圏論原論 I

Sexytant

2023 年 2 月 4 日

目次

第 I 部

準備

第 1 章

集合

1.1 集合

集合 set とは, ひとまず素朴に「1 つ以上のものの集まり」と定義される. 集合を構成する「もの」を**元 element** という.

記法 1.1. a が集合 S の元であることを $a \in S$ で表す.

記法 1.2. 集合は各元をカンマで区切り $\{\}$ で囲むことで表される.

記法 1.3. とある条件を満たす x 全体からなる集合は $\{x \mid x$ についての条件 $\}$ を用いて表す.

実例 1.4. $\{1, 2, 3\}$ や $\{a, b, c\}$ は集合である.

実例 1.5. $\{1\}$ や $\{a\}$ は集合である.

実例 1.6. $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$ や $\{a^3 \mid a \in \mathbb{N}\}$ は集合である.

実例 1.7. 自然数全体 $\mathbb{N}$, 整数全体 $\mathbb{Z}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ は集合である.

注意 1.8. 集合論においては, すべての「もの」は単独でも集合とみなす.

- 1 を $\{1\}$ と同一視する.
- a を $A = \{a\}$ と同一視する.
- $\{a, b, c\}$ を $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ と同一視する.
- $\{a, b, \{c, d, e\}\}$ を $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}$ と同一視する.

1.1.1 集合の合併

定義 1.9. 集合 S に対して $\{x \in X \mid X \in S\}$ を**集合 X の合併 union** という.

記法 1.10. 集合 S の合併を $\cup S$ で表す.

実例 1.11. $S = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}\}$ のとき $\cup S = \{a, b, c, d, e\}$ となる.

実例 1.12. $S = \{a, b, \{c, d, e\}\}$ のとき, S と $\{\{a\}, \{b\}, \{c, d, e\}\}$ を同一視するので, $\cup S = \{a, b, c, d, e\}$ となる.

1.1.2　空集合

集合論では, 元が存在しない集合 $\{\}$ の存在を認める.

定義 1.13. 元が存在しない集合 $\{\}$ を**空集合 emptyset** という.

記法 1.14. 空集合を $\emptyset$ で表す.

1.1.3　部分集合

定義 1.15. 集合 A の任意の元が集合 B の元であるとき**集合 A は集合 B の部分集合 subset である**という.

記法 1.16. 集合 A が集合 B の部分集合であることを $A \subset B$ で表す.

1.1.4　冪集合

定義 1.17. 集合 S に対する $\{A \mid A \subset S\}$ を**集合 S の冪集合 power set** という.

記法 1.18. 集合 S の冪集合を $\mathcal{P}S$ で表す.

実例 1.19. $S = \{a, b, c\}$ のとき $\mathcal{P}S = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ となる.

1.1.5　集合の直積

定義 1.20. 集合 A, B に対する $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ を**集合 A と集合 B の直積 direct product** という.

記法 1.21. 集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ で表す.

1.2　二項関係・写像

1.2.1　二項関係

定義 1.22. 集合 A, B の直積の部分集合を, **集合 A と集合 B の二項関係 binary relation** であるという.

1.2.2　順序集合

定義 1.23. 次を満たす集合 X から X への二項関係 R を**順序 order** という.

1. 任意の $x \in X$ について $(x, x) \in \mathrm{R}$ である.
2. 任意の $x \in X, y \in X$ について $(x, y) \in \mathrm{R}$ かつ $(y, x) \in \mathrm{R}$ ならば $x = y$ が成り立つ.
3. 任意の $x \in X, y \in X, z \in X$ について $(x, y) \in \mathrm{R}$ かつ $(y, z) \in \mathrm{R}$ ならば $(x, z) \in \mathrm{R}$ が成り立つ.

1.2.3　写像

定義 1.24. 集合 A, B の二項関係 f について，任意の $a \in A$ に対して，とある $b \in B$ が一意に存在して $(a, b) \in f$ となるとき，f を**集合 A から集合 B への写像 map** という．

記法 1.25. 集合 A から集合 B への写像 f を $f : A \to B$ で表す．

記法 1.26. 写像 $f : A \to B$ に関して，$b \in B$ が $a \in A$ に対応することを

$$b = f(a)$$

で表す．

定義 1.27. 写像 $f : A \to B$ が，任意の $a_1, a_2 \in A$ について

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

を満たすとき**写像 $f : A \to B$ は単射 injection である**という．

定義 1.28. 写像 $f : A \to B$ に関して，任意の $b \in B$ に対してとある $a \in A$ が存在して

$$b = f(a)$$

であるとき**写像 f は全射 surjection である**という．

定義 1.29. 写像 $f : A \to B$ が，単射であり，かつ全射であるとき**写像 $f : A \to B$ は全単射 bijection である**という．

定義 1.30. 写像 $f : A \to B$ に対して，写像 $g : B \to A$ が存在して，任意の $a \in A$ に対して

$$f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

が成り立つとき，**写像 $g : B \to A$ は写像 $f : A \to B$ の逆写像 inverse mapping である**という．

記法 1.31. 写像 f の逆写像を f^{-1} で表す．

1.2.4　合成と結合律

定義 1.32. 二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ に対する

$$\{(a, c) \in A \times C \mid \text{とある } b \in B \text{ が存在して } (a, b) \in F \text{ かつ } (b, c) \in G \text{ である}\}$$

を**二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ の合成 composition** という．

記法 1.33. 二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ の合成を $G \circ F$ で表す．

命題 1.34. 二項関係 $F \subset A \times B, G \subset B \times C, H \subset C \times D$ について

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

が成り立つ．

このことを二項関係が**結合律 associative law** を満たすという．

命題 1.35. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ に対して，これらの合成を定義することができる．

定義 1.36. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ を合成して得られる写像を**写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の合成写像 composition mapping** という．

記法 1.37. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の合成写像を $g \circ f$ で表す．

命題 1.38. 写像 $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ について

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ．

このことを写像が結合律を満たすという．

1.3　宇宙

定義 1.39. 以下の性質を満たす集合 U を**宇宙 universe** という．

1. $X \in Y \wedge Y \in U \Rightarrow X \in U$
2. $X \in U \wedge Y \in U \Rightarrow \{X, Y\} \in U$
3. $X \in U \Rightarrow \mathcal{P}X \in U \wedge \cup X \in U$
4. $\mathbb{N} \in U$
5. $f : A \to B$ が全射で，$A \in U \wedge B \subset U \Rightarrow B \in U$

定義 1.40. 宇宙の元を**小集合 small set** という．

1.4　命題の証明

このセクションはレビュー対象外

命題 1.26 の証明

証明. □

命題 1.27 の証明

証明. □

命題 1.30 の証明

証明. □

第 2 章

代数系

2.1 マグマ・半群・群

2.1.1 マグマ

定義 2.1. 写像 $\mu : S \times S \to S$ を**集合 S 上の二項演算 binary operation** という.

定義 2.2. 集合 M と集合 M 上の二項演算 μ の組 (M, μ) を**マグマ magma** という.

2.1.2 半群

定義 2.3. マグマ (G, μ) について, μ が結合律を満たす, すなわち任意の元 $g, h, k \in G$ に対して

$$\mu(g, \mu(h, k)) = \mu(\mu(g, h), k)$$

が成り立つとき, **マグマ (G, μ) は半群 semigroup である**という.

2.1.3 群

定義 2.4. マグマ (G, μ) について, とある $e \in G$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して

$$\mu(e, g) = \mu(g, e) = g$$

を満たすとき, e を**マグマ (G, μ) の単位元 identity element** という.

定義 2.5. マグマ (G, μ) について, 任意の $g \in G$ に対して, とある $h \in G$ が存在して

$$\mu(g, h) = \mu(h, g) = e$$

を満たすとき, h を**マグマ (G, μ) の元 g に対する逆元 inverse element** という. ここで e はマグマ (G, μ) の単位元である.

記法 2.6. マグマ (G, μ) における元 $g \in G$ の逆元を g^{-1} で表す.

定義 2.7. 半群 (G, μ) が単位元をもち, かつ任意の元に対して逆元が存在するとき**半群 (G, μ) は群 group であるという**

定義 2.8. 群 $(G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2)$ について, 写像 $f : G_1 \to G_2$ が, 任意の $g \in G, g' \in G$ について

$$f(\mu_1(g, g')) = \mu_2(f(g), f(g'))$$

を満たすとき, f を**群** (G_1, μ_1) **から群** (G_2, μ_2) **への準同型写像 homomorphism** という.

定義 2.9. 群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への準同型写像 f が全単射であるとき, f を**群** (G_1, μ_1) **から群** (G_2, μ_2) **への同型写像 isomorphism** という

定義 2.10. 群 (G, μ) について, 任意の $a, b \in G$ に対して $\mu(a, b) = \mu(b, a)$ が成り立つとき, **群** (G, μ) **は可換群 commutative group である**という[*1].

2.2 環

定義 2.11. 集合 R と R 上の二項演算 $+, *$ が次を満たすとき, $(R, +, *)$ **は環 ring である**といい, $+$ を**加法 addition**, $*$ を**乗法 multiplicative** という.

1. $(R, +)$ が可換群である.
2. $(R, *)$ がモノイドである.
3. 任意の $a, b, c \in R$ に対して

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$
$$(a + b) * c = a * c + b * c$$

が成り立つ.

定義 2.11 の第 3 の条件のことを**乗法の加法に対する分配律 distributive property** という.

2.3 体

定義 2.12. 環 $(K, +, *)$ において, 群 $(K, +)$ の単位元を $(K, +, *)$ **の零元 zero element** という.

記法 2.13. 環 $(K, +, *)$ における零元を 0_K で表す.

定義 2.14. 環 $(K, +, *)$ において, 群 $(K, *)$ の単位元を $(K, +, *)$ **の乗法単位元 multiplicative identity** という.

記法 2.15. 環 $(K, +, *)$ における乗法単位元を 1_K で表す.

定義 2.16. 環 $(K, +, *)$ が次を満たすとき, $(K, +, *)$ **は体 field である**という.

1. 乗法について零元以外の元が可換群をなす, すなわち $(K \setminus \{0_K\}, *)$ が可換群である.
2. 零元と乗法単位元が異なる, すなわち $0_K \neq 1_K$ である.

[*1] アーベル群 abelian group ともいう

第 3 章

関数型プログラミング言語 Haskell

この章はレビュー対象外

3.1 プログラミングの一般論

3.1.1 変数と型

3.1.2 データ構造

リスト・タプル

同じ型の値を一方向に並べ, 前の要素が後の要素のポインタをもつようにしたデータ構造を**リスト**という. 一方, リストに対して, 異なる型を含むことを許容するデータ構造を**タプル**という.

木構造

3.1.3 関数

3.1.4 クラス

3.2 Haskell

3.2.1 Haskell における変数と型

Haskell における変数は, 手続き型言語の変数とは異なり, 値を変更することはできない. `x` という変数に 123 という値を「代入」するのではなく, 123 という数値に `x` というラベルを「束縛 (バインディング)」すると考える.

定義済みの型による変数の宣言

Haskell には標準ライブラリに表 3.1 に示す型が定義済みである.

```
x = 123
```

3.2.2 Haskell におけるデータ構造

Haskell においてリストは `[]` を用いてリスト型を構築することで宣言できる.

```
y = [1, 2, 3]
```

表 3.1　Haskell の標準ライブラリに定義済みの型

Int	固定長整数
Integer	多倍長整数
Char	文字
Float	単精度浮動小数点数
Double	倍精度浮動小数点数
Bool	ブール代数

3.2.3　Haskell における関数・関数型

```
add x y = x + y
```

```
f :: Int -> Int      -- Int 引数を受け取り、Int 値を返却する関数型
```

```
g :: Int -> Int -> Double    -- Int 引数を2 つ受け取り、Double 値を返却する関数型
```

*1

map

リストに対して関数を適用するときは map を用いる

```
map (*2) [1, 2, 3] -- [2,4,6]
```

3.2.4　データ型

例として Red, Green, Blue からなるデータ Color の宣言は以下のように記述する.

```
data Color = Red | Green | Blue
```

3.2.5　型クラス

```
class Foo a where
    foo :: a -> String
instance Foo Bool where
    foo True = "Bool: True"
    foo False = "Bool: False"
instance Foo Int where
    foo x = "Int: " ++ show x
```

*1 関数型が入れ子になっている（カリー化）

```haskell
instance Foo Char where
    foo x = "Char: " ++ [x]

main = do
    putStrLn $ foo True      -- Bool: True
    putStrLn $ foo (123::Int)    -- Int: 123
    putStrLn $ foo 'A'       -- Char: A
```

Foo 型クラスは任意の型 (a) を受け取り、String を返却するメソッド foo を持っている．instance を用いてそれぞれの型が引数に指定された場合の処理を実装している．

3.2.6 型構築子・データ構築子

Haskell において, リスト型における `[]` や関数型における`->`のように 1 つ以上の具体的な型に対して作用して, 新しい型を構築するものを**型構築子**という．

一方, `data` のほか, `Nothing`,`Just` などを**データ構築子**という．

よく知られた型構築子として `Maybe` がある．Maybe の定義は, 次のようになされている．

```haskell
data Maybe a = Nothing | Just a
data Maybe a = Nothing | Just a
instance Eq a => Eq (Maybe a)
instance Monad Maybe
instance Functor Maybe
instance Ord a => Ord (Maybe a)
instance Read a => Read (Maybe a)
instance Show a => Show (Maybe a)
instance Applicative Maybe
instance Foldable Maybe
instance Traversable Maybe
instance Monoid a => Monoid (Maybe a)
```

3.3 Hask

3.3.1 Hask に関する数学的な概念 (§4 に挿入)

定義 3.1. **始対象**

定義 3.2. **終対象**

定義 3.3. **冪対象**

定義 3.4. 圏 $\mathscr{C}$ が次の条件を満たすとき**圏 $\mathscr{C}$ はデカルト閉圏である**という．

1. $\mathscr{C}$ は終対象を持つ。
2. 任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ に対して, $X \times Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ である．
3. 任意の $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ に対して $ZY \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ である．

定義 3.5. 多相関数

3.3.2 Hask (§4 に挿入)

命題 3.6. *Haskell の型全体の集合と，それらの間の関数の集合の組はデカルト閉圏をなす.*

3.3.3 List 関手 (§5 に挿入)

命題 3.7. *Haskell における型構築子* `[]` *は，Hask から Hask への対象関数である.*

証明. 型構築子 `[]` は，任意の型 `A` に対して型 `[A]` を対応させるので，命題が成り立つ. □

型 `A` と型 `B` および関数 `f::A->B` が与えられとき `map f::[A]->[B]` が決定される.

命題 3.8. `map` *は Hask から Hask への射関数である.*

命題 3.9. *型構築子* `[]` *と* `map` *が Hask から Hask への関手をなす.*

証明. 命題... と命題... より明らか. □

型構築子 `[]` を **List 関手**という.

Maybe 関手

Haskell における型構築子 `Maybe` は...

...

型構築子 `Maybe` は **Maybe 関手**と呼ばれる.

Tree 関手

一般に木構造を生成する型構築子は関手にできる．これを **Tree 関手**と呼ぶ.

```haskell
module Tree where
import Data.Char

data Tree a = Empty | Node a (Tree a) (Tree a)

instance (Show a) => Show (Tree a) where
  show x = show1 0 x

show1 :: Show a => Int -> (Tree a) -> String
show1 n Empty = ""
show1 n (Node x t1 t2) =
  show1 (n+1) t2 ++
  indent n ++ show x ++ "\n" ++
  show1 (n+1) t1

indent :: Int -> String
```

```
indent n = replicate (n*4) ' '

instance Functor Tree where
  fmap f Empty = Empty
  fmap f (Node x t1 t2) =
    Node (f x) (fmap f t1) (fmap f t2)

-- test data
tree2 = Node "two" (Node "three" Empty Empty)
                   (Node "four" Empty Empty)
tree3 = Node "five" (Node "six" Empty Empty)
                    (Node "seven" Empty Empty)
tree1 = Node "one" tree2 tree3

string2int :: String -> Int
string2int "one"   = 1
string2int "two"   = 2
string2int "three" = 3
string2int "four"  = 4
string2int "five"  = 5
string2int "six"   = 6
string2int "seven" = 7
string2int _       = 0

tree0 = fmap string2int tree1

{- suggested tests
fmap (map toUpper) tree1
fmap string2int tree1
fmap length tree1
-}

{- another possible instance of Show
show1 :: Show a => Int -> (Tree a) -> String
show1 n Empty = indent n ++ "E"
show1 n (Node x t1 t2) =
  indent n ++ show x ++ "\n" ++
  show1 (n+1) t1 ++ "\n" ++
  show1 (n+1) t2
-}

{- original instance
```

```
instance (Show a) => Show (Tree a) where
  show x = show1 0 x

show1 :: Show a => Int -> (Tree a) -> String
show1 n Empty = ""
show1 n (Node x t1 t2) =
  indent n ++ show x ++ "\n" ++
  show1 (n+1) t1 ++
  show1 (n+1) t2
-}
```

3.4　２変数の関手

Hom 関手

```
{- defined in default startup environment
class Functor f where
  fmap :: (a -> b) -> f a - f b

instance Functor ((->) r) where
  fmap = (.)

instance Functor ((,) a) where
  fmap f (x,y) = (x, f y)
-}

class Contra f where
  pamf ::  (a -> b) -> f b -> f a

newtype Moh b a = Moh {getHom :: a -> b}

instance Contra (Moh b) where
  pamf f (Moh g) = Moh (g . f)

newtype Riap b a = Riap {getPair :: (a,b)}

instance Functor (Riap b) where
  fmap f (Riap (x,y)) =  Riap (f x,y)

{- suggested tests
fmap (\x -> x*x) (\x -> x + 1) 10 == 121
getHom (pamf (\x -> x*x) (Moh (\x -> x + 1))) 10 == 101
```

```

fmap (\x -> x*x) (10,10) == (10,100)
getPair (fmap (\x -> x*x) (Riap (10,10))) == (100,10)
-}
```

3.5　型クラスと Hask の部分圏

ソート関手

```
import Tree
import Flatten

iSort :: Ord a => [a] -> [a]
iSort xs =
  foldr ins [] xs
    where
      ins x [] = [x]
      ins x (y:ys)
        | x <= y    = x:y:ys
        | otherwise = y: ins x ys

list2tree :: Ord a => [a] -> Tree a
list2tree xs =
  foldl sni Empty xs
    where
      sni = flip ins
      ins x Empty   = Node x Empty Empty
      ins x (Node y t1 t2)
        | x <= y    = Node y (ins x t1) t2
        | otherwise = Node y t1 (ins x t2)

iSort2 :: Ord a => [a] -> [a]
iSort2 = flatten . list2tree

{- suggested tests
map (\x -> x*2) . iSort $ [1,5,3,4,2]
iSort . map (\x -> x*2) $ [1,5,3,4,2]
-}
```

第 II 部

圏論の諸概念

第 4 章

圏

4.1 圏

定義 4.1. 集合の組 $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ が次の条件を満たすとき**集合の組** $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ **は圏 category をなす**という.

1. 任意の $f \in S_{\mathrm{mor}}$ に対して $\mathrm{dom}(f) \in S_{\mathrm{obj}}, \mathrm{cod}(f) \in S_{\mathrm{obj}}$ がそれぞれ一意に定まる.
2. $f \in S_{\mathrm{mor}}, g \in S_{\mathrm{mor}}$ について, $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき, S_{mor} 上の二項演算 $\circ$ が存在する.
3. $f \in S_{\mathrm{mor}}, g \in S_{\mathrm{mor}}, h \in S_{\mathrm{mor}}$ について,
$$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g),$$
$$\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(h)$$
であるとき
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
が成り立つ.
4. 任意の $A \in S_{\mathrm{obj}}$ について次を満たす $1_A \in S_{\mathrm{mor}}$ が存在する.
   (a) $\mathrm{dom}(1_A) = A$
   (b) $\mathrm{cod}(1_A) = A$
   (c) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g) = A$ かつ $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ を満たす任意の $(f, g) \in S_{\mathrm{obj}} \times S_{\mathrm{obj}}$ について $f \circ 1_A = f$ かつ $1_A \circ g = g$ が成り立つ.

定義 4.1 における S_{obj} の元を**対象 object**, S_{mor} の元を**射 morphism** という. 1 つ目の条件の $\mathrm{dom} f, \mathrm{cod} f$ はそれぞれ**射 f の始域 domain と 終域 codomain** という. 2 つ目の条件の二項演算 $\circ$ は射の合成という. 3 つ目の条件で述べているのは, 射の合成が結合律を満たすということである. 最後に, 4 つ目の条件の 1_A を**対象 A の恒等射 identity morphism** という.

これらの用語を導入して, 定義 4.1 を改めて記述すると次のようになる.

1. 圏は対象の集合と射の集合からなる.
2. 射は始域と終域をもち, それらはそれぞれ一意に定まる.
3. 射は合成可能であり, 射の合成は結合律を満たす.
4. 任意の対象について恒等射が存在する.

注意 4.2. 恒等射 1_A は一意に定まるので, 定義に一意性を加えても問題ない.

記法 4.3. 圏 $\mathscr{C}$ の対象全体の集合を $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ で表す.

記法 4.4. 圏 $\mathscr{C}$ の射全体の集合を $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ で表す.

記法 4.5. 始域が A, 終域が B である射 f を $f : A \to B$ で表す.

記法 4.6. 集合 $\{f : A \to B \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})\}$ を $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ で表す.

定義 4.7. とある圏の射 $f : A \to B$ に対して, とある射 $g : B \to A$ が存在して $g \circ f = 1_A$ かつ $f \circ g = 1_B$ となるとき, **射 f は同型射 isomorphism である**という. また, このとき g を**射 f の逆射**という.

記法 4.8. 射 f の逆射を f^{-1} で表す.

命題 4.9. 射 f が同型射であるとき, f^{-1} は一意に定まる.

4.1.1 小圏・局所小圏・大圏

小圏

定義 4.10. 圏 $\mathscr{C}$ について, $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ が小集合であるとき, **圏 $\mathscr{C}$ は小圏 small category** であるという.

命題 4.11. 対象も射もない圏 $\mathbf{0}$ は小圏である.

命題 4.12. 対象が *1* つで, 恒等射のみをもつ圏 $\mathbf{1}$ は小圏である.

命題 4.13. 対象が A, B の *2* つで, 恒等射と射 $f : A \to B$ のみをもつ圏 $\mathbf{2}$ は小圏である.

命題 4.14. 順序集合は小圏である.

局所小圏

定義 4.15. 圏 $\mathscr{C}$ について, 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ の組に対して $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ が小集合であるとき, **圏 $\mathscr{C}$ は 局所小圏 locally small category である**という.

大圏

定義 4.16. 圏 $\mathscr{C}$ が小圏でないとき**圏 $\mathscr{C}$ は大圏 large category である**という.

命題 4.17. すべての小集合を対象とし, それらの間の写像を射とする圏 Set は大圏である.

命題 4.18. すべての群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏 Grp は大圏である.

命題 4.19. すべての可換群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏 Ab は大圏である.

4.1.2 部分圏

記法 4.20. 圏 $\mathscr{C}$ における射 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ の合成を $g \circ_{\mathscr{C}} f$ で表す.

命題 4.21. 圏 $\mathscr{A}$ が圏 $\mathscr{B}$ に対して, 以下の条件を満たすとする.

1. $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$
2. $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \subset \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})\}$

このとき $\mathrm{Mor}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{B})$ が成り立つ.

定義 4.22. 圏 $\mathscr{A}$ が圏 $\mathscr{B}$ に対して, 以下の条件を満たすとき, **圏 $\mathscr{A}$ は圏 $\mathscr{B}$ の部分圏である**という.

1. $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$
2. $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \subset \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})\}$
3. 任意の $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}), g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ について $g \circ_{\mathscr{A}} f$ が存在するならば $g \circ_{\mathscr{B}} f$ が存在し
$$g \circ_{\mathscr{A}} f = g \circ_{\mathscr{B}} f$$
が成り立つ.
4. 任意の $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}), g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ について $g \circ_{\mathscr{B}} f$ が存在するならば $g \circ_{\mathscr{A}} f$ が存在し
$$g \circ_{\mathscr{A}} f = g \circ_{\mathscr{B}} f$$
が成り立つ.

命題 4.23. 圏 Ab は圏 Grp の部分圏である.

4.1.3　双対

定義 4.24. 圏 $\mathscr{C}$ に対して, 対象が $\mathscr{C}$ と同じで, 射の向きが $\mathscr{C}$ と反対である圏を**圏 $\mathscr{C}$ の双対圏という.**

記法 4.25. 圏 $\mathscr{C}$ の双対圏を $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で表す.

4.1.4　圏の生成

命題 4.26. 集合 A と写像 $f : A \to A$ について, 集合の組 $(\{A\}, \{1_A, f\})$ は圏をなす.

命題 4.27. 集合 A と写像 $f : A \to A$ について, 正の整数 n に対して $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$ とするとき, 集合の組 $(\{A\}, \{1_A, f, f^2, \ldots, \})$ は圏をなす.

命題 4.28. 集合 A, B と写像 $f : A \to B,\ g : B \to A$ について, 集合の組 $(\{A, B\}, \{1_A, 1_B, f, g, f \circ g\})$ は圏をなす.

定義 4.29. 集合 $S_1, \ldots, S_N$ に関する写像 $f_1, \ldots, f_M$ に関して, $\{S_1, \ldots, S_N\}$ を対象とし, $1_{S_1}, \ldots, 1_{S_N}$ と $f_1, \ldots, f_M$ およびそれらの合成のみを射とする圏 $\mathscr{C}$ が存在するとき, $\{f_1, \ldots, f_M\}$ を**圏 $\mathscr{C}$ の生成系 system of generators** という.

定義 4.30. 圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の積に対して, 次の集合の組 $(S_{\mathrm{Obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}), S_{\mathrm{Mor}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}))$ を**圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の積**という.

- $S_{\mathrm{Obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \{(A, B) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})\}$
- $S_{\mathrm{Mor}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \{(f_A, f_B) \mid f_A \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}), f_B \in \mathrm{Mor}(\mathscr{B})\}$

定義 4.31. 圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の積を $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ で表す.

命題 4.32. 圏の積は圏をなす.

4.2　命題の証明

このセクションはレビュー対象外

命題 4.9 の証明

命題 4.11 の証明

命題 4.12 の証明

命題 4.13 の証明

命題 4.14 の証明

命題 4.17 の証明

命題 4.18 の証明

命題 4.19 の証明

命題 4.21 の証明

命題 4.23 の証明

命題 4.26 の証明

命題 4.27 の証明

命題 4.28 の証明

命題 4.32 の証明

第 5 章

関手

5.1 関手

定義 5.1. 写像 $f : \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への対象関数 function on objects** という.

記法 5.2. 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への対象関数を $F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ で表す.

定義 5.3. 圏 $\mathscr{A}$ の射全体の集合

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{A}) = \{f_{\mathscr{A}} : A_1 \to A_2 \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

から, 対象関数 $F_{obj}(\mathscr{A}, \mathscr{B})(\cdot)$ を用いて定まる, 圏 $\mathscr{B}$ の射の集合

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = \{f_{\mathscr{B}} : F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})(A_1) \to F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})(A_2) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

への写像 $F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) : \mathrm{Mor}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ が次の条件を満たすとき, これを**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への射関数 function on morphisms** という.

1. 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ に対して

$$F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})(1_A) = 1_{F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})(A)}$$

が成り立つ.

2. 任意の $(A_1, A_2, A_3) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})^3$ と $f_{1,2} : A_1 \to A_2, f_{2,3} : A_2 \to A_3$ に対して

$$F_{\mathrm{Mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})(f_{2,3} \circ f_{1,2}) = F_{\mathrm{Mor}}(f_{2,3}) \circ F_{\mathrm{Mod}}(f_{1,2}$$

が成り立つ.

記法 5.4. 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への射関数を $F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ で表す.

定義 5.5. 対象関数 $F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ と射関数 $F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ の組を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への関手 functor** という.

記法 5.6. 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への関手 F を $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ で表す.

定義 5.7. 圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{C}$ への関手を**圏 $\mathscr{C}$ に関する恒等関手 identity functor** という.

記法 5.8. 圏 $\mathscr{C}$ に関する恒等関手を $\mathrm{Id}(\mathscr{C})$ で表す.

定義 5.9. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ に対して

$$F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{B}, \mathscr{C}) \circ F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}$$

を対象関数とし.

$$F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \circ F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$$

を射関数とする関手を**関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ の合成 composition** という.

記法 5.10. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ の合成を $G \circ F$ で表す.

5.1.1　反変関手

定義 5.11. 関手 $F : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$ を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への反変関手 contravariant functor** という.

5.1.2　定数関手

定義 5.12. 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ を唯一の $B_0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ に写し, 任意の射 $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ を恒等射 $1_{B_0} \in \mathrm{Mor}(\mathscr{B})$ に写す関手を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への定数関手 constant functor** という

5.1.3　忠実関手と充満関手

定義 5.13. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ に関して, 写像

$$f : \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \to \{(F(A_1), F(A_2)) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

が単射となっているとき, **関手 F は忠実 faithful である**という.

定義 5.14. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ に関して, 写像

$$f : \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \to \{(F(A_1), F(A_2)) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

が全射となっているとき, **関手 F は充満 full である**という.

定義 5.15. 関手 F が忠実かつ充満であるとき**関手 F は充満忠実 full and faithful である**という.

第 6 章

自然変換

6.1 自然変換

定義 6.1. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ と関手 $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ について,

1. 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ に対して $\mathscr{B}$ の射 $M_{\mathscr{B}}(A) : F(A) \to G(A)$ が存在する.
2. 任意の $\mathscr{A}$ の射 $f : A_1 \to A_2$ が
$$M_{\mathscr{B}}(A_2) \circ F(f) = G(f) \circ M_{\mathscr{B}}(A_1)$$
を満たす.

このとき $\{M_{\mathscr{B}}(A) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$ を**関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ から関手 $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ への自然変換 natural transformation** という.

記法 6.2. 関手 F から関手 G への自然変換 μ を $\mu : F \to G$ で表す.

第 7 章

関手圏

7.1 関手圏

命題 7.1. 小圏 $\mathscr{A}$ と局所小圏 $\mathscr{B}$ に対して, 次の集合の組 $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ は圏をなす.

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{obj}} &= \{F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}\} \\ S_{\mathrm{mor}} &= \{\alpha : F_1 \to F_2 \mid F_1 \in S_{\mathrm{obj}}, F_2 \in S_{\mathrm{obj}}\} \end{aligned}$$

定義 7.2. 小圏 $\mathscr{A}$ と局所小圏 $\mathscr{B}$ に対する次の集合の組 $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ からなる圏を**小圏 $\mathscr{A}$ から局所小圏 $\mathscr{B}$ への関手圏 functor category** という.

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{obj}} &= \{F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}\} \\ S_{\mathrm{mor}} &= \{\alpha : F_1 \to F_2 \mid F_1 \in S_{\mathrm{obj}}, F_2 \in S_{\mathrm{obj}}\} \end{aligned}$$

記法 7.3. 小圏 $\mathscr{A}$ から局所小圏 $\mathscr{B}$ への関手圏を $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ で表す

定義 7.4. 関手圏における同型射を**自然同型 natural isomorphism** という.

第 8 章

圏同値

8.1 圏同値

定義 8.1. 圏 $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ に対して, 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}', G : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ と自然同型 $\eta : \mathrm{Id}(\mathscr{A}) \to G \circ F, \epsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}(\mathscr{A}')$ が存在するとき**圏 $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ は圏同値であるという.**

命題 8.2. 圏同値は同値関係である.

8.2 この先レビュー対象外

命題 8.2 の証明

第 III 部

普遍性と極限

第 IV 部

随伴

第Ⅴ部

モナド

第 VI 部

表現可能関手