

# AJLABAR BOOLEAN

SEVI **NURAFNI**

BAHAN KULIAH MATEMATIKA DISKRIT  
PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

[GITHUB.COM/SEVINURAFNI/FSI315](https://github.com/sevinurafni/fsi315)

# PENGANTAR

- Aljabar Boolean ditemukan oleh George Boole, pada tahun 1854.
- Boole melihat bahwa himpunan dan logika proposisi mempunyai sifat-sifat yang serupa (perhatikan kemiripan hukum-hukum aljabar logika dan hukum-hukum aljabar himpunan).
- Dalam buku *The Laws of Thought*, Boole memaparkan aturan-aturan dasar logika.
- Aturan dasar logika ini membentuk struktur matematika yang disebut aljabar Boolean.
- Aplikasi: perancangan rangkaian pensaklaran, rangkaian digital, dan rangkaian IC (integrated circuit) komputer

# DEFINISI ALJABAR BOOLEAN

Misalkan  $B$  adalah suatu himpunan yang didefinisikan dengan dua operator biner, yaitu  $+$  dan  $\cdot$ , serta sebuah operator uner,  $'$ . Misalkan  $0$  dan  $1$  adalah dua elemen yang berbeda dari  $B$ . Maka tuple

$$\langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$$

# DEFINISI ALJABAR BOOLEAN

disebut aljabar Boolean jika untuk setiap  $a, b, c \in B$  berlaku aksioma-aksioma berikut:

1. Identitas

(i)  $a + 0 = a$

(ii)  $a \cdot 1 = a$

2. Komutatif

(i)  $a + b = b + a$

(ii)  $a \cdot b = b \cdot a$

3. Distributif

(i)  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(ii)  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

4. Komplemen

Untuk setiap  $a \in B$  terdapat elemen unik  $a' \in B$  sehingga:

(i)  $a + a' = 1$

(ii)  $a \cdot a' = 0$

- Berhubung elemen-elemen  $B$  tidak didefinisikan nilainya (kita bebas menentukan anggota-anggota  $B$ ), maka terdapat banyak sekali aljabar boolean.
- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, orang harus memperlihatkan:
  1. elemen-elemen himpunan  $B$ ,
  2. kaidah/aturan operasi untuk dua operator biner dan operator uner,
  3. himpunan  $B$ , bersama-sama dengan dua operator tersebut, memenuhi keempat aksioma di atas

- Aljabar himpunan dan aljabar logika proposisi juga merupakan aljabar Boolean karena memenuhi empat aksioma di atas.
- Dengan kata lain, aljabar himpunan dan aljabar proposisi adalah himpunan bagian (subset) dari aljabar Boolean.
- Pada aljabar proposisi misalnya:
  - B berisi semua proposisi dengan  $n$  peubah.
  - dua elemen unik berbeda dari B adalah T dan F,
  - operator biner:  $\vee$  dan  $\wedge$ , operator uner:  $\neg$
  - semua aksioma pada definisi di atas dipenuhi
- Dengan kata lain  $\langle B, \vee, \wedge, \neg, F, T \rangle$  adalah aljabar Boolean

# ALJABAR BOOLEAN 2-NILAI

- Merupakan aljabar Boolean yang paling populer, karena aplikasinya luas.
- Pada aljabar 2-nilai:
  - (i)  $B = \{0, 1\}$ ,
  - (ii) operator biner:  $+$  dan  $\cdot$ , operator uner:  $'$
  - (iii) Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

| $a$ | $b$ | $a \cdot b$ |
|-----|-----|-------------|
| 0   | 0   | 0           |
| 0   | 1   | 0           |
| 1   | 0   | 0           |
| 1   | 1   | 1           |

| $a$ | $b$ | $a + b$ |
|-----|-----|---------|
| 0   | 0   | 0       |
| 0   | 1   | 1       |
| 1   | 0   | 1       |
| 1   | 1   | 1       |

| $a$ | $a'$ |
|-----|------|
| 0   | 1    |
| 1   | 0    |

- (i) Keempat aksioma di atas dipenuhi

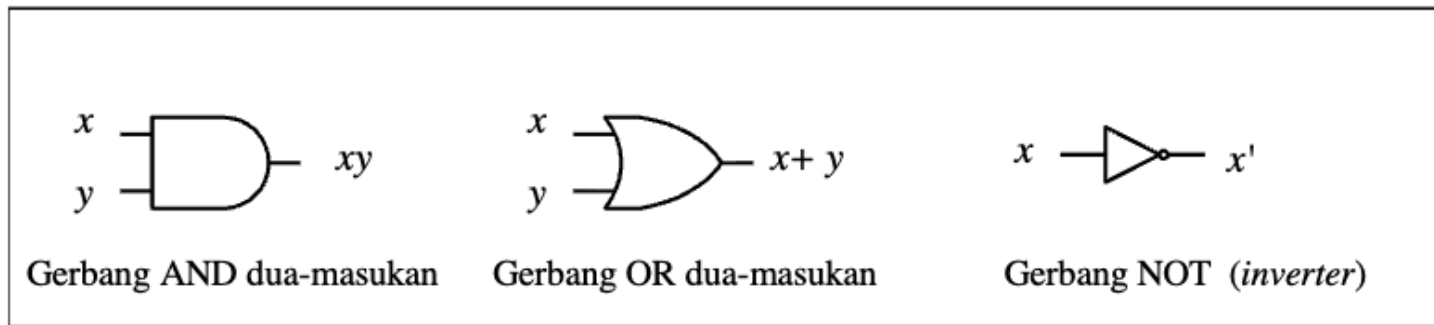
# EKSPRESI BOOLEAN

- Ekspresi Boolean dibentuk dari elemen-elemen B dan/atau peubah-peubah yang dapat dikombinasikan satu sama lain dengan operator  $+$ ,  $\cdot$ , dan  $'$ .
- Contoh 1:
  - 0
  - 1
  - A
  - B
  - $a + b$
  - $a \cdot b$
  - $a' \cdot (b + c)$ , dan sebagainya

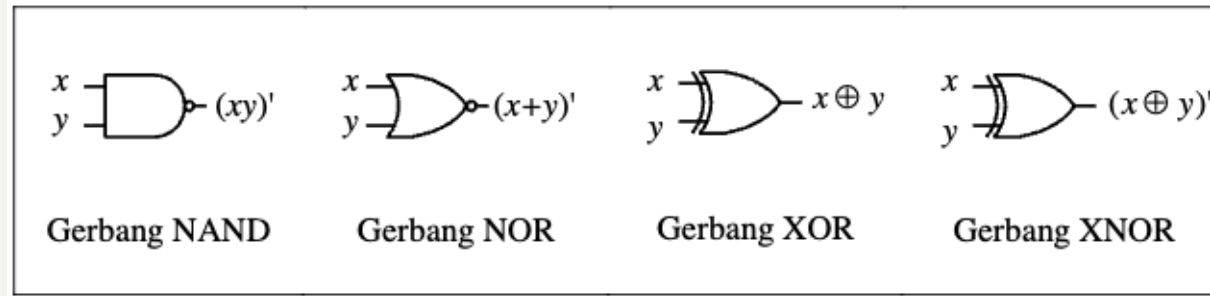


# RANGKAIAN LOGIKA

- Fungsi Boolean dapat juga direpresentasikan dalam bentuk rangkaian logika.
- Ada tiga gerbang logika dasar: gerbang AND, gerbang OR, dan gerbang NOT



- Gerbang logika turunan: NAND, NOR, XOR, dan XNOR



- Keempat gerbang di atas merupakan kombinasi dari gerbang-gerbang dasar, misalnya gerbang NOR disusun oleh kombinasi gerbang OR dan gerbang NOT:

