

圈論原論 I

Sexytant

2023 年 1 月 28 日

目次

第 I 部	準備	5
第 1 章	集合	7
1.1	集合	7
1.2	二項関係・写像	7
1.2.1	二項関係	7
1.2.2	順序集合	8
1.2.3	写像	8
1.2.4	合成と結合律	8
1.3	宇宙	9
第 2 章	代数系	11
2.1	マグマ・半群・群	11
2.1.1	マグマ	11
2.1.2	半群	11
2.1.3	群	11
2.2	環	12
2.3	体	12
第 3 章	Haskell の基礎	13
3.1	型	13
3.1.1	定義済みの型	13
3.1.2	データ構造	13
3.1.3	データ型	13
第 II 部	圏論の諸概念	15
第 4 章	圏	17
4.1	圏	17
4.1.1	小圏・局所小圏・大圏	18
4.1.2	部分圏	18
4.1.3	双対	19
4.1.4	圏の生成	19

第 5 章	関手	21
5.1	関手	21
5.1.1	反変関手	22
5.1.2	定数関手	22
5.1.3	忠実関手と充満関手	22
第 6 章	自然変換	23
6.1	自然変換	23
第 7 章	関手圏	25
7.1	関手圏	25
第 8 章	圏同値	27
8.1	圏同値	27

第 I 部

準備

第 1 章

集合

1.1 集合

集合 **set** とは, ひとまず素朴に「ものの集まり」と定義される. 集合を構成する「もの」を**元 element** という.

記法 1.1. a が集合 S の元であることを $a \in S$ で表す.

記法 1.2. 集合は各元をカンマで区切り $\{\}$ で囲むことで表される.

記法 1.3. とある条件を満たす x 全体からなる集合は $\{x \mid x \text{ についての条件} \}$ を用いて表す.

実例 1.4. $\{1, 2, 3\}$ や $\{a, b, c\}$, 自然数全体 \mathbb{N} , 整数全体 \mathbb{Z} , 実数全体 \mathbb{R} , 複素数全体 \mathbb{C} は集合である.

実例 1.5. $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$ や $\{a^3 \mid a \in \mathbb{N}\}$ は集合である.

集合論では, 元が存在しない集合 $\{\}$ の存在を認める.

定義 1.6. 元が存在しない集合 $\{\}$ を**空集合 emptyset** という.

記法 1.7. 空集合を \emptyset で表す.

定義 1.8. 集合 A の任意の元が集合 B の元であるとき**集合 A は集合 B の部分集合 subset** であるという.

記法 1.9. 集合 A が集合 B の部分集合であることを $A \subset B$ で表す.

定義 1.10. 集合 S に対する $\{A \mid A \subset S\}$ を**集合 S の冪集合 power set** という.

記法 1.11. 集合 S の冪集合を $\mathcal{P}S$ で表す.

定義 1.12. 集合 A, B に対する $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ を**集合 A と集合 B の直積 direct product** という.

記法 1.13. 集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ で表す.

1.2 二項関係・写像

1.2.1 二項関係

定義 1.14. 集合 A, B の直積の部分集合を, **集合 A と集合 B の二項関係 binary relation** であるという.

1.2.2 順序集合

定義 1.15. 次を満たす集合 X から X への二項関係 R を**順序 order** という.

1. 任意の $x \in X$ について $(x, x) \in R$ である.
2. 任意の $x \in X, y \in X$ について $(x, y) \in R$ かつ $(y, x) \in R$ ならば $x = y$ が成り立つ.
3. 任意の $x \in X, y \in X, z \in X$ について $(x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R$ ならば $(x, z) \in R$ が成り立つ.

1.2.3 写像

定義 1.16. 集合 A, B の二項関係 f について, 任意の $a \in A$ に対して, とある $b \in B$ が一意に存在して $(a, b) \in f$ となるとき, f を**集合 A から集合 B への写像 map** という.

記法 1.17. 集合 A から集合 B への写像 f を $f: A \rightarrow B$ で表す.

記法 1.18. 写像 $f: A \rightarrow B$ に関して, $b \in B$ が $a \in A$ に対応することを

$$b = f(a)$$

で表す.

定義 1.19. 写像 $f: A \rightarrow B$ が, 任意の $a_1, a_2 \in A$ について

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

を満たすとき**写像 $f: A \rightarrow B$ は単射 injection** であるという.

定義 1.20. 写像 $f: A \rightarrow B$ に関して, 任意の $b \in B$ に対してとある $a \in A$ が存在して

$$b = f(a)$$

であるとき**写像 f は全射 surjection** であるという.

定義 1.21. 写像 $f: A \rightarrow B$ が, 単射であり, かつ全射であるとき**写像 $f: A \rightarrow B$ は全単射 bijection** であるという.

定義 1.22. 写像 $f: A \rightarrow B$ に対して, 写像 $g: B \rightarrow A$ が存在して, 任意の $a \in A$ に対して

$$f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

が成り立つとき, **写像 $g: B \rightarrow A$ は写像 $f: A \rightarrow B$ の逆写像 inverse mapping** であるという.

記法 1.23. 写像 f の逆写像を f^{-1} で表す.

1.2.4 合成と結合律

定義 1.24. 二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ に対する

$$\{(a, c) \in A \times C \mid \text{とある } b \in B \text{ が存在して } (a, b) \in F \text{ かつ } (b, c) \in G \text{ である}\}$$

を二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ の**合成 composition** という.

記法 1.25. 二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ の合成を $G \circ F$ で表す.

命題 1.26. 二項関係 $F \subset A \times B, G \subset B \times C, H \subset C \times D$ について

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

が成り立つ.

このことを二項関係が**結合律 associative law**を満たすという.

命題 1.27. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対して, これらの合成を定義することができる.

定義 1.28. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ を合成して得られる写像を**写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ の合成写像 composition mapping** という.

記法 1.29. 写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ の合成写像を $g \circ f$ で表す.

命題 1.30. 写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$ について

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ.

このことを写像が結合律を満たすという.

1.3 宇宙

定義 1.31. 集合を元とする集合 X に対して $\{Y \mid Y \in Z \in X\}$ を**集合を元とする集合 X の合併 union** という.

記法 1.32. 集合を元とする集合 X の合併を $\cup X$ で表す.

定義 1.33. 以下の性質を満たす集合 U を**宇宙 universe** という.

1. $X \in Y \wedge Y \in U \Rightarrow X \in U$
2. $X \in U \wedge Y \in U \Rightarrow \{X, Y\} \in U$
3. $X \in U \Rightarrow \mathcal{P}X \in U \wedge \cup X \in U$
4. $\mathbb{N} \in U$
5. $f: A \rightarrow B$ が全射で, $A \in U \wedge B \subset U \Rightarrow B \in U$

定義 1.34. 宇宙の元を**小集合 small set** という.

第2章

代数系

2.1 マグマ・半群・群

2.1.1 マグマ

定義 2.1. 写像 $\mu : S \times S \rightarrow S$ を集合 S 上の二項演算 **binary operation** という.

定義 2.2. 集合 M と集合 M 上の二項演算 μ の組 (M, μ) を**マグマ magma** という.

2.1.2 半群

定義 2.3. マグマ (G, μ) について, μ が結合律を満たす, すなわち任意の元 $g, h, k \in G$ に対して

$$\mu(g, \mu(h, k)) = \mu(\mu(g, h), k)$$

が成り立つとき, マグマ (G, μ) は**半群 semigroup** であるという.

2.1.3 群

定義 2.4. マグマ (G, μ) について, とある $e \in G$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して

$$\mu(e, g) = \mu(g, e) = g$$

を満たすとき, e を**マグマ (G, μ) の単位元 identity element** という.

定義 2.5. マグマ (G, μ) について, 任意の $g \in G$ に対して, とある $h \in G$ が存在して

$$\mu(g, h) = \mu(h, g) = e$$

を満たすとき, h を**マグマ (G, μ) の元 g に対する逆元 inverse element** という. ここで e はマグマ (G, μ) の単位元である.

記法 2.6. マグマ (G, μ) における元 $g \in G$ の逆元を g^{-1} で表す.

定義 2.7. 半群 (G, μ) が単位元をもち, かつ任意の元に対して逆元が存在するとき**半群 (G, μ) は群 group** であるという

定義 2.8. 群 $(G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2)$ について, 写像 $f : G_1 \rightarrow G_2$ が, 任意の $g \in G, g' \in G$ について

$$f(\mu_1(g, g')) = \mu_2(f(g), f(g'))$$

を満たすとき, f を群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への準同型写像 **homomorphism** という.

定義 2.9. 群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への準同型写像 f が全単射であるとき, f を群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への同型写像 **isomorphism** という

定義 2.10. 群 (G, μ) について, 任意の $a, b \in G$ に対して $\mu(a, b) = \mu(b, a)$ が成り立つとき, 群 (G, μ) は可換群 **commutative group** であるという^{*1}.

2.2 環

定義 2.11. 集合 R と R 上の二項演算 $+, *$ が次を満たすとき, $(R, +, *)$ は環 **ring** であるといい, $+$ を加法, $*$ を乗法という.

1. $(R, +)$ が可換群である.
2. $(R, *)$ が半群である.
3. 任意の $a, b, c \in R$ に対して

$$\begin{aligned} a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (a + b) * c &= a * c + b * c \end{aligned}$$

が成り立つ.

定義 2.11 の第 3 の条件のことを乗法の加法に対する分配律 **distributive property** という.

2.3 体

定義 2.12. 環 $(K, +, *)$ において, 群 $(K, +)$ の単位元を $(K, +, *)$ の零元という.

記法 2.13. 環 $(K, +, *)$ における零元を 0_K で表す.

定義 2.14. 環 $(K, +, *)$ において, 群 $(K, *)$ の単位元を $(K, +, *)$ の乗法単位元という.

記法 2.15. 環 $(K, +, *)$ における乗法単位元を 1_K で表す.

定義 2.16. 環 $(K, +, *)$ が次を満たすとき, $(K, +, *)$ は体 **field** であるという.

1. 乗法について零元以外の元が可換群をなす, すなわち $(K \setminus \{0_K\}, *)$ が可換群である.
2. 零元と乗法単位元が異なる, すなわち $0_K \neq 1_K$ である.

^{*1} アーベル群 **abelian group** ともいう

第 3 章

Haskell の基礎

関数型プログラミング言語 Haskell では圏論的な視点からライブラリが構築されている。

3.1 型

3.1.1 定義済みの型

Haskell には標準ライブラリに表 3.1 に示す型が定義済みである。

表 3.1 Haskell の標準ライブラリに定義済みの型

<code>Int</code>	固定長整数
<code>Integer</code>	多倍長整数
<code>Char</code>	文字
<code>Float</code>	単精度浮動小数点数
<code>Double</code>	倍精度浮動小数点数
<code>Bool</code>	ブール代数

例として, 固定長整数の変数 `a` は次のように宣言する。

```
1 a :: Int
```

3.1.2 データ構造

同じ型の値を一方向に並べ, 前の要素が後の要素のポインタをもつようにしたデータ構造をリストという。一方, リストに対して, 異なる型を含むことを許容するデータ構造をタプルという。

3.1.3 データ型

例として `Red`, `Green`, `Blue` からなるデータ `Color` の宣言は以下のように記述する。

```
1 data Color = Red | Green | Blue
```


第II部

圏論の諸概念

第4章

圏

4.1 圏

定義 4.1. 集合の組 $(S_{\text{obj}}, S_{\text{mor}})$ が次の条件を満たすとき**集合の組 $(S_{\text{obj}}, S_{\text{mor}})$ は圏 category をなす**という.

1. 任意の $f \in S_{\text{mor}}$ に対して $\text{dom}(f) \in S_{\text{obj}}, \text{cod}(f) \in S_{\text{obj}}$ がそれぞれ一意に定まる.
2. $f \in S_{\text{mor}}, g \in S_{\text{mor}}$ について, $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ であるとき, S_{mor} 上の二項演算 \circ が存在する.
3. $f \in S_{\text{mor}}, g \in S_{\text{mor}}, h \in S_{\text{mor}}$ について,

$$\begin{aligned}\text{cod}(f) &= \text{dom}(g), \\ \text{cod}(g) &= \text{dom}(h)\end{aligned}$$

であるとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ.

4. 任意の $A \in S_{\text{obj}}$ について次を満たす $1_A \in S_{\text{mor}}$ が存在する.
 - (a) $\text{dom}(1_A) = A$
 - (b) $\text{cod}(1_A) = A$
 - (c) $\text{dom}(f) = \text{cod}(g) = A$ かつ $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ を満たす任意の $(f, g) \in S_{\text{obj}} \times S_{\text{obj}}$ について $f \circ 1_A = f$ かつ $1_A \circ g = g$ が成り立つ.

定義 4.1 における S_{obj} の元を**対象 object**, S_{mor} の元を**射 morphism** という. 1つ目の条件の $\text{dom}f, \text{cod}f$ はそれぞれ**射 f の始域 domain** と **終域 codomain** という. 2つ目の条件の二項演算 \circ は射の合成という. 3つ目の条件で述べているのは, 射の合成が結合律を満たすということである. 最後に, 4つ目の条件の 1_A を**対象 A の恒等射 identity morphism** という.

これらの用語を導入して, 定義 4.1 を改めて記述すると次のようになる.

1. 圏は対象の集合と射の集合からなる.
2. 射は始域と終域をもち, それらはそれぞれ一意に定まる.
3. 射は合成可能であり, 射の合成は結合律を満たす.
4. 任意の対象について恒等射が存在する.

注意 4.2. 恒等射 1_A は一意に定まるので, 定義に一意性を加えても問題ない.

記法 4.3. 圏 \mathcal{C} の対象全体の集合を $\text{Obj}(\mathcal{C})$ で表す.

記法 4.4. 圏 \mathcal{C} の射全体の集合を $\text{Mor}(\mathcal{C})$ で表す.

記法 4.5. 始域が A , 終域が B である射 f を $f: A \rightarrow B$ で表す.

記法 4.6. 集合 $\{f: A \rightarrow B \mid A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), B \in \text{Obj}(\mathcal{C})\}$ を $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ で表す.

定義 4.7. とある圏の射 $f: A \rightarrow B$ に対して, とある射 $g: B \rightarrow A$ が存在して $g \circ f = 1_A$ かつ $f \circ g = 1_B$ となるとき, 射 f は同型射 isomorphism であるという. また, このとき g を射 f の逆射という.

記法 4.8. 射 f の逆射を f^{-1} で表す.

命題 4.9. 射 f が同型射であるとき, f^{-1} は一意に定まる.

4.1.1 小圏・局所小圏・大圏

小圏

定義 4.10. 圏 \mathcal{C} について, $\text{Obj}(\mathcal{C}), \text{Mor}(\mathcal{C})$ が小集合であるとき, 圏 \mathcal{C} は小圏 small category であるという.

命題 4.11. 対象も射もない圏 $\mathbf{0}$ は小圏である.

命題 4.12. 対象が 1 つで, 恒等射のみをもつ圏 $\mathbf{1}$ は小圏である.

命題 4.13. 対象が A, B の 2 つで, 恒等射と射 $f: A \rightarrow B$ のみをもつ圏 $\mathbf{2}$ は小圏である.

命題 4.14. 順序集合は小圏である.

局所小圏

定義 4.15. 圏 \mathcal{C} について, 任意の $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ の組に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ が小集合であるとき, 圏 \mathcal{C} は局所小圏 locally small category であるという.

大圏

定義 4.16. 圏 \mathcal{C} が小圏でないとき圏 \mathcal{C} は大圏 large category であるという.

命題 4.17. すべての小集合を対象とし, それらの間の写像を射とする圏 Set は大圏である.

命題 4.18. すべての群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏 Grp は大圏である.

命題 4.19. すべての可換群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏 Ab は大圏である.

4.1.2 部分圏

記法 4.20. 圏 \mathcal{C} における射 $f, g \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ の合成を $g \circ_{\mathcal{C}} f$ で表す.

命題 4.21. 圏 \mathcal{A} が圏 \mathcal{B} に対して, 以下の条件を満たすとする.

1. $\text{Obj}(\mathcal{A}) \subset \text{Obj}(\mathcal{B})$
2. $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), X_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\} \subset \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \text{Obj}(\mathcal{B}), X_2 \in \text{Obj}(\mathcal{B})\}$

このとき $\text{Mor}(\mathcal{A}) \subset \text{Mor}(\mathcal{B})$ が成り立つ.

定義 4.22. 圏 \mathcal{A} が圏 \mathcal{B} に対して, 以下の条件を満たすとき, 圏 \mathcal{A} は圏 \mathcal{B} の部分圏であるという.

1. $\text{Obj}(\mathcal{A}) \subset \text{Obj}(\mathcal{B})$
2. $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), X_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\} \subset \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \text{Obj}(\mathcal{B}), X_2 \in \text{Obj}(\mathcal{B})\}$
3. 任意の $f \in \text{Mor}(\mathcal{A}), g \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ について $g \circ_{\mathcal{A}} f$ が存在するならば $g \circ_{\mathcal{B}} f$ が存在し

$$g \circ_{\mathcal{A}} f = g \circ_{\mathcal{B}} f$$

が成り立つ.

4. 任意の $f \in \text{Mor}(\mathcal{A}), g \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ について $g \circ_{\mathcal{B}} f$ が存在するならば $g \circ_{\mathcal{A}} f$ が存在し

$$g \circ_{\mathcal{A}} f = g \circ_{\mathcal{B}} f$$

が成り立つ.

命題 4.23. 圏 Ab は圏 Grp の部分圏である.

4.1.3 双対

定義 4.24. 圏 \mathcal{C} に対して, 対象が \mathcal{C} と同じで, 射の向きが \mathcal{C} と反対である圏を圏 \mathcal{C} の双対圏という.

記法 4.25. 圏 \mathcal{C} の双対圏を \mathcal{C}^{op} で表す.

4.1.4 圏の生成

命題 4.26. 集合 A と写像 $f: A \rightarrow A$ について, 集合の組 $(\{A\}, \{1_A, f\})$ は圏をなす.

命題 4.27. 集合 A と写像 $f: A \rightarrow A$ について, 正の整数 n に対して $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_n$ とするとき, 集合の組 $(\{A\}, \{1_A, f, f^2, \dots\})$ は圏をなす.

命題 4.28. 集合 A, B と写像 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$ について, 集合の組 $(\{A, B\}, \{1_A, 1_B, f, g, f \circ g\})$ は圏をなす.

定義 4.29. 集合 S_1, \dots, S_N に関する写像 f_1, \dots, f_M に関して, $\{S_1, \dots, S_N\}$ を対象とし, $1_{S_1}, \dots, 1_{S_N}$ と f_1, \dots, f_M およびそれらの合成のみを射とする圏 \mathcal{C} が存在するとき, $\{f_1, \dots, f_M\}$ を圏 \mathcal{C} の生成系 system of generators という.

定義 4.30. 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} の積に対して, 次の集合の組 $(S_{\text{Obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), S_{\text{Mor}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ を圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} の積という.

- $S_{\text{Obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{(A, B) \mid A \in \text{Obj}(\mathcal{A}), B \in \text{Obj}(\mathcal{B})\}$
- $S_{\text{Mor}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \{(f_A, f_B) \mid f_A \in \text{Mor}(\mathcal{A}), f_B \in \text{Mor}(\mathcal{B})\}$

定義 4.31. 圏 \mathcal{A}, \mathcal{B} の積を $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ で表す.

命題 4.32. 圏の積は圏をなす.

第5章

関手

5.1 関手

定義 5.1. 写像 $f : \text{Obj}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{B})$ を圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への対象関数 **function on objects** という.

記法 5.2. 圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への対象関数を $F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ で表す.

定義 5.3. 圏 \mathcal{A} の射全体の集合

$$\text{Mor}(\mathcal{A}) = \{f_{\mathcal{A}} : A_1 \rightarrow A_2 \mid A_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$$

から, 対象関数 $F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\cdot)$ を用いて定まる, 圏 \mathcal{B} の射の集合

$$\text{Mor}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) = \{f_{\mathcal{B}} : F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(A_1) \rightarrow F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(A_2) \mid A_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$$

への写像 $F_{\text{mor}}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) : \text{Mor}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Mor}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ が次の条件を満たすとき, これを圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への射関数 **function on morphisms** という.

1. 任意の $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ に対して

$$F_{\text{mor}}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})(1_A) = 1_{F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})(A)}$$

が成り立つ.

2. 任意の $(A_1, A_2, A_3) \in \text{Obj}(\mathcal{A})^3$ と $f_{1,2} : A_1 \rightarrow A_2, f_{2,3} : A_2 \rightarrow A_3$ に対して

$$F_{\text{Mor}}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})(f_{2,3} \circ f_{1,2}) = F_{\text{Mor}}(f_{2,3}) \circ F_{\text{Mod}}(f_{1,2})$$

が成り立つ.

記法 5.4. 圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への射関数を $F_{\text{mor}}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ で表す.

定義 5.5. 対象関数 $F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と射関数 $F_{\text{mor}}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ の組を圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への関手 **functor** という.

記法 5.6. 圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への関手 F を $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ で表す.

定義 5.7. 圏 \mathcal{C} から圏 \mathcal{C} への関手を圏 \mathcal{C} に関する恒等関手 **identity functor** という.

記法 5.8. 圏 \mathcal{C} に関する恒等関手を $\text{Id}(\mathcal{C})$ で表す.

定義 5.9. 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ に対して

$$F_{\text{obj}}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \circ F_{\text{obj}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$$

を対象関数とし.

$$F_{\text{mor}}(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \circ F_{\text{mor}}(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$$

を射関数とする関手を関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ の合成 **composition** という.

記法 5.10. 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ の合成を $G \circ F$ で表す.

5.1.1 反変関手

定義 5.11. 関手 $F: \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ を圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への反変関手 **contravariant functor** という.

5.1.2 定数関手

定義 5.12. 任意の $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ を唯一の $B_0 \in \text{Obj}(\mathcal{B})$ に写し, 任意の射 $f \in \text{Mor}(\mathcal{A})$ を恒等射 $1_{B_0} \in \text{Mor}(\mathcal{B})$ に写す関手を圏 \mathcal{A} から圏 \mathcal{B} への定数関手 **constant functor** という

5.1.3 忠実関手と充満関手

定義 5.13. 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に関して, 写像

$$f: \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\} \rightarrow \{(F(A_1), F(A_2)) \mid A_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$$

が単射となっているとき, 関手 F は忠実 **faithful** であるという.

定義 5.14. 関手 $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ に関して, 写像

$$f: \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\} \rightarrow \{(F(A_1), F(A_2)) \mid A_1 \in \text{Obj}(\mathcal{A}), A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$$

が全射となっているとき, 関手 F は充満 **full** であるという.

定義 5.15. 関手 F が忠実かつ充満であるとき関手 F は充満忠実 **full and faithful** であるという.

第 6 章

自然変換

6.1 自然変換

定義 6.1. 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ と関手 $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ について,

1. 任意の $A \in \text{Obj}(\mathcal{A})$ に対して \mathcal{B} の射 $M_{\mathcal{B}}(A) : F(A) \rightarrow G(A)$ が存在する.
2. 任意の \mathcal{A} の射 $f : A_1 \rightarrow A_2$ が

$$M_{\mathcal{B}}(A_2) \circ F(f) = G(f) \circ M_{\mathcal{B}}(A_1)$$

を満たす.

このとき $\{M_{\mathcal{B}}(A) \mid A \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$ を関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ から関手 $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ への**自然変換 natural transformation** という.

記法 6.2. 関手 F から関手 G への自然変換 μ を $\mu : F \rightarrow G$ で表す.

第 7 章

関手圏

7.1 関手圏

命題 7.1. 小圏 \mathcal{A} と局所小圏 \mathcal{B} に対して, 次の集合の組 $(S_{\text{obj}}, S_{\text{mor}})$ は圏をなす.

$$\begin{aligned} S_{\text{obj}} &= \{F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\} \\ S_{\text{mor}} &= \{\alpha : F_1 \rightarrow F_2 \mid F_1 \in S_{\text{obj}}, F_2 \in S_{\text{obj}}\} \end{aligned}$$

定義 7.2. 小圏 \mathcal{A} と局所小圏 \mathcal{B} に対する次の集合の組 $(S_{\text{obj}}, S_{\text{mor}})$ からなる圏を小圏 \mathcal{A} から局所小圏 \mathcal{B} への関手圏 **functor category** という.

$$\begin{aligned} S_{\text{obj}} &= \{F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}\} \\ S_{\text{mor}} &= \{\alpha : F_1 \rightarrow F_2 \mid F_1 \in S_{\text{obj}}, F_2 \in S_{\text{obj}}\} \end{aligned}$$

記法 7.3. 小圏 \mathcal{A} から局所小圏 \mathcal{B} への関手圏を $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ で表す

定義 7.4. 関手圏における同型射を**自然同型 natural isomorphism** という.

第 8 章

圏同値

8.1 圏同値

定義 8.1. 圏 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ に対して, 関手 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}', G : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$ と自然同型 $\eta : \text{Id}(\mathcal{A}) \rightarrow G \circ F, \epsilon : F \circ G \rightarrow \text{Id}(\mathcal{A}')$ が存在するとき圏 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ は圏同値であるという.

命題 8.2. 圏同値は同値関係である.