



# INDUKSI MATEMATIKA

SEVI **NURAFNI**

BAHAN KULIAH MATEMATIKA DISKRIT  
PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI

GITHUB.COM/SEVINURAFNI/FSI315

- 
- Metode pembuktian untuk proposisi yang berkaitan dengan bilangan bulat adalah induksi matematika
  - Contoh :

Buktikan bahwa jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$



- Melalui induksi matematika kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk ke dalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas.
- Tanpa induksi matematika, kita tentus membuktikan dengan mencoba bilangan bulat. Ini jelas tidak mungkin.

---

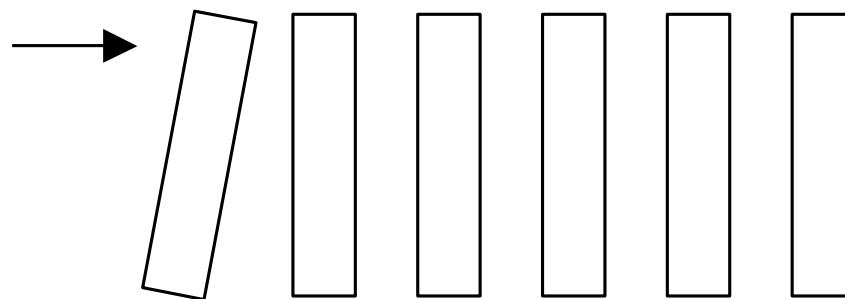
# Prinsip Induksi Sederhana

- Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat positif.
- Kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat positif  $n$ .
- Untuk membuktikan pernyataan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1.  $p(1)$  benar, dan ?
  2. jika  $p(n)$  benar, maka  $p(n + 1)$  juga benar, untuk setiap  $n \geq 1$ ,

- 
- Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induksi**.
  - Langkah induksi berisi asumsi yang menyatakan bahwa  $p(n)$  benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi**.
  - Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat positif  $n$ .



- Induksi matematika berlaku seperti efek domino.



---

## Contoh 1

Gunakan induksi matematika untuk membuktikan bahwa jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$ .

Penyelesaian:

(i) Basis induksi: Untuk  $n = 1$ , jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $1^2 = 1$ . Ini benar karena jumlah satu buah bilangan ganjil positif pertama adalah 1.

---

(ii) Langkah induksi: Andaikan  $p(n)$  benar, yaitu pernyataan

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

adalah benar (hipotesis induksi) [catatlah bahwa bilangan ganjil positif ke- $n$  adalah  $(2n - 1)$ ]. Kita harus memperlihatkan bahwa  $p(n + 1)$  juga benar, yaitu

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

juga benar. Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) &= [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\&= n^2 + (2n + 1) \\&= n^2 + 2n + 1 \\&= (n + 1)^2\end{aligned}$$

Karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar, maka jumlah  $n$  buah bilangan ganjil positif pertama adalah  $n^2$ .

# Prinsip Induksi yang Dirampatkan

Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan  $\square$ kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ . Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

1.  $p(n_0)$  benar, dan  $\square$
2. jika  $p(n)$  benar maka  $p(n + 1)$  juga benar, untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ ,

---

## Contoh 2

Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif  $n$ , buktikan dengan induksi matematika bahwa  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

Penyelesaian:

(i) Basis induksi. Untuk  $n = 0$  (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh:  $2^0 = 2^{0+1} - 1$ .

Ini jelas benar, sebab  $2^0 = 1 = 2^{0+1} - 1$

$$\begin{aligned} &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) Langkah induksi. Andaikan bahwa  $p(n)$  benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

adalah benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa  $p(n+1)$  juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

juga benar. Ini kita tunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} &= (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \text{ (*hipotesis induksi*)} \\ &= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\ &= (2 \cdot 2^{n+1}) - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \\ &= 2^{(n+1)+1} - 1 \end{aligned}$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif  $n$ , terbukti bahwa  $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

---

# Prinsip Induksi Kuat

- Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa  $p(n)$  benar untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ . Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:
  1.  $p(n_0)$  benar, dan
  2. jika  $p(n_0), p(n_0 + 1), \dots, p(n)$  benar maka  $p(n + 1)$  juga benar untuk semua bilangan bulat  $n \geq n_0$ .

---

## Contoh 3

Bilangan bulat positif disebut prima jika dan hanya jika bilangan bulat tersebut habis dibagi dengan 1 dan dirinya sendiri. Kita ingin membuktikan <sup>?</sup> bahwa setiap bilangan bulat positif  $n$  ( $n \geq 2$ ) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima. Buktikan dengan prinsip induksi kuat.

Penyelesaian:

Basis induksi.

Jika  $n = 2$ , maka 2 sendiri adalah bilangan prima dan di sini 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian dari satu buah bilangan prima, yaitu dirinya sendiri.

Langkah induksi. Misalkan pernyataan bahwa bilangan  $2, 3, \dots, n$  dapat dinyatakan sebagai perkalian (satu atau lebih) bilangan prima adalah benar (hipotesis induksi). Kita perlu menunjukkan bahwa  $n + 1$  juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima. Ada dua kemungkinan nilai  $n + 1$ :

- Jika  $n + 1$  sendiri bilangan prima, maka jelas ia dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima.
- Jika  $n + 1$  bukan bilangan prima, maka terdapat bilangan bulat positif  $a$  yang membagi habis  $n + 1$  tanpa sisa. Dengan kata lain,

$$(n + 1)/a = b \text{ atau } (n + 1) = ab$$

yang dalam hal ini,  $2 \leq a \leq b \leq n$



Menurut hipotesis induksi,  $a$  dan  $b$  dapat dinyatakan sebagai perkalian satu atau lebih bilangan prima. Ini berarti,  $n + 1$  jelas dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima, karena  $n + 1 = ab$ .

Karena langkah (i) dan (ii)<sup>2</sup> sudah ditunjukkan benar, maka terbukti bahwa setiap bilangan bulat positif  $n$  ( $n \geq 2$ ) dapat dinyatakan sebagai perkalian dari (satu atau lebih) bilangan prima.

- Pada Contoh 3 sebelumnya, kita membuat hipotesis lebih dari satu, yaitu:
  - Asumsikan 2 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
  - Asumsikan 3 dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
  - ...
  - Asumsikan  $n$  dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
- Karena  $2 \leq a \leq b \leq n$ , maka menurut hipotesis induksi di atas  $a$  dan  $b$  juga dapat dinyatakan sebagai perkalian bilangan prima
- Dengan menggunakan banyak hipotesis, maka pembuktian kita menjadi lebih kuat
- Jika hanya satu saja hipotesisnya, yaitu mengasumsikan  $n$  dapat dinyatakan sebagai bilangan prima, maka pembuktianya menjadi kurang kuat.



# Latihan

Untuk semua  $n \geq 1$ , buktikan dengan induksi matematika bahwa  $n^3 + 2n$  Adalah kelipatan 3

---

# Latihan

Sebuah ATM (Anjungan Tunai Mandiri) hanya menyediakan pecahan uang  $Rp20.000,-$  dan  $Rp50.000,-$ . Kelipatan uang berapakah yang dapat dikeluarkan oleh ATM tersebut? Buktikan jawaban anda dengan induksi matematika.

# Latihan

Di dalam sebuah pesta, setiap tamu berjabat tangan dengan tamu lainnya hanya sekali saja. Buktikan dengan induksi matematika bahwa jika ada  $n$  orang tamu maka jumlah jabat tangan yang terjadi adalah  $n(n - 1)/2$ .

# **Aplikasi Induksi Matematik untuk Membuktikan Kebenaran Program**

---

---

```
function Exp2(N:integer, M: integer )
```

```
{menghitung  $N^{2M}$  }
```

Algoritma:

```
R ← 1
```

```
k ← 2*M
```

```
While (k > 0)
```

```
    R ← R * N
```

```
    k ← k - 1
```

```
end
```

```
return R
```

```
{ Computes :  $R = N^{2M}$ 
```

```
Loop invariant :  $R \times N^k = N^{2M}$ 
```

```
}
```

Buktikan algoritma di atas benar dengan induksi matematika (semua variabel menggambarkan bilangan bulat non negatif)

Misal  $R_n$  dan  $K_n$  adalah nilai berturut-turut dari  $R$  dan  $K$ , setelah melewati loop while sebanyak  $n$  kali,  $n \geq 0$ .

Misalkan  $p(n)$  adalah pernyataan:  $R_n \times N^{K_n} = N^{2M}$ ,  $n \geq 0$ . Akan ditunjukkan bahwa  $p(n)$  benar dengan induksi matematika

(i) Basis:

Untuk  $n = 0$ , maka  $R_0 = 1$ ,  $K_0 = 2M$  adalah nilai variabel sebelum melewati loop.

Maka pernyataan  $p(0)$ :  $R_0 \times N^{K_0} = N^{2M}$

$$1 \times N^{2M} = N^{2M}$$

adalah benar

## (ii) Langkah Induksi

Asumsikan bahwa  $p(n)$  adalah benar untuk suatu  $n \geq 0$  setelah melewati loop  $n$  kali. Sehingga pernyataan  $p(n)$  dapat ditulis :  $R_n \times N^{K_n} = N^{2M}$ .

Harus ditunjukkan bahwa untuk satu tambahan loop, maka

$$R_{n+1} \times N^{K_{n+1}} = N^{2M}$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut: Setelah satu tambahan melewati loop,

$$R_{n+1} = R_n \times N \text{ dan } K_{n+1} = K_n - 1 \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} R_{n+1} \times N^{K_{n+1}} &= (R_n \times N) \times N^{K_n - 1} \text{ (dari hipotesis)} \\ &= (R_n \times N) \times N^{K_n} \times N^{-1} \\ &= R_n \times N^{K_n} \\ &= N^{2M} \end{aligned}$$

jadi,  $R_{n+1} \times N^{K_{n+1}} = N^{2M}$



Sehingga  $p(n + 1)$  menjadi benar. Karena itu, dengan prinsip dari induksi matematika,  $p(n)$  adalah benar untuk setiap  $n \geq 0$

# **SELAMAT BELAJAR**

---