



INDUKSI MATEMATIKA

SEVI **NURAFNI**


BAHAN KULIAH MATEMATIKA DISKRIT
PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

[GITHUB.COM/SEVINURAFNI/FSI315](https://github.com/sevinurafni/FSI315)

- 
- Metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat adalah induksi matematika


- Contoh :

Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2

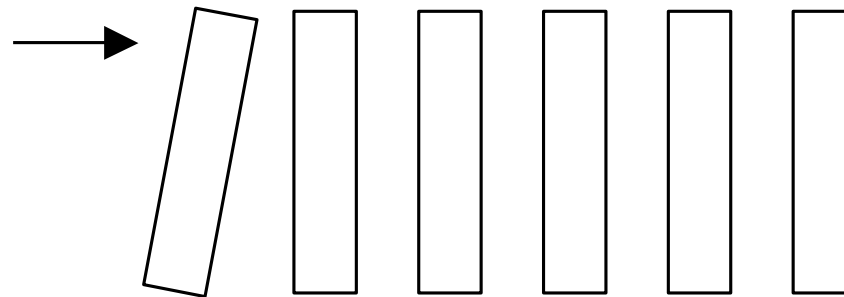
- 
- Melalui induksi matematika kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.
 - Tanpa induksi matematika, kita tentus membuktikan dengan mencoba bilangan bulat. Ini jelas tidak mungkin.

Prinsip Induksi Sederhana

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n .
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
 1. $p(1)$ benar, dan
 2. jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk setiap $n \geq 1$,

- 
- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
 - Langkah induksi berisi asumsi yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
 - Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n .

-
- Induksi matematika berlaku seperti efek domino.



Contoh 1

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .

Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk $n = 1$, jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah $1^2 = 1$. Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

(ii) Langkah induksi: Andaikan $p(n)$ benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke- n adalah $(2n - 1)$].

Kita harus memperlihatkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &= n^2 + (2n + 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 .

Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1. $p(n_0)$ benar, dan
2. jika $p(n)$ benar maka $p(n + 1)$ juga benar, untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$,

Contoh 2

Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n , buktikan dengan induksi matematika bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh: $2^0 = 2^{0+1} - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ini jelas benar, sebab } 2^0 &= 1 = 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa $p(n)$ benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n + 1)$ juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (hipotesis induksi)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2^1 + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2^{(n+1)+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n , terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Prinsip Induksi Kuat

- Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
 1. $p(n_0)$ benar, dan
 2. jika $p(n_0), p(n_0 + 1), \dots, p(n)$ benar maka $p(n + 1)$ juga benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

Contoh 3

Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi.


Jika $n = 2$, maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan $2, 3, \dots, n$ dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa $n + 1$ juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai $n + 1$:

- Jika $n + 1$ sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
- Jika $n + 1$ bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif a yang membagi habis $n + 1$ tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/a = b \text{ atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini, $2 \leq a \leq b \leq n$



Menurut hipotesis induksi, a dan b dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti, $n + 1$ jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena $n + 1 = ab$.

Karena langkah (i) dan (ii) sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif n ($n \geq 2$) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

- Pada Contoh 3 sebelumnya, kita membuat hipotesis lebih dari satu, yaitu:
 - Asumsikan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
 - Asumsikan 3 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
 - ...
 - Asumsikan n dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
- Karena $2 \leq a \leq b \leq n$, maka menurut hipotesis induksi di atas a dan b juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
- Dengan menggunakan banyak hipotesis, maka pembuktian kita menjadi lebih kuat
- Jika hanya satu saja hipotesisnya, yaitu mengasumsikan n dapat dinyatakan sebagai bilangan prima, maka pembuktiannya menjadi kurang kuat.



Latihan

Untuk semua $n \geq 1$, buktikan dengan induksi matematika bahwa $n^3 + 2n$ Adalah kelipatan 3



Latihan

Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang $Rp20.000,-$ dan $Rp50.000,-$. Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematika.



Latihan

Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jika ada n orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah $n(n - 1)/2$.

Aplikasi Induksi Matematik untuk Membuktikan Kebenaran Program



```
function Exp2(N:integer, M: integer )
```

```
{menghitung  $N^{2M}$  }
```

```
Algoritma:
```

```
   $R \leftarrow 1$ 
```

```
   $k \leftarrow 2 * M$ 
```

```
  While ( $k > 0$ )
```

```
     $R \leftarrow R * N$ 
```

```
     $k \leftarrow k - 1$ 
```

```
  end
```

```
  return R
```

```
{ Computes :  $R = N^{2M}$ 
```

```
  Loop invariant :  $R \times N^k = N^{2M}$ 
```

```
}
```

Buktikan algoritma di atas benar dengan induksi matematika (semua variabel menggambarkan bilangan bulat non negatif)



Misal R_n dan K_n adalah nilai berturut-turut dari R dan K , setelah melewati loop while sebanyak n kali, $n \geq 0$.

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan: $R_n \times N^{K_n} = N^{2M}$, $n \geq 0$. Akan ditunjukkan bahwa $p(n)$ benar dengan induksi matematika

(i) Basis:

Untuk $n = 0$, maka $R_0 = 1$, $K_0 = 2M$ adalah nilai variabel sebelum melewati loop.

Maka pernyataan $p(0)$: $R_0 \times N^{K_0} = N^{2M}$

$$1 \times N^{2M} = N^{2M}$$

adalah benar

(ii) Langkah Induksi

Asumsikan bahwa $p(n)$ adalah benar untuk suatu $n \geq 0$ setelah melewati loop n kali. Sehingga pernyataan $p(n)$ dapat ditulis : $R_n \times N^{K_n} = N^{2M}$.

Harus ditunjukkan bahwa untuk satu tambahan loop, maka

$$R_{n+1} \times N^{K_{n+1}} = N^{2M}$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Setelah satu tambahan melewati loop,

$$R_{n+1} = R_n \times N \text{ dan } K_{n+1} = K_n - 1 \text{ maka}$$


$$R_{n+1} \times N^{K_{n+1}} = (R_n \times N) \times N^{K_n - 1} \text{ (dari hipotesis)}$$

$$= (R_n \times N) \times N^{K_n} \times N^{-1}$$

$$= R_n \times N^{K_n}$$

$$= N^{2M}$$

$$\text{jadi, } R_{n+1} \times N^{K_{n+1}} = N^{2M}$$



Sehingga $p(n + 1)$ menjadi benar. Karena itu, dengan prinsip dari induksi matematika, $p(n)$ adalah benar untuk setiap $n \geq 0$

SELAMAT BELAJAR

