

RELASI DAN FUNGSI

SEVI NURAFNI

BAHAN KULIAH MATEMATIKA DISKRIT
PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

GITHUB.COM/SEVINURAFNI/FSI315

PENGANTAR MATRIKS

- Matriks adalah susunan skalar elemen-elemen dalam bentuk baris dan kolom.
- Matriks A yang berukuran dari m baris dan n kolom ($m \times n$) adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matriks bujursangkar adalah matriks yang berukuran $n \times n$.

- Dalam notasi ringkas, kita lazim menuliskan matriks dengan notasi $A = [a_{ij}]$.
- **Contoh a.** Di bawah ini adalah matriks yang berukuran 3×4 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Matriks zero-one (0/1) atau matriks biner adalah matriks yang setiap elemennya hanya bernilai 0 atau 1.
- **Contoh b.** Di bawah ini adalah contoh matriks 0/1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RELASI

- Jika terdapat dua himpunan A dan B , bagaimana menyatakan hubungan antara anggota kedua himpunan tersebut?
- Kita bisa menggunakan pasangan terurut (*ordered pairs*) (a, b) untuk menghubungkan a dan b , yang dalam hal ini $a \in A$ dan $b \in B$.
- Kita katakan a dihubungkan dengan b oleh sebuah relasi.

Contoh 1: Misalkan

$A = \{\text{Hasan, Tanti, Rommi, Yusuf, Aditya}\}$ adalah himpunan orang,

$B = \{\text{Toyota, Daihatsu, Mercedes, VW}\}$ adalah himpunan mobil.

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan orang dan mobil yang dikendarainya.

$R = \{(\text{Hasan, Daihatsu}), (\text{Rommi, Toyota}), (\text{Yusuf, Mercedes}), (\text{Aditya, Toyota})\}$

Ini berarti **Hasan** mengendarai **Daihatsu**, **Rommi** mengendarai **Toyota**, **Yusuf** mengendarai **Mercedes**, dan **Aditya** mengendarai **Toyota**. **Tanti** tidak mengendarai mobil apapun. Mobil **VW** tidak dikendarai siapapun di dalam relasi itu.

- Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.
- Notasi: $R \subseteq (A \times B)$.
- $a R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \in R$, yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R
- $a R b$ adalah notasi untuk $(a, b) \notin R$, yang artinya a tidak dihubungkan oleh b oleh relasi R .
- Himpunan A disebut daerah asal (*domain*) dari R , dan himpunan B disebut daerah tujuan (*kodomain*) dari R .

DEFINISI RELASI

Contoh 2. Misalkan

$A = \{\text{Amir, Budi, Cecep}\}$ dan $B = \{\text{Math, Fisika, Biologi, Inggris}\}$

maka

$A \times B = \{ (\text{Amir, Math}), (\text{Amir, Fisika}), (\text{Amir, Biologi}), (\text{Amir, Inggris}), (\text{Budi, Math}), (\text{Budi, Fisika}), (\text{Budi, Biologi}), (\text{Budi, Inggris}), (\text{Cecep, Math}), (\text{Cecep, Fisika}), (\text{Cecep, Biologi}), (\text{Cecep, Inggris}) \}$

Misalkan R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil, yaitu

$R = \{(\text{Amir, Fisika}), (\text{Amir, Inggris}), (\text{Budi, Math}), (\text{Budi, Fisika}), (\text{Cecep, Inggris})\}$

Dapat dilihat bahwa $R \subseteq (A \times B)$,

- A adalah daerah asal R , dan B adalah daerah tujuan dari R .
- $(\text{Amir, Fisika}) \in R$ atau Amir R Fisika
- $(\text{Amir, Biologi}) \notin R$ atau Amir $\not R$ Biologi

RELASI PADA SEBUAH HIMPUNAN

- Relasi pada sebuah himpunan adalah relasi yang khusus
- Relasi pada himpunan A adalah himpunan bagian dari $A \times A$.
- Notasi: $R \subseteq A \times A$

Contoh 3. Misalkan R adalah relasi pada $A = \{2, 3, 4, 8, 9\}$ yang didefinisikan oleh $(x, y) \in R$ jika x adalah faktor prima dari y .

Maka

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 8), (3, 3), (3, 9)\}$$

Contoh 4. Tinjau R dan S masing-masing relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ yang didefinisikan sebagai

$$R = \{(a, b) \mid b = 5 - a\}$$

$$S = \{(a, b) \mid a < b\}$$

- Anggota relasi R adalah sebagai berikut:

$$a = 1 \rightarrow b = 5 - 1 = 4 \rightarrow (a, b) = (1, 4)$$

$$a = 2 \rightarrow b = 5 - 2 = 3 \rightarrow (a, b) = (2, 3)$$

$$a = 3 \rightarrow b = 5 - 3 = 2 \rightarrow (a, b) = (3, 2)$$

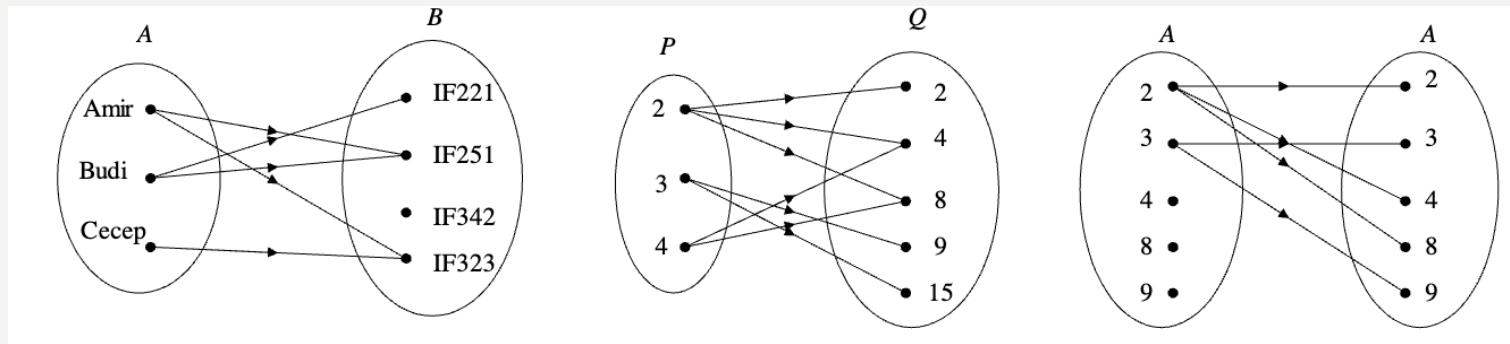
$$a = 4 \rightarrow b = 5 - 4 = 1 \rightarrow (a, b) = (4, 1)$$

Jadi, $R = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4, 1)\}$

- Anggota relasi S adalah $S = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

REPRESENTASI RELASI

1. Representasi relasi dengan diagram panah



Lingkaran kiri: daerah asal (*domain*)

Lingkaran kanan: daerah tujuan (*kodomain*)

2. Representasi Relasi dengan Tabel

Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal (domain), sedangkan kolom kedua menyatakan daerah tujuan (kodomain).

Tabel A

P	Q
2	2
2	4
4	4
2	8
4	8
3	9
3	15

Tabel B

A	A
2	2
2	4
2	8
3	3
3	3

3. Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan R adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$.
- Relasi R dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{bmatrix} & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ a_2 & m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m & m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & ((a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 5. Relasi R pada Contoh 2 dapat dinyatakan dengan matriks

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

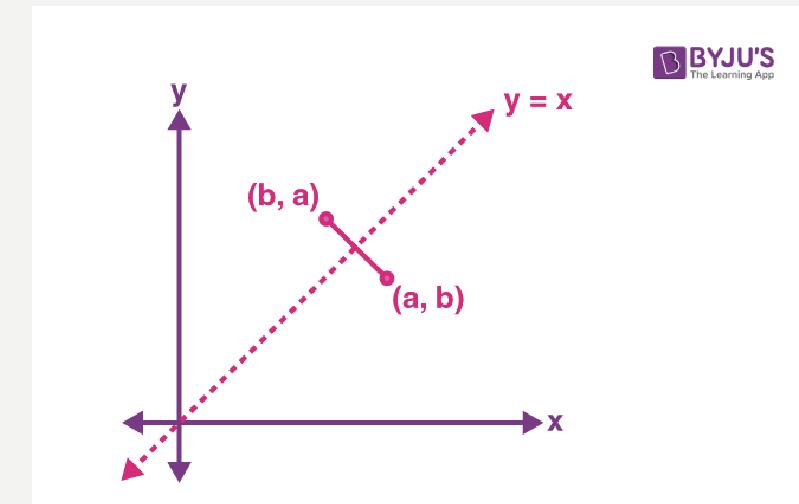
yang dalam hal ini, $a_1 = \text{Amir}$, $a_2 = \text{Budi}$, $a_3 = \text{Cecep}$, dan $b_1 = \text{Math}$, $b_2 = \text{Fisika}$, $b_3 = \text{Biologi}$, dan $b_4 = \text{Inggris}$

RELASI INVERSI

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B .

Invers dari relasi R , dilambangkan dengan R^{-1} , adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$



Contoh 6.

Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q maka kita peroleh

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15)\}$$

R^{-1} adalah invers dari relasi R , yaitu relasi dari Q ke P dengan

$$(q, p) \in R^{-1} \text{ jika } q \text{ adalah kelipatan dari } p$$

maka kita peroleh

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3)\}$$

$$R = \{(2, 2), (2, 4), (4, 4), (2, 8), (4, 8), (3, 9), (3, 15) \}$$

$$R^{-1} = \{(2, 2), (4, 2), (4, 4), (8, 2), (8, 4), (9, 3), (15, 3) \}$$

Jika M adalah matriks yang merepresentasikan relasi R ,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang merepresentasikan relasi R^{-1} , misalkan N , diperoleh dengan melakukan transpose terhadap matriks M ,

$$N = M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih, dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku.
- Jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B , maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$, dan $R_1 \oplus R_2$ juga adalah relasi dari A ke B .

MENGOMBINASIKAN INVERSI

Contoh 7. Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$.

Relasi $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

Relasi $R_2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d)\}$

$$R_1 \cap R_2 = \{(a, a)\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(b, b), (c, c)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(a, b), (a, c), (a, d)\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{(b, b), (c, c), (a, b), (a, c), (a, d)\}$$

LATIHAN

1. Misalkan $P = \{2, 3, 4\}$ dan $Q = \{2, 4, 8, 9, 15\}$. Jika kita definisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q .

Tuliskan anggota himpunan R

2. Tiga buah relasi R , S , dan T berikut adalah relasi pada \mathbb{P} berikut:

$$R : x > y$$

$$S : x + y = 5,$$

$$T : 3x + y = 10$$

Tuliskan anggota relasi R , S , dan T !

3. Buatkan Relasi R pada **Contoh 3** yang dinyatakan dengan matriks