

RELASI DAN FUNGSI

SEVI **NURAFNI**

BAHAN KULIAH MATEMATIKA DISKRIT
PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

[GITHUB.COM/SEVINURAFNI/FSI315](https://github.com/sevinurafni/fsi315)

PENGANTAR MATRIKS

- Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.

- Dalam notasi ringkas, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi $A = [a_{ij}]$.
- **Contoh a.** Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks zero-one (0/1) atau matriks biner adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.
- **Contoh b.** Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RELASI

- Jika terdapat dua himpunan A dan B , bagaimana menyatakan hubungan antara anggota kedua himpunan tersebut?
- Kita bisa menggunakan pasangan terurut (*ordered pairs*) (a, b) untuk menghubungkan a dan b , yang dalam hal ini $a \in A$ dan $b \in B$.
- Kita katakan a dihubungkan dengan b oleh sebuah relasi.

Contoh 1: Misalkan


$A = \{\text{Hasan, Tanti, Rommi, Yusuf, Aditya}\}$ adalah himpunan orang,

$B = \{\text{Toyota, Daihatsu, Mercedes, VW}\}$ adalah himpunan mobil.

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan orang dan mobil yang dikendarainya.

$$R = \{(\text{Hasan, Daihatsu}), (\text{Rommi, Toyota}), (\text{Yusuf, Mercedes}), (\text{Aditya, Toyota})\}$$

Ini berarti **Hasan** mengendarai **Daihatsu**, **Rommi** mengendarai **Toyota**, **Yusuf** mengendarai **Mercedes**, dan **Aditya** mengendarai **Toyota**. **Tanti** tidak mengendarai mobil apapun. Mobil **VW** tidak dikendarai siapapun di dalam relasi itu.



- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- $a R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R
- $a \not R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R .
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R , dan himpunan B disebut daerah tujuan (*kodomain*) dari R .

DEFINISI RELASI

Contoh 2. Misalkan

$A = \{\text{Amir, Budi, Cecep}\}$ dan $B = \{\text{Math, Fisika, Biologi, Inggris}\}$

maka

$A \times B = \{ (\text{Amir, Math}), (\text{Amir, Fisika}), (\text{Amir, Biologi}), (\text{Amir, Inggris}), (\text{Budi, Math}), (\text{Budi, Fisika}), (\text{Budi, Biologi}), (\text{Budi, Inggris}), (\text{Cecep, Math}), (\text{Cecep, Fisika}), (\text{Cecep, Biologi}), (\text{Cecep, Inggris}) \}$

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

$R = \{(\text{Amir, Fisika}), (\text{Amir, Inggris}), (\text{Budi, Math}), (\text{Budi, Fisika}), (\text{Cecep, Inggris})\}$

Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,

- A adalah daerah asal R , dan B adalah daerah tujuan dari R .
- $(\text{Amir, Fisika}) \in R$ atau Amir R Fisika
- $(\text{Amir, Biologi}) \notin R$ atau Amir R Biologi

RELASI PADA SEBUAH HIMPUNAN

- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.
- Notasi: $R \subseteq A \times A$

Contoh 3. Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y .

Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

Contoh 4. Tinjau R dan S masing-masing relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai

$$R = \{(a, b) \mid b = 5 - a\}$$

$$S = \{(a, b) \mid a < b\}$$

- Anggota relasi R adalah sebagai berikut:

$$a = 1 \rightarrow b = 5 - 1 = 4 \rightarrow (a, b) = (1, 4)$$

$$a = 2 \rightarrow b = 5 - 2 = 3 \rightarrow (a, b) = (2, 3)$$

$$a = 3 \rightarrow b = 5 - 3 = 2 \rightarrow (a, b) = (3, 2)$$

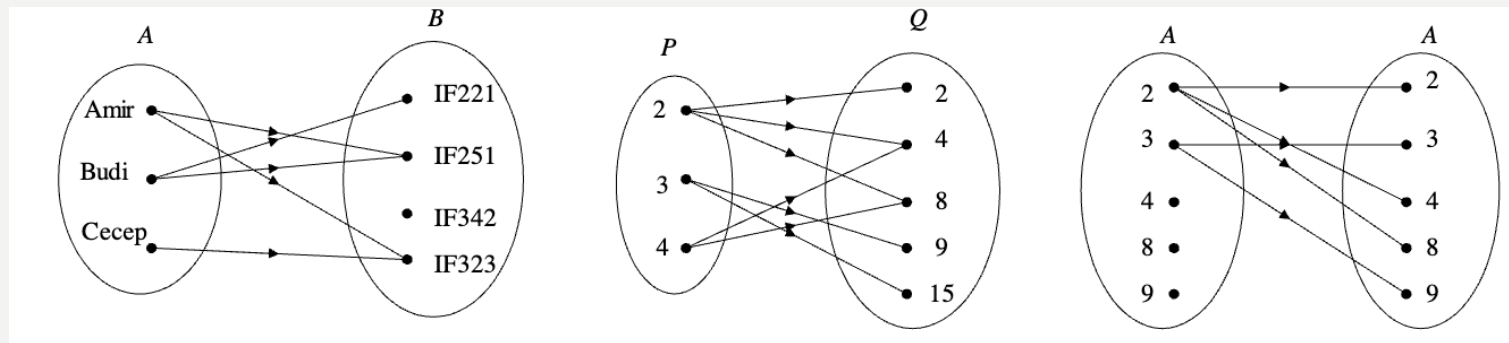
$$a = 4 \rightarrow b = 5 - 4 = 1 \rightarrow (a, b) = (4, 1)$$

$$\text{Jadi, } R = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$$

- Anggota relasi S adalah $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

REPRESENTASI RELASI

1. Representasi relasi dengan diagram panah



Lingkaran kiri: daerah asal (*domain*)

Lingkaran kanan: daerah tujuan (*kodomain*)

2. Representasi Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal (domain), sedangkan kolom kedua menyatakan daerah tujuan (kodomain).

Tabel A

<i>P</i>	<i>Q</i>
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel B

<i>A</i>	<i>A</i>
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{matrix} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & ((a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 5. Relasi R pada Contoh 2 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

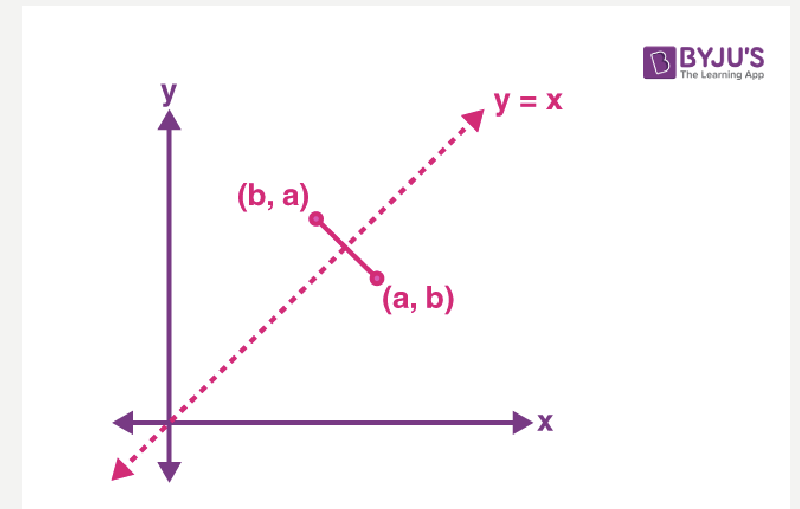
yang dalam hal ini, $a_1 = \text{Amir}$, $a_2 = \text{Budi}$, $a_3 = \text{Cecep}$, dan $b_1 = \text{Math}$, $b_2 = \text{Fisika}$, $b_3 = \text{Biologi}$, dan $b_4 = \text{Inggris}$

RELASI INVERSI

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B .

Invers dari relasi R , dilambangkan dengan R^{-1} , adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$



Contoh 6.

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan
 $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q
maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah invers dari relasi R , yaitu relasi dari Q ke P dengan

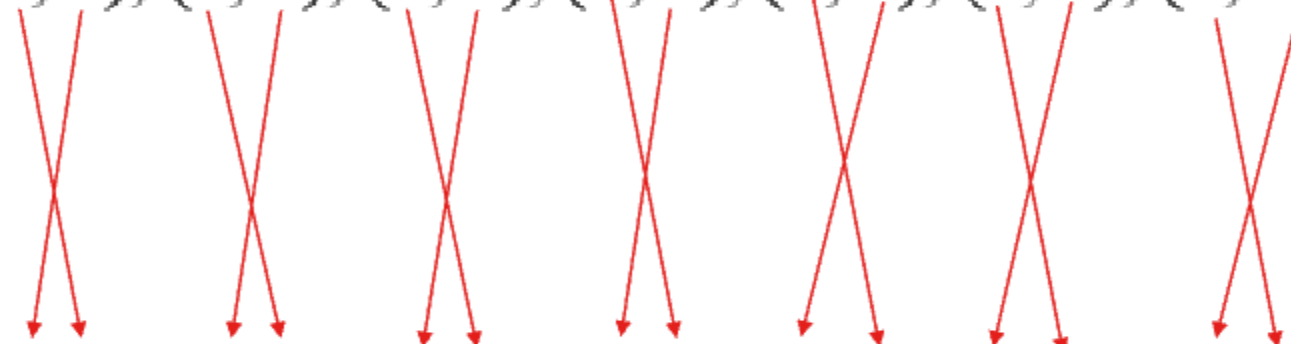
$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$



Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R ,

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1} , misalkan N , diperoleh dengan melakukan transpose terhadap matriks M ,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.
- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B , maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B .

MENGGKOMBINASIKAN INVERSI

Contoh 7. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

LATIHAN

1. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan
 $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q .

Tuliskan anggota himpunan R

2. Tiga buah relasi R , S , dan T berikut adalah relasi pada P berikut:

$$R : x > y$$

$$S : x + y = 5,$$

$$T : 3x + y = 10$$

Tuliskan anggota relasi R , S , dan T !

3. Buatkan Relasi R pada **Contoh 3** yang dinyatakan dengan matriks

RELASI N-ARY

- Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan.
- Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan. Relasi tersebut dinamakan relasi $n - ary$ (baca: ener).
- Jika $n = 2$, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi n -ary mempunyai terapan penting di dalam basisdata.
- Misalkan A_1, A_2, \dots, A_n adalah himpunan. Relasi $n - ary R$ pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.
- Himpunan A_1, A_2, \dots, A_n disebut daerah asal relasi dan n disebut derajat.

Contoh 8. Misalkan

$NIM = \{2457201001, 2457201002, 2457201003, 2457201004\}$

$Nama = \{Ujang, Nurisa, Asep, Robi\}$

$Matkul = \{\text{Matematika Diskri, Technopreneurship, Interaksi Manusia dan Komputer}\}$

$Nilai = \{A, B, C, D, E\}$

Relasi MHS terdiri dari 4-tupel (NIM, Nama, MatKul, Nilai):

$$MHS \subseteq NIM \times Nama \times MatKul \times Nilai$$

Satu contoh yang Bernama *MHS* adalah

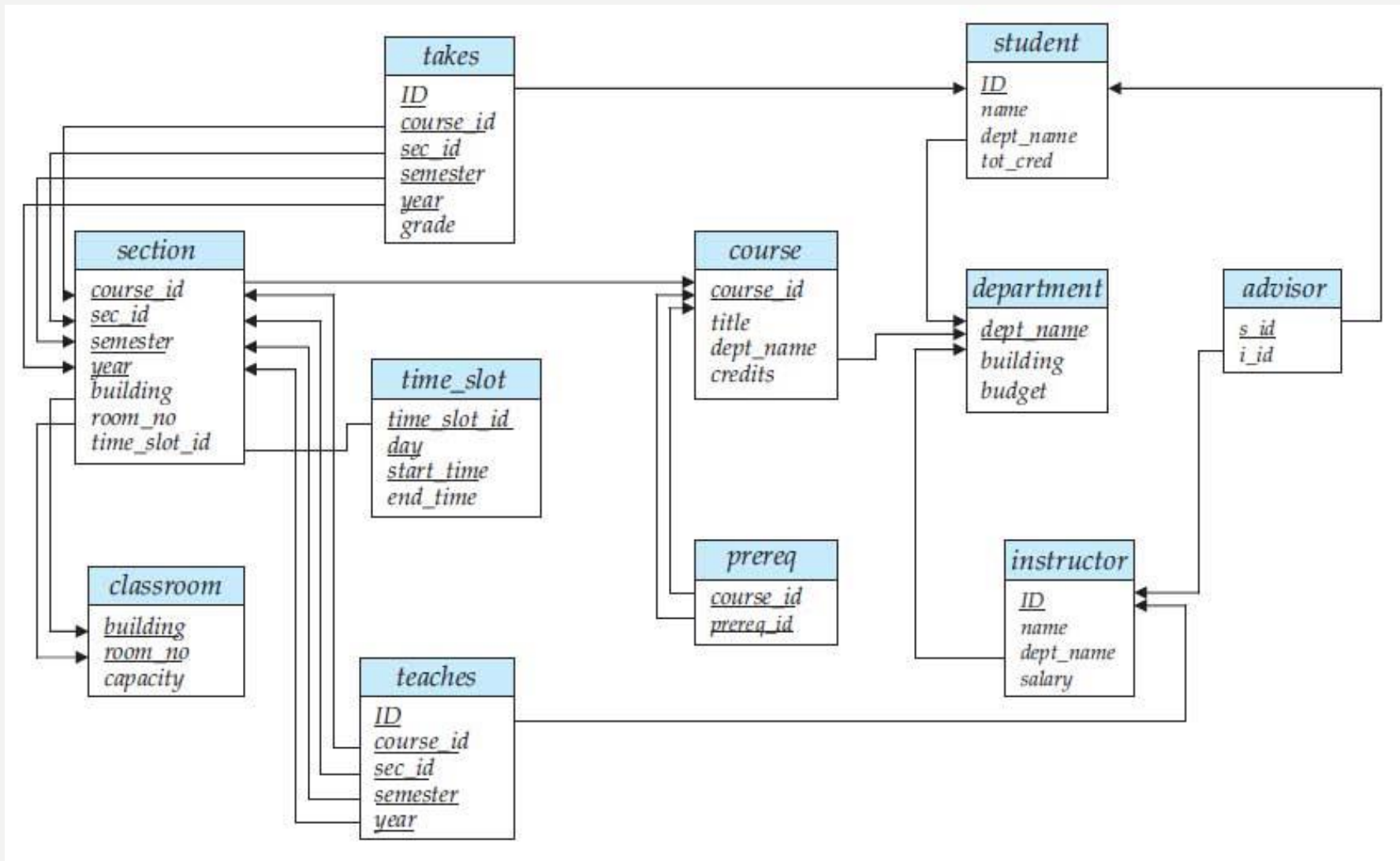
$MHS = \{$ (2457201001, Ujang, Matematika Diskrit, A),
(2457201001, Ujang, Technopreneurship, B),
(2457201002, Nurisa, Matematika Diskri, A),
(2457201002, Nurisa, Interaksi Manusia dan Komputer, C),
(2457201003, Asep, Technopreneurship, B),
(2457201003, Asep, Interaksi Manusia dan Komputer, B),
(2457201004, Robi, Matematika Diskri, D),
(2457201004, Robi, Interaksi Manusia dan Komputer, C)
 $\}$

Relasi MHS di atas juga dapat ditulis dalam bentuk Tabel:

NIM	Nama	MatKul	Nilai
2457201001	Ujang	Matematika Diskri	A
2457201001	Ujang	Technopreneurship	B
2457201002	Nurisa	Matematika Diskri	A
2457201002	Nurisa	Interaksi Manusia dan Komputer	C
2457201003	Asep	Technopreneurship	B
2457201003	Asep	Interaksi Manusia dan Komputer	B
2457201004	Robi	Matematika Diskri	D
2457201004	Robi	Interaksi Manusia dan Komputer	C

- Basisdata (database) adalah kumpulan tabel.
- Salah satu model basisdata adalah model basisdata relasional (relational database).
- Model basisdata ini didasarkan pada konsep relasi $n - ary$.
- Pada basisdata relasional, satu tabel menyatakan satu relasi. Setiap kolom pada tabel disebut atribut.
- Daerah asal dari atribut adalah himpunan tempat semua anggota atribut tersebut berada.

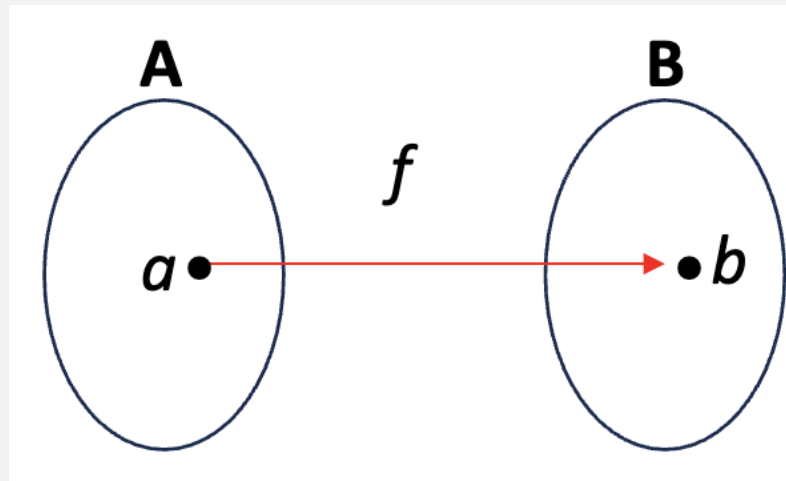
Contoh basis data relasional:



FUNGSI

- Misalkan A dan B himpunan. Relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B .
- Jika f adalah fungsi dari A ke B kita menuliskan $f : A \rightarrow B$ yang artinya f memetakan A ke B .
- A disebut daerah asal (*domain*) dari f dan B disebut daerah tujuan (*kodomain*) dari f .
- Nama lain untuk fungsi adalah pemetaan atau transformasi.

- Kita menuliskan $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A dihubungkan dengan elemen b didalam B .
- Himpunan yang berisi semua nilai pemetaan f disebut jelajah(range) dari f .
Perhatikan bahwa jelajah dari f adalah himpunan bagian (mungkin proper subset) dari B .



- Fungsi adalah relasi yang khusus:
 1. Tiap elemen di dalam himpunan A harus digunakan oleh prosedur atau kaidah yang mendefinisikan f .
 2. Frasa “dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam B ” berarti bahwa jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$, maka $b = c$.

Contoh 9.

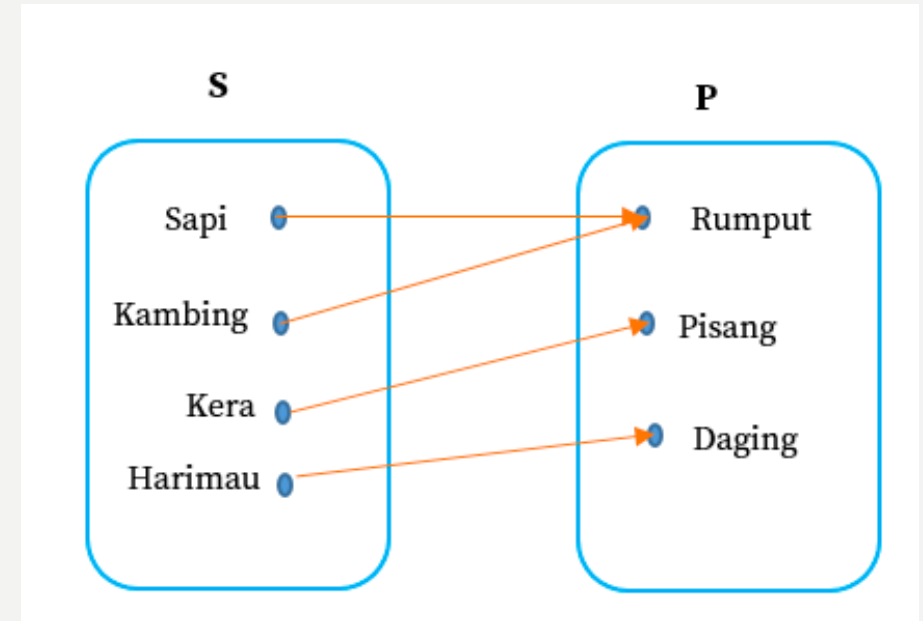
Tinjau fungsi berikut:

$$f(\text{Sapi}) = \text{Rumput}$$

$$f(\text{Kambing}) = \text{Rumput}$$

$$f(\text{kera}) = \text{Pisang}$$

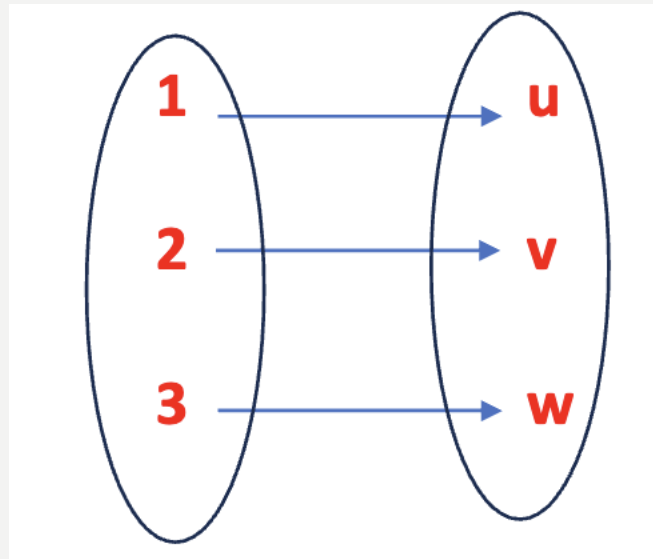
$$f(\text{Harimau}) = \text{Daging}$$



Contoh 10.

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

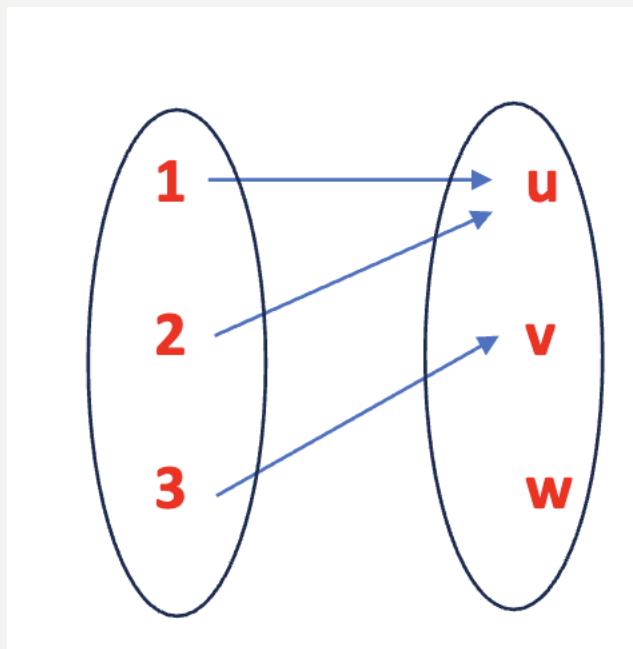
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B. Di sini $f(1) = u$, $f(2) = v$, dan $f(3) = w$. Daerah asal dari f adalah A dan daerah tujuan adalah B. Jelajah dari f adalah $\{u, v, w\}$, yang dalam hal ini sama dengan himpunan B.



Contoh 11.

$$f = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

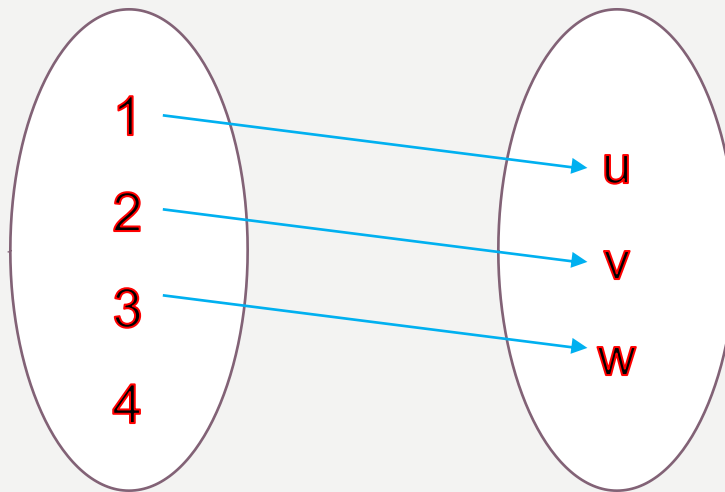
dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi dari A ke B , meskipun merupakan bayangan dari dua elemen A . Daerah asal fungsi adalah A , daerah tujuannya adalah B , dan jelajah fungsi adalah $\{u, v\}$.



Contoh 12.

$$f = \{(1, u), (2, v), (3, w)\}$$

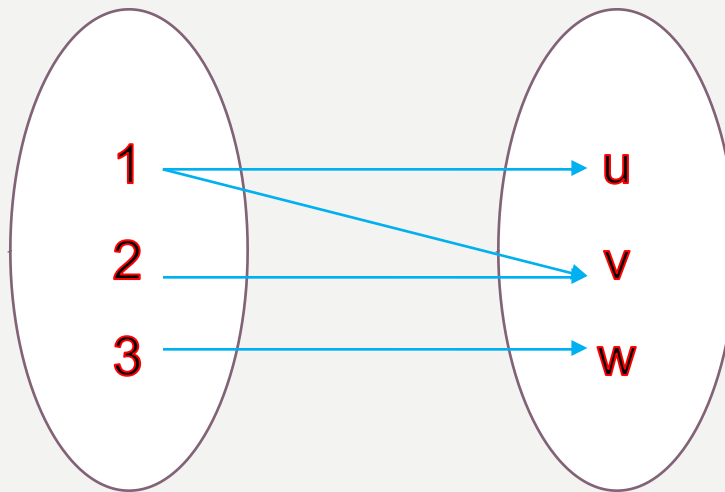
dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena tidak semua elemen A dipetakan ke B .



Contoh 13.

$$f = \{(1, u), (1, v), (2, v), (3, w)\}$$

dari $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ bukan fungsi, karena 1 dipetakan ke dua buah elemen B , yaitu u dan v .



Latihan

Misalkan A adalah himpunan mahasiswa di ITM. Manakah dari pemetaan berikut yang mendefinisikan sebuah fungsi pada himpunan A ?

- a) Setiap mahasiswa memetakan NIM (Nomor Induk Mahasiswa).
- b) Setiap mahasiswa memetakan nomor handphone-nya.
- c) Setiap mahasiswa memetakan dosen walinya.
- d) Setiap mahasiswa memetakan anaknya.

A decorative graphic on the left side of the image consisting of two parallel, wavy lines. The inner line is yellow and the outer line is white, creating a stylized, organic shape that resembles a splash or a ribbon.

**TERIMA
KASIH**