Intrumenty Quanto

Przegląd, wycena i przykłady

Rajmund Leśniak
Seweryn Turula

25 stycznia, 2023

OPIS OPCJI QUANTO

Instrumenty ***Quanto*** (również: *cross-currency derivative*) są intrumentami pochodnymi, w której instrument bazowy jest denominowany w walucie zagranicznej a sam instrument jest rozliczany w walucie krajowej. Takie instrumenty są atrakcyjne dla ludzi, którzy chcą inwestować w zagraniczne aktywa, a z drugiej strony nie chcą być wystawieni na ryzyko kursu walutowego.

Quanto == "Quantity adjusting option", przy czym rozważane są różne instrumenty w tym *Quanto Forward i Futures*, *Quanto Option* czy *Quanto Swaps*. Same opcje quanto często nazywamy ***'fixed exchange rate foreign equity call'***. Najpopularniejszym rynkiem opcji quanto jest rynek energetyczny.

Trzy scenariusze ryzyka

Inwestorzy mogą zdecydować się na inwestycje w zagraniczne aktywa o różnym stopniu ochrony przed niekorzystnymi zmianami kursów walutowych, cenami akcji lub ich kombinacji.

1. Inwestor uczestniczy w zyskach w kapitale zagranicznym, pragnie ochrony przed stratą w tym kapitale, ale nie przejmuje się ryzykiem wynikającym z potencjalnego spadku kursu waluty.

   W takiej sytuacji, inwestor pragnie wypłaty tak zwanego *foreign equity call struck in foreign currency*, którego wypłata to:

   $$C_1 = X^* \max[S' - K', 0],$$

   gdzie X^* to spot-exchange rate, S' i K' podane są w zagranicznej walucie (*foreign*).

2. Inwestor chce otrzymać jakikolwiek zwrot z kapitału zagranicznego, ale chce mieć pewność, że zysk ten będzie istotny po przeliczeniu na własną walutę krajową.

   Inwestor ten zainteresowany jest wtedy tak zwanym *foreign equity call struck in domestic currency*, którego wypłata to:

$$C_2 = \max[X^*S' - K, 0],$$

   gdzie zarówno iloczyn X^*S' oraz K wyrażone są w walucie inwestora (*domestic*).

3. Inwestor, podobnie jak w przypadku pierwszym, chce uczestniczyć w zyskach w kapitale zagranicznym, ale tym razem interesuje go zabezpieczenie przed ryzykiem walutowym (*hedge*). Robi to poprzez ustalenie z góry stawki, po której przeliczana będzie wypłata opcji na walutę krajową.

   Takie podejście bezpośrednio łączy opcję *call* z kontraktem walutowym *forward* i nazywane jest *fixed exchange rate foreign equity call*, znane również jako opcja *Quanto*.

$$C_3 = \bar{X}\max[S' - K', 0] = \max[\bar{X}S' - K, 0],$$

   gdzie $\bar{X}$ to ustalony z góry kurs wymiany walut.

Wycena Opcji Quanto

Wyprowadzimy teraz szkicowo wzór na cenę opcji quanto przy założeniach jak z Blacka-Scholes'a (inna możliwość to użycie NTS - normal tempered stable process, [Kim et al. 2015]).

Załóżmy, że mamy krajową i zagraniczną stopę bez ryzyka r_d oraz r_f. Niech $(S(t))_{t\geq 0}$ będzie procesem cen akcji w walucie zagranicznej (USD), $(V(t))_{t\geq 0}$ procesem cen w walucie krajowej (PLN) oraz $(F(t))_{t\geq 0}$ procesem kursu wymiany pary walutowej (USDPLN).
Zakładamy, że procesy $V(t)$ oraz $F(t)$ są takie, że:

$$V(t) = V(0)\exp(\mu_X t + \sigma_X W_X(t))$$
$$F(t) = F(0)\exp(\mu_Y t + \sigma_Y W_Y(t))$$

przy czym $(W_X(t))_{t\geq 0}$ oraz $(W_Y(t))_{t\geq 0}$ są procesami Wienera ze współczynnikiem korelacji ρ. Dla uproszczenia mamy:

$$W_Y(t) = \rho W_X(t) + \sqrt{1-\rho^2}\bar{W}_Y(t)$$

i $W_X(t)$ oraz $\bar(W)_Y(t)$ są niezależne.
Chcemy znaleźć miarę martyngałową $\mathbb{Q}$, aby $e^{-r_d t}V(t)$ i $e^{-(r_d-r_f)t}F(t)$ były martyngałami. Stosujemy twierdzenie Girsanowa.

Wycena Opcji Quanto

Dostajemy, że:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sigma_X}(\mu_X + \frac{1}{2}\sigma_X^2 - r_d)$$
$$\lambda_2 = \frac{\rho}{\sigma_X \bar{\rho}}(-\mu_X - \frac{1}{2}\sigma_X^2 + r_d) + \frac{1}{\sigma_Y \bar{\rho}}(\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 - r_d + r_f)$$

gdzie $\bar{\rho} = \sqrt{1-\rho^2}$. Mamy również wzory na procesy, które są niezależnymi procesami Wienera w mierze $\mathbb{Q}$:

$$\tilde{W}_X(t) = \lambda_1 t + W_X(t)$$
$$\tilde{\bar{W}}_Y(t) = \lambda_2 t + \bar{W}_Y(t)$$

Dla miary $\mathbb{Q}$ mamy:

$$V(t) = V(0) \exp\left(r_d t - \frac{\sigma_X^2}{2} t + \sigma_X \tilde{W}_X(t)\right)$$
$$F(t) = F(0) \exp\left((r_d - r_f)t - \frac{\sigma_Y^2}{2} t + \sigma_Y \rho \tilde{W}_X(t) + \sigma_Y \bar{\rho} \tilde{\bar{W}}_Y(t)\right).$$

Ponieważ $S(t) = \frac{V(t)}{F(t)}$, to dostajemy:

$$S(t) = S(0) \exp\left(r_f t - \frac{1}{2}(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)t + (\sigma_X - \sigma_Y \rho)\tilde{W}_X(t) - \sigma_Y \bar{\rho} \tilde{\bar{W}}_Y(t)\right).$$

Wycena Opcji Quanto

Niech $\sigma^2 = \sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\rho + \sigma_Y^2$ oraz $(W(t))_{t\geq 0}$ będzie procesem Wienera niezależnym od $(\tilde{W}_X(t))_{t\geq 0}$ i $(\tilde{\tilde{W}}_Y(t))_{t\geq 0}$ w mierze $\mathbb{Q}$. Wtedy proces $(\sigma_X - \sigma_Y\rho)\tilde{W}_X(t) - \sigma_Y\bar{\rho}\tilde{\tilde{W}}_Y(t)$ jest równoważny procesowi $((\sigma W(t))_{t\geq 0}$ w L^2, więc:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0)\exp\left(r_f t - \frac{1}{2}(\sigma_X^2 - \sigma_Y^2)t + (t))\right) \\ &= S(0)\exp\left(r_f t + (\sigma_Y^2 - \sigma_X\sigma_Y\rho)t - \frac{\sigma^2}{2}t + (t))\right). \end{aligned}$$

Funkcja wypłaty dla opcji quanto jest dana:

$$F_{fix}(S(T) - K)^+,$$

gdzie F_{fix} to wcześniej ustalony kurs wymiany walut.
Zatem z wzorów Blacka-Scholesa, cena opcji call quanto w chwili t jest równa:

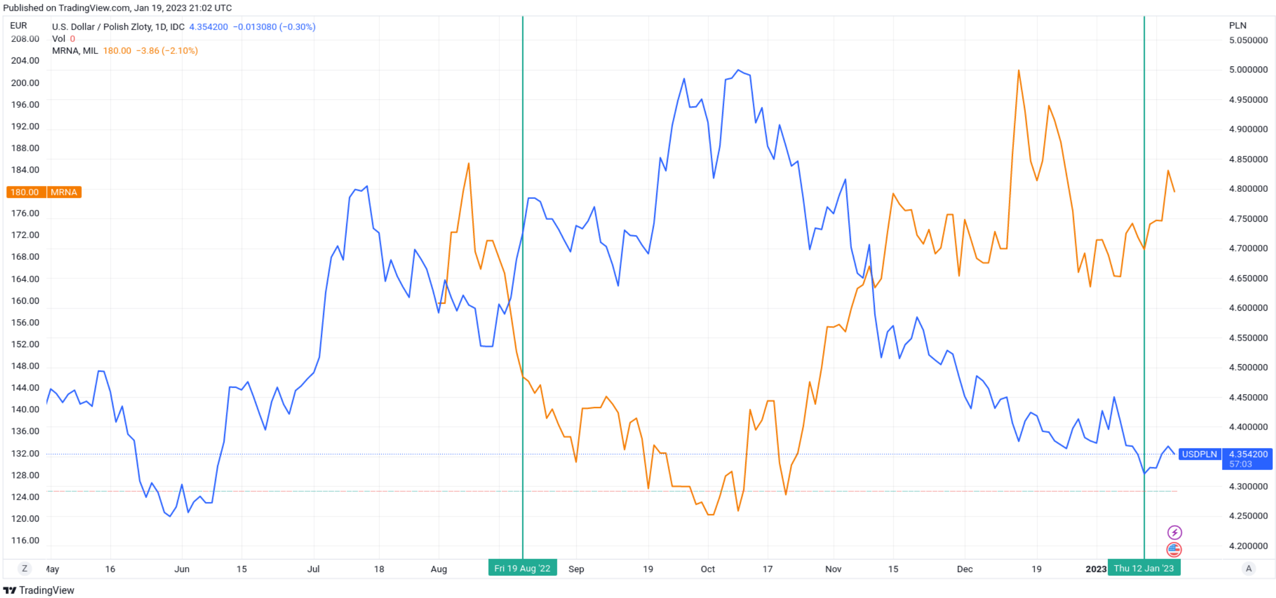
$$\begin{aligned} c &= e^{-r_d(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[F_{fix}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= F_{fix}\left(e^{(r_f - r_d + \sigma_Y^2 - \rho\sigma_X\sigma_Y)(T-t)}S(t)N(d_1) - e^{-r_d(T-t)}KN(d_2)\right), \end{aligned}$$

gdzie

$$d_1 = \frac{(r_f + \sigma_Y^2 - \rho\sigma_X\sigma_Y + \sigma^2/2)(T-t) + \log(S(t)/K)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

PRZYKŁAD



- $S_0 = 146\$$, $K = 120\$$
- $S_T = 169.3\$$
- $t = 0, T = 1/2$
- $USD/PLN_t = 4.73$
- $USD/PLN_T = 4.32$
- $F_{fix} = 4.73$
- $r_f = 0.0004999$
- $r_d = 0.07046$
- $\rho = 0.1379$
- $\sigma_X = 0.808$
- $\sigma_Y = 0.1333$
- $\sigma = 0.6413$

Przykład

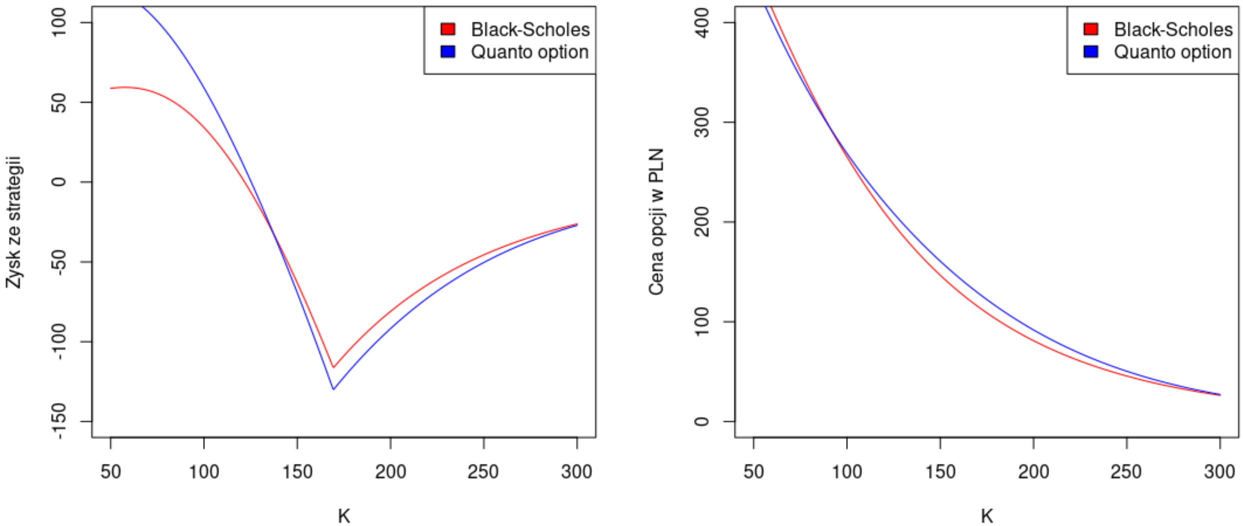
Przepływy pieniężne w 1 strategii:

- w momencie t: $-USD/PLN_t * C_{BSM} = -209.67\,PLN$
- w momencie T: $\max(S_T - K, 0) * USD/PLN_T = 212.98\,PLN$
- zysk wynosi $3.31\,PLN$

Przepływy pieniężne w 2 strategii (przy użyciu opcji quanto):

- w momencie t: $-C_{quanto} = -219.70\,PLN$
- w momencie T: $\max(S_T - K, 0) * F_{fix} = 233.19\,PLN$
- zysk wynosi $13.49\,PLN$

PRZYKŁAD



Black-Scholes
Quanto option
Zysk ze strategii
K
Black-Scholes
Quanto option
Cena opcji w PLN
K

References I

Kim, Young Shin et al. (2015). "Quanto option pricing in the presence of fat tails and asymmetric dependence". In: *Journal of Econometrics* 187.2, pp. 512–520. DOI: 10.1016/j.jeconom.2015.02. URL: https://ideas.repec.org/a/eee/econom/v187y2015i2p512-520.html.