PERSAMAAN REGRESI BENTUK MATRIKS

March 20, 2024

Sains Data IKOPIN

Pengantar Model Linear

github.com/sevinurafni/SD2201

Perhatian model linear berikut

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \tag{1}$$

karena terdiri dari n pengamatan yang berpasangan maka model di atas menjadi

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \tag{2}$$

atau

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_0 + \beta_1 X_2 + \varepsilon_2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 X_n + \varepsilon_n \end{aligned} \tag{3}$$

alih-alih menuliskan n persamaan, dengan menggunakan notasi matriks, persamaan regresi linier sederhana kita direduksi menjadi sebuah pernyataan yang singkat dan sederhana:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{4}$$

dengan,

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

dengan metode kuadra terkecil dapat dicari taksiran dari β_0 dan β_1 sebagai berikut:

$$(X^\top X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$(X^\top Y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & \\ Y_2 & \\ \vdots & \vdots \\ Y_n & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma Y_i \\ \Sigma Y_i X_i \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

sehingga nilai β diperoleh dengan

$$\beta = (X^\top X)^{-1}(X^\top Y) \tag{9}$$

Untuk menguji koefisien regresi dengan menggunakan daftar Anova berikut

Sumber	Dk	Jk
Regresi β	1	$\beta^\top(X^\top Y)$
Kekeliruan	n-2	$(Y^\top Y) - \beta^\top(X^\top Y)$
Total	n-1	$(Y^\top Y)$

dengan

$$(Y^\top Y) = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

sedangkan

$$F_{perhitungan} = \frac{(\text{Jk regresi})/1}{(\text{Jk kekeliruan})/(n-2))} \tag{11}$$

Tolak H_0 jika

$$F_{perhitungan} > F_\alpha;(1:n-2) \tag{12}$$

Varians dari β dalam bentuk matriks

$$Var(\beta) = \sigma^2(X^\top X)^{-1} \tag{13}$$

dengan invers matriks dari $(X^\top X)$ adalah

$$(X^\top X) = \begin{bmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$D = n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2 = n[\sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}] = n\sum(X_i - \bar{X})^2 \tag{15}$$

sehingga

$$(X^\top X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sum X_i^2}{n\sum(X_i-\bar{X})^2} & \frac{-\sum X_i}{n\sum(X_i-\bar{X})^2} \\ \frac{-\sum X_i}{n\sum(X_i-\bar{X})^2} & \frac{n}{n\sum(X_i-\bar{X})^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_i^2}{\sum(X_i-\bar{X})^2} & \frac{-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} \\ \frac{-\bar{X}}{\sum(X_i-\bar{X})^2} & \frac{1}{\sum(X_i-\bar{X})^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Varains $\hat{Y}$ dengan menggunakan matriks adalah

$$\text{Var}(\hat{Y}) = X_k(X^\top X)^{-1}X_k^\top \sigma^2 \tag{17}$$

dengan $X_k = \begin{bmatrix} 1 & X \end{bmatrix}$

Contoh:

X = tekanan dalam kg/cm^2 yang dipakai untuk melebarkan kepingan besi.

Y = pelebaran keping besi diukur dalam cm^2. Hasil terhadap delapan pengamatan adalah sebagai berikut:

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	6,0	8,3	8,5	9,2	10,3	11,5	14,0	15,6

Tentukanlah:

a. Persamaan regresi Y atas α

b. Varkov dari β

c. Varians dari $\hat{Y}$ jika $X_k = 6.5$

Penyelesaian:

a.

$$(X^\top X) = \begin{bmatrix} 8 & 36 \\ 36 & 204 \end{bmatrix} \qquad (X^\top X)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{204}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix}$$

$$(X^\top Y) = \begin{bmatrix} 83,4 \\ 428,2 \end{bmatrix} \qquad (Y^\top Y) = 939,48$$

$$\beta = (X^\top X)^{-1}(X^\top Y) = \begin{bmatrix} \frac{204}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}4 \\ 428{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}76 \\ 1{,}26 \end{bmatrix}$$

sehingga persamaan regresinya adalah $\hat{Y} = 4{,}76 + 1{,}26X$

b. Jk regresi $\beta = \beta^\top (X^\top Y) = \begin{bmatrix} 4{,}76 & 1{,}26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 83{,}4 \\ 428{,}2 \end{bmatrix} = 936{,}516$

$$\begin{aligned} \text{Jk kekeliruan} &= \text{Jk total} - \text{jk regresi}\beta \\ &= 939{,}48 - 936{,}516 \\ &= 2{,}964 \\ \text{RJk kekeliruan} &= \text{Jk kekeliruan}/(n-2) \\ &= 2{,}964/6 \\ &= 0{,}494 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\beta) &= \sigma^2 (X^\top X)^{-1} \\ &= 0{,}494 \begin{bmatrix} \frac{204}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0{,}2999 & -0{,}0529 \\ -0{,}0529 & 0{,}0118 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{Y}) &= X_k (X^\top X)^{-1} X_k^\top \sigma^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 6{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{204}{336} & \frac{-36}{336} \\ \frac{-36}{336} & \frac{8}{336} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6{,}5 \end{bmatrix} 0{,}494 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{-30}{336} & \frac{16}{336} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6{,}5 \end{bmatrix} \quad 0{,}494 \\ &= \frac{74}{336} \quad 0{,}494 \\ &= 0{,}1088 \end{aligned}$$