KOMBINATORIAL

SEVI **NURAFNI**

BAHAN KULIAH MATEMATIKA DISKRIT
PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

GITHUB.COM/SEVINURAFNI/FSI315

DEFINISI

- Kombinatorkal (combinatorics) adalah cabang matematika untuk menghitung (counting) jumlah penyusunan objek-objek tanpa harus Mengenumerasi semua kemungkinan susunannya.

- Contoh-contoh persoalan kombinatorika:

1. Nomor PIN kartu ATM bank adalah 6 angka. Berapa jumlah PIN yang dapatdibuat?
2. Kode buku sebuah perpustakaan terdiri dari dua huruf dan diikuti 4 angka.Berapa jumlah buku yang dapat dikodekan?

KAIDAH DASAR MENGHITUNG

- Kaidah perkalian (rule of product)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 dan percobaan 2: $p \times q$ hasil

- Kaidah penjumlahan (rule of sum)

  Percobaan 1: p hasil

  Percobaan 2: q hasil

  Percobaan 1 atau percobaan 2: $p + q$ hasil

Contoh 1. Ketua angkatan SI 2024 hanya 1 orang (pria atau wanita, tidak bias gender). Misalkan jumlah pria SI2024 = 65 orang dan jumlah wanita= 15 orang. Berapa banyak cara memilih ketua angkatan?

Penyelesaian: 65 + 15 = 80 cara.

Contoh 2. Dua orang perwakilan SI 2024 mendatangi Bapak Rektor untuk protes kenaikan UKT. Wakil yang dipilih 1 orang pria dan 1 orang wanita. Berapa banyak cara memilih 2 orang wakil tersebut?

Penyelesaian: 65×15 = 975 cara.

PERLUASAN KAIDAH DASAR MENGHITUNG

- Misalkan ada n percobaan, masing-masing dengan p_i hasil

1. Kaidah perkalian (rule of product)

   $p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$ hasil

2. Kaidah penjumlahan (rule of sum)

   $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ hasil

Contoh 3. Bit biner hanya 0 dan 1. Berapa banyak string biner yang dapat dibentuk jika:

(a) panjang string 5 bit

(b) panjang string 8 bit (= 1 byte)

Penyelesaian:

(a) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ = 32 buah

(b) 2^8 = 256 buah

Contoh 4. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itusendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda

(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

(a) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (1, 3, 5, 7, 9)

posisi ribuan: 8 kemungkinan angka

posisi ratusan: 8 kemungkinan angka

posisi puluhan: 7 kemungkinan angka

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(8)(8)(7) = 2240 buah.

Contoh 4. Berapa banyak bilangan ganjil antara 1000 dan 9999 (termasuk 1000 dan 9999 itusendiri) yang

(a) semua angkanya berbeda

(b) boleh ada angka yang berulang.

Penyelesaian:

b) posisi satuan: 5 kemungkinan angka (yaitu 1, 3, 5, 7 dan 9)

posisi ribuan: 9 kemungkinan angka (1 sampai 9)

posisi ratusan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

posisi puluhan: 10 kemungkinan angka (0 sampai 9)

Banyak bilangan ganjil seluruhnya = (5)(9)(10)(10) = 4500

LATIHAN

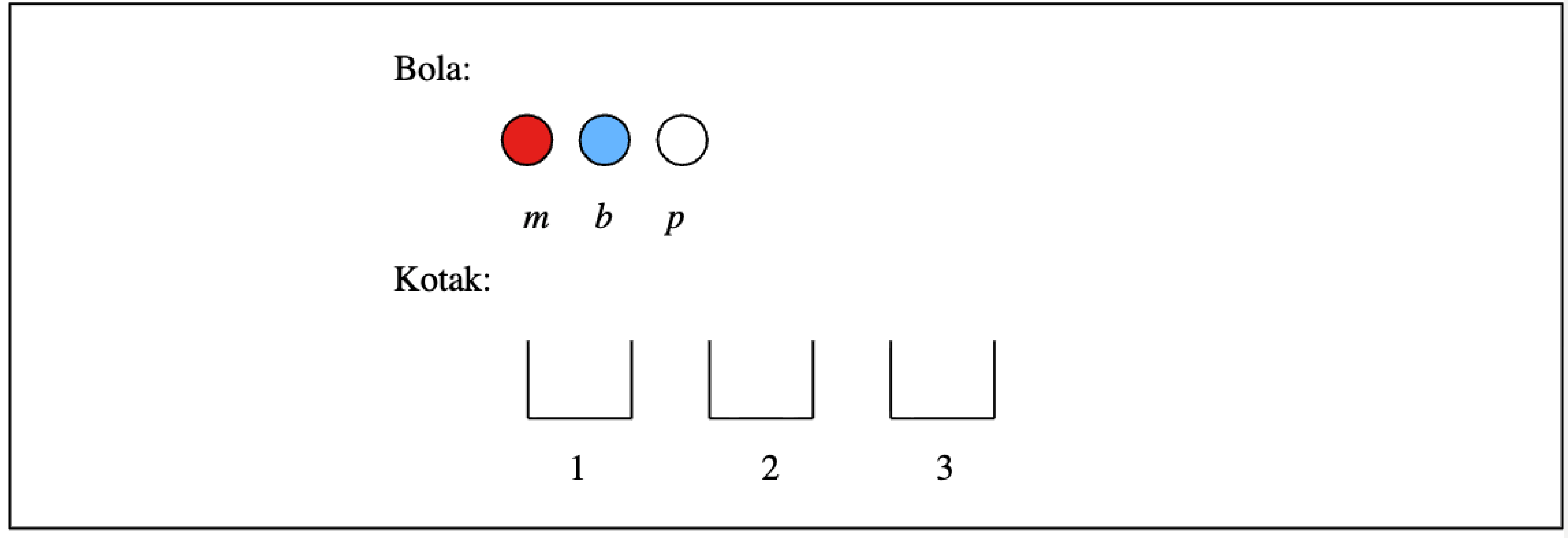
1.

   a) Berapa banyak bilangan genap yang disusun oleh 2 angka?

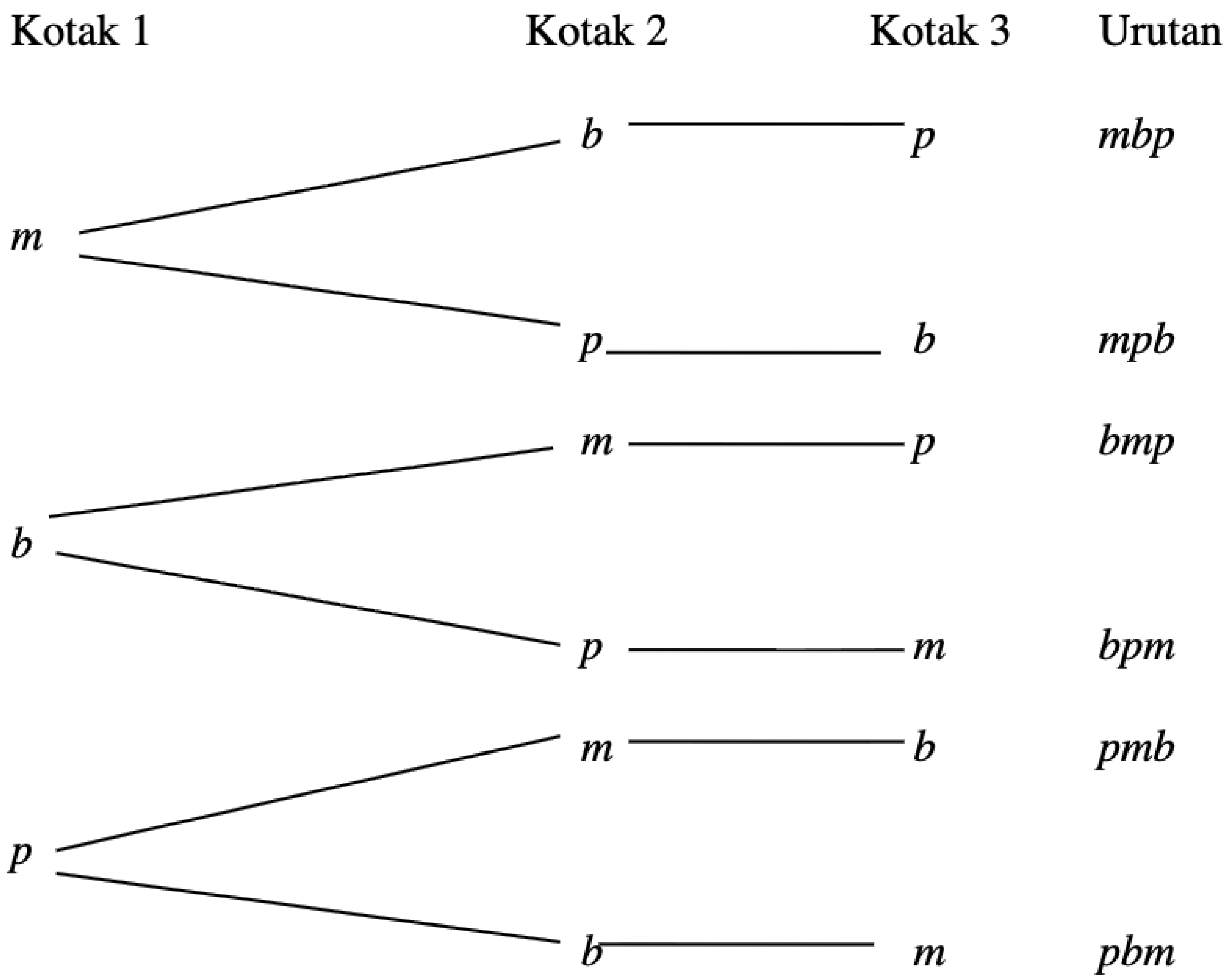
   b) Berapa banyak bilangan ganjil 2-angka dengan setiap angka berbeda?

2. Dari 100.000 buah bilangan bulat positif pertama, berapa banyak bilanganyang mengandung tepat satu buah angka 3, satu buah angka 4, dan satu buahangka 5?

PERMUTASI



Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Jumlah kemungkinan urutan berbeda dari penempatan bola ke dalam kotak adalah $(3)(2)(1) = 3! = 6$.

Definisi 1: Permutasi adalah jumlah urutan berbeda dari pengaturan objek-objek.

- Permutasi merupakan bentuk khusus aplikasi kaidah perkalian.
- Misalkan jumlah objek adalah n, maka
  - urutan pertama dipilih dari n objek,
  - urutan kedua dipilih dari n – 1 objek,
  - urutan ketiga dipilih dari n – 2 objek,
  - …
  - urutan terakhir dipilih dari 1 objek yang tersisa.

  Menurut kaidah perkalian, permutasi dari n objek adalah

$$n(n-1)(n-2)\ \dots\ (2)(1) = n!$$

Contoh 6. Berapa banyak “kata” yang terbentuk dari huruf-huruf kata“HAPUS”?

Penyelesaian:

Cara 1: (5)(4)(3)(2)(1) = 120 buah kata

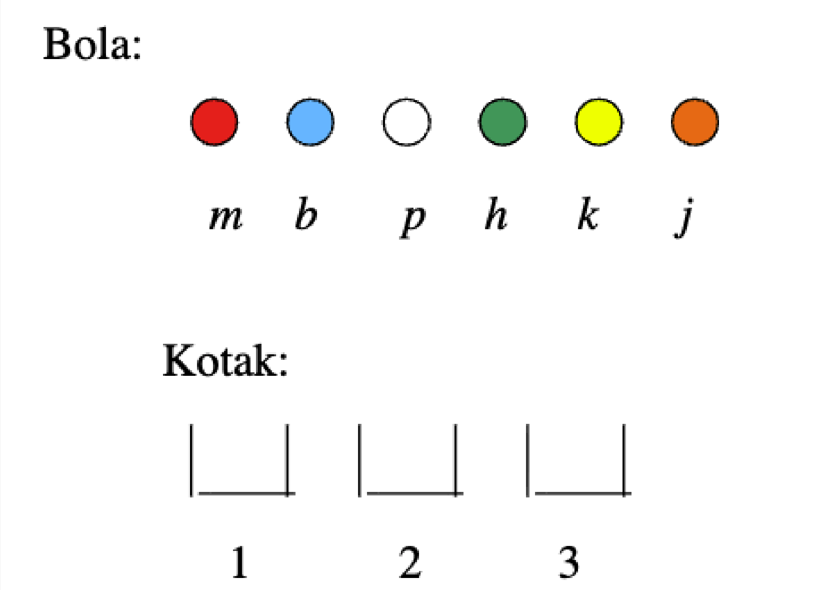
Cara 2: 5! = 120 buah kata

Contoh 7. Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Penyelesaian: 25!

PERMUTASI R DARI N ELEMEN

Ada enam buah bola yang berbeda warnanya dan 3 buah kotak. Masing-masing kotak hanya boleh diisi 1 buah bola. Berapa jumlah urutan berbeda yang mungkin dibuat dari penempatan bola ke dalam kotak-kotak tersebut?



Penyelesaian:

kotak 1 dapat diisi oleh salah satu dari 6 bola (ada 6 pilihan);

kotak 2 dapat diisi oleh salah satu dari 5 bola (ada 5 pilihan);

kotak 3 dapat diisi oleh salah satu dari 4 bola (ada 4 pilihan).

Jumlah urutan berbeda dari penempatan bola = (6)(5)(4) = 120

Definisi 2. Permutasi r dari n elemen adalah jumlah kemungkinan urutan rbuah elemen yang dipilih dari n buah elemen, dengan $r \leq n$, yang dalam hal ini, pada setiap kemungkinan urutan tidak ada elemen yang sama.

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 7. Berapakah jumlah kemungkinan membentuk bilangan 3-angkadari 5 angka berikut: 1, 2, 3, 4 , 5, jika:

(a) tidak boleh ada pengulangan angka, dan

(b) boleh ada pengulangan angka.

Penyelesaian:

(a) Dengan kaidah perkalian: (5)(4)(3) = 60 buahDengan rumus permutasi P(5, 3) = 5!/(5 – 3)! = 60

(b) Tidak dapat diselesaikan dengan rumus permutasi.Dengan kaidah perkalian: (5)(5)(5) = 53 = 125.

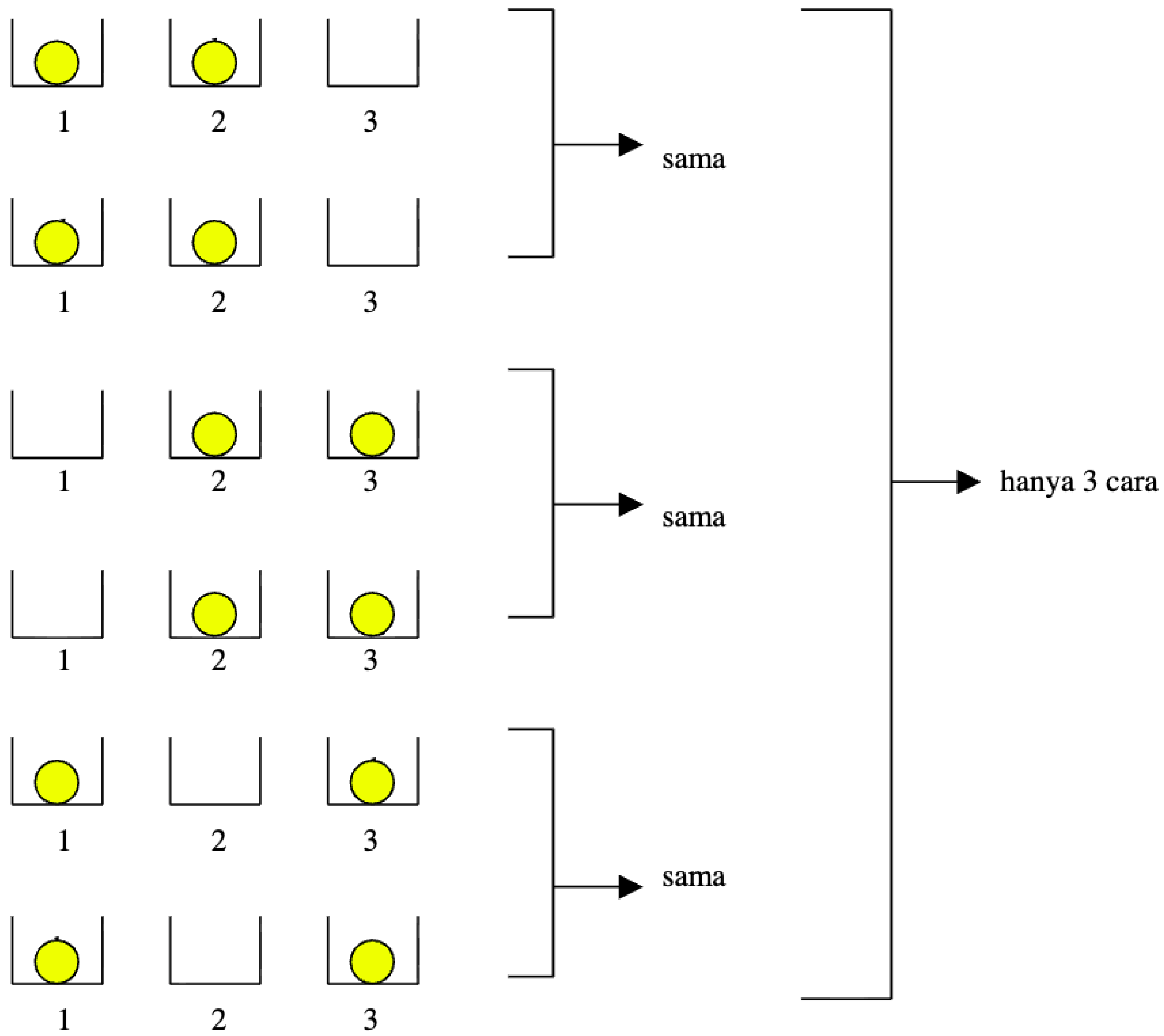
LATIHAN

Sebuah mobil mempunyai 4 tempat duduk. Berapa banyak cara 3 orang didudukkan jika diandaikan satu orang harus duduk di kursi sopir?

KOMBINASI

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi urutan kemunculan diabaikan.
- Misalkan ada 2 buah bola yang warnanya sama dan 3 buah kotak. Setiap kotak hanya boleh berisi paling banyak satu buah bola. Jumlah cara memasukkan bola ke dalam kotak =

$$\frac{P(3,2)}{2} = \frac{P(3,2)}{2!} = \frac{\frac{3!}{1!}}{2!} = \frac{(3)(2)}{2} = 3.$$


1 2 3
1 2 3
sama
1 2 3
1 2 3
sama
1 2 3
1 2 3
sama
hanya 3 cara

Secara umum, jumlah cara memasukkan r buah bola yang berwarna sama ke dalam n buah kotak Adalah

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = C(n, r)$$

C(n, r) sering dibaca "n diambil r", artinya r objek diambil dari n buah objek.

Definisi 3. Kombinasi r elemen dari n elemen, atau C(n, r), adalah jumlah pemilihan yang tidak terurut r elemen yang diambil dari n buah elemen.

Contoh 9: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25orang?

Penyelesaian: Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.

Misalkan lima orang yang dipilih adalah A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

LATIHAN

Kursi-kursi di sebuah bioskop disusun dalam baris-baris, satu baris berisi10 buah kursi. Berapa banyak cara mendudukkan 6 orang penonton pada satu baris kursi:

(a) jika bioskop dalam keadaan terang

(b) jika bioskop dalam keadaan gelap

Petunjuk: dalam keadaan gelap, orang-orang di dalam bioskop tidak dapat dibedakan