2.27. Газообразный водород, находившийся при нормальных условиях в закрытом сосуде объемом $V=5,0$ л, охладили на $\Delta T=55$ К. Найти приращение внутренней энергии газа и количество отданного им тепла.

2.27:

$V = 5л = 5\cdot10^{-3} м^3 = const$

$\Delta T = 55 K$

$H_2,\ p_1 = 10^5 Па$

$T_1 = 273 K$

$\Delta U - ?$

$Q - ?$

$\Delta T = T_1 - T_2$, то $T_2 = T_1 - \Delta T = 273 - 55 = 218 (K)$ (при изменении температуры не переводят из Цельсия в кельвина и наоборот по правилу то есть $55°C = 55K = \Delta T$)

$\Delta U = \frac{i}{2}\nu R\Delta T = \frac{5}{2}\cdot\nu R\cdot 55$

$pV = \nu RT$

$\nu R = \frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{10^5\cdot5\cdot10^{-3}}{273} = \frac{500}{273} \approx 1,8$

, то $\Delta U \approx 2,5\cdot1,8\cdot55 = 247,5$

$Q = \Delta U + A$

$V = const$

, то $Q = \Delta U = 247,5$

2.28. Какое количество тепла надо сообщить азоту при изобарическом нагревании, чтобы газ совершил работу $A=2,0$ Дж?

2.28:

$A = 2 Дж$

N_2 (азот)

$p = const$

$Q - ?$

$Q = \Delta U + A$

$A = p\Delta V$, то

$\Delta U = \frac{\nu p\Delta V}{\gamma - 1} = \frac{\nu A}{\gamma-1}$

$\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1,4$

, то $\frac{\nu\cdot2}{1,4-1} = \Delta U$, то $Q = \frac{2\nu}{0,4} + 2 = 5\nu + 2$ (Дж)

при $\nu = 1$ моль $Q = 5 + 2 = 7$ (Дж)

2.30. Один моль некоторого идеального газа изобарически нагрели на $\Delta T=72$ К, сообщив ему количество тепла $Q=1,60$ кДж. Найти приращение его внутренней энергии и величину $\gamma=C_p/C_V$.

2.30:

$\Delta T = 72K$

$\nu = 1$ моль

$Q = 1,6 кДж = 1,6\cdot10^3 Дж$

$p = const$

$\Delta U - ?$

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} - ?$

$Q = \Delta U + A$

$\Delta U = Q - A$

$pV = \nu RT$, то $pV_1 = \nu RT_1$

$pV_2 = \nu RT_2$

$p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = A$

$\Delta U = Q - p(V_2 - V_1) = Q - \nu R(T_2 - T_1) = 1,6\cdot10^3 - 1\cdot8,31\cdot72 = 1001,68$ (Дж)

$\Delta U = \frac{\nu R\Delta T}{\gamma - 1}$, то $\gamma - 1 = \frac{\nu R\Delta T}{\Delta U}$

$\gamma = \frac{\nu R\Delta T}{\Delta U} + 1 = \frac{8,31\cdot72}{1001,68} + 1 \approx 1,6$

(ни в чём не измеряется)

2.33. Вычислить удельные теплоемкости c_V и c_p для газовой смеси, состоящей из 7,0 г азота и 20 г аргона. Газы идеальные.

2.33:

$m_1 = 7г$

$m_2 = 20г$

$N_2 + Ar$

$c_v - ?$

$c_p - ?$

$U_{смеси} = U_1 + U_2$

$U = \frac{\nu RT}{\gamma - 1}$

, то $\frac{\nu_1RT_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\nu_2RT_2}{\gamma_2-1} = c_v\nu_{см}T$ $\;|:T$ (т.к. $T_1 = T_2 = T$)

$\frac{\nu_1R}{\gamma_1-1} + \frac{\nu_2R}{\gamma_2-1} = c_v\nu$

$\gamma_1 = \frac{7}{5} = 1,4$

$\gamma_2 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

$\nu = \frac{m}{M}$, то $\nu_1 = \frac{7}{28} = 0,25$ (моль)

$\nu_2 = \frac{20}{40} = 0,5$ (моль)

$\nu_{см} = \nu_1 + \nu_2 = 0,75$ (моль)

, то $\frac{0,25R}{0,4} + \frac{0,5R}{\frac{2}{3}} = c_v\cdot0,75$

$\frac{25R}{40} + \frac{1,5R}{2} = 0,75c_v$

$\frac{55R}{40} = 0,75c_v$

$c_v = \frac{11\cdot8,31}{8\cdot0,75} = 15,235$

$c_p = c_v + R = 15,235 + 8,31 = 23,545$

2.38. Один моль кислорода, находившегося при температуре $T_0=290$ К, адиабатически сжали так, что его давление возросло в $\eta=10{,}0$ раз. Найти:

а) температуру газа после сжатия;

б) работу, которая была совершена над газом.

2.38:

O_2, $\nu=1$ моль
$T_0=290K$
$\frac{p_1}{p_0}=10$

а) T_1 - ?
б) A - ?

а) $pV^\gamma=const$
$\frac{pV}{T}=const \Rightarrow V=\frac{T\cdot const}{p}$, то $p\left(\frac{T\cdot const}{p}\right)^\gamma=const$
$p^{1-\gamma}T^\gamma const^\gamma=const$
$p^{1-\gamma}T^\gamma=const$
$p_0^{1-\gamma}T_0^\gamma=p_1^{1-\gamma}T_1^\gamma$
$T_1p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=T_0p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$
$T_1=T_0\cdot\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}=290\cdot10^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=290\cdot10^{\frac{1{,}4}{0{,}4}}\approx$
≈560 (K)

$\gamma=\frac{i+2}{i}=\frac{7}{5}=1{,}4$

б) $Q=\Delta U+A=0$ (т.к. процесс адиабатический), то $-\Delta U=A$
$A=-\frac{i}{2}\nu R\Delta T=-\frac{5}{2}\cdot1\cdot8{,}31(560-290)=-5609{,}25$ (Дж)

2.42. Объем моля идеального газа с показателем адиабаты γ изменяют по закону $V=a/T$, где a — постоянная. Найти количество тепла, полученное газом в этом процессе, если его температура испытала приращение ΔT.

2.42:

$\nu=1$ моль
$V=\frac{\alpha}{T}$
ΔT, γ

Q - ?

$\delta Q=dU+\delta A$
$dU=C_V\nu dT=C_V\Delta T=\frac{i}{2}R\Delta T$
$\delta A=pdV$
$\delta Q=\frac{i}{2}R\Delta T-R\Delta T=$
$=R\Delta T\left(\frac{i}{2}-1\right)$, то $\Delta Q=R\left(\frac{i}{2}-1\right)\Delta T$
$\gamma=\frac{i+2}{i}\Rightarrow i\cdot\gamma=i+2\Rightarrow i(\gamma-1)=2\Rightarrow i=\frac{2}{\gamma-1}$, то

$V=\frac{\alpha}{T}$, то $\frac{dV}{dT}=-\frac{\alpha}{T^2}$
$dV=-\frac{\alpha}{T^2}dT$
$pV=\nu RT$, то $p=\frac{RT}{V}$, то $\delta A=\frac{RT}{V}\cdot\left(-\frac{\alpha}{T^2}\right)dT=$
$=\frac{RT^2}{\alpha}\cdot\left(-\frac{\alpha}{T^2}\right)dT=-RdT$

$\Delta Q=R\left(\frac{2}{2(\gamma-1)}-1\right)\Delta T=\frac{R(1-\gamma+1)\Delta T}{\gamma-1}=$
$=\frac{R\Delta T\cdot(2-\gamma)}{\gamma-1}$

2.47. Идеальный газ с показателем адиабаты γ расширили по закону $p=\alpha V$, где α — постоянная. Первоначальный объем газа V_0. В результате расширения объем увеличился в η раз. Найти:

а) приращение внутренней энергии газа;

б) работу, совершенную газом;

в) молярную теплоемкость газа в этом процессе.

2.47:

$p=\alpha V$
$\gamma=const$
V_0, γ
$\frac{V_1}{V_0}=\eta$

а) ΔU - ?
б) A - ?
в) $C_{мол}$ - ?

а) $\Delta U=\frac{\nu R\Delta T}{\gamma-1}$

$pV=\nu RT$
$\alpha V^2=\nu RT$, то $\alpha V_0^2=\nu RT_0$
$\alpha V_1^2=\nu RT_1$
$\alpha(V_1^2-V_0^2)=\nu R(T_1-T_0)=\nu R\Delta T$,
то $\Delta U=\frac{\alpha(V_1^2-V_0^2)}{\gamma-1}$
$\frac{V_1}{V_0}=\eta$, то $V_1=\eta\cdot V_0$
, то $\Delta U=\frac{\alpha(\eta^2V_0^2-V_0^2)}{\gamma-1}=\frac{\alpha V_0^2(\eta^2-1)}{\gamma-1}$

б) $A=\int_{V_0}^{V_1}pdV=\alpha\int_{V_0}^{V_1}VdV=\alpha\frac{V^2}{2}\Big|_{V_0}^{V_1}=\alpha\left(\frac{V_1^2}{2}-\frac{V_0^2}{2}\right)=$
$=\frac{\alpha}{2}(\eta^2V_0^2-V_0^2)=\frac{\alpha V_0^2}{2}(\eta^2-1)$

в) $C_{мол}=\frac{\delta Q}{\nu dT}=\frac{\Delta U+\delta A}{\nu dT}=$
$=\frac{\frac{\nu R dT}{\gamma-1}+pdV}{\nu dT}=\frac{\nu RdT}{(\gamma-1)\nu dT}+\frac{pdV}{\nu dT}$

$pV=\nu RT$
$d(\alpha V^2)=d(\nu RT)$
$\alpha 2VdV=\nu RdT$, то
$\nu dT=\frac{\alpha 2VdV}{R}$

$C_{мол}=\frac{R}{\gamma-1}+\frac{pdV\cdot R}{\alpha\cdot2VdV}=\frac{2R}{\gamma-1}+\frac{\alpha VR}{\alpha\cdot2V}=\frac{R(2+\gamma-1)}{2(\gamma-1)}=$
$=\frac{R(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}$

2.52. Имеется идеальный газ, молярная теплоемкость C_V которого известна. Найти молярную теплоемкость этого газа как функцию его объема V, если газ совершает процесс по закону:

а) $T = T_0\,e^{\alpha V}$; б) $p = p_0\,e^{\alpha V}$, где T_0, p_0 и α — постоянные.

2.52:

Дано: $C_V,\ V$; а) $T = T_0 e^{\alpha V}$; б) $p = p_0 e^{\alpha V}$; $T_0 = const$; $p_0 = const$; $\alpha = const$

$C_{мол}(V)$ - ?

а) $\delta Q = dU + \delta A = C_V \nu dT + p dV$, то

$C_{мол} = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \frac{C_V \nu dT + p dV}{\nu dT} = C_V + \frac{p dV}{\nu dT}$

$Vp = \nu RT$, то $p = \frac{\nu RT}{V}$

то $C_{мол} = C_V + \frac{\nu RT dV}{V \nu dT} = C_V + \frac{RT dV}{V dT}$

$T = T_0 e^{\alpha V}$, то $dT = \alpha T_0 e^{\alpha V} dV$, значит $\frac{dT}{dV} = \alpha T_0 e^{\alpha V}$

$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{\alpha T_0 e^{\alpha V}}$

то $C_{мол} = C_V + \frac{RT}{V} \cdot \frac{1}{\alpha T_0 e^{\alpha V}} = C_V + \frac{R T_0 e^{\alpha V}}{V \alpha T_0 e^{\alpha V}} = C_V + \frac{R}{V \alpha}$

б) $p = p_0 e^{\alpha V}$, $p = \frac{\nu RT}{V}$, то $p_0 e^{\alpha V} = \frac{\nu RT}{V}$

$T = \frac{p_0}{\nu R} e^{\alpha V} \cdot V$, то $dT = \frac{p_0}{\nu R} e^{\alpha V}(1+\alpha V) dV$

$C_{мол} = C_V + \frac{RT}{V} \cdot \frac{dV}{dT} = C_V + \frac{R \cdot p_0}{V \nu R} e^{\alpha V} \cdot V \cdot \frac{dV}{dT} = C_V + \frac{p_0 e^{\alpha V}}{\nu} \cdot \frac{\nu R}{p_0 e^{\alpha V}(1+\alpha V)} =$

$= C_V + \frac{R}{1+\alpha V}$

2.53. Один моль идеального газа, теплоемкость которого при постоянном давлении C_p, совершает процесс по закону $p = p_0 + \alpha/V$, где p_0 и α — постоянные. Найти:

а) теплоемкость газа как функцию его объема V;

б) сообщенное газу тепло при его расширении от V_1 до V_2.

2.53:

Дано: $\nu = 1$ моль; C_p; $p = p_0 + \frac{\alpha}{V}$; $\alpha = const$; $p_0 = const$

а) c - ?; б) Q_{V_1,V_2} - ?

а) $c = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU + \delta A}{dT}$

$dU = \frac{\nu R dT}{\gamma - 1} = C_V \nu dT$

$C_p = C_V + R \Rightarrow C_V = C_p - R$, то $dU = (C_p - R)\nu dT$, $\nu = 1$ моль

$pV = \nu RT$

$p = \frac{RT}{V}$, $p = p_0 + \frac{\alpha}{V}$, то $p_0 + \frac{\alpha}{V} = \frac{RT}{V} \,|\cdot V$

$p_0 V + \alpha = RT$

$V = \frac{RT - \alpha}{p_0}$, то $\frac{dV}{dT} = \frac{d}{dT}\left(\frac{RT-\alpha}{p_0}\right) = \frac{R}{p_0}$

$\frac{p dV}{dT} = \frac{p \nu R}{p_0} = \frac{(p_0 + \frac{\alpha}{V}) R}{p_0} = R + \frac{\alpha R}{V p_0}$

то $c = \frac{(C_p - R) dT}{dT} + \frac{p dV}{dT} = C_p - R + R + \frac{\alpha R}{V p_0} = C_p + \frac{\alpha R}{V p_0}$

б) $Q = \int_{V_1}^{V_2} C\,dT = \int_{V_1}^{V_2} \left(C_p + \frac{\alpha R}{V p_0}\right) \frac{p_0}{R} dV$

$= \frac{p_0}{R} \cdot \frac{\alpha R}{p_0} \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = \alpha \ln\frac{V_2}{V_1}$

2.55. Найти уравнение процесса (в переменных T, V), при котором молярная теплоемкость идеального газа изменяется по закону:

а) $C = C_V + \alpha T$; б) $C = C_V + \beta V$; в) $C = C_V + ap$. Здесь α, β и a — постоянные.

2.55:

Дано: а) $C = C_V + \alpha T$; б) $C = C_V + \beta V$; в) $C = C_V + ap$; $\alpha = const$; $\beta = const$; $a = const$

$V(T)$ - ?

$\delta Q = dU + \delta A$

$c \nu dT = C_V \nu dT + p dV$

а) $(C_V + \alpha T)\nu dT = C_V \nu dT + p dV \,|: \nu dT$

$C_V + \alpha T = C_V + \frac{p dV}{\nu dT} \,|-C_V$

$\alpha T = \frac{p dV}{\nu dT}$, $pV = \nu RT$, $p = \frac{\nu RT}{V}$, то $\alpha T = \frac{\nu RT dV}{\nu V dT} = \frac{RT dV}{V dT} \,|: T$

$\alpha = \frac{R dV}{V dT}$, то $\int_{T_1}^{T_2} \frac{\alpha}{R} dT = \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$

$\frac{\alpha}{R} T \Big|_{T_1}^{T_2} = \ln V \Big|_{V_1}^{V_2}$

$\frac{\alpha}{R} T_2 - \frac{\alpha}{R} T_1 = \ln V_2 - \ln V_1$

$\frac{\alpha}{R} T_2 - \ln V_2 = \frac{\alpha}{R} T_1 - \ln V_1 = const$

$\exists C_1 = const$, то $\frac{\alpha}{R} T - \ln V = C_1$

$\ln V = \frac{\alpha}{R} T + C_1$

$V = e^{\frac{\alpha}{R}T + C_1} = e^{\frac{\alpha}{R}T} \cdot e^{C_1}$

$e^{C_1} = const$, то $V \cdot e^{-\frac{\alpha}{R}T} = const$

б) $(C_V + \beta V)\nu dT = C_V \nu dT + p dV \,|: \nu dT$

$C_V + \beta V = C_V + \frac{p dV}{\nu dT} \,|-C_V$

$\beta V = \frac{p dV}{\nu dT}$, $p = \frac{\nu RT}{V}$, то $\beta V = \frac{\nu RT dV}{V \nu dT} = \frac{RT dV}{V dT}$

$\frac{\beta}{RT} dT = \frac{dV}{V^2}$

$\int \frac{dT}{T} = \int \frac{R dV}{\beta V^2}$

$\ln C_2 + \ln T = -\frac{R}{\beta V}$

$\exists C_2 = const$

$\ln(T \cdot C_2) = -\frac{R}{\beta V}$

$T \cdot C_2 = e^{-\frac{R}{\beta V}}$

$T^{-1} \cdot e^{-\frac{R}{\beta V}} = C_2 = const$

в) $(C_V + ap)\nu dT = C_V \nu dT + p dV \,|: \nu dT$

$C_V + ap = C_V + \frac{p dV}{\nu dT} \,|-C_V$

$ap = \frac{p dV}{\nu dT} \,|: p$

$a = \frac{dV}{\nu dT}$, то $\int \nu dT = \int \frac{dV}{a}$, $\exists C_3 = const$

$\nu T = \frac{V}{a} + C_3 \,|\cdot a = const$

$a \nu T = V + C_3$

$a \nu T - V = C_3$