Elliptic Curve Cryptography (ECC) - 2

Bahan Kuliah Keamanan Data

Sevi **Nurafni**

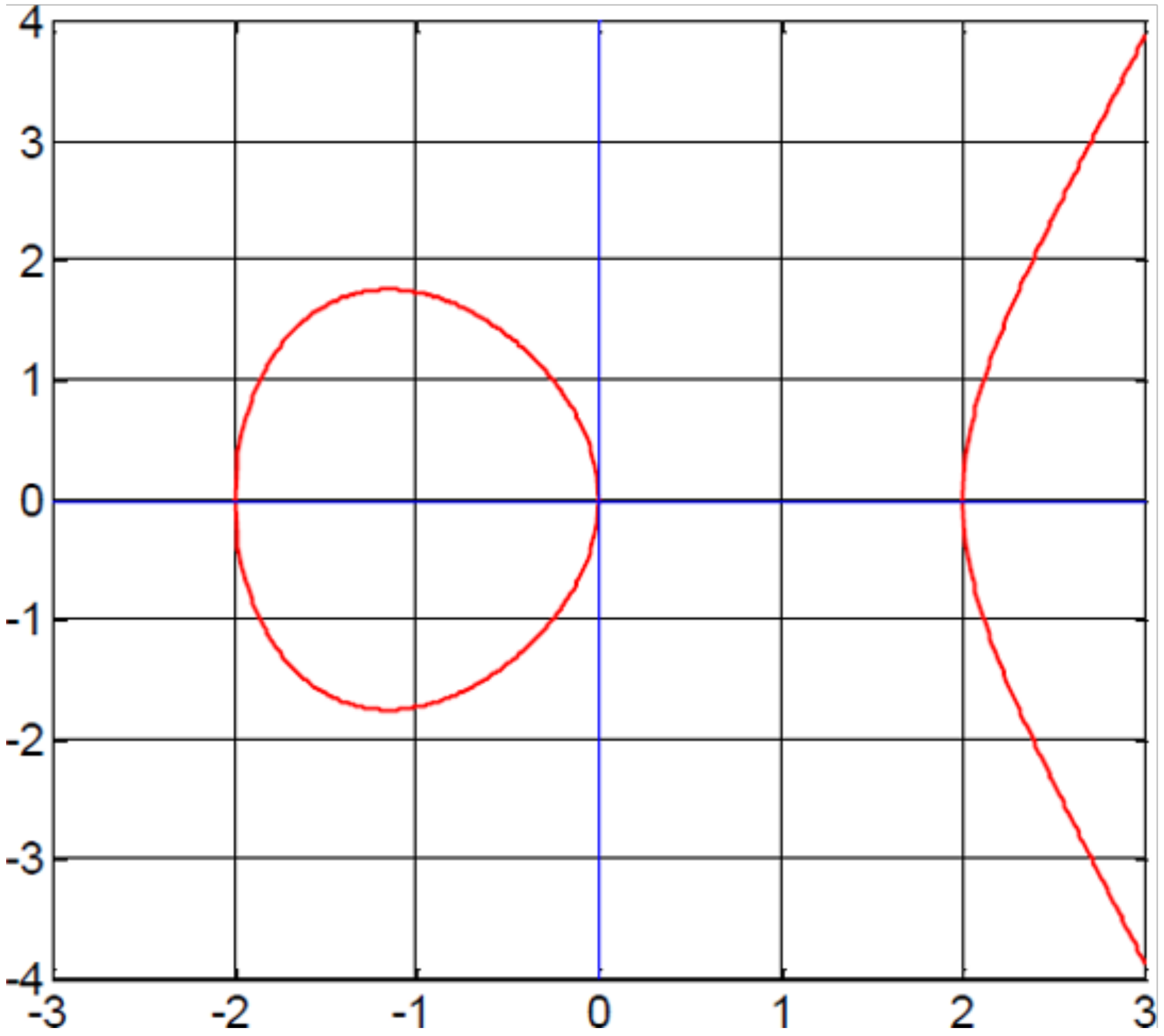
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Koperasi Indonesia 2025

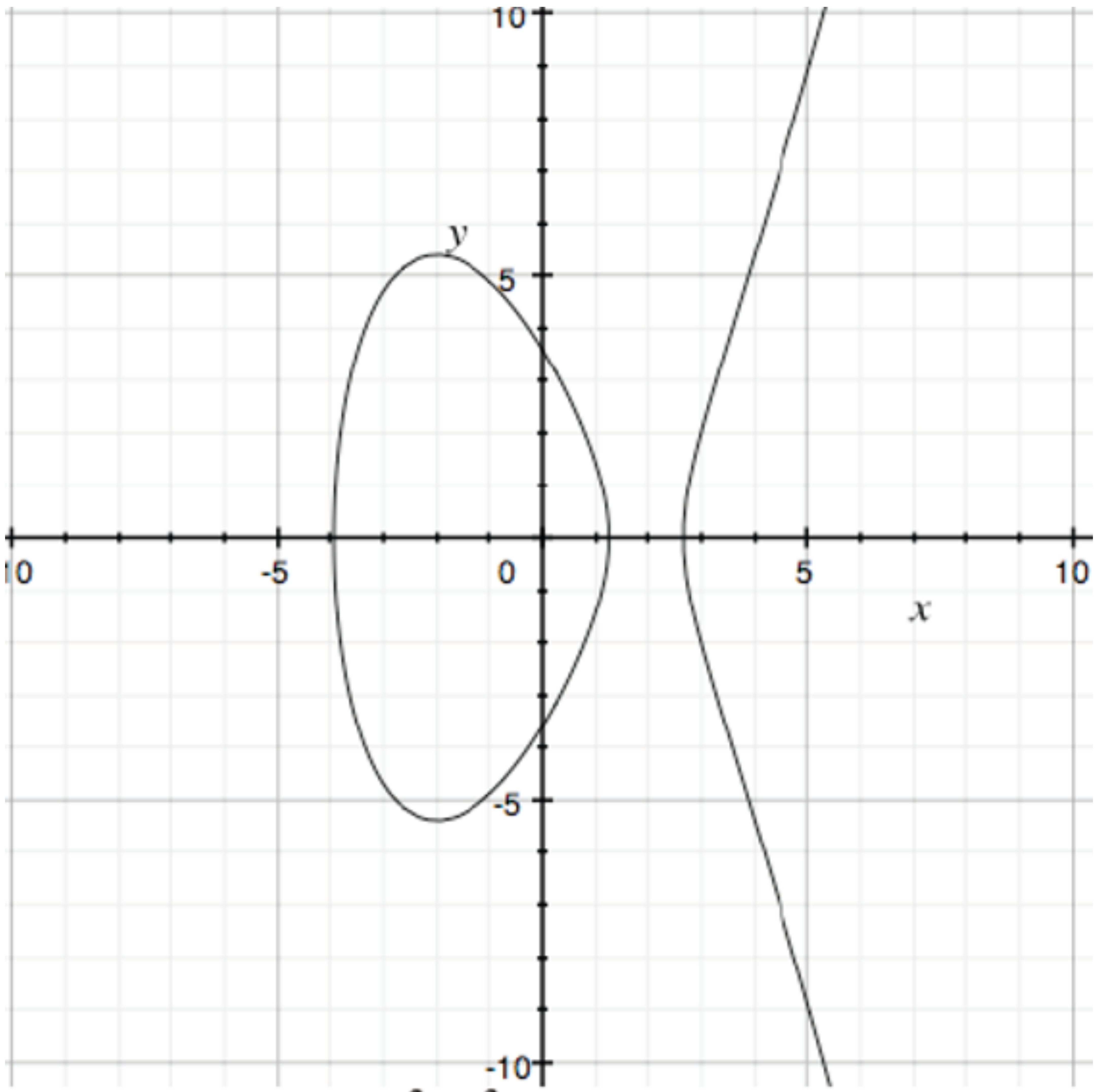
Kurva Eliptik

- Kurva eliptik adalah kurva dengan bentuk umum persamaan: $y^2 = x^3 + ax + b$ dengan syarat $4a^3 + 27b^2 \neq 0$
- Tiap nilai a dan b yang berbeda memberikan kurva eliptik yang berbeda pula.

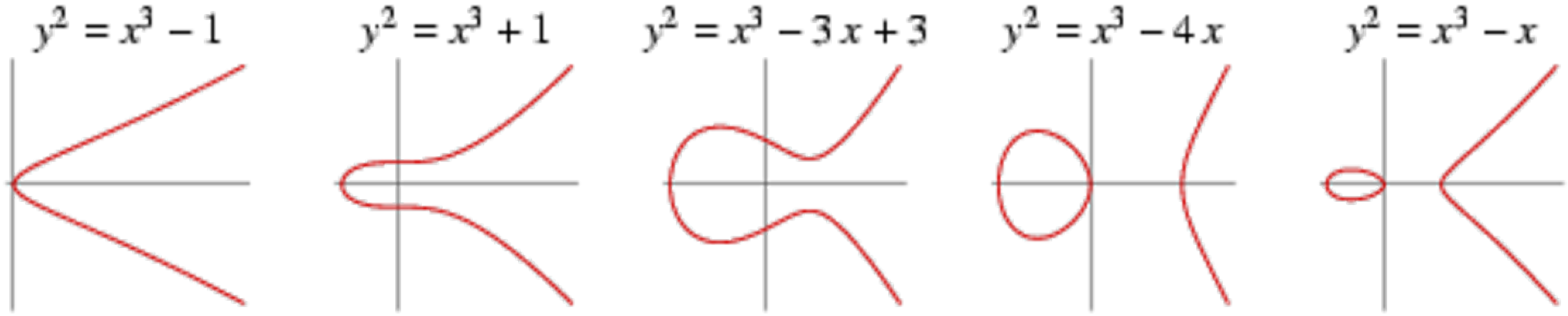
Contoh: $y^2 = x^3 - 4x$

$$= x(x-2)(x+2)$$





$y^2 = x^3 - 12x + 13$



Sumber gambar: **Debdeep Mukhopadhyay**, **Elliptic Curve Cryptography** ,
Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

- Kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b$ terdefinisi untuk $x, y \in R$
- Didefinisikan sebuah titik bernama titik $O(x, \infty)$, yaitu titik pada infinity.
- Titik-titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik bersama operasi $+$ membentuk sebuah grup.

  Himpunan G: semua titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik

  Operasi biner: $+$

Penjumlahan Titik pada Kurva Eliptik

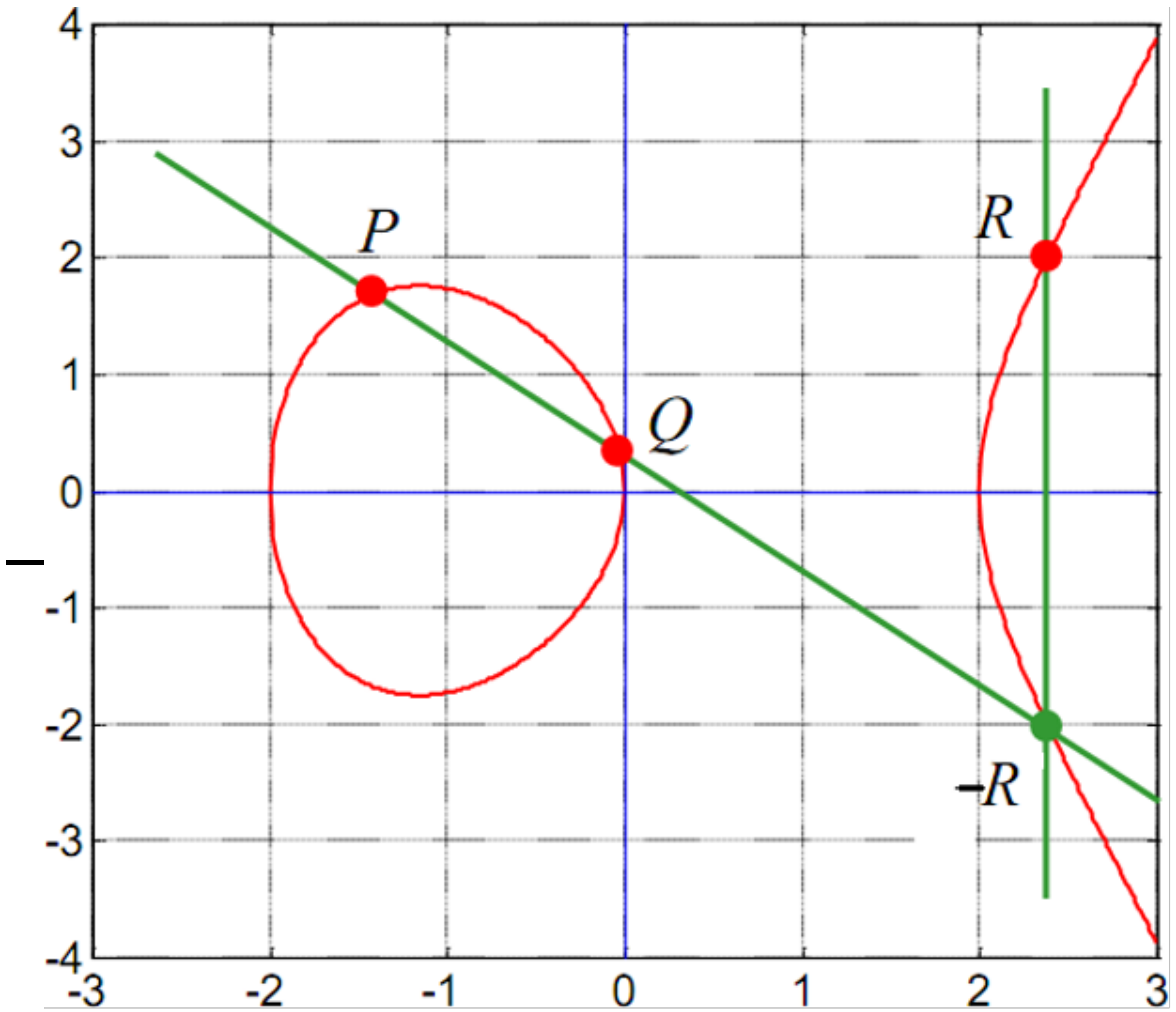
A. $P + Q = R$

Penjelasan geometri:

1. Tarik garis melalui P dan Q

2. Jika $P \neq Q$ garis tersebut memotong kurva pada titik $-$ terhadap sumbu-x adalah titik R

3. Titik R adalah hasil penjumlahan titik P dan Q



Keterangan: Jika $R = (x, y)$ maka $-R$ adalah titik $(x, -y)$

Penjelasan Analitik $P + Q = R$

Persamaan garis g: $y = mx + c$

Gradien garis g: $\dfrac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$

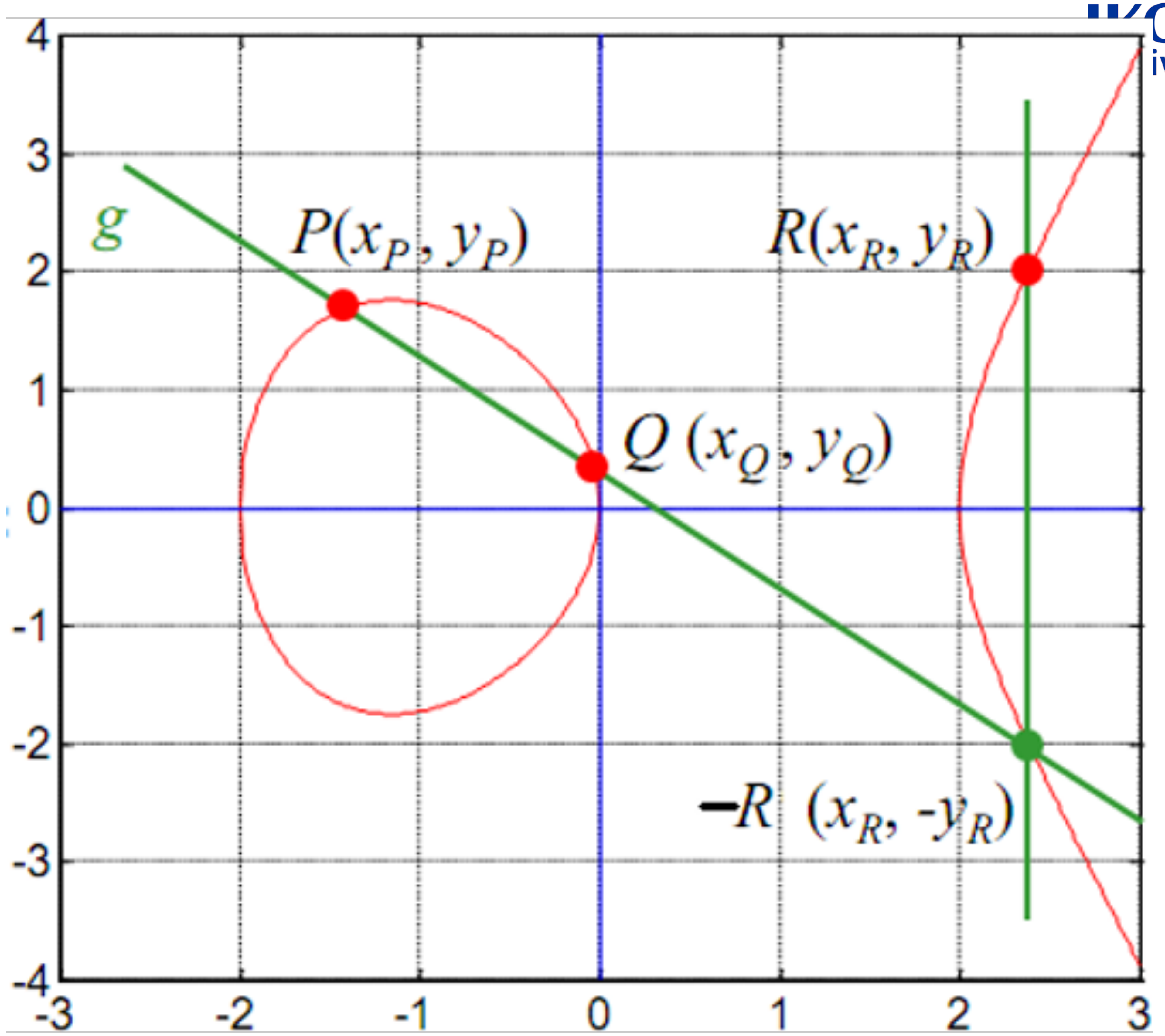
Perpotongan garis g dengan kurva $y^2 = x^2 + ax + b$:

$$(mx + c)^2 = x^3 + ax + b$$

Koordinat Titik R:

$$x^r = m^2 - x^p - x^q$$

$$y^r = m(x^p - x^r) - y^p$$



Sumber gambar: Andreas Steffen, Elliptic Curve Cryptography

Contoh: Kurva eliptik $y^2 = x^3 + 2x + 4$

Misalkan $P(2,4)$ dan $Q(0,2)$ dua titik pada kurva Penjumlahan titik: $P + Q = R$. Tentukan R!

Langkah-langkah menghitung koordinat R:

- Gradien garis g: $m = (y_p - y_q)/(x_p - x_q) = (4 - 2)/(2 - 0) = 1$
- $x_r = m^2 - x_p - x_q = 1^2 - 2 - 0 = -1$
- $y_r = m(x_p - x_r) - y_p = 1(2 - (-1)) - 4 = -1$
- Jadi koordinat $R(-1, -1)$
- Periksa apakah $R(-1, -1)$ sebuah titik pada kurva eliptik: $y^2 = x^3 + 2x + 4$

$$(-1)^2 = (-1)^3 + 2(-1) + 4$$
$$1 = -1 - 2 + 4$$
$$1 = 1$$

(terbukti $R(-1, -1)$ titik pada kurva $y^2 = x^3 + 2x + 4$)

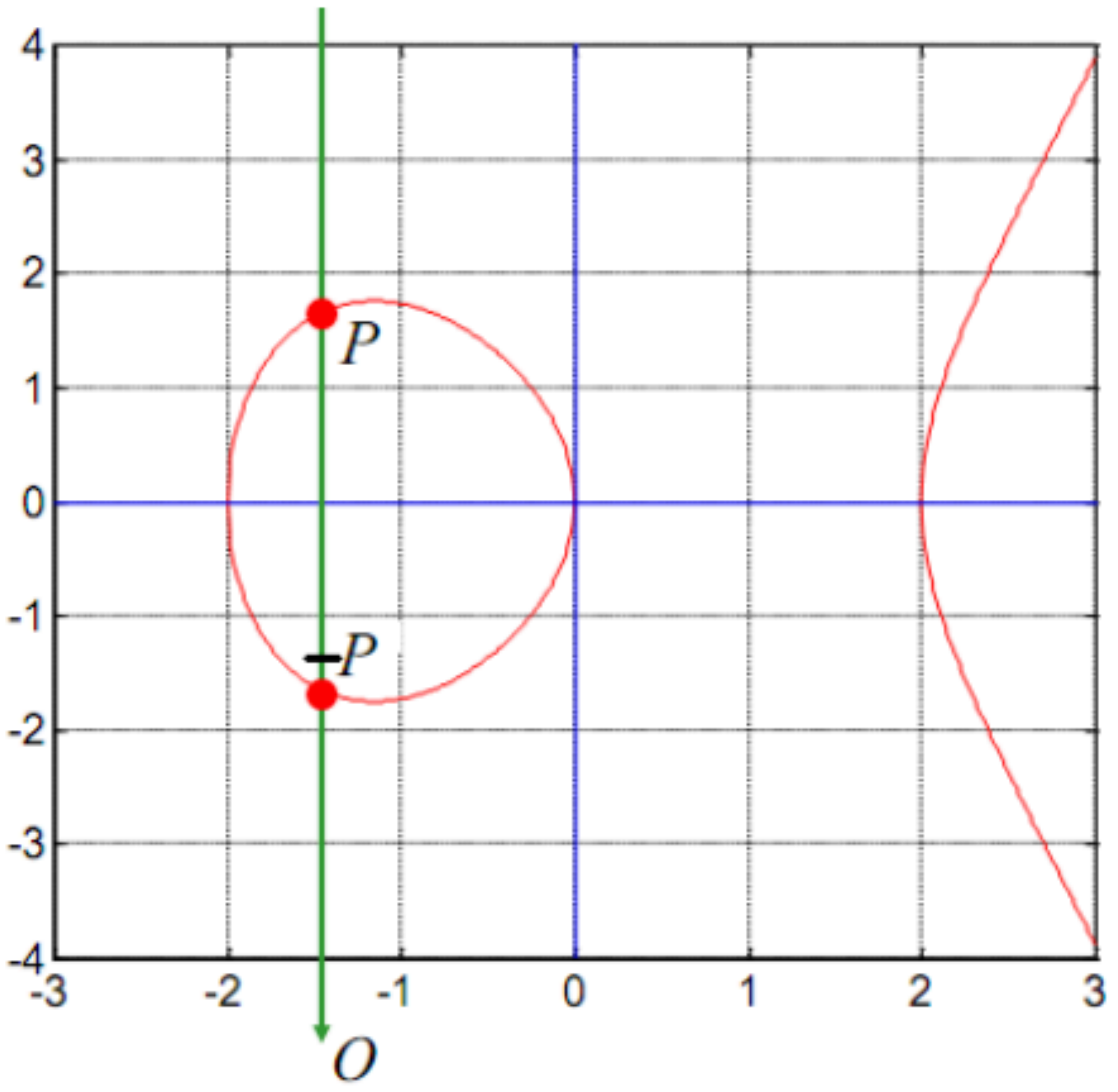
B. $P + (-P) = O$, di sini O adalah titik di infinity

$P' = -P$ adalah elemen invers:

$$P + P' = P + (-P) = O$$

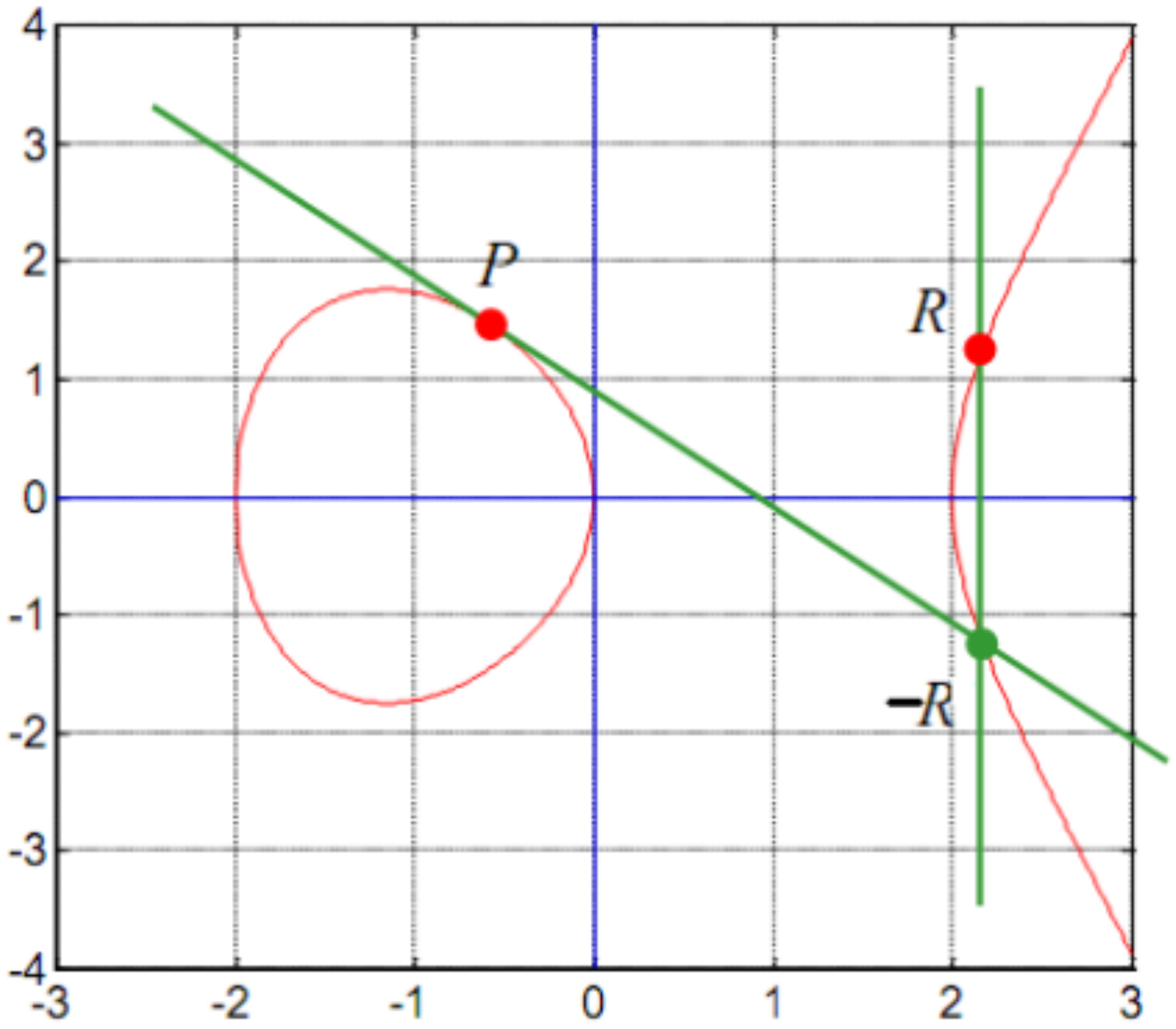
O adalah elemen netral:

$$P + O = O + P = P$$

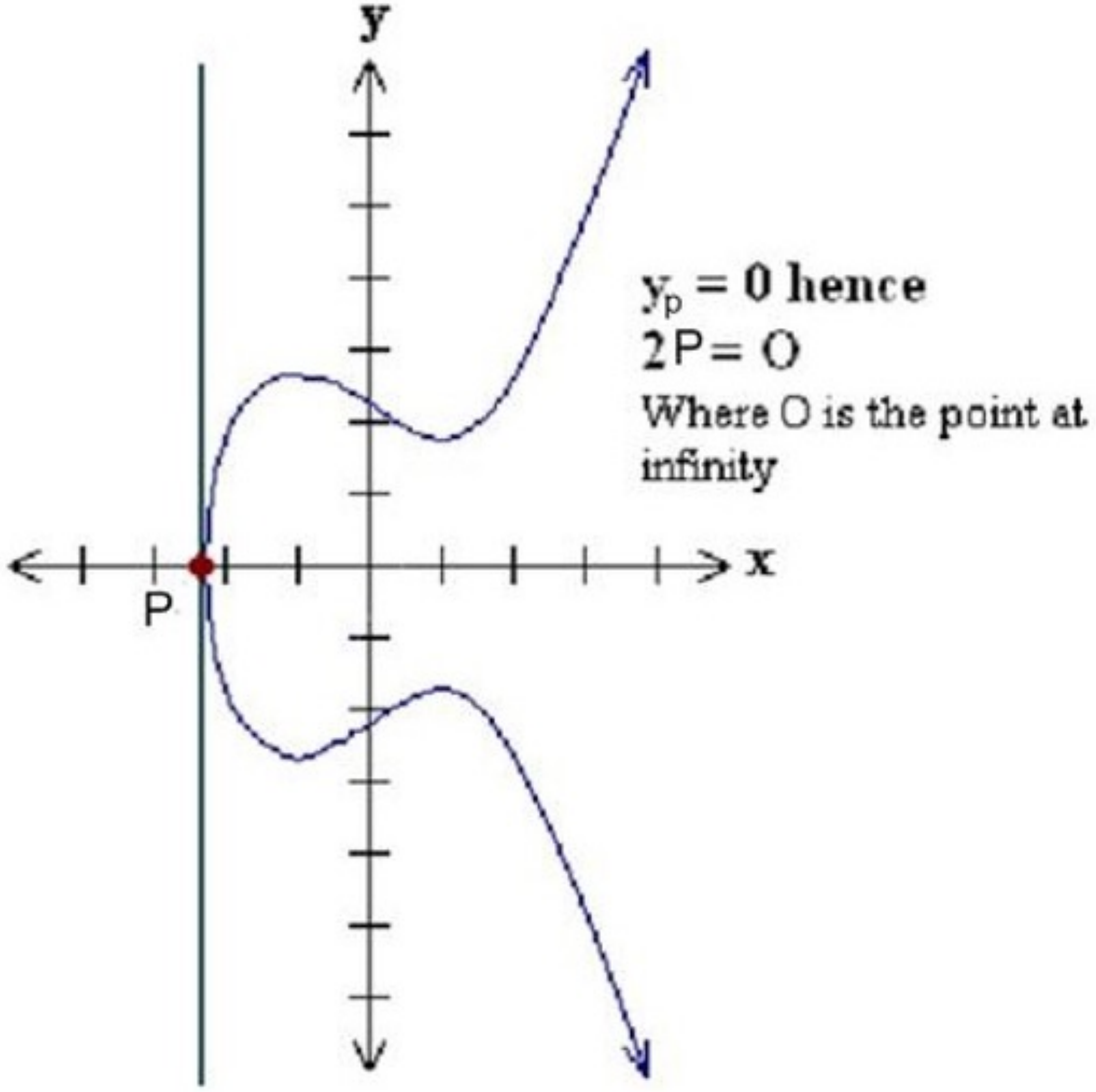


Penggandaan Titik

- Penggandaan titik (point doubling): menjumlahkan sebuah titik pada dirinya sendiri
- Penggandaan titik membentuk tangen pada titik $P(x, y)$
- $P + P = 2P = R$



- Jika ordinat titik P nol, yaitu $y_p =$ nol, maka tangen pada titik tersebut berpotongan pada sebuah titik di infinity.
- Di sini, $P + P = 2P = O$



Penjelasan Analitik $P + P = 2P = R$

Persamaan tangen g: $y = mx + c$

Gradien garis g: $m = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x_p^2 + a}{2y_p}$

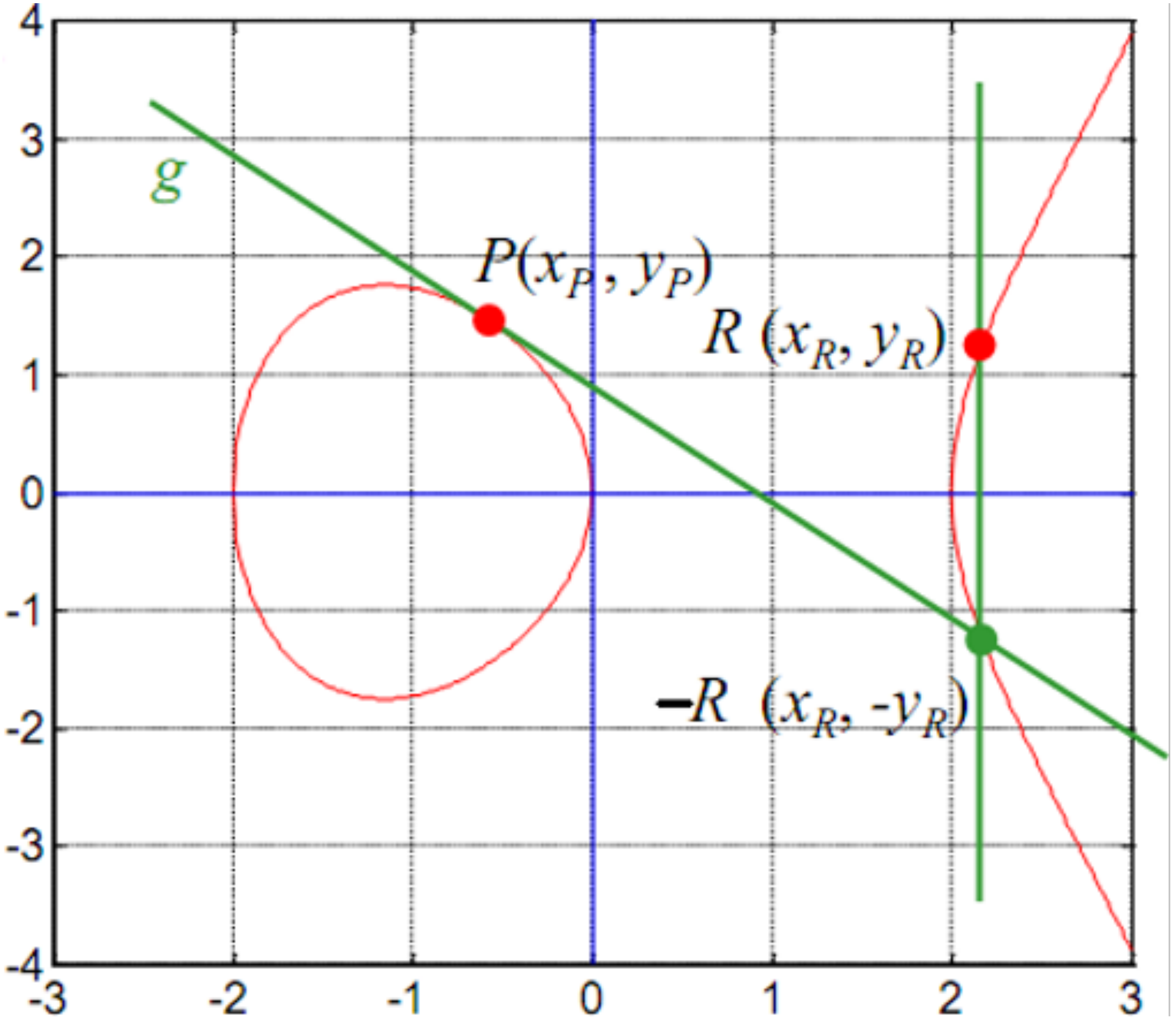
Perpotongan garis g dengan kurva:

$$(mx + c)^2 = x^3 + ax + b$$

Koordinat Titik R: $x_r = m^2 - 2x_p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$

Jika $y_p = 0$ maka m tidak terdefinisi sehingga $2P = O$



- Contoh:

$P+P = 2P$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p}$$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$

P (2, 2.65)

$-R$ (-1.11, -2.64)

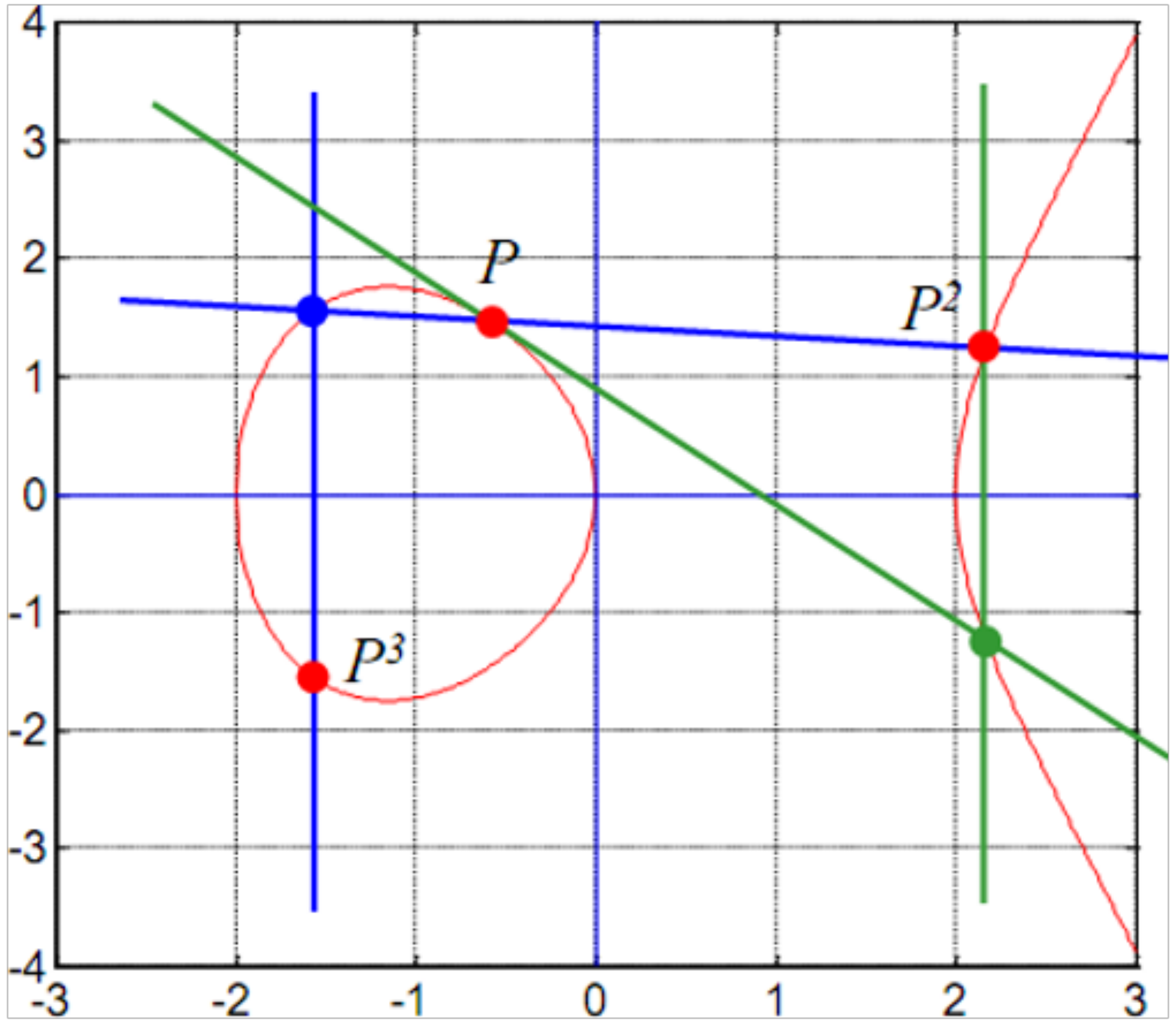
R (-1.11, 2.64)

$2P = R = (-1.11, 2.64)$.

$y^2 = x^3 - 3x + 5$

Iterasi Titik

- Pelelaran titik (point iteration): menjumlahkan sebuah titik sebanyak $k - 1$ kali terhadap dirinya sendiri.
- $P^k = kP = P + P + \ldots + P$•
- Jika $k = 2 \rightarrow P^2 = 2P = P + P$



Jelaslah Kurva Eliptik membentuk Grup <G, +>

Karena:

- Himpunan G: semua titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik
- Operasi biner: +
- Semua aksioma terpenuhi sbb:

1. Closure: semua operasi $P + Q$ berada di dalam G
2. Asosiatif: $P + (Q + R) = (P + Q) + R$
3. Elemen netral adalah 0: $P + O = O + P = P$
4. Elemen invers adalah $-P$: $P + (-P) = O$
5. Komutatif: $P + Q = Q + P$ (abelian)

Perkalian Titik

- Perkalian titik: $kP = Q$
- Ket: k adalah skalar, P dan Q adalah titik pada kurva eliptik
- Perkalian titik diperoleh dengan perulangan dua operasi dasar kurva eliptik yang sudah dijelaskan:
    1. Penjumlahan titik $(P + Q = R)$
    2. Penggandaan titik $(2P = R)$

- Contoh: $k = 3 \rightarrow 3P = P + P + P$ atau $3P = 2P + P$
- $k = 23 \rightarrow kP = 23P = 2(2(2(2P) + P) + P) + P$

Kurva Eliptik pada Galois Field

- Operasi kurva eliptik yang dibahas sebelum ini didefinisikan pada bilangan riil.

- Operasi pada bilangan riil tidak akurat karena mengandung pembulatan

- Pada sisi lain, kriptografi dioperasikan pada ranah bilangan integer.

- Agar kurva eliptik dapat dipakai di dalam kriptografi, maka kurva eliptik didefinisikan pada medan berhingga atau Galois Field, yaitu $GF(p)$ dan $GF(2^m)$.

- Yang dibahas dalam kuliah ini hanya kurva eliptik pada $GF(p)$

Kurva Eliptik $GF(p)$

Bentuk umum kurva eliptik pada $GF(p)$ (atau F_p) :

$y^2 = x^3 + ax + b \bmod p$

yang dalam hal ini p adalah bilangan prima dan elemen-elemen medan galois adalah $\{0,1,2,\ldots,p-1\}$

Contoh: Tentukan semua titik $P(x, y)$ pada kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6 \bmod 11$ dengan x dan y didefinisikan di dalam $GF(11)$

Jawab:

$x = 0 \rightarrow y^2 = 6 \bmod 11 \rightarrow$ tidak ada nilai y yang memenuhi

$x = 1 \rightarrow y^2 = 8 \bmod 11 \rightarrow$ tidak ada nilai y yang memenuhi

$x = 2 \rightarrow y^2 = 16 \bmod 11 \equiv 5$ (mod 11) $\rightarrow y_1 = 4$ dan $y_2 = 7$

$\rightarrow P(2,4)$ dan $P'(2,7)$

$x = 3 \rightarrow y^2 = 36 \bmod 11 \equiv 3$ (mod 11) $\rightarrow y_1 = 5$ dan $y_2 = 6$

$\rightarrow P(3,5)$ dan $P'(3,6)$

Jika diteruskan untuk $x = 4{,}5{,}\ldots{,}10$, diperoleh tabel sebagai berikut :

x	y^2	$y_{1,2}$	P(x,y)	P'(x,y)
0	6	-		
1	8	-		
2	5	4,7	(2,4)	(2,7)
3	3	5,6	(3,5)	(3,6)
4	8	-		
5	4	2,9	(5,2)	(5,9)
6	8	-		
7	4	2,9	(7,2)	(7,9)
8	9	3,8	(8,3)	(8,8)
9	7	-		
10	4	2,9	(10,2)	(10,9)

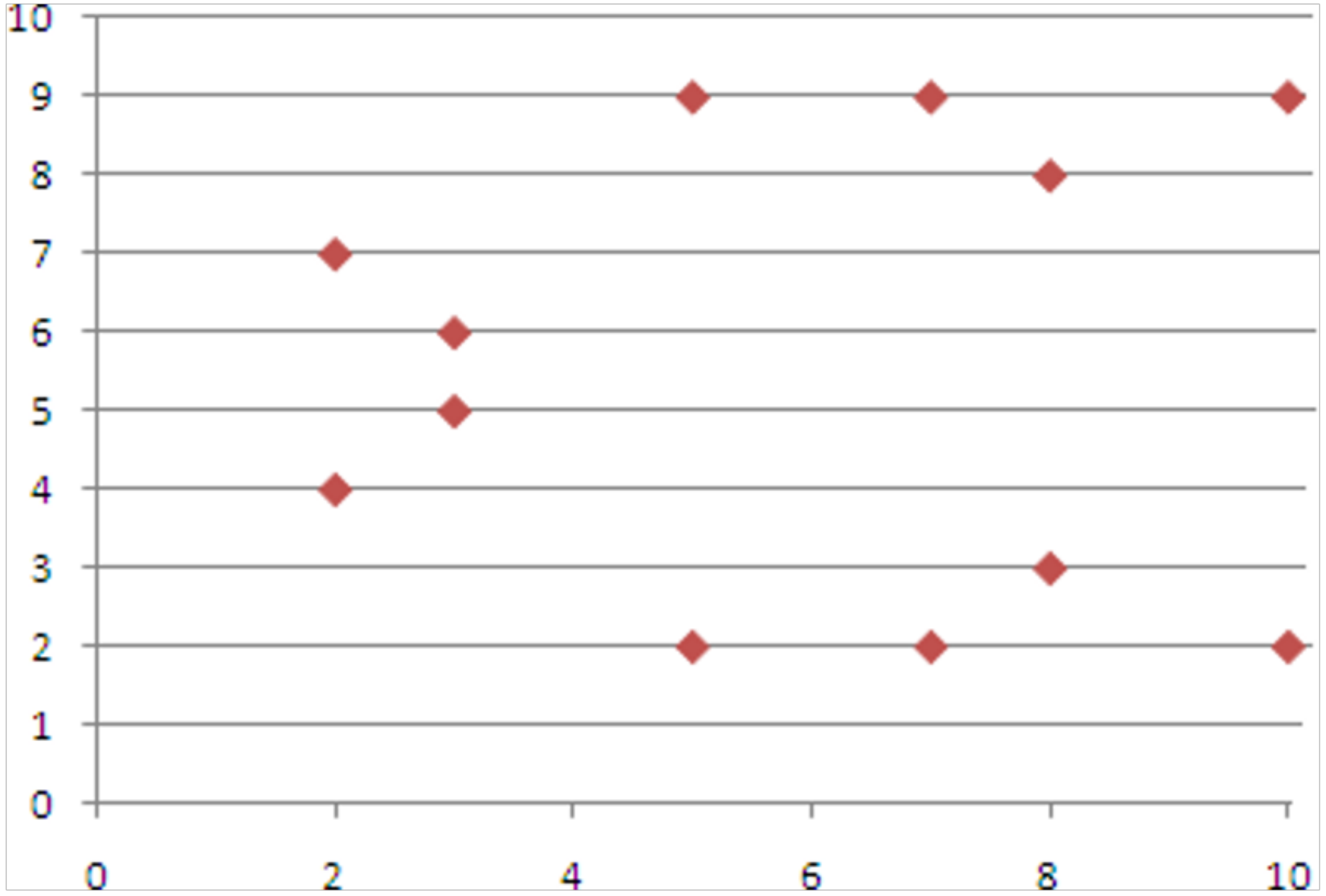
Jadi, titik-titik yang terdapat pada kurva eliptik adalah 12, yaitu:

$(2,4), (2,7), (3,5), (3,6), (5,2),$

$(5,9), (7,2), (7,9), (8,3), (8,8),$

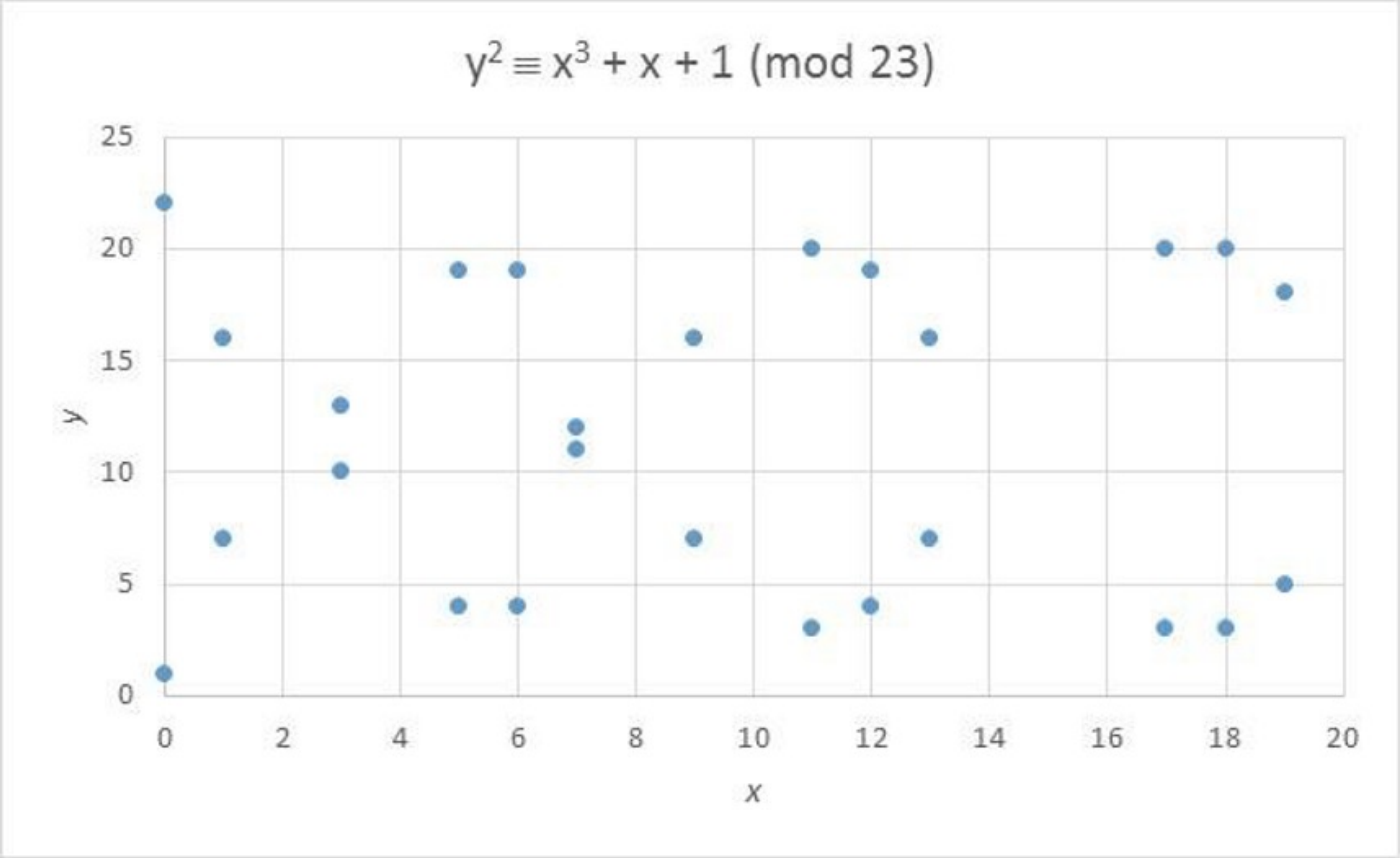
$(10,2), (10,9)$

Jika ditambah dengan titik O di infinity, maka titik-titik pada kurva eliptik membentuk grup dengan $n = 13$ elemen.



Sebaran titik di dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6 \mod 11$ pada GF(11)

Contoh lain: Kurva eliptik $y^2 \equiv x^3 + x + 1$ *(mod 23)* memiliki titik-titik di dalam himpunan {(0, 1), (0, 22), (1, 7), (1, 16), (3, 10), (3, 13), (5, 4), (5, 19) , (6, 4), (6,19), (7,11), (7, 12), (9, 7), (9, 16), (11, 3), (11, 20), (12, 4), (12, 19), (13, 7), (13,16), (17, 3), (17, 20), (18, 3), (18, 20), (19, 5), (19, 18)}.



Penjumlahan Dua Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$.

Penjumlahan: $P + Q = R$

Koordinat R:

$x_r = m_2 - x_p - x_q$ mod p

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$ mod p

m adalah gradien: $m = \dfrac{y_p - y_q}{x_p - x_q}$ mod p

Pengurangan Dua Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ dan $Q(x_q, y_q)$.

Pengurangan: $P - Q = P + (-Q)$, yang dalam hal ini

$-Q(x_q, -y_q$ (mod p)).

Penggandaan Titik di dalam EC pada GF(p)

Misalkan $P(x_p, y_p)$ yang dalam hal ini $y_p \neq 0$. Penggandaan titik: $2P = R$

Koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - 2x_p$ mod p

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$ mod p

Yang dalam hal ini,

$$m = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p} \text{ mod p}$$

Jika $y_p = 0$ maka m tidak terdefinisi sehingga $2P = O$

Contoh: Misalkan $P(2,4)$ dan $Q(5,9)$ adalah dua buah titik pada kurva eliptik $y^2 = x^3 + x + 6$ mod 11. Tentukan $P + Q$ dan $2P$.

Jawab:

(a) $P + Q = R$

$m = (9 - 4)/(5 - 2)$ mod 11 $= 5/3$ mod 11 $= 5 \cdot 3^{-1}$ mod 11

$= 5 \cdot 4$ mod 11 $\equiv 9$ mod 11

$P + Q = R$, koordinat Titik R:

$x_r = m^2 - x_p - x_q$ mod 11 $= 81 - 2 - 5$ mod 11 $\equiv 8$ (mod 11)

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p$ mod 11 $= 9(2 - 8) - 4$ mod 11 $= -58$ mod 11

$\equiv 8$ (mod 11)

Jadi, $R(8,8)$

(b) 2P = R

$$m = \frac{3x_p^2 + a}{2y_p} \bmod p$$

m = (3(2)^2 + 1)/ 8) mod 11 = 13/8 mod 11

$= 13 \cdot 8^{-1} \bmod 11$

$= 13 \cdot 7 \bmod 11$

$= 78 \bmod 11 \equiv 3 \pmod{11}$

Koordinat R:

$x_r = m^2 - 2x_p \bmod p = 3^2 - 2 \cdot 2 \bmod 11 \equiv 5 \pmod{11}$

$y_r = m(x_p - x_r) - y_p \bmod p = 3(2 - 5) - 4 \bmod 11$

$= -13 \bmod 11 \equiv 9 \pmod{11}$

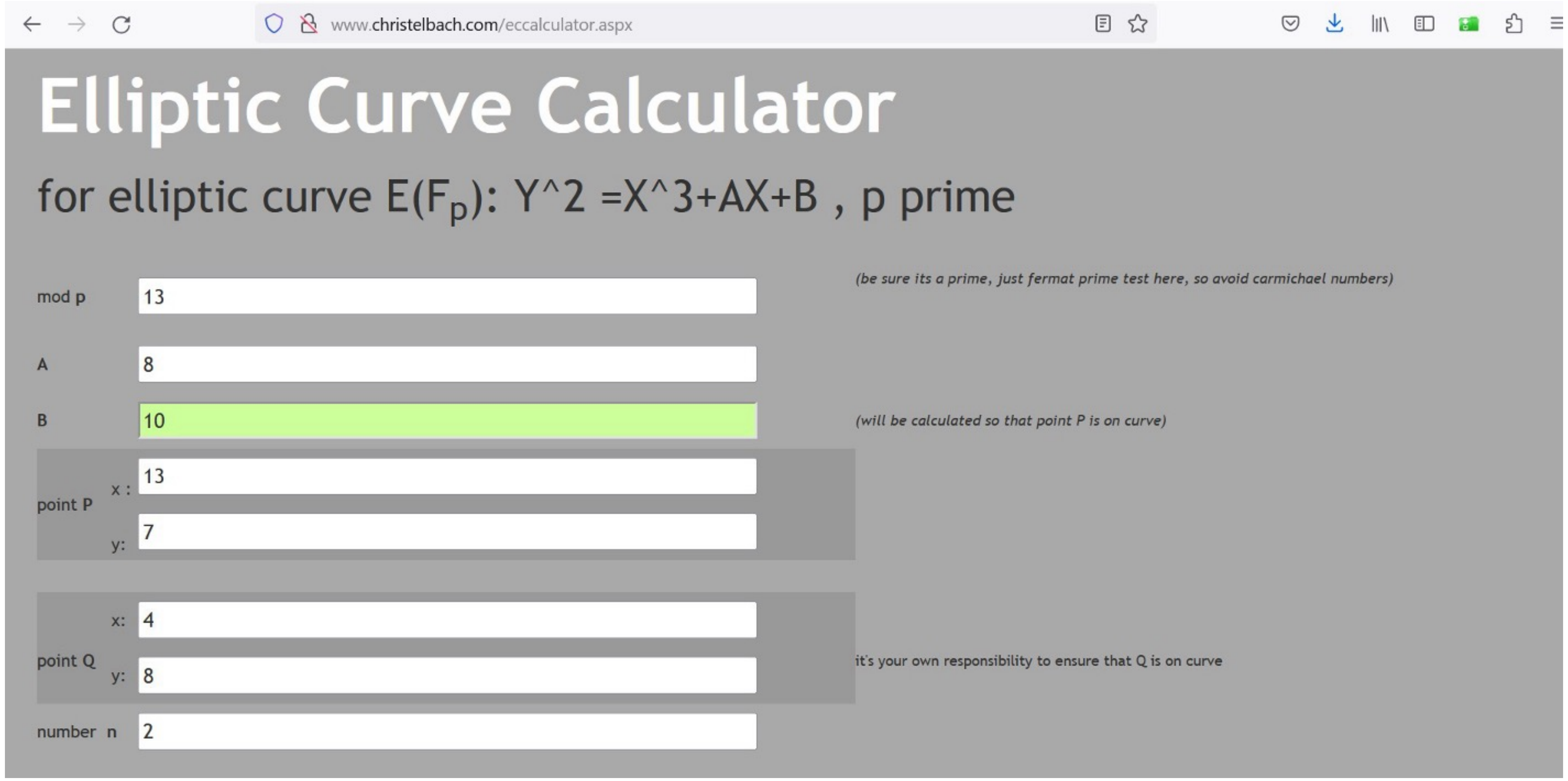
Jadi, R(5, 9)

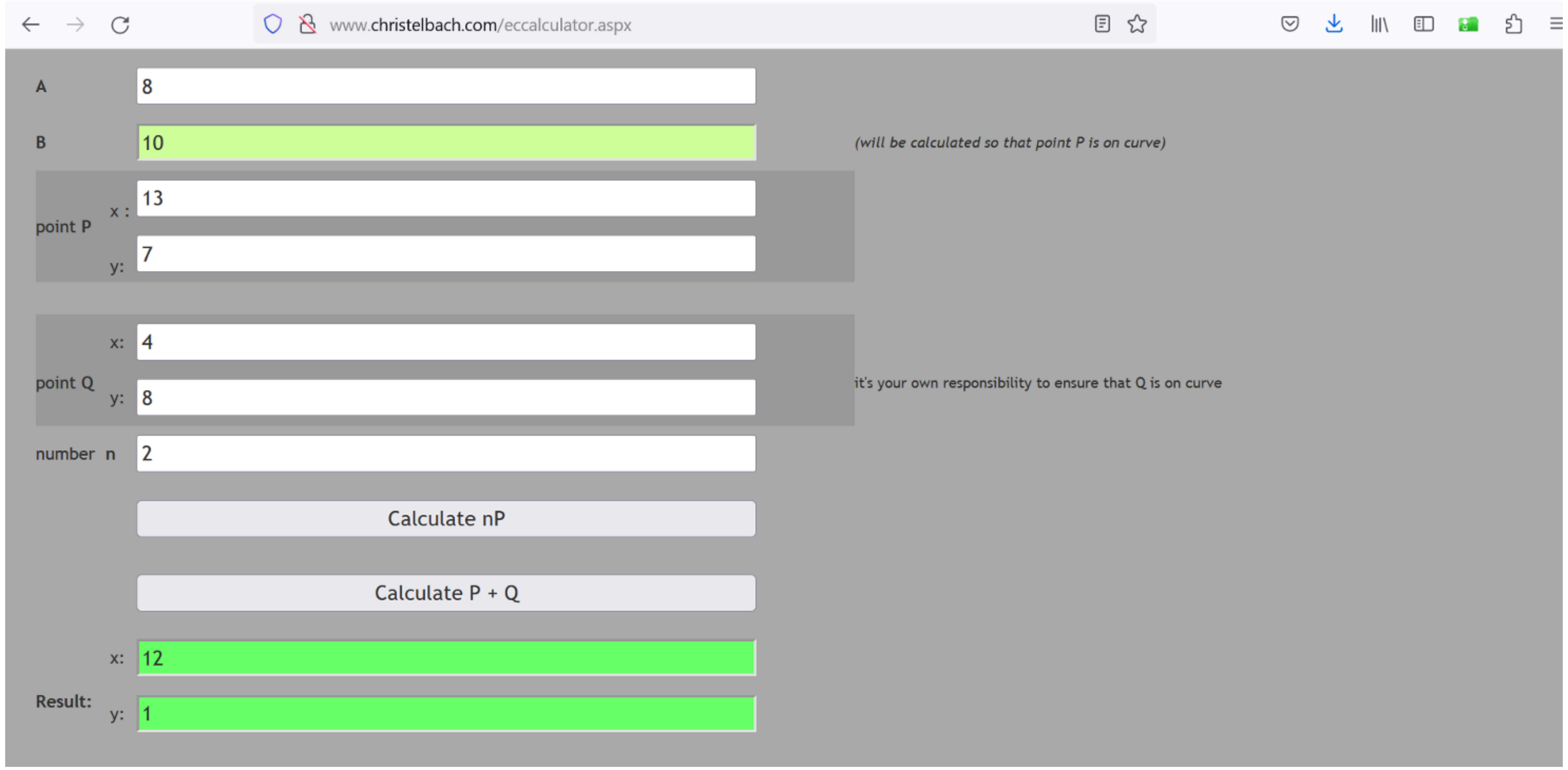
Nilai kP untuk $k = 2,3,\ldots$ diperlihatkan pada tabel:

Jika diketahui P, maka kita bisa menghitung $Q = kP$

k	kP
1	(2,4)
2	(5,9)
3	(8,8)
4	(10,9)
5	(3,5)
6	(7,2)
7	(7,9)
8	(3,6)
9	(10,2)
10	(8,3)
11	(5,2)
12	(2,7)
13	O

http://www.christelbach.com/eccalculator.aspx




www.christelbach.com/eccalculator.aspx
A
8
B
10
(will be calculated so that point P is on curve)
point P
x :
13
y:
7
x:
4
point Q
y:
8
it's your own responsibility to ensure that Q is on curve
number n
2
Calculate nP
Calculate P + Q
x:
12
Result:
y:
1

Elliptic Curve Cryptography

- ECC adalah sistem kriptografi kunci-publik, sejenis dengan RSA, Rabin, ElGamal, D-H, dll.

- Setiap pengguna memiliki kunci publik dan kunci privat
  - Kunci publik untuk enkripsi atau untuk verifikasi tanda tangan digital
  - Kunci privat untuk dekripsi atau untuk menghasilkan tanda tangan digital

- Kurva eliptik digunakan sebagai perluasan sistem kriptografi kunci-publik yang lain:

1. Elliptic Curve Elgamal (ECEG)
2. Elliptic Curve Digital Signature (ECDSA)
3. Elliptic Curve Diffie-Hellman (ECDH)

Sumber bahan: Debdeep Mukhopadhyay, Elliptic Curve Cryptography ,

Dept of Computer Sc and Engg IIT Madras

Penggunaan Kurva Eliptik di dalam Kriptografi

- Bagian inti dari sistem kriptografi kunci-publik yang melibatkan kurva eliptik adalah grup eliptik (himpunan titik-titik pada kurva eliptik dan sebuah operasi biner +).

- Operasi matematika yang mendasari:
    - Jika RSA mempunyai operasi perpangkatan sebagai operasi matematika yang mendasarinya, maka
    - ECC memiliki operasi perkalian titik (kP)

Dua pihak yang berkomunikasi menyepakati parameter data sebagai berikut:

1. Persamaan kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b$ mod p
    - Nilai a dan b
    - Bilangan prima p
2. Group Eliptik yang dihitung dari persamaan kurva eliptik
3. Titik basis (base point) $B(x_B, y_B)$, dipilih dari grup eliptik untuk operasi kriptografi.

Setiap pengguna membangkitkan sepasang kunci publik dan kunci privat

Kunci privat = integer x, dipilih dari selang $[1, p-1]$

Kunci publik = titik Q, adalah hasil kali antara x dan titik basis B: $Q = x \cdot B$

Encoding Pesan menjadi Titik di dalam Kurva

- Pesan yang akan dienkripsi dengan ECC harus dikonversi (encoding) menjadi titik di dalam kurva eliptik.
- Metode yang sederhana adalah memetakan setiap karakter ASCII dengan setiap titik pada kurva eliptik.
- Untuk 256 karakter ASCII, maka dibutuhkan kurva eliptik yang berisi minimal 256 titik.
- Misalkan pesan M = ‘ENCRYPT’, yang dalam nilai ASCII adalah ’69’, ’78’, ‘67’, ‘82’, ‘89’, ‘80’, ‘84’. Setiap nilai ini dipetakan ke sebuah titik pada kurva eliptik.
- Namun metode ini kurang aman.

- Metode kedua adalah dengan metode Kolbitz. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Pilih sebuah kurva eliptik $y^2 = x^3 + ax + b$ mod p yang mengandung N buah titik.
2. Misalkan karakter-karakter penyusun pesan adalah angka $0,1,2,\ldots,9$ dan huruf $A, B, C, \ldots, Z$ yang dikodekan menjadi $10,11,\ldots,35$.
3. Kodekan setiap karakater di dalam pesan menjadi nilai m di antara 0 dan 35.
4. Pilih sebuah bilangan bulat k sebagai parameter basis (disepakati kedua pihak).
5. Untuk setiap nilai mk, nyatakan $x = mk + 1$, substitusikan x ke dalam $y^2 = x^3 + ax + b$ mod p lalu tentukan nilai y yang memenuhi.
6. Jika tidak ada nilai y yang memenuhi, coba untuk $x = mk + 2$, $x = mk + 3$, dst, sampai $y^2 = x^3 + ax + b$ mod p dapat dipecahkan.
7. Pada proses decoding, untuk titik (x, y), tentukan nilai m terbesar tetapi lebih kecil dari $(x - 1)/k$. Kodekan titik (x, y) menjadi symbol m.

Contoh: Misalkan $y^2 = x^3 - x + 188$ mod 751. Kurva eliptik ini memiliki $N = 727$ buah titik.

- Misalkan karakter yang akan dikodekan adalah huruf 'B', yang dikodekan menjadi nilai 11.
- Pilih $k = 20$, maka $x = mk + 1 = (11)(20) + 1 = 221$. substitusikan $x = 221$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188$ mod 751 $\equiv 456($ (mod 751). Tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk $x = mk + 2 = (11)(20) + 2 = 222$. substitusikan $x = 222$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188$ mod 751. Juga tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk untuk $x = mk + 3 = (11)(20) + 3 = 223$. substitusikan $x = 223$ ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188$ mod 751. Juga tidak ada nilai y yang memenuhi.
- Coba untuk untuk $x = mk + 4 = (11)(20) + 4 = 224$. substitusikan x = 224 ke dalam kurva eliptik $y^2 = x^3 - x + 188$ mod 751. Diperoleh $y = 248$. Jadi, karakter 'B' dikodekan menjadi titik $(224{,}248)$ pada kurva eliptik.
- Pada proses decoding, hitung $m = (x - 1)/k = (224 - 1)/20 = 11.15 = 11$. Jadi pesan semula adalah huruf 'B'.

Keamanan ECC

- Untuk mengenkripsi kunci AES sepanjang 128-bit dengan algoritma kriptografi kunci publik:
    - Ukuran kunci RSA: 3072 bits
    - Ukuran kunci ECC: 256 bits

NIST guidelines for public key sizes for AES

ECC KEY SIZE (Bits)	RSA KEY SIZE (Bits)	KEY SIZE RATIO	AES KEY SIZE (Bits)
163	1024	1 : 6	
256	3072	1 : 12	128
384	7680	1 : 20	192
512	15 360	1 : 30	256

Supplied by NIST to ANSI X9F1

- Bagaimana cara meningkatkan keamanan RSA?
    - Tingkatkan ukuran kunci
- Tidak Praktis?

Aplikasi ECC

- Banyak piranti yang berukuran kecil dan memiliki keterbatasan memori dan kemampuan pemrosesan.
- Di mana kita dapat menerapkan ECC?
    - Piranti komunikasi nirkabel
    - Smart cards
    - Web server yang membutuhkan penangangan banyak sesi enkripsi
    - Sembarang aplikasi yang membutuhkan keamanan tetapi memiliki kekurangan dalam power, storage and kemampuan komputasi adalah potensial memerlukan ECC

Keuntungan ECC

- Keuntungan yang sama dengan sistem kriptografi lain: confidentiality, integrity, authentication and non-repudiation, tetapi…

- Panjang kuncinya lebih pendek
  - Mempercepat proses encryption, decryption, dan signature verification
  - Penghematan storage dan bandwidth

SELAMAT BELAJAR