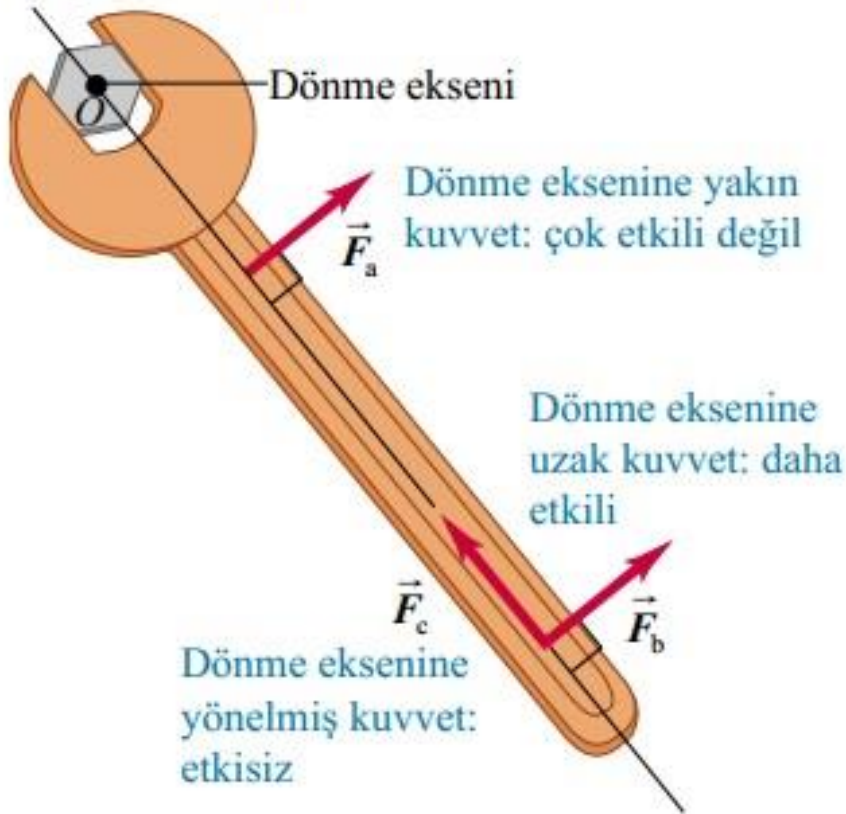
2. Serway Fizik I, Türkçesi (Farklı Baskılar)

Öğrenim Konuları

- Bir kuvvetin oluşturduğu tork ne anlama gelir.
- Bir katı cisme uygulanan net tork cismin dönme hareketini nasıl etkiler.
- Aynı anda hem dönme hem de yerdeğiştirme hareketi yapan katı cismin hareketi bir bütün olarak nasıl incelenir.
- Dönen bir katı cisim için iş ve güç problemleri nasıl çözülür.
- Bir parçacık veya katı cisim için açısal momentum ne anlama gelir.
- Bir sistemin açısal momentumu zamanla nasıl değişir.

Bir cismin üzerine etkiyen kuvvetler, cismin uzayda bir bütün olarak **öteleme hareketi** yapmasına yol açar. Şimdi bir kuvvetin hangi özelliklerinin *dönme hareketinin* oluşumu ve değişiminde belirleyici etkiye sahip olduğunu görelim.

10.1 Bu üç eşit büyüklükteki kuvvetten hangisinin sıkılmış cıvatayı gevşetme olasılığı en fazladır?



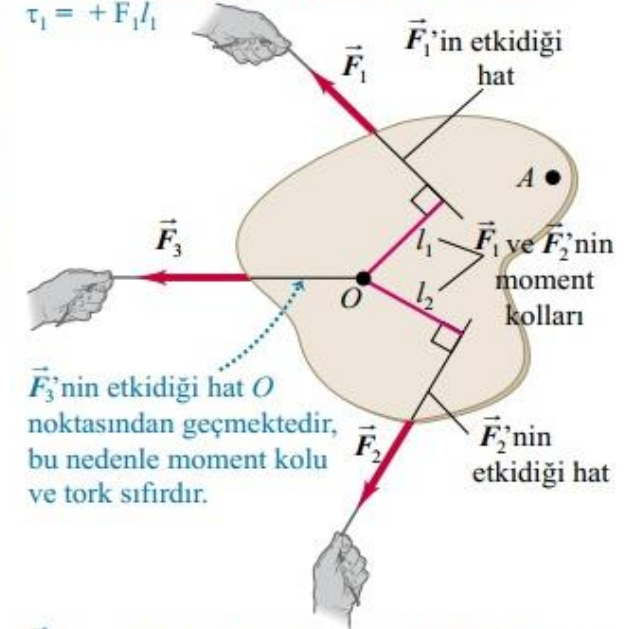
Bir katı cismin dönme hareketini sağlayan veya değiştiren kuvvetin davranışını belirleyen nicelik **tork**ur. Yandaki şekilde \vec{F}_a , \vec{F}_b kuvvetleri O noktasına göre tork uygularken \vec{F}_c uygulayamamaktadır.

Tork'un nasıl hesaplandığı Şekil 10.2'de üç ayrı örnekle gösteriliyor. Şekildeki cisim şekil düzlemine dik ve O noktasından geçen bir eksen etrafında dönebilmektedir. Üç kuvvet, \vec{F}_1 , \vec{F}_2 ve \vec{F}_3 cisim üzerine şekil düzlemi içinde etki etmektedir. Kuvvetlerden birincisi olan \vec{F}_1 'in eğilimi O noktasına göre dönmeyi F_1 büyüklüğünde sağlamaktır. Dönme hareketi ayrıca O noktası ile kuvvetin uygulandığı **etki hattı** (yani, kuvvet vektörünün bulunduğu çizgi) arasındaki l_1 dik mesafesine de bağlıdır. Bu l_1 mesafesine \vec{F}_1 kuvvetinin O noktasına göre **moment kolu** veya **kuvvet kolu** denir. Tork F_1 ve l_1 ile doğru orantılıdır, bu nedenle \vec{F}_1 kuvvetinin O noktasına göre **torku** $F_1 l_1$ çarpımına eşittir. Tork için Yunan alfabesinden τ harfini kullanıyoruz. Genelde, büyüklüğü F olan ve etki çizgisi l mesafesiyle O noktasına dik olan bir kuvvet için tork ifadesi şöyledir;

$$\tau = Fl \quad (10.1)$$

10.2 Bir noktada kuvvetin oluşturduğu tork, kuvvetin büyüklüğü ile kuvvet moment kolunun çarpımıdır.

\vec{F}_1 kuvveti O noktasında saat yönünün tersine dönmeye neden olur, o halde tork pozitifdir. $\tau_1 = +F_1 l_1$



\vec{F}_3 'nin etkidiği hat O noktasından geçmektedir, bu nedenle moment kolu ve tork sıfırdır.

\vec{F}_2 kuvveti O noktasında saat yönünde dönmeye neden olur, o halde tork negatiftir. $\tau_2 = -F_2 l_2$

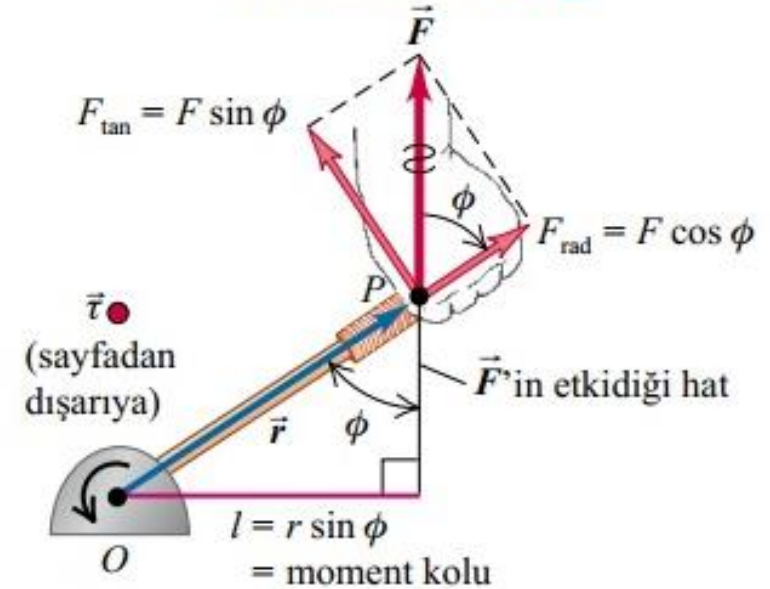
Tork

Şekil 10.3’de P noktasında uygulanan F kuvveti, O noktasına göre \vec{r} konum vektörü ile tanımlanmaktadır. Bu kuvvetin torku üç ayrı biçimde hesaplanabilir:

1. Moment kolu l ’yi bulmak ve $\tau = Fl$ denklemini kullanmak.
2. Konum vektörü \vec{r} ile kuvvet vektörü \vec{F} arasındaki ϕ açısını bulmak; moment kolu $r \sin \phi$ olduğundan, $\tau = rF \sin \phi$ olur.
3. \vec{F} vektörünü, \vec{r} konum vektörü yönünde olan F_{rad} radyal bileşeni cinsinden ve \vec{r} konum vektörüne dik olan F_{tan} teğet (tanjant) bileşeni cinsinden tanımlamak. (Bunu teğet bileşeni olarak tanımlıyoruz, çünkü cismin dönmesi halinde dairesel hareket yapan noktaya etki eden kuvvetin bu bileşeni bu daireye teğet olur.)

10.3 O noktasında \vec{F} kuvvetinin oluşturduğu torku hesaplamamanın üç yolu. Şekilde \vec{r} ve \vec{F} sayfa düzleminde ve tork vektörü $\vec{\tau}$ sayfa düzlemine dik olarak size doğru yönelmiştir.

Torku hesaplamamanın üç yolu:
 $\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\text{tan}} r$



Torku tanımlayan bu üç ifadeyi aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$$\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\text{tan}} r \quad (\text{torkun büyüklüğü}) \quad (10.2)$$

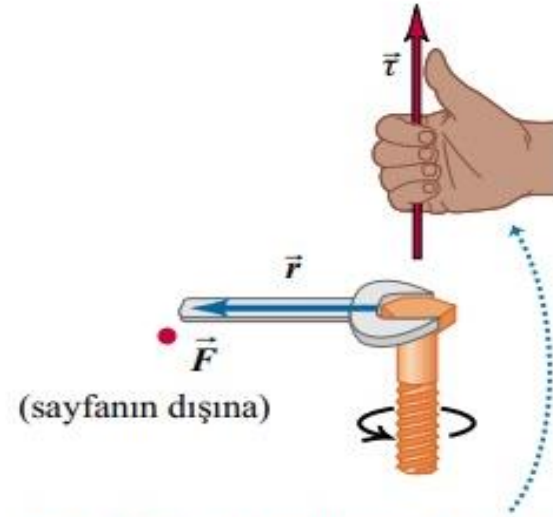
Tork Bir Vektördür

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

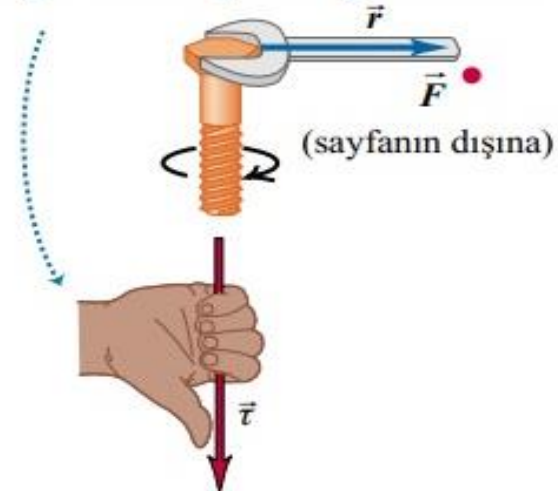
(tork vektörünün tanımı)

(10.3)

10.4 Tork vektörü $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ civatanın eksenini boyunca yönelmiştir ve \vec{r} ve \vec{F} 'nin her ikisine de diktir. Sağ elinizin parmaklarını torkun neden olduğu dönme yönünde kıvrırın.



Sağ elinizin parmaklarını \vec{r} yönünde uzatıp, daha sonra \vec{F} yönünde kıvrırırsanız, başparmağınız $\vec{\tau}$ 'nin yönünü gösterecektir.



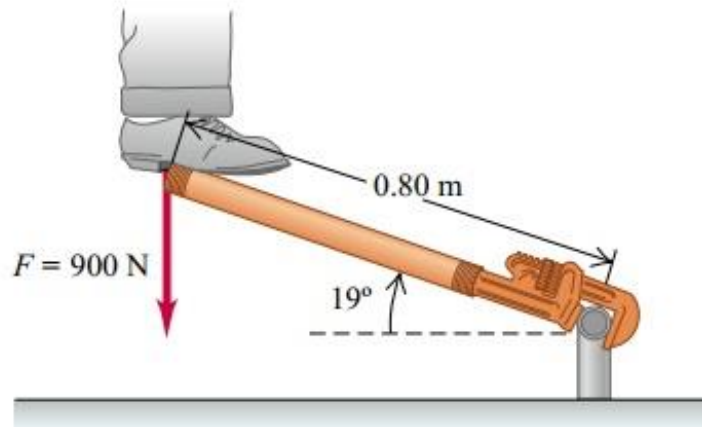
Örnek 1. Bir tork uygulaması

Bir tesisatçı, boru bağlantısını esnetmek için İngiliz anahtarının koluna bir ilave boru takmıştır. Sonra borunun ucuna 900 N olan ağırlığı ile basar. Ağırlığın uygulandığı nokta ve boru bağlantı noktası arasındaki mesafe 0.80 m'dir, anahtar ve ek boru yatayla

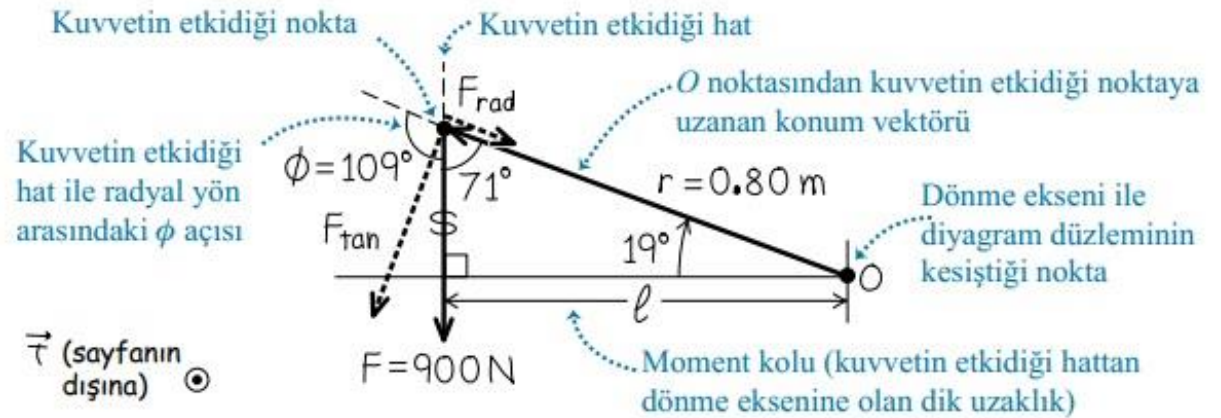
19° açı yapmaktadır (Şekil 10.5a). Tesisatçının boru bağlantısının merkezine göre uyguladığı torkun büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

10.5 (a) Bir tesisatçı anahtara eklediği bir boruya basarak bağlantıyı gevşetmeye çalışıyor. (b) O noktasındaki torku bulmak için vektör diyagramı.

(a) Durumun çizimi



(b) Serbest cisim diyagramı



Örnek 1. Bir tork uygulaması

Bir tesisatçı, boru bağlantısını esnetmek için İngiliz anahtarının koluna bir ilave boru takmıştır. Sonra borunun ucuna 900 N olan ağırlığı ile basar. Ağırlığın uygulandığı nokta ve boru bağlantı noktası arasındaki mesafe 0.80 m'dir, anahtar ve ek boru yatayla

19° açı yapmaktadır (Şekil 10.5a). Tesisatçının boru bağlantısının merkezine göre uyguladığı torkun büyüklüğünü ve yönünü bulunuz.

İŞLEM: Denklem (10.1)'i kullanmak için önce moment kolu l 'yi hesaplarız. Şekil 10.5b'de görüldüğü gibi,

$$l = (0.80 \text{ m}) \sin 109^\circ = (0.80 \text{ m}) \sin 71^\circ = 0.76 \text{ m}$$

Denklem (10.1)'e göre torkun büyüklüğünü,

$$\tau = Fl = (900 \text{ N}) (0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Veya, Denklem (10.2)'den,

$$\tau = rF \sin \phi = (0.80 \text{ m}) (900 \text{ N}) (\sin 109^\circ) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Diğer bir seçenek olarak \vec{F} vektörünün teğet bileşeni olan F_{\tan} 'ı bulabiliriz. Bu bileşen \vec{F} vektörüne (yani ek boruya) dik olarak etkili olur. \vec{F} vektörü yatayla 19° açı yapmaktadır, demek ki \vec{F} 'ye dik vektör dikeyle 19° açı yapar. \vec{F} vektörü dik olduğundan, $F_{\tan} = F (\cos 19^\circ) = (900 \text{ N}) (\cos 19^\circ) = 851 \text{ N}$ olarak bulunur. Buradan torkun değeri

$$\tau = F_{\tan} r = (851 \text{ N}) (0.80 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Şayet sağ el parmaklarınızı \vec{F} vektörü yönünden (Şekil 10.5b düzlemi içinde, sola ve yukarı) \vec{F} vektörünün yönüne (aşağı doğru) kıvrıracak olursanız, sağ el başparmağınızın yönü Şekil 10.5b'deki düzlemin dışına doğrudur. Bu $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ tork vektörünün yönüdür.

DEĞERLENDİRME: Torkun büyüklüğünü veren yanıtımızı üç ayrı şekilde denedik. Torkun yönünü veren sonucumuzun doğruluğunu denemek için Şekil 10.5'de verilen ve O noktasına göre saatin yönünün tersine olan yönde dönme sağlayan kuvveti işaret edebiliriz. Şayet sağ el parmaklarınızı saatin yönüne ters yönde döndürecek olursanız, sağ el başparmağınızın yönü Şekil 10.5'deki düzlemin dışına doğru olur ve bu da gerçekten torkun yönünü verir.

Katı Cisim İçin Tork ve Açısal İvme

. Dönme eksenini z-ekseni olarak seçelim;

birinci parçacığın kütlesi m_1 ve dönme eksenine olan uzaklığı r_1 olsun (Şekil 10.6). Bu parçacık üzerinde etkili olan *net kuvvet* \vec{F}_1 'in bileşenlerinden biri radyal doğrultuda $\vec{F}_{1,rad}$, diğeri cisim döndükçe parçacığın hareket ettiği r_1 yarıçaplı daireye teğet olan $\vec{F}_{1,tan}$ ve üçüncüsü de dönme eksenine doğrultusunda olan \vec{F}_{1z} 'dir. $\vec{F}_{1,tan}$ teğet bileşeni için Newton'un ikinci yasası,

$$F_{1,tan} = m_1 a_{1,tan} \quad (10.4)$$

Birinci parçacığın teğet ivmesini, Denklem (9.14)'ü kullanarak katı cismin açısal ivmesi α_z cinsinden ifade edebiliriz: $a_{1,tan} = r_1 \alpha_z$. Bu bağıntıyı kullanır ve Denklem (10.4)'ün iki tarafını r_1 ile çarparsak,

$$F_{1,tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \quad (10.5)$$

$$\tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

Cisim üzerindeki her parça için bunun gibi bir denklem yazar ve bu denklemleri toplarız;

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \dots = I_1 \alpha_z + I_2 \alpha_z + \dots = m_1 r_1^2 \alpha_z + m_2 r_2^2 \alpha_z + \dots$$

veya

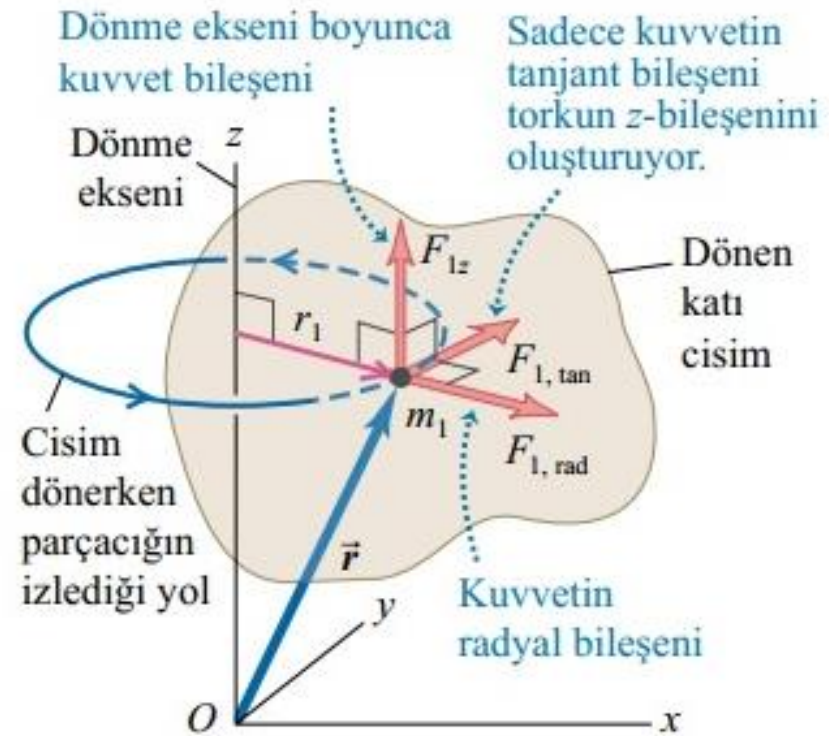
$$\sum \tau_{iz} = (\sum m_i r_i^2) \alpha_z \quad (10.6)$$

Denklem (10.6)'nın sol tarafı bütün parçacıkların dönme hareketi üzerinde etkili olan toplam torktur. Sağ tarafı ise dönme eksenine göre eylemsizlik momenti $I = \sum m_i r_i^2$ ve bunun α_z açısal ivmesinin çarpımıdır. Bir katı cisim söz konusu olduğundan α_z 'nin her parçacık için aynı olduğunu belirtelim. Dolayısıyla, bir bütün olarak bir katı cisim için *dönme hareketi için Newton'un ikinci yasası*,

$$\sum \tau_z = I \alpha_z \quad (10.7)$$

(katı cismin dönme hareketi için Newton'un ikinci yasası)

10.6 Bir katı cisim z-ekseni etrafında dönerken, bir net \vec{F} kuvveti cismin üzerindeki bir parçacığı etkiler. Sadece $F_{1,tan}$ kuvvet bileşeni dönmeyi etkileyebilir, çünkü sadece $F_{1,tan}$ bileşeni O noktasında z-bileşenli bir torka neden olur (dönme eksenini boyunca).



Örnek 2. Sarımı açılan kablo I

Örnek 9.8’de enerji yöntemi ile incelediğimiz durum Şekil 10.9’da yeniden verilmiştir. Bir kablo kendi eksenini etrafında dönebilen düzgün bir silindir etrafına birkaç defa sarılmıştır. Silindirin çapı 0.120 m ve kütlesi 50 kg’dır. Kablo 9.0 N değerinde bir kuvvetle çekiliyor. Kablonun sarımı esnemen ve sıyrılmadan açılıyorsa, ivmesi nedir?

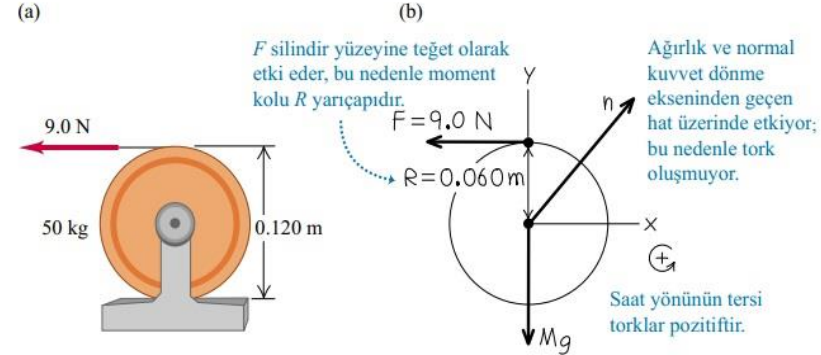
TASARLAMA: Kablo çekildiği zaman silindir saat yönünün tersine döner, saatin tersi yönündeki dönmeyi pozitif alacağız. Silindirin kütle merkezi sabit olduğundan üzerine etkiyen net kuvvet sıfırdır (Şekil 10.9b). Silindir yatağı tarafından uygulanan ağırlık (büyüklüğü Mg) ve normal kuvvet (büyüklüğü n) dönme eksenini boyunca etkilidir. Bu nedenle, ağırlık ve normal kuvvet bu eksene göre bir tork oluşturmazlar. Dönme eksenine göre olan tork sadece F kuvvetinden kaynaklanır.

İŞLEM: F kuvvetinin moment kolu silindirin yarıçapı R ’ye eşittir: $l = R = 0.060$ m, F kuvvetinin neden olduğu tork $\tau_z = FR$ ’dir. (Bu

tork saat yönünün tersi bir dönmeye neden olduğundan pozitiftir.) Örnek 9.8’den, silindirin dönme eksenine göre eylemsizlik momenti $I = \frac{1}{2}MR^2$ ’dir. Bu nedenle, Denklem (10.7) silindirin *açıl-sal* ivmesini verir:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0 \text{ N})}{(50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})} = 6.0 \text{ rad/s}^2$$

10.9 (a) Silindir ve kablo. (b) Silindir için serbest cisim diyagramı.



(Birimlerin doğru olduğundan emin olunuz. Bir radyan boyutsuz nicelik olduğundan, sonucumuza “rad” ekleyebiliriz.)

Kablonun *doğrusal* ivmesini bulmak için, kinematik bir bağıntıya ihtiyacımız vardır. Kısım 9.3’te silindirden boşalan kablonun ivmesinin, silindirin yüzeyinde kablonun teğet olduğu bir noktanın ivmesinin teğet bileşeni ile aynı olduğuna işaret etmiştik. İvmenin bu teğet bileşeni Denklem (9.14) ile verilir:

$$a_x = R\alpha = (0.060 \text{ m})(6.0 \text{ rad/s}^2) = 0.36 \text{ m/s}^2$$

DEĞERLENDİRME: Kablonun 2.0 m çekildikten sonraki süratını bulmak için, bu sonucu Bölüm 2’deki bir denklem ile beraber kullanabilir misiniz? Deneyiniz ve burada bulduğunuz sonucu Örnek 9.8’deki iş ve enerji kavramlarıyla bulduğumuz hız ile karşılaştırınız.

Katı Cismin Hareketli Eksene Göre Dönmesi

Sabit eksene göre olan dönme hareketinin dinamiği analizini dönme ekseninin hareket ettiği durumlara genişletebiliriz. Bu gibi durumlarda, katı cismin hareketi **birleşik öteleme ve dönme** hareketidir. Böyle durumları temel özelliği, katı cismin olası her hareketinin *kütle merkezinin öteleme hareketi ile kütle merkezinden geçen eksene göre cismin dönme hareketinin* birleşimi olmasıdır. Bu durum, kütle merkezinin ivmelenmesi (yani hiçbir eylemsiz referans sisteminde durağan olmaması) halinde doğrudur. Şekil 10.11 havaya fırlatılmış bir sopanın böyle bir hareketini gösteriyor. Sopanın kütle merkezi, sanki sopa kütle merkezindeki bir parçacıkmiş gibi parabolik bir eğri çizmektedir. Yamaçtan yuvarlanan bir balon, ipin ucunda sarılı bir “yo-yo”nun açılması birleşik öteleme ve dönme hareketi için verilebilecek diğer örneklerdir.

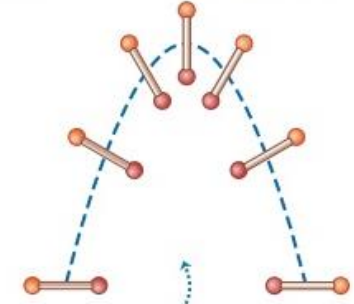
Birleşik Öteleme ve Dönme: Enerji İlişkisi

Bir katı cismin hareketinin daima kütle merkezinin öteleme ve kütle merkezinden geçen eksene göre dönme hareketlerine ayrılabilir olmasının kanıtı bu kitabın amacı dışındadır. Ancak bunun aynı anda dönme ve öteleme hareketi yapan bir katı cismin *kinetik enerjisi için* doğru olduğunu gösterebiliriz. Bu durumda katı cismin kinetik enerjisi, kütle merkezinin öteleme hareketiyle bağlantılı kısmı ($\frac{1}{2}Mv_{km}^2$) ile kütle merkezinden geçen eksene göre olan dönme hareketiyle bağlantılı kısmı ($\frac{1}{2}I_{km}\omega^2$)’nın toplamına eşittir:

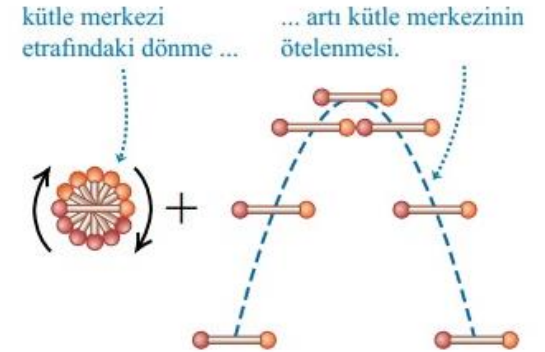
$$K = \frac{1}{2}Mv_{km}^2 + \frac{1}{2}I_{km}\omega^2 \quad (10.8)$$

(aynı anda öteleme ve dönme hareketi yapan katı cisim)

10.11 Bir katı cismin hareketi, kütle merkezinin öteleme hareketi ile kütle merkezi etrafındaki dönmenin birleşimidir.



Bu fırlatılan sopa iki hareketin birleşimini gösteriyor;



Katı Cismin Hareketli Eksene Göre Dönmesi

Kaymadan Yuvarlanma

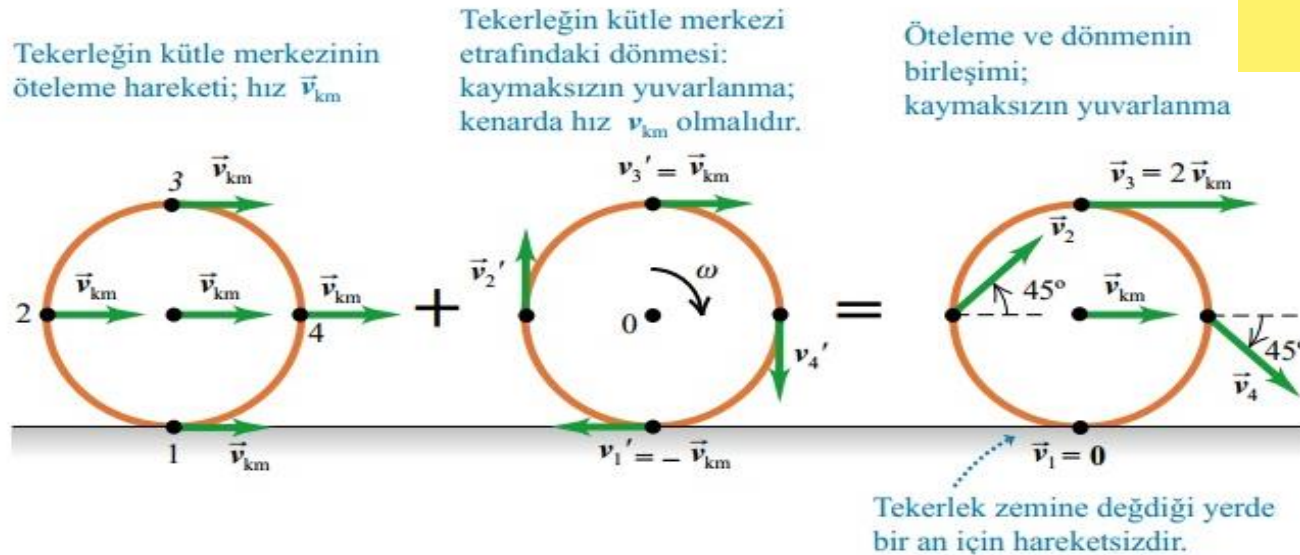
Öteleme ve dönme hareketlerinin birleşik olduğu durumların en önemlisi **kaymadan yuvarlanmadır**; Şekil 10.13'te verilen tekerleğin hareketi buna bir örnektir. Tekerlek simetrik olduğundan kütle merkezi geometrik merkezindedir. Bu hareketi tekerleğin durağan olduğu düzlemin içinde bulunduğu eylemsiz referans sisteminde inceliyoruz. Bu referans sisteminde tekerleğin kaymadan yuvarlanabilmesi için tekerleğin yüzeyle temas eden noktası anlık olarak *durağandır*. Bu nedenle temas noktasının kütle merkezine göre \vec{v}'_i sürati, kütle merkezinin \vec{v}_{km} sürati ile aynı büyüklükte fakat zıt yöndedir. Tekerleğin yarıçapı R ve kütle merkezine göre açısal sürati ω ise, \vec{v}'_i süratinin büyüklüğü $R\omega$ 'dir;

$$v_{km} = R\omega \quad (\text{kaymadan yuvarlanma şartı}) \quad (10.11)$$

10.13 Yuvarlanan bir tekerleğin hareketi, kütle merkezinin öteleme hareketi ile kütle merkezi etrafında tekerleğin dönme hareketinin toplamıdır.

Bir katı cismin hareketi esnasında yüksekliği değişirse, yerçekimi potansiyel enerjisini de göz önünde bulundurmanız gereklidir. Kısım 9.4'de gördüğümüz gibi, kütlesi M olan herhangi bir hacimli cismin (cisim bir katı cisim olsun veya olmasın) kütleçekimi potansiyel enerjisi katı cisim kütle merkezinde bulunduğu varsayılan M kütleli bir parçacığın potansiyel enerjisi ile aynıdır. Yani,

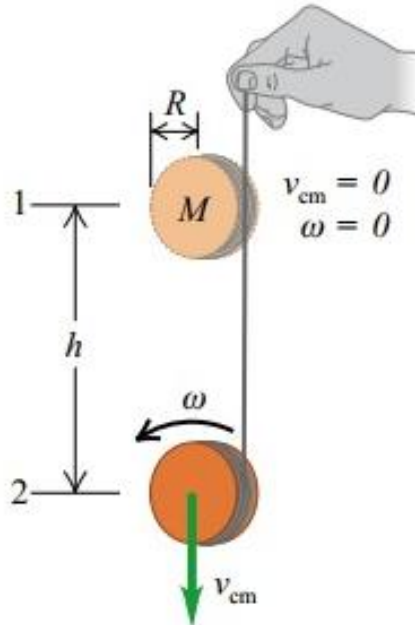
$$U = Mgv_{km}$$



Örnek 4. Basit bir yo-yo'nun sürati

Basit bir “yo-yo” oyuncakı M kütleli ve R yarıçaplı bir katı silindirin etrafına bir sicimin birkaç defa sarılmasıyla yapılmıştır (Şekil 10.5). Sicimin bir ucunu kararlı biçimde sabit tutarak silindir sıfır başlangıç sürati ile serbest bırakılır. Silindir aşağı doğru dönerek düşerken, sarılmış haldeki sicim sıyrılmadan ve gerilmeden açılır. Enerjinin korunumu ilkesinden hareketle, h mesafesi kadar düşen silindirin kütle merkezinin v_{cm} süratini bulunuz.

10.15 Basit bir yo-yo'nun süratinin hesaplanması.



TASARLAMA: Sistemin potansiyel enerjileri $U_1 = Mgh$ ve $U_2 = 0$ 'dır. Sicim kütsüz olduğundan kinetik enerjiye sahip değildir. Silindirin başlangıç konumundaki kinetik enerjisi $K_1 = 0$ olup sonuç konumundaki kinetik enerjisi Denklem (10.8) ile verilir. Silindir sicimden kaymadığından eylemsizlik momenti $I = MR^2/2$ ve açısal sürati $\omega = v_{km}/R$ 'dir.

İŞLEM: Denklem (10.8)'in yardımıyla, silindirin nokta 2'deki kinetik enerjisi,

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{km}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{km}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv_{km}^2$$

Bu kinetik enerji yo-yo'nun dönmeden v_{km} süratiyle aşağı düşmesi halindeki kinetik enerjisinin 1.5 katına eşittir. Toplam kinetik ener-

jinin üçte-ikisi ($\frac{1}{2}Mv_{km}^2$) öteleme ve üçte-biri ($\frac{1}{4}Mv_{km}^2$) dönme kinetik enerjisidir. Buradan, mekanik enerjinin korunum ilkesine göre,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{km}^2 + 0$$

ve

$$v_{km} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

DEĞERLENDİRME: Bu sonuç serbest düşen bir cismin $\sqrt{2gh}$ süratinden daha küçüktür, çünkü potansiyel enerjinin üçte-biri silindir düşerken dönme kinetik enerjisine dönüşmüştür.

Örnek 5. Yuvarlanan katı cisimlerin yarışı

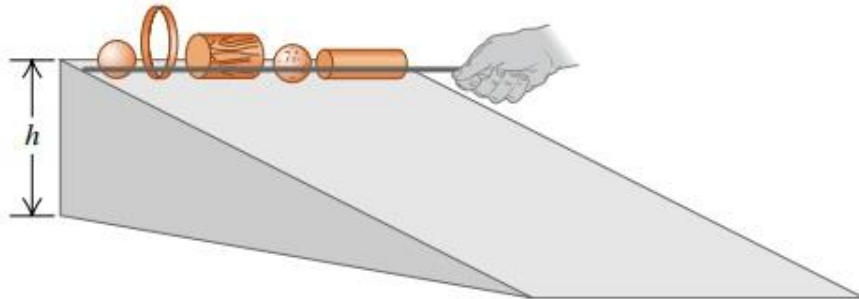
Bir fizik dersinde deneme olarak, eğik düzlemin tepesinden ilk hareketsiz olarak bırakılan farklı biçimdeki yuvarlak cisimlerin aşağı doğru yuvarlanmaları karşılaştırılmaktadır (Şekil 10.6). Hangi biçimde olan katı cisim eğik düzlemin tabanına önce varır?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Katı cisimlerin eğik düzlem üzerinde kayması söz konusu olmadığından, enerjinin korunumu ilkesini tekrar kullanabiliriz. Cisimler kaymadan yuvarlanırsa, kinetik sürtünme herhangi bir iş yapmaz. Ayrıca, yuvarlanmanın yer aldığı yüzeyin ve cisimlerin tamamen katı olmaları halinde, Kısım 5.3'te tanımladığımız yuvarlanma sürtünmesinin etkilerini de ihmal edebiliriz. (Bu kısmın ilerisinde, bunun nedenini açıklayacağız.)

TASARLAMA: Kütlelerin her biri h yüksekliğindeki eğik düzlemin tepesinden sıfır başlangıç süratiyle harekete başladıklarından, $K_1 = 0$, $U_1 = Mgh$ ve $U_2 = 0$. Eğik düzlemin tabanındaki kinetik enerji Denklem (10.8) ile verilir. Cisimler kaymadan yuvarlanıyorsa, açısal hızları $\omega = v_{km}/R$ ile verilir. Tablo 2'de verilen bütün yuvarlak cisimlerin kütle merkezlerinden geçen eksene göre eylemsizlik momentlerini $I_{km} = cMR^2$ olarak ifade edebiliriz; burada c bir veya birden küçük sabit

10.16 Hangi cisim rampada daha hızlı yuvarlanır ve niçin?



bir sayı olup katı cismin geometrik biçimine bağlıdır. Hedef değişkenimiz katı cismin eğik düzlemin tabanına vardığında en yüksek sürat ulaşmasını sağlayacak olan c sabitini bulmaktır.

İŞLEM: Enerjinin korunumu ilkesinden,

$$\begin{aligned} K_1 + U_1 &= K_2 + U_2 \\ 0 + Mgh &= \frac{1}{2}Mv_{km}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{km}}{R}\right)^2 + 0 \\ &= \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{km}^2 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, eğik düzlemin tabanındaki sürat,

$$v_{km} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$

DEĞERLENDİRME: Bu gerçekten çarpıcı bir sonuç; cismin kütle merkezinin sürati cismin M kütlesine veya R yarıçapına bağlı değildir. Düzgün kütle dağılımına sahip olan bütün silindirler, aynı c sabitine sahip olduklarından, kütleleri ve çapları eşit olmamasına rağmen eğik düzlemin tabanında süratleri aynıdır. Düzgün kütle dağılımına sahip bütün katı küreler ve diğer cisimlerin de eğik düzlem tabanındaki süratleri aynıdır. c sabitinin değeri ne kadar küçük olursa, katı cismin eğik düzlemin tabanındaki (veya eğik düzlem boyunca herhangi bir noktadaki) sürati o kadar yüksek olur. Küçük c -sabitli kütleler her zaman büyük c -sabitli cisimlerden daha önde hareket ederler; çünkü bunların kinetik enerjilerinin çok küçük miktarı dönme hareketi için ve büyük bir kısmı ise öteleme hareketi için kullanılır. Tablo 9.2'deki c -değerlerine gelince, yarışı önde bitirme sırası şöyledir: herhangi bir katı küre, herhangi bir katı silindir, herhangi bir ince duvarlı içi boş küre ve herhangi bir ince duvarlı içi boş silindir.

Birleşik Öteleme ve Dönme Hareketi: Dinamik

Birleşik öteleme ve dönme hareketi yapan bir katı cismin hareketini dinamik ilkelelerini kullanarak da inceleyebiliriz. Kısım 8.5’de gördüğümüz gibi, toplam kütlesi M olan bir katı cisim için kütle merkezinin \vec{a}_{km} ivmesi gerçek cisme etkiyen bütün dış kuvvetlerin üzerine etkili olduğu M kütleli bir noktasal cismin ivmesi ile aynıdır:

$$\sum \vec{F}_{dış} = M\vec{a}_{km} \quad (10.12)$$

Kütle merkezine göre olan dönme hareketi, Newton’un dönme hareketi için geçerli olan ikinci yasası Denklem 10.7 ile açıklanabilir:

$$\sum \tau_z = I_{km} \alpha_z \quad (10.13)$$

Burada I_{km} kütle merkezinden geçen dönme eksenine göre eylemsizlik momenti ve $\sum \tau_z$ ise bu eksene göre olan bütün dış torkların toplamıdır. Denklem (10.13)’ün öteleme hareket yapan bir katı cisme uygulanabilirliği hemen görülmeyebilir; bilindiği gibi, Kısım 10.2’de $\sum \tau_z = I\alpha_z$ ifadesini dönme ekseninin kararlı olduğunu varsayarak elde etmiştik. Ancak, Denklem (10.13) aşağıdaki iki koşulun yerine getirildiği takdirde *dönme ekseninin hareket etmesi* halinde de geçerlidir:

1. Kütle merkezinden geçen dönme ekseninin simetri eksen olması.
2. Dönme ekseninin yön değiştirmemesi.

Birçok dönme hareketi bu koşullar altında olur (Şekil 10.17). Hareketli olan bu dönme ekseninin eylemsiz referans sisteminde *durağan olmadığı* dikkatinizden kaçmamalıdır.

10.17 Bisiklet tekerleğinin eksen tekerleğinin kütle merkezinden geçer ve bir simetri eksenidir. Bu nedenle tekerleğin hareketi Denklem (10.13)’teki tanıma uyar ve bisikletin bir yana eğilmesine ya da devrilmesine engel olur (bu durum eksenin yöneliminin değişmesi demektir).



Örnek 7. Kaymadan yuvarlanan kürenin ivmesi

Katı küre şeklindeki bir bowling topu Şek. 10.19a'da görüldüğü gibi rampa boyunca kaymadan yuvarlanmaktadır. Rampa eğiktir ve yatayla β açısı yapar. Topun ivmesini ve top üzerine etkiyen sürtünmenin büyüklüğünü bulunuz. Bowling topunu bir katı küre gibi düşününüz ve üzerindeki delikleri ihmal ediniz.

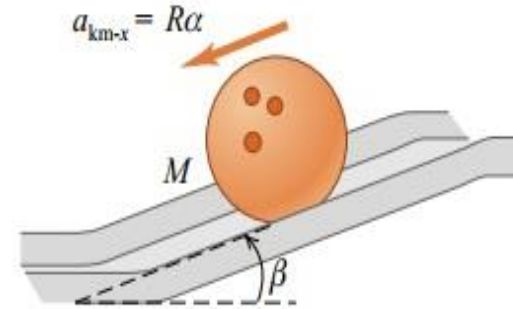
ÇÖZÜM

BELİRLEME: Hedef değişkenlerimiz topun kütle merkezinin ivmesi ve sürtünme kuvvetinin büyüklüğüdür. Şekil 10.19b kütle merkezine göre sadece sürtünme kuvvetinin etkidiğini gösteriyor.

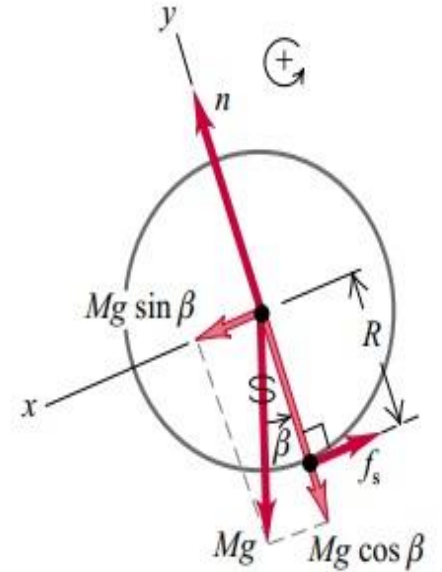
TASARLAMA: Örnek 10.6'da olduğu gibi öteleme hareketini tanımlamak için Denklem (10.12)'yi ve dönme hareketini tanımlamak için Denklem (10.13)'ü kullanabiliriz.

10.19 Bir rampadan aşağı yuvarlanan bowling topu.

(a) Bowling topu



(b) Bowling topu için serbest cisim diyagramı



İŞLEM: Tablo 9.2'den katı kürenin eylemsizlik momentinin $I_{km} = \frac{2}{5}MR^2$ olduğunu biliyoruz. Öteleme hareketini ve kütle merkezinden geçen eksene göre dönme hareketini tanımlayan denklemler sırasıyla,

$$\sum F_x = Mg \sin \beta + (-f) = Ma_{km-x} \quad (10.17)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{km} \alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2 \right) \alpha_z \quad (10.18)$$

Toplar kaymadan yuvarlanıyorsa kinematik denklemimiz Örnek 10.6'daki ile aynıdır; $a_{km-x} = R\alpha_z$. Bu ifadeyi kullanarak α_z 'yi Denklem (10.1)'den yok edebiliriz:

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{km-x}$$

Bu denklem ve Denklem (10.17), a_{km-x} ve f bilinmeyenlerini bulmak için gereklidir. Denklem (10.17) çözülerek f bulunur ve sonucu f 'yi yok etmek için yukarıdaki denklemde yerine koyarsak a_{km-x} için aşağıdaki sonucu buluruz;

$$a_{km-x} = \frac{5}{7}g \sin \beta$$

Bu ivme bowling topunun, Örnek 5.10'daki sandık gibi (Kısım 5.1), eğik düzlemde sürtünmesiz kayması halindeki ivmesinin (5/7) katıdır. Sonuç olarak, ivmeyi Denklem (10.17)'de yerine koyar ve f için çözersek:

$$f = \frac{2}{7}Mg \sin \beta$$

DEĞERLENDİRME: Bowling topu rampa üzerindeki anlık değme noktasında kaymadığından, sürtünme kuvveti f bir *statik* sürtünme kuvvetidir; kaymayı engellemekte ve topun açısal ivmesini belirlemektedir. Topun kaymasını engelleyen asgari statik sürtünme katsayısını (μ_s) veren ifadeyi bulabiliriz. Normal kuvvet $n = Mg \cos \beta$ 'dir. Maksimum statik sürtünme kuvveti $f_s = \mu_s n$ olduğundan, sürtünme katsayısı en azından

$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg \sin \beta}{Mg \cos \beta} = \frac{2}{7} \tan \beta$$

kadar büyük olmalıdır. Rampa çok küçük β açısı kadar eğilirse, statik sürtünme katsayısının (μ_s) sadece çok küçük bir değeri topun rampa üzerinde kaymasını engellemek için yeterli olacaktır. Açı arttıkça gerekli olan μ_s değeri de tahmin edeceğimiz gibi artacaktır. Bowling topu rampa üzerinde kaymaya başladığı anda Denklem (10.17) ve (10.18) hâlâ geçerlidir, ama artık $v_{km-x} = R\omega_z$ veya $a_{km-x} = R\alpha_z$ olduğunu söyleyemeyiz; şimdi üç bilinmeyenimiz (a_{km-x} , α_z ve f) için sadece iki denklem vardır. Bu durumda kaymayı da içeren bir yuvarlama problemi söz konusu olacağından kinetik sürtünmeyi hesaba katmak zorundayız (Bkz. İddialı Problem 10.101).

Şayet bowling topu rampa üzerinde dikey olarak h kadar aşağı yuvarlanırsa, rampa boyunca olan yerdeğiştirme $h/\sin \beta$ kadar olur. Bowling topunun rampanın tabanına ulaştığı andaki süratinin $v_{km} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ olduğunu gösterebilirsiniz; sonucunuz Örnek 10.5'te $c = 2/5$ kullanarak bulduğunuz sonuçla aynı olmalıdır.

Bowling topu rampa boyunca *yukarı doğru* yuvarlanarak çıkıyorsa, sürtünme kuvveti Şekil 10.19b'de olduğu gibi yukarı doğru yönelir.

Dönme Hareketinde İş ve Güç

Bir çocuğun bir oyun bahçesinde Şekil 10.21a'da görülen atlıkarıncayı iterek koşması gibi, bir teğet kuvvet \vec{F}_{tan} 'ın dönen bir diskin yüzeyine etkidiğini varsayalım. Disk çok küçük dt zaman aralığında sabit bir eksen etrafında çok küçük $d\theta$ açısıyla döner (Şekil 10.21b). Diskin yüzeyinde bulunan herhangi bir nokta ds yolu aldığı anda \vec{F}_{tan} teğet kuvveti tarafından yapılan dW işi, $dW = F_{\text{tan}} ds$ ile verilir. Şayet $d\theta$ açısı radyan cinsinden ölçülürse $ds = R d\theta$ 'dır ve

$$dW = F_{\text{tan}} R d\theta$$

Burada \vec{F}_{tan} R , teğet kuvvet \vec{F}_{tan} 'den kaynaklanan τ_z torkudur, o halde,

$$dW = \tau_z d\theta \quad (10.19)$$

θ_1 'den θ_2 'ye kadar olan açısal yerdeğiştirme sırasında torkun yaptığı toplam iş,

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta \quad (\text{torkun yaptığı iş}) \quad (10.20)$$

Açının $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ kadar sonlu bir değişimi sırasında tork *sabit* kalıyorsa,

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \quad (\text{sabit torkun yaptığı iş}) \quad (10.21)$$

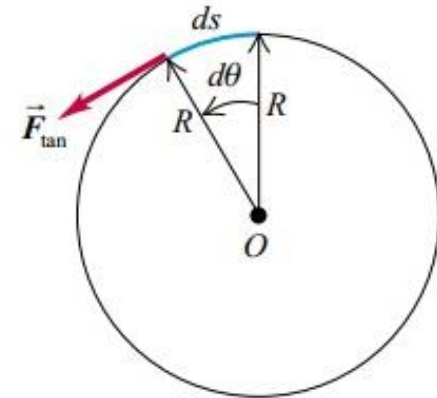
Sabit bir torkun yaptığı iş, tork ve açısal yerdeğiştirmenin çarpımına eşittir. Tork newton-metre ($\text{N} \cdot \text{m}$) cinsinden ve açısal yerdeğişim de radyan (rad) cinsinden ifade edilirse, yapılan iş joule (J) cinsinden ifade edilir. Burada Denklem (10.21) Bölüm 6'daki Denklem (6.1)'in dönen cisimler için benzeridir. Ayrıca $W = Fs$ ve Denklem (10.20), Denklem (6.7)'nin yani doğrusal bir yerdeğiştirmede bir kuvvetin yaptığı işi veren $W = \int F_x dx$ ifadesinin benzeridir.

10.21 Dönen bir cisme uygulanan bir teğetsel kuvvet iş yapmaktadır.

(a)



(b) Atlıkarıncanın üstten görünüşü



Dönme Hareketinde İş ve Güç

$$\tau_z = I\alpha_z \quad \longrightarrow \quad \tau_z d\theta = (I\alpha_z) d\theta = I \frac{d\omega_z}{dt} d\theta = I \frac{d\theta}{dt} d\omega_z = I\omega_z d\omega_z$$

Burada τ_z net tork olduğundan, Denklem (10.20)'deki integral dönen katı cisim üzerinde yapılan *toplam* işe eşittir. Bundan dolayı bu denklem

$$W_{\text{top}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z d\omega_z = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 \quad (10.22)$$

olur. Bir katı cismin dönme kinetik enerjisindeki değişim, cisim üzerine etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı toplam işe eşittir (Şekil 10.22). Bu denklem, bir parçacık için geçerli olan iş-kinetik enerji teoremini tanımlayan Denklem (6.13)'ün benzeridir.

Dönen katı cisim üzerine etkiyen torkun yaptığı iş ile bağlantılı olan *güç* hakkında ne söyleyebiliriz? Denklem (10.19)'un her iki yanını açısal yerdeğişimin meydana geldiği dt zaman aralığı ile böldüğümüzde,

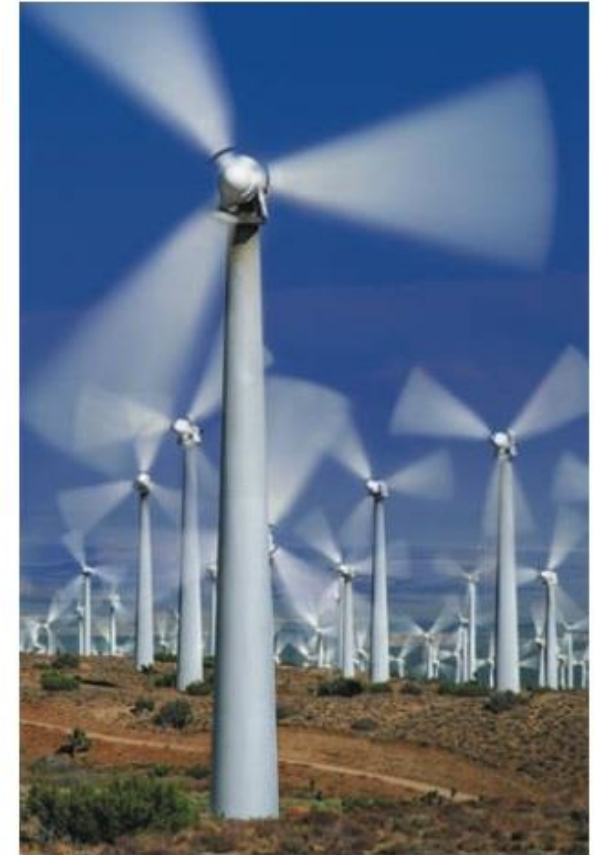
$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

dW/dt iş yapma miktarı veya güç P ve $d\theta/dt$ ise ω_z açısal hız olduğundan,

$$P = \tau_z \omega_z \quad (10.23)$$

Tork τ_z (bir dönme eksenine göre), ω_z açısal süratiyle dönen katı cisim üzerine etkiyorsa bu torkun gücü (iş yapma miktarı) τ_z ve ω_z 'nin çarpımına eşittir. Bu sonuç, Kısım (6.4)'te öteleme hareketi yapan bir parçacık için geliştirdiğimiz $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ifadesinin dönme hareketi yapan katı cisim benzeridir.

10.22 Bir rüzgâr türbininin dönme kinetik enerjisi, türbini döndürmek için yapılan toplam işe eşittir.



Örnek 8. Motor gücü ve tork

Bir otomobilin çıkış gücü 6 000 rpm'de 200 hp olarak tanıtılmıştır. Motorun torku nedir?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Bu örnek güç, açısal hız ve hedef değişken olan tork arasındaki ilişkiyi sorguluyor.

TASARLAMA: Motorun çıkış gücü P ve açısal sürati ω_z verilmiştir, motorun torkunu Denklem (10.23)'ten bulabiliriz.

İŞLEM: İlk olarak, gücü watt ve açısal sürati rad/s cinsinden ifade etmemiz gerekiyor:

$$P = 200 \text{ hp} = 200 \text{ hp} \left(\frac{746 \text{ W}}{1 \text{ hp}} \right) = 1.49 \times 10^5 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= 6000 \text{ dev/dak} = \left(\frac{6000 \text{ dev}}{1 \text{ dak}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ dev}} \right) \left(\frac{1 \text{ dak}}{60 \text{ s}} \right) \\ &= 628 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Denklem (10.23)'ten,

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1.49 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{628 \text{ rad/s}} = 237 \text{ N} \cdot \text{m}$$

DEĞERLENDİRME: Bu büyüklükteki torku 0.25 m uzunluğundaki bir İngiliz anahtarı kullanarak ve 948 N (213 lb) kadar bir kuvveti anahtar kolunun ucuna uygulayarak elde edebilirsiniz. Bunu yapabilir misiniz?

Örnek 9. Gücün torktan hesaplanması

Bir elektrik motoru şaftı üzerinde monte edilmiş bir bileği taşı üzerine $10 \text{ N} \cdot \text{m}$ büyüklüğünde sabit bir tork uygulamaktadır. Taşın şafta göre eylemsizlik momenti $20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 'dir. Sistem durağan halinden harekete başladığında motorun 8.0 saniyede yaptığı işi ve bu süre sonundaki kinetik enerjiyi bulunuz. Motor tarafından aktarılan ortalama güç nedir?

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Tork sabit olduğundan bileği taşı z-ekseni yönünde sabit bir α_z açısal ivmeye sahiptir. Eğer α_z açısal ivmesinin değerini bulabilirsek, taşın 8.0 saniye içinde döndüğü $\Delta\theta$ açısal yolunu [bu bize Denklem (10.21)'den yapılan W işini verir] ve bu zamandaki ω_z açısal süratını [bu da bize K kinetik enerjisini verir] bulabiliriz.

Daha sonra, yapılan dW işini dt zaman dilimine bölerek P_{ort} ortalama gücü buluruz.

TASARLAMA: Newton'un dönme hareketi için geçerli olan ikinci yasasını ($\sum \tau_z = I\alpha_z$) kullanarak α_z açısal ivmesini bulabiliriz. Bu verilerin ışığı altında, $\Delta\theta$ ve ω_z yi bulmak için Kısım 9.2'deki kinematik denklemleri kullanabilir ve bu hesaplamalardan da W , K ve P_{ort} bulunur.

İŞLEM: $\sum \tau_z = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$ (tork sadece motordan kaynaklanıyor) ve $I = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ verilmiştir; $\sum \tau_z = I\alpha_z$ 'dan α_z açısal ivme 5.0 rad/s^2 olarak bulunur. Denklem (9.11)'den sistemin 8.0 saniyede döndüğü toplam açı,

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 160 \text{ rad}$$

ve tork'un yaptığı toplam iş,

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10 \text{ N} \cdot \text{m})(160 \text{ rad}) = 1600 \text{ J}$$

olarak bulunur. Denklem (9.7) ve (9.17)'den açısal hız ve kinetik enerjinin $t = 8.0$ saniyedeki değeri,

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s}) = 40 \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(40 \text{ rad/s})^2 = 1600 \text{ J}$$

olarak bulunur. Başlangıç kinetik enerjisi sıfırdır, o halde yapılan iş kinetik enerjideki artışa eşittir [Bkz. Denklem (10.22)].

Ortalama güç ise,

$$P_{\text{ort}} = \frac{1600 \text{ J}}{8.0 \text{ s}} = 200 \text{ J/s} = 200 \text{ W}$$

DEĞERLENDİRME: Ortalama güç için bulduğumuz cevabın doğruluğunu $P = \tau_z \omega_z$ anlık güç eşitliğinden kontrol edebiliriz. ω_z açısal sürati sürekli olarak arttığından, P de sürekli olarak artar; $t = 0$ s'deki değeri sıfırdır, $t = 8.0$ saniyede $(10 \text{ N} \cdot \text{m})(40 \text{ rad/s}) = 400 \text{ W}$ olur. Açısal hız ve güç zamanla düzgün olarak artmıştır, ortalama güç bu maksimum değer yarısıdır, yani 200 W 'tır.

Açısal Momentum

Bir parçacık momentumunun benzeri, bir vektörel nicelik olan **açısal momentum** ifadesidir ve \vec{L} ile gösterilir. Açısal momentum \vec{L} ile momentum \vec{p} (kolay anlaşılması için genellikle *doğrusal momentum* denir) arasındaki ilişki tork ve kuvvet arasındaki ilişki ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$) ile aynıdır. Sabit m kütesine, \vec{v} süratine, $\vec{p} = m\vec{v}$ doğrusal momentuma sahip ve bir eylemsiz referans sisteminin orijini olan O noktasına göre \vec{r} konum vektörü ile tanımlanan bir parçacık için \vec{L} açısal momentum aşağıdaki gibi tanımlanır:

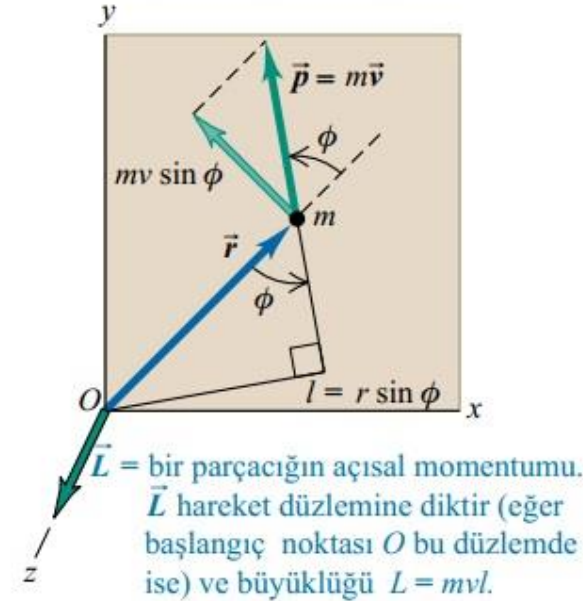
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (\text{bir parçacığın açısal momentumu}) \quad (10.24)$$

Şekil 10.23'te bir parçacık xy -düzleminde hareket ediyor; konum vektörü \vec{r} ve doğrusal momentumu $\vec{p} = m\vec{v}$ şekilde gösterilmiştir. Parçacığın \vec{L} açısal momentumu xy -düzlemine diktir. Vektörel çarpım tanımında kullanılan *sağ el kuralı*, \vec{L} 'nin artı z -yönünde olduğunu gösterir ve büyüklüğü;

$$L = mvr \sin \phi = mvl \quad (10.25)$$

Burada l niceliği \vec{v} 'nin O noktasına olan çizgiye dik mesafesidir. Bu mesafe momentum vektörü için “moment/kuvvet kolu” rolünü almaktadır.

10.23 xy -düzleminde hareket eden m kütleli bir parçacığın açısal momentumu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ 'nin hesaplanması.



Açısal Momentum

Bir net \vec{F} kuvveti herhangi bir parçacığa etki ettiğinde, parçacığın sürati ve momentumu değişir ve dolayısıyla açısal momentumu da değişebilir. Açısal momentum *değişme oranının* net kuvvetin torkuna eşit olduğunu gösterebiliriz. Denklem (10.24)'ün zamana göre türevini alır ve iki fonksiyon çarpımının türevi kuralını kullanırsak:

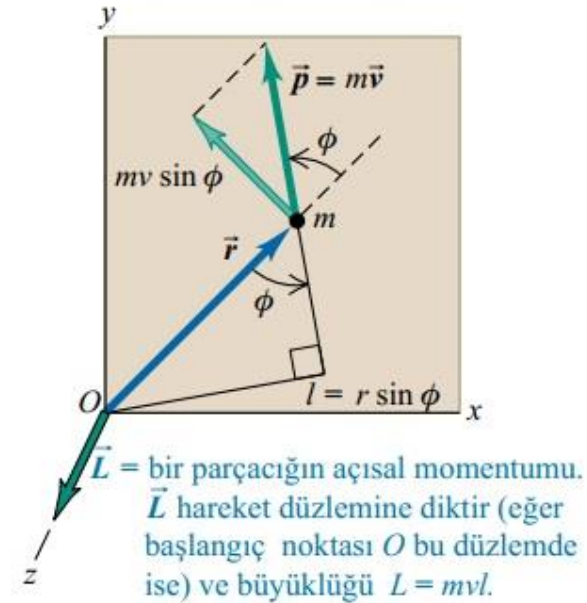
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

İfadenin sağ tarafındaki ilk terim hız vektörü \vec{v} ve türevinin $d\vec{v} = dt$ vektörel çapımı olduğundan sıfırdır. İkinci terimde $m\vec{a}$ 'yı \vec{F} net kuvveti ile yer değiştirirsek,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (\text{net } \vec{F} \text{ kuvveti etkisindeki parçacık için}) \quad (10.26)$$

Bir parçacığın açısal momentumunun zamanla değişme oranı parçacık üzerine etkiyen net kuvvetin torkuna eşittir.

10.23 xy -düzleminde hareket eden m kütleli bir parçacığın açısal momentumu $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$ 'nin hesaplanması.



Bir Katı Cismin Açısal Momentumu

Denklem (10.25) kullanılarak z -ekseni etrafında ω açısal sürati ile dönen bir *katı cismin* toplam açısal momentumu bulunabilir. İlk olarak, xy -düzleminde bulunan bir cismin çok küçük bir dilimini ele alalım (Şekil 10.24). Dilimdeki her bir parçacık merkez etrafında dairesel hareket yapar, \vec{v}_i hız vektörü şekilde görüldüğü gibi daima \vec{r}_i konum vektörüne diktir. Bu nedenle, her parçacık için Denklem (10.25)'te $\phi = 90^\circ$ dir. Merkezden r_i uzaklıkta bulunan m_i kütleli her bir parçacık $v_i = r_i\omega$ süratine sahiptir. Denklem (10.25)'ten, parçacığın açısal momentumunun L_i büyüklüğü,

$$L_i = m_i(r_i\omega) r_i = m_i r_i^2 \omega \quad (10.27)$$

Her parçacığın açısal momentumunun yönü, vektör çarpımı için sağ el kuralı ile tanımlandığı gibi, artı z -ekseni doğrultusundadır.

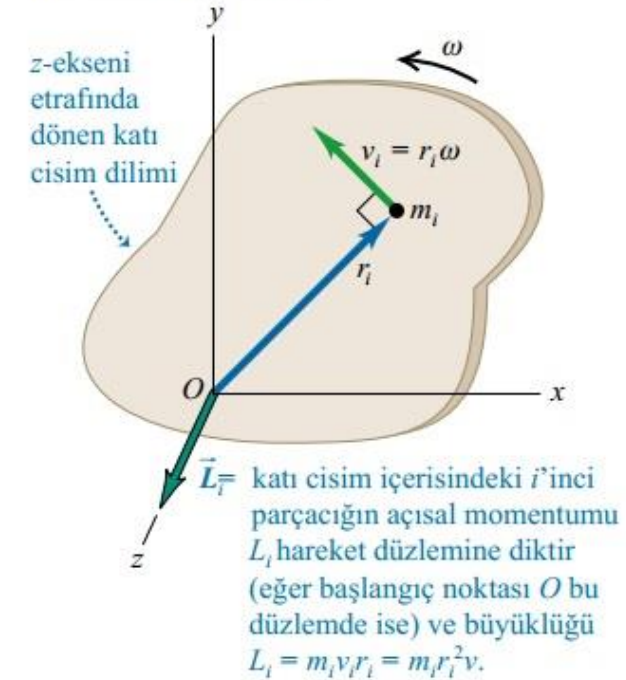
xy -düzleminde bulunan bir katı cisim diliminin *toplam* açısal momentumu dilimde bulunan parçacıkların L_i açısal momentumlarının toplamına eşittir:

$$L = \sum L_i = (\sum m_i r_i^2) \omega = I\omega$$

Kısım 9.1 sonunda incelediğimiz gibi, açısal hız vektörü $\vec{\omega}$ da dönme eksenini yönlendirir. Dolayısıyla, simetri eksenini etrafında dönen bir katı cisim için \vec{L} ve $\vec{\omega}$ aynı yöndedirler (Şekil 10.26). Bu nedenle \vec{L} ve $\vec{\omega}$ arasında aşağıdaki gibi bir vektör bağıntısı mevcuttur;

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (\text{simetri eksenini etrafında dönen bir katı cisim için}) \quad (10.28)$$

10.24 ω açısal süratiyle dönen katı cisim içindeki m_i kütleli bir parçacığın açısal momentumunun hesaplanması. (Şekil 10.23 ile karşılaştırın.)



10.26 Simetri eksenindeki dönmeye $\vec{\omega}$ ve \vec{L} paralel ve eksen boyuncadır. Her iki vektörün yönü sağ el kuralı ile verilir (Şekil 9.5 ile karşılaştırın).



Parçacıklar sisteminin toplam açısal momentumu \vec{L} ve dış torklar toplamı $\sum \vec{\tau}$ ise,

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{herhangi bir parçacık sistemi için}) \quad (10.29)$$

Son olarak, parçacıklar sistemi simetri eksenini (z-ekseni) etrafında dönen bir katı cisim ise, $L_z = I\omega_z$ ve I sabittir. Bu eksen uzayda sabit bir yöne sahipse, \vec{L} ve $\vec{\omega}$ vektörleri *sadece* büyüklük olarak değişir, yönleri değişmez. Böyle bir durumda $dL_z/dt = I d\omega_z/dt = I\alpha_z$, veya

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

Örnek 10. Açısal momentum ve tork

Bir jet motorundaki türbün fanının dönme eksenine göre eylemsizlik momenti $2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ 'dir. Türbin çalışmaya başladığında açısal momentumu zamanın fonksiyonu olarak

$$\omega_z = (40 \text{ rad/s}^3)t^2$$

ifadesiyle veriliyor. (a) Fanın açısal momentumunun zamanın fonksiyonu olarak ve $t = 3.0 \text{ s}$ 'deki değerini bulunuz. (b) Fan üzerine etkiyen torku zamanın fonksiyonu olarak ve $t = 3.0 \text{ s}$ 'deki değerini bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Elektrik fanlarında olduğu gibi, türbin fanı da simetri eksenini (z -ekseni) etrafında döner. Bu nedenle, açısal momentum vektörünün sadece z -bileşeni L_z vardır; açısal hız ω_z 'den bulunur. Açısal momentumun yönü sabit olduğundan, net tork aynı nedenle sadece dönme eksenini yönünde olan z -bileşenine sahip olup L_z 'nin zamana göre türevine eşittir.

TASARLAMA: ω_z 'den L_z 'yi bulmak için Denklem (10.28)'i kullanırız; τ_z 'yi bulmak için L_z 'nin zamana göre türevini alırız. Denklem (10.29)'dan net torkun dönme eksenini yönünde olan z -bileşenini L_z 'nin zamana göre türevinden ($\tau_z = dL_z/dt$) bulabiliriz.

İŞLEM: (a) Açısal momentumun z -dönme eksenine göre olan bileşeni,

$$L_z = I\omega_z = (2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(40 \text{ rad/s}^3)t^2 = (100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t^2$$

(Radyan boyutsuz olduğundan, cevaptan “rad” düşürülmüştür.) $t = 3.0 \text{ s}$ anında $L_z = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ 'dir.

(b) Denklem (10.29)'dan, net tork bileşeninin dönme eksenini yönündeki değeri,

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t$$

$t = 3.0 \text{ s}$ anında

$$\tau_z = (200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(3.0 \text{ s}) = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

DEĞERLENDİRME: Sonucumuzun doğruluğunu sınamak için türbün fanının açısal ivmesi $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40 \text{ rad/s}^3)(2t) = (80 \text{ rad/s}^2)t$ olduğuna dikkat ediniz. Newton'un ikinci yasasının hareket için eşdeğerinden, fanı etkiyen torkun değeri $\tau_z = I\alpha_z = (2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(80 \text{ rad/s}^2)t = (200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t$ olduğu görülür. Bu da yukarıdaki sonucumuz ile aynıdır.

Açısal Momentumun Korunumu



Açısal momentumun dönme hareketinin temel dinamik ilkelerini ifade etmek için bir seçenek olduğunu gördük. Bu ayrıca **açısal momentumun korunumu ilkesi** için bir zemin oluşturmaktadır. Enerjinin ve doğrusal momentumun korunumu ilkeleri gibi, bu ilke de bir evrensel korunum yasasıdır, en düşük boyutlardan (atomik, nükleer sistemler) en büyük boyutlara (gezegenler) kadar her alanda geçerlidir. Bu ilke doğrudan Denklem (10.29)'dan elde edilebilir: $\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$. $\sum \vec{\tau} = 0$ ise, $d\vec{L}/dt = 0$ 'dır ve \vec{L} sabittir.

Bir sistem üzerine etkiyen net dış torkların toplamı sıfır ise, sistemin toplam açısal momentumu sabittir (korunumludur).

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (\text{sıfır net dış tork}) \quad (10.31)$$

Örnek 12. Dönme çarpışması I

Şekil 10.30'da iki disk görülüyor; birisi dönen motor çarkı (A) ve diğeri transmisyon şaftına eklenmiş bir debriyaj plakasıdır (B). Bunların eylemsizlik momentleri, sırayla I_A ve I_B 'dir ve başlangıçta sabit ω_A ve ω_B süratiyle dönmektedirler. Disklere herhangi bir tork uygulamadan, dönme eksenini yönünde kuvvetlerle bunları birbirine itiyoruz. Diskler birbirine sürtünerek sonunda ortak bir ω açısal süratine ulaşıyorlar. Bu açısal sürati veren ifadeyi bulunuz.

ÇÖZÜM

BELİRLEME: Disklerden her birine etkiyen tork sadece birinin diğerine uyguladığı torktan ibarettir. Dolayısıyla, iki diskten oluşan sistemin toplam açısal momentumu itildikleri andan önce ve sonra aynı değere sahiptir. Sonunda, her iki disk $I = I_A + I_B$ toplam eylemsizlik momenti ve hedef değişkenimiz olan ω açısal süratiyle tek bir cisim gibi beraber dönerler.

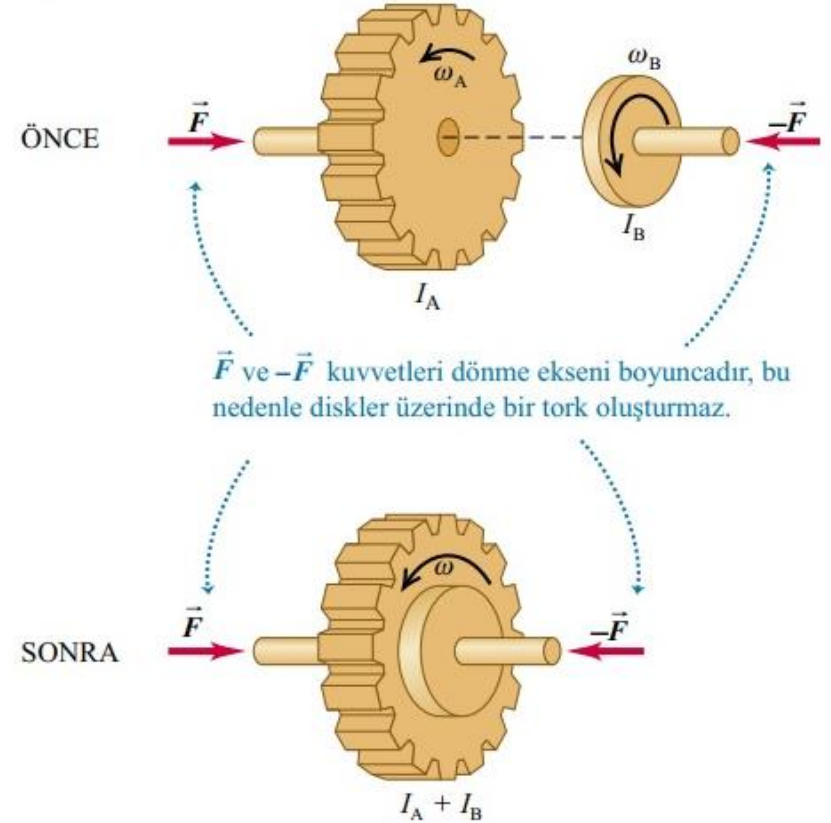
TASARLAMA: Şekil 10.30'da görüldüğü gibi, bütün açısal hızlar aynı doğrultudadır, o halde ω_A , ω_B ve ω 'yi dönme eksenini doğrultusundaki açısal süratin bileşenleri gibi düşünülebiliriz.

İŞLEM: Açısal momentumun korunumu yasasından,

$$I_A \omega_A + I_B \omega_B = (I_A + I_B) \omega$$

$$\omega = \frac{I_A \omega_A + I_B \omega_B}{I_A + I_B}$$

10.30 Net dış tork sıfır olduğunda açısal momentum korunur.



Örnek 13. Dönme çarpışması II

Örnek 10.12’de *A* motor çarkının kütlesi 2.0 kg, yarıçapı 0.20 m ve ilk açısal sürati 50 rad/s’dir (yaklaşık 500 rpm). *B* debriyaj plakasının kütlesi 4.0 kg, yarıçapı 0.10 m ve ilk açısal sürati 200 rad/s’dir. Bu iki dönen cisim birbirlerine temas haline geldiklerinde sistemin ortak açısal sürati ω ne olur? Bu süreçte kinetik enerji ne kadar değişir?

TASARLAMA: Örnek 10.12’deki sonucu ve dönme kinetik enerjisi için $K = \frac{1}{2}I\omega^2$ formülünü kullanacağız.

İŞLEM: Her iki diskin eylemsizlik momentleri,

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4.0 \text{ kg})(0.10 \text{ m})^2 = 0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Örnek 10.12’den yararlanarak son açısal sürat,

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{I_A \omega_A + I_B \omega_B}{I_A + I_B} \\ &= \frac{(0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(50 \text{ rad/s}) + (0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(200 \text{ rad/s})}{0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \\ &= 100 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Çarpışmadan önceki kinetik enerji,

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{1}{2}I_A \omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B \omega_B^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(50 \text{ rad/s})^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(200 \text{ rad/s})^2 \\ &= 450 \text{ J}\end{aligned}$$

Çarpışmadan sonraki kinetik enerji,

$$\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(100 \text{ rad/s})^2 = 300 \text{ J}\end{aligned}$$

DEĞERLENDİRME: Başlangıçtaki kinetik enerjinin üçte biri bu “açısal çarpışma” esnasında yok olmuştur; bu tür dönme çarpışması hiç esnek olmayan çarpışmaya karşılık gelir. Esasen kinetik enerjinin korunması beklenmez. Her ne kadar dış kuvvet ve tork sıfır olsa da, diskler ortak açısal hıza yaklaşırlarken birbirlerinin üzerine korunmasız sürtünme kuvvetleri uygulamıştır.

DİNLEDİĞİNİZ İÇİN TEŞEKKÜRLER

ve

TEKRAR ETMEYİ UNUTMAYINIZ