

# 圈論原論 I

Sexytant

2023 年 1 月 17 日



# 目次

<b>第 I 部</b>	<b>準備</b>	<b>5</b>
<b>第 1 章</b>	<b>集合と位相</b>	<b>7</b>
1.1	集合 . . . . .	7
1.2	二項関係・写像（関数） . . . . .	7
1.2.1	二項関係 . . . . .	7
1.2.2	順序集合 . . . . .	8
1.2.3	写像 . . . . .	8
1.2.4	合成と結合律 . . . . .	8
1.2.5	ホモトピー . . . . .	9
<b>第 2 章</b>	<b>代数系</b>	<b>11</b>
2.1	群 . . . . .	11
2.2	環 . . . . .	12
2.3	体 . . . . .	12
2.4	「宇宙」 . . . . .	12
2.5	類 . . . . .	13
<b>第 3 章</b>	<b>Haskell の基礎</b>	<b>15</b>
3.1	型 . . . . .	15
3.1.1	定義済みの型 . . . . .	15
3.1.2	新型定義 . . . . .	15
3.1.3	データ型 . . . . .	15
3.1.4	型クラス . . . . .	15
<b>第 II 部</b>	<b>圏論の諸概念</b>	<b>17</b>
<b>第 4 章</b>	<b>圏</b>	<b>19</b>
4.1	圏 . . . . .	19
4.1.1	情報隠蔽された対象の探究に圏論が提供する方法論 . . . . .	19
4.1.2	小圏・局所小圏・大圏 . . . . .	20
4.1.3	部分圏 . . . . .	20
4.1.4	双対 . . . . .	20
4.1.5	圏の生成 . . . . .	20

4.2	Haskell における圏 (Hask)	21
<b>第 5 章</b>	<b>関手</b>	<b>23</b>
5.1	関手	23
5.1.1	反変関手	23
5.1.2	定数関手	23
5.1.3	忠実関手と充満関手	23
5.1.4	埋め込み関手	24
5.1.5	忘却関手	24
5.2	Haskell の型構築子と関手	24
5.3	2 変数の関手	26
5.4	型クラスと Hask の部分圏	27
<b>第 6 章</b>	<b>自然変換</b>	<b>29</b>
6.1	自然変換	29
6.2	Hask における自然変換	29
6.2.1	concat	29
6.2.2	List 関手から Maybe 関手への自然変換 safehead	29
6.2.3	concat と safehead の垂直合成	29
6.2.4	二分木からリストへの flatten 関数	29
6.3	Hask における定数関手	29
6.3.1	length 関数	29
<b>第 7 章</b>	<b>関手圏</b>	<b>31</b>
7.1	関手圏	31
<b>第 8 章</b>	<b>圏同値</b>	<b>33</b>
8.1	圏同値	33
8.2	Hask における自然同型	33
8.2.1	mirror 関数	33
8.2.2	Maybe 関手と Either() 関手の間の自然同型	33
8.3	まとめ	33

第 I 部

準備



# 第 1 章

## 集合と位相

### 1.1 集合

**集合 set** とは、ひとまず素朴に「ものの集まり」と定義される。集合を構成する「もの」を**元 element** という。

**記法 1.1.** 集合は各元をカンマで区切り  $\{\}$  で囲むことで表される。

**記法 1.2.** とある条件を満たす  $x$  全体からなる集合は  $\{x \mid x \text{ についての条件} \}$  を用いて表す。

**実例 1.3.**  $\{1, 2, 3\}$  や  $\{a, b, c\}$ , 自然数全体  $\mathbb{N}$ , 整数全体  $\mathbb{Z}$ , 実数全体  $\mathbb{R}$ , 複素数全体  $\mathbb{C}$  は集合である。

**実例 1.4.**  $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$  や  $\{a^3 \mid a \in \mathbb{N}\}$  は集合である。

**実例 1.5.** **空集合 empty set**  $\emptyset = \{\}$  は集合である。

**記法 1.6.**  $a$  が集合  $S$  の元であることを  $a \in S$  で表す。

**定義 1.7.** 集合  $A$  の元のすべてが集合  $B$  の元であるとき  $A$  は  $B$  の**部分集合 subset** であるという。

**記法 1.8.** 集合  $A$  が集合  $B$  の部分集合であることを  $A \subset B$  で表す。

**定義 1.9.** 集合  $S$  が与えられたとき,  $S$  の部分集合の全体  $\mathcal{P}S = \{A \mid A \subset S\}$  を  $S$  の**冪集合 power set** という。

**定義 1.10.** 集合  $A, B$  に対して  $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$  を  $A$  と  $B$  の**直積 direct product** という。

**記法 1.11.**  $A$  と  $B$  の直積を  $A \times B$  で表す。

実は, 集合を「ものの集まり」と素朴に定義することは, 矛盾を孕んでいる。この矛盾を避けるための議論はのちに行う。また, 集合論の公理には立ち入らないこととする。

### 1.2 二項関係・写像（関数）

#### 1.2.1 二項関係

**定義 1.12.** 集合  $A, B$  に対して  $R \subset A \times B$  であるとき,  $R$  は  $A$  と  $B$  の**二項関係 binary relation** であるという。

**定義 1.13.**  $R$  が集合  $A, B$  の二項関係であるとする。とある  $a \in A, b \in B$  の組  $(a, b)$  が  $R$  の元であるとき,

$a$  と  $b$  に間に  $R$  の関係があるという.

記法 1.14.  $a$  と  $b$  の間に  $R$  の関係があることを  $aRb$  と表す.

### 1.2.2 順序集合

定義 1.15. 次を満たす集合  $X$  から  $X$  への二項関係  $R$  を順序 order という.

1. 任意の  $x \in X$  について  $(x, x) \in R$
2.  $(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
3.  $(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

定義 1.16. 順序をもつ集合を順序集合 ordered set という.

記法 1.17. 順序集合の元  $x, y$  に順序関係があるとき,  $x \preceq y$  で表す.

### 1.2.3 写像

定義 1.18.  $R$  が集合  $A, B$  の二項関係であるとする. 任意の  $a \in A$  について, とある  $b \in B$  が一意に存在して  $aRb$  となると,  $R$  は  $A$  から  $B$  への写像 map であるという.

記法 1.19. 集合  $A$  から集合  $B$  への写像  $f$  を  $f: A \rightarrow B$  で表す.

注意 1.20. 以下では, 「関数 function」と「写像」を同じ意味で用いる.

記法 1.21. 集合  $A$  から集合  $B$  への写像に  $f$  に関して,  $b \in B$  が  $a \in A$  に対応することを

$$b = f(a)$$

で表す.

定義 1.22. 集合  $A$  から集合  $B$  への写像  $f$  が, 任意の  $a_1, a_2 \in A$  について

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

を満たすとき  $f$  は単射 injection であるという.

定義 1.23. 集合  $A$  から集合  $B$  への写像  $f$  が, 任意の  $b \in B$  に対してとある  $a \in A$  が存在して

$$b = f(a)$$

であるとき  $f$  は全射 surjection であるという.

定義 1.24. 集合  $A$  から集合  $B$  への写像  $f$  が, 単射であり, かつ全射であるとき  $f$  は全単射 bijection であるという.

### 1.2.4 合成と結合律

定義 1.25. 集合  $A, B, C$  に関する二項関係  $F \in A \times B$  と  $G \in B \times C$  について, その合成 composition  $G \circ F \in A \times C$  を

$$G \circ F = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{とある } b \in B \text{ が存在して } (a, b) \in F \text{ かつ } (b, c) \in G \text{ である}\}$$



で定義する.

**命題 1.26.** 二項関係の合成は**結合律 associative law**を満たす. 結合律とは, 集合  $A, B, C, D$  に対する 3 つの二項関係  $F \in (A \times B), G \in (B \times C), H \in (C \times D)$  について

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

が成り立つことをいう.

**定義 1.27.** 集合  $A, B, C$  に関する写像  $f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow C$  について, その合成  $g \circ f: A \rightarrow C$  を

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

で定義する. ここで  $a$  は  $A$  の元である.

**命題 1.28.** 写像の合成は結合律を満たす. すなわち, 集合  $A, B, C, D$  に対する 3 つの写像  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$  について

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ.

### 1.2.5 ホモトピー

**定義 1.29.** 逆写

**記法 1.30.** 写像  $f$  の逆写を  $f^{-1}$  で表す.

**定義 1.31.** 位相空間  $X, Y$  における写像  $f: X \rightarrow Y$  について,  $Y$  における任意の開集合  $V \subset Y$  に対して

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$$

が  $X$  の開集合となるとき,  $f$  は**連続写像**であるという.

**定義 1.32.** 位相空間  $A, B$  と 2 つの連続写像  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$  に対して, 連続関数

$$\alpha: A \times [0, 1] \rightarrow B$$

が存在し,

$$\alpha(x, 0) = f(x)$$

$$\alpha(x, 1) = g(x)$$

となっているとき  $\alpha$  は  $f$  と  $g$  を結ぶ**ホモトピー**であるという.



## 第2章

# 代数系

### 2.1 群

**定義 2.1.** 集合  $G$  に関する写像  $\mu : G \times G \rightarrow G$  を  $G$  上の**二項演算 binary operation**  $\mu$  という.

**定義 2.2.** 集合  $G$  と  $G$  上の二項演算  $\mu$  について, とある元  $e \in G$  が存在して, 任意の元  $g \in G$  に対して

$$\mu(e, g) = \mu(g, e) = g$$

が成り立つとき,  $e$  を  $G$  の**単位元 identity element** という.

**定義 2.3.** 集合  $G$  と  $G$  上の二項演算  $\mu$  について, 任意の元  $g \in G$  に対して, とある元  $h$  が存在して

$$\mu(g, h) = \mu(h, g) = e$$

が成り立つとき,  $h$  を  $g$  の**逆元 inverse element** という. ここで  $e$  は  $G$  の単位元である.

**記法 2.4.** 集合  $G$  における元  $g \in G$  の逆元を  $g^{-1}$  で表す.

**定義 2.5.** 集合  $G$  と  $G$  上の二項演算  $\mu$  が以下の条件を満たすとき  $(G, \mu)$  は**群 group** であるという

1.  $\mu$  が結合律を満たす. すなわち, 任意の  $G$  の元  $g, h, k$  に対して

$$\mu(g, \mu(h, k)) = \mu(\mu(g, h), k)$$

が成り立つ.

2.  $G$  は単位元をもつ.
3.  $G$  の任意の元に対して逆元が存在する.

**定義 2.6.** 群  $(G_1, \mu_1)$  から群  $(G_2, \mu_2)$  への写像  $f$  が任意の  $G_1$  の元  $g, g'$  について

$$f(\mu_1(g, g')) = \mu_2(f(g), f(g'))$$

を満たすとき,  $f$  は  $(G_1, \mu_1)$  から  $(G_2, \mu_2)$  への**準同型写像 homomorphism** であるという.

**定義 2.7.** 群  $(G_1, \mu_1)$  から群  $(G_2, \mu_2)$  への準同型写像  $f$  が全単射であるとき,  $f$  は  $(G_1, \mu_1)$  から  $(G_2, \mu_2)$  への**同型写像 isomorphism** であるという

**定義 2.8.** 群  $(G, \mu)$  において, 任意の  $a, b \in G$  に対して  $\mu(a, b) = \mu(b, a)$  が成り立つとき, 群  $(G, \mu)$  は**可換群 commutative group** であるという<sup>\*1</sup>.

---

<sup>\*1</sup> アーベル群 abelian group ともいう

## 2.2 環

定義 2.9. 加法

定義 2.10. 乗法

定義 2.11. 分配 distributive property

## 2.3 体

定義 2.12. 以下の条件を満たす集合を**体**という.

1. 加法について可換群になっている. すなわち, 加法について閉じていて, 単位元と逆元が存在する.
2. 乗法について可換群になっている. すなわち, 乗法について閉じていて, 単位元と逆元が存在する.
3. 加法と乗法について分配法則が成り立つ.

体ではいわゆる四則演算が可能である

## 2.4 「宇宙」

**内包原理**とは「集合  $S$  の元  $x$  に対して true か false を返す関数  $\varphi : S \rightarrow \{\text{true}, \text{false}\}$  が与えられたとき, 新たな集合  $\{x \in S \mid \varphi(x) = \text{true}\}$  を構成できる」という集合が満たすべき性質のことをいう.

ここまで, 集合を「ものの集まり」と素朴に定義してきたが, 次のような集合  $R$  を内包原理に基づいて構成しようとするとき矛盾が生じる.\*2

$$R = \{X \mid X \notin X\}$$

もし  $R \in R$  であると仮定すると,  $R$  の定義により  $R \notin R$  となる. 他方,  $R \notin R$  と仮定すると,  $R$  の定義より  $R \in R$  となってしまう.

このような矛盾が発生しないようにするため, 「宇宙」 universe という概念を導入する.

定義 2.13. 以下の性質を満たす集合  $U$  を「宇宙」 universe という.

1.  $X \in Y \wedge Y \in U \Rightarrow X \in U$
2.  $X \in U \wedge Y \in U \Rightarrow \{X, Y\} \in U$
3.  $X \in U \Rightarrow \mathcal{P}X \in U \wedge \cup X \in U$ \*3
4.  $\mathbb{N} \in U$
5.  $f : A \rightarrow B$  が全射で,  $A \in U \wedge B \subset U \Rightarrow B \in U$

定義 2.14. 「宇宙」の元を**小集合 small set** という.

定義 2.15.  $a$  と  $b$  が小集合のとき関数  $f : a \rightarrow b$  を**小関数 small function** という.

以上を定義することにより, ...

注意 2.16. 「宇宙」は小集合の全体である.

---

\*2 ラッセルのパラドックスと呼ばれる

\*3 未定義の記法

**命題 2.17.** 「宇宙」は小集合ではない

**証明.** もし, 「宇宙」が「宇宙」の元であるとする, ... と矛盾する. □

## 2.5 類

**定義 2.18.** 「宇宙」の部分集合を類 **class** という.

**命題 2.19.** 「宇宙」は類である.

**証明.** 「宇宙」は「宇宙」の部分集合である. □

**定義 2.20.** 小集合でない類を真類 **proper class** という.

**命題 2.21.** 「宇宙」は真類である.

**証明.** 「宇宙」は小集合ではなく, かつ類である. □



## 第 3 章

# Haskell の基礎

関数型プログラミング言語 Haskell では圏論的な視点からライブラリが構築されている。

### 3.1 型

#### 3.1.1 定義済みの型

Haskell には標準ライブラリに `Int`, `Integer`, `Char`, `Float`, `Double`, `Bool` などの型が定義済みである。

#### 3.1.2 新型定義

定義済みの型をもとにタプル、リストあるいは `Maybe` のような型構築子によって新たな型を無限に作り出すことができる。

実例 3.1. `[Integer]`, `Maybe Int`, `(Int, [Char])` などはずべて *Haskell* の型である。

#### 3.1.3 データ型

```
1 data Color = Red | Green | Blue
```

データ型は型クラス `Show` を付与することにより出力が可能となる。

```
1 data Color = Red | Green | Blue deriving Show
```

#### 3.1.4 型クラス

```
1 class Foo a where
2     foo :: a -> String
3 instance Foo Bool where
4     foo True = "Bool:␣True"
5     foo False = "Bool:␣False"
6 instance Foo Int where
7     foo x = "Int:␣" ++ show x
8 instance Foo Char where
```

```
9     foo x = "Char:␣" ++ [x]
10
11 main = do
12     putStrLn $ foo True      -- Bool: True
13     putStrLn $ foo (123::Int) -- Int: 123
14     putStrLn $ foo 'A'      -- Char: A
```

Foo 型クラスは任意の型 (a) を受け取り、String を返却するメソッド foo を持っている。instance を用いてそれぞれの型が引数に指定された場合の処理を実装している。



## 第 II 部

### 圏論の諸概念



## 第 4 章

### 圏

#### 4.1 圏

**定義 4.1.** 対象の集合  $\text{Obj}$  と射の集合  $\text{Mor}$  からなり、以下の演算が定義されているものを圏という。

1. 射  $f \in \text{Mor}$  には始域  $\text{dom} f$  および終域  $\text{cod} f$  となる対象がそれぞれ一意に定まる<sup>\*1</sup>
2.  $\text{dom} g = \text{cod} f$  を満たす射  $f, g \in \text{Mor}$  に対して、合成射  $g \circ f : \text{dom} f \rightarrow \text{cod} g$  が一意に定まる
3. 射の合成は結合律を満たす。すなわち、対象  $A, B, C, D \in \text{Obj}$  についての射の列  $f, g, h$  が与えられたとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ。

4. 任意の対象  $A \in \text{Obj}$  について、次の条件を満たす恒等射  $1_A : A \rightarrow A$  が存在する<sup>\*2</sup>  
条件：任意の射の組  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$  に対して  $f \circ 1_A = f$  かつ  $1_A \circ g = g$

**記法 4.2.** 圏  $\mathcal{C}$  の対象  $A, B$  に対して  $f : A \rightarrow B$  となる射の全体を  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  で表す。

**定義 4.3.** 圏  $\mathcal{C}$  の射  $f : A \rightarrow B$  に対して、ある射  $g : B \rightarrow A$  が存在して  $g \circ f = 1_A$  かつ  $f \circ g = 1_B$  となるとき、 $f$  は同型射であるという。また、このとき  $g$  を  $f$  の逆射という。

**記法 4.4.** 射  $f$  の逆射を  $f^{-1}$  で表す。

**命題 4.5.** ある射の逆射は存在すれば、一意に定まる

##### 4.1.1 情報隠蔽された対象の探究に圏論が提供する方法論

オブジェクト指向プログラミングでは、「知らせる必要のない情報は隠蔽しておくほうが安全である」という情報隠蔽の考え方が重要視される。これに対して、圏論は、対象がもつ情報が隠蔽されている状況下で、射のみから対象について探究するという方法論を提供する。

**実例 4.6.** どのような要素をもつかわからない集合  $A$  について写像  $f : A \rightarrow A$  が定義されていて  $f \circ f \circ f$  が恒等写像になるとする。このとき  $A$  が 3つの要素  $a_1, a_2, a_3$  をもつと仮定することができ、

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, f(a_3) = a_1$$

というように、これらの要素が写像  $f$  によって回転していると考えることができる。

<sup>\*1</sup>  $\text{dom} f = A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \text{cod} f = B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$  のとき  $f : A \rightarrow B$  とかく。

<sup>\*2</sup> 恒等写  $1_A$  は一意に定まるので、定義に一意性を加えても問題ない。

### 4.1.2 小圏・局所小圏・大圏

**定義 4.7.** 対象の集合, 射の集合がともに小集合である圏を**小圏**という.

**実例 4.8.** 順序集合は小圏である.

**定義 4.9.** すべての対象の組  $A, B$  に対して  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  が小集合である圏  $\mathcal{C}$  を**局所小圏**という.

**定義 4.10.** 小圏でない圏を**大圏**という.

**実例 4.11.** すべての小集合を対象とし, それらの間の写像を射とする圏  $\text{Set}$  は大圏である.

**実例 4.12.** すべての群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏  $\text{Grp}$  は大圏である.

**実例 4.13.** すべてのアーベル群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏  $\text{Ab}$  は大圏である.

**実例 4.14.** すべての位相空間を対象とし, それらの間の連続写像<sup>\*3</sup>を射とする圏  $\text{Top}$  は大圏である.

**実例 4.15.** ある体  $k$  に対して, すべての  $k$  次線形空間<sup>\*4</sup>を対象とし, それらの間の  $k$  次線形写像<sup>\*5</sup>を射とする圏  $\text{Vect}_k$  は大圏である.

### 4.1.3 部分圏

**定義 4.16.** 圏  $\mathcal{A}$  が圏  $\mathcal{B}$  に対して, 以下の3条件を満たすとき,  $\mathcal{A}$  は  $\mathcal{B}$  の**部分圏**であるという.

1.  $\text{Obj}(\mathcal{A})$  が  $\text{Obj}(\mathcal{B})$  の部分集合である.
- 2.
- 3.

**実例 4.17.** 圏  $\text{Ab}$ <sup>\*6</sup>は圏  $\text{Grp}$ <sup>\*7</sup>の部分圏である.

### 4.1.4 双対

**定義 4.18.** 任意の圏  $\mathcal{C}$  に対して, 対象が  $\mathcal{C}$  と同じで, 射の向きが  $\mathcal{C}$  と反対になっている圏を**双対圏**という.

**記法 4.19.** 圏  $\mathcal{C}$  の双対圏を  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  と表す.

**注意 4.20.** 双対の原理

### 4.1.5 圏の生成

自明な圏

非自明な圏

---

\*3 未定義?

\*4 未定義?

\*5 未定義?

\*6 ref

\*7 ref

**命題 4.21.** 集合  $A$  に対して写像  $f : A \rightarrow A$  を定める. このとき, 対象の集合  $\text{Obj} = \{A\}$  と, 射の集合  $\text{Mor} = \{1_A, f\}$  からなる圏を得ることができる. ここで, 射  $1_A$  は  $A$  についての恒等射である.

**証明.**  $\text{dom} f = \text{cod} f$  であるから, 合成射  $f \circ f$  を定めることができる. このとき  $f \circ f = 1_A$  もしくは  $f \circ f = f$  である.

$f \circ f = 1_A$  ならば...

...

となる. 一方,  $f \circ f = 1_A$  ならば...

...

となる. 以上より, いずれの場合も, 射の合成が結合律を満たすことがわかる. したがって  $f \circ f = 1_A$  と定めても  $f \circ f = f$  と定めても圏を生成することができる.  $\square$

**命題 4.22.** 集合  $A$  に対して写像  $f : A \rightarrow A$  を定め, 正の整数  $n$  に対して  $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_n$  とする. このとき, 対象の集合  $\text{Obj} = \{A\}$  と, 射の集合  $\text{Mor} = \{1_A, f, f^2, \dots, f^n, \dots\}$  からなる圏を得ることができる. ここで, 射  $1_A$  は  $A$  についての恒等射である.

**証明.**

$\square$

**命題 4.23.** 集合  $A, B$  に対して, 写像  $f : A \rightarrow B$  と  $g : B \rightarrow A$  を定める. このとき, 対象の集合  $\text{Obj} = \{A, B\}$  と射の集合  $\text{Mor} = \{1_A, 1_B, f, g, f \circ g\}$  からなる圏を得ることができる. ここで, 射  $1_A, 1_B$  はそれぞれ  $A, B$  についての恒等射である.

**証明.**

$\square$

生成系

生成元

関係

**定義 4.24.** 圏の積を次で定義する

**命題 4.25.** 圏の積は圏である.

## 4.2 Haskell における圏 (Hask)

**命題 4.26.** すべての *Haskell* の型を対象とし, それらの間の関数を射とする圏 *Hask* は小圏である.

**証明.**

$\square$

**注意 4.27.** *Haskell* において, 型  $A, B$  に対して, 型構築子によってつくられる  $A \rightarrow B$  は 1 つの型となる.



## 第 5 章

# 関手

### 5.1 関手

**定義 5.1.** 圏  $\mathcal{A}$  の対象  $\text{Obj}(\mathcal{A})$  から圏  $\mathcal{B}$  の対象  $\text{Obj}(\mathcal{B})$  への関数を  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への対象関数という.

**定義 5.2.** 射関数

**定義 5.3.** 圏  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  に対する対称関数と射関数の組を  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への関手という.

**実例 5.4.** 順序を保存する写像

**実例 5.5.**  $n$  次ホモロジー関手

**実例 5.6.**

**実例 5.7.**

#### 5.1.1 反変関手

**定義 5.8.** 圏  $A^{\text{op}}$  から圏  $B$  への関手を圏  $A$  から圏  $B$  への反変関手という.

**実例 5.9.**

**記法 5.10.**

**注意 5.11.**

#### 5.1.2 定数関手

**定義 5.12.** 圏  $\mathcal{A}$  の任意の対象  $A$  を圏  $\mathcal{B}$  のただ一つの対象  $B_0$  に写し,  $\mathcal{A}$  の任意の射  $f$  を圏  $\mathcal{B}$  の恒等射に写す関手を定数関手という

#### 5.1.3 忠実関手と充満関手

**定義 5.13.** 圏  $\mathcal{A}$  から圏  $\mathcal{B}$  への関手  $F$  に関して, 集合  $\{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$  から集合  $\{(F(A_1), F(A_2)) \mid \text{Obj}(\mathcal{A})\}$  への写像が単射となっているとき, 関手  $F$  は忠実であるという.

**定義 5.14.** 圏  $\mathcal{A}$  から圏  $\mathcal{B}$  への関手  $F$  に関して, 集合  $\{(A_1, A_2) \mid A_1, A_2 \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$  から集合

$\{(F(A_1), F(A_2)) \mid \text{Obj}(\mathcal{A})\}$  への写像が全射となっているとき、関手  $F$  は**充満**であるという。

**定義 5.15.** 圏  $\mathcal{A}$  から圏  $\mathcal{B}$  への関手  $F$  が忠実かつ充満であるとき関手  $F$  は**充満忠実**であるという

**定義 5.16.** 圏  $\mathcal{A}$  が圏  $\mathcal{B}$  の部分圏であり、関手  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  が充満であるとき、圏  $\mathcal{A}$  は圏  $\mathcal{B}$  の**充満部分圏**であるという。

**実例 5.17.** ... 充満忠実である。

**実例 5.18.** ... 忠実だが充満でない

**実例 5.19.** 充満だが忠実でない

**実例 5.20.** 複素数...

...

... 忠実だが充満でない。(例 1.30)

### 5.1.4 埋め込み関手

### 5.1.5 忘却関手

## 5.2 Haskell の型構築子と関手

### List 関手

Haskell における型構築子 `[]` は任意の型  $A$  に対して型 `[A]` を対応させる。これは、`Hask` から `Hask` への対称関数とみなせる。型  $A$  と型  $B$  および関数  $f :: A \rightarrow B$  が与えられとき `map f :: [A] -> [B]` が決定される。

...

型構築子 `[]` は **List 関手**と呼ばれる

### Maybe 関手

Haskell における型構築子 `Maybe` は...

...

型構築子 `Maybe` は **Maybe 関手**と呼ばれる。

### Tree 関手

一般に木構造を生成する型構築子は関手にできる。これを **Tree 関手**と呼ぶ。

```
1 module Tree where
2 import Data.Char
3
4 data Tree a = Empty | Node a (Tree a) (Tree a)
5
6 instance (Show a) => Show (Tree a) where
7     show x = show1 0 x
8
9 show1 :: Show a => Int -> (Tree a) -> String
```



```
10 show1 n Empty = ""
11 show1 n (Node x t1 t2) =
12     show1 (n+1) t2 ++
13     indent n ++ show x ++ "\n" ++
14     show1 (n+1) t1
15
16 indent :: Int -> String
17 indent n = replicate (n*4) ' '
18
19 instance Functor Tree where
20     fmap f Empty = Empty
21     fmap f (Node x t1 t2) =
22         Node (f x) (fmap f t1) (fmap f t2)
23
24 -- test data
25 tree2 = Node "two" (Node "three" Empty Empty)
26         (Node "four" Empty Empty)
27 tree3 = Node "five" (Node "six" Empty Empty)
28         (Node "seven" Empty Empty)
29 tree1 = Node "one" tree2 tree3
30
31 string2int :: String -> Int
32 string2int "one" = 1
33 string2int "two" = 2
34 string2int "three" = 3
35 string2int "four" = 4
36 string2int "five" = 5
37 string2int "six" = 6
38 string2int "seven" = 7
39 string2int _ = 0
40
41 tree0 = fmap string2int tree1
42
43 {- suggested tests
44     fmap (map toUpper) tree1
45     fmap string2int tree1
46     fmap length tree1
47 -}
48
49 {- another possible instance of Show
50 show1 :: Show a => Int -> (Tree a) -> String
51 show1 n Empty = indent n ++ "E"
```

```

52 show1 n (Node x t1 t2) =
53     indent n ++ show x ++ "\n" ++
54     show1 (n+1) t1 ++ "\n" ++
55     show1 (n+1) t2
56 -}
57
58 {- original instance
59 instance (Show a) => Show (Tree a) where
60     show x = show1 0 x
61
62 show1 :: Show a => Int -> (Tree a) -> String
63 show1 n Empty = ""
64 show1 n (Node x t1 t2) =
65     indent n ++ show x ++ "\n" ++
66     show1 (n+1) t1 ++
67     show1 (n+1) t2
68 -}

```

### 5.3 2変数の関手

#### Hom 関手

```

1 {- defined in default startup environment
2 class Functor f where
3     fmap :: (a -> b) -> f a -> f b
4
5 instance Functor ((->) r) where
6     fmap = (.)
7
8 instance Functor ((,) a) where
9     fmap f (x,y) = (x, f y)
10 -}
11
12 class Contra f where
13     pamf :: (a -> b) -> f b -> f a
14
15 newtype Moh b a = Moh {getHom :: a -> b}
16
17 instance Contra (Moh b) where
18     pamf f (Moh g) = Moh (g . f)
19
20 newtype Riap b a = Riap {getPair :: (a,b)}

```

```

21
22 instance Functor (Riap b) where
23     fmap f (Riap (x,y)) = Riap (f x,y)
24
25 {- suggested tests
26     fmap (\x -> x*x) (\x -> x + 1) 10 == 121
27     getHom (pamf (\x -> x*x) (Moh (\x -> x + 1))) 10 == 101
28
29     fmap (\x -> x*x) (10,10) == (10,100)
30     getPair (fmap (\x -> x*x) (Riap (10,10))) == (100,10)
31 -}

```

## 5.4 型クラスと Hask の部分圏

### ソート関手

```

1 import Tree
2 import Flatten
3
4 iSort :: Ord a => [a] -> [a]
5 iSort xs =
6     foldr ins [] xs
7     where
8         ins x [] = [x]
9         ins x (y:ys)
10            | x <= y    = x:y:ys
11            | otherwise = y: ins x ys
12
13 list2tree :: Ord a => [a] -> Tree a
14 list2tree xs =
15     foldl sni Empty xs
16     where
17         sni = flip ins
18         ins x Empty    = Node x Empty Empty
19         ins x (Node y t1 t2)
20            | x <= y    = Node y (ins x t1) t2
21            | otherwise = Node y t1 (ins x t2)
22
23 iSort2 :: Ord a => [a] -> [a]
24 iSort2 = flatten . list2tree
25
26 {- suggested tests

```

```
27 map (\x -> x*2) . iSort $ [1,5,3,4,2]
28 iSort . map (\x -> x*2) $ [1,5,3,4,2]
29 -}
```

## 第 6 章

# 自然変換

### 6.1 自然変換

**定義 6.1.** 圏  $\mathcal{A}$  から圏  $\mathcal{B}$  への関手  $F, G$  について,

1.  $\mathcal{A}$  の任意の対象  $A$  に対して  $\mathcal{B}$  の射  $\alpha_A : FA \rightarrow GA$  が存在し
2.  $\mathcal{A}$  の任意の射  $f : A_1 \rightarrow A_2$  が

$$\alpha_{A_2} \circ Ff = Gf \circ \alpha_{A_1}$$

を満たすとき

に対して集合  $\alpha = \{\alpha_A \mid A \in \text{Obj}(\mathcal{A})\}$  は関手  $F$  から関手  $G$  への自然変換であるという.

**記法 6.2.** 関手  $F$  から関手  $G$  への自然変換  $\alpha$  を  $\alpha : F \rightarrow G$  で表す.

**記法 6.3.** 関手  $F$  から関手  $G$  への自然変換  $\alpha$  を次の図表で表す.

### 6.2 Hask における自然変換

#### 6.2.1 concat

#### 6.2.2 List 関手から Maybe 関手への自然変換 safehead

#### 6.2.3 concat と safehead の垂直合成

#### 6.2.4 二分木からリストへの flatten 関数

### 6.3 Hask における定数関手

#### 6.3.1 length 関数



## 第 7 章

# 関手圏

### 7.1 関手圏

命題 7.1. ... は圏である.

定義 7.2.  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への関手圏という.

記法 7.3.  $\mathcal{A}$  から  $\mathcal{B}$  への関手圏を  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$  で表す

定義 7.4. 関手圏における同型射を自然同型という. **自然同型**

命題 7.5. 自然変換... が自然同型であること,  
... が同型者であることは同値である.





## 第 8 章

# 圏同値

### 8.1 圏同値

定義 8.1. 圏同値

### 8.2 Hask における自然同型

#### 8.2.1 mirror 関数

Tree 関手から Tree 関手への自然同型

#### 8.2.2 Maybe 関手と Either() 関手の間の自然同型

### 8.3 まとめ

aa