圏論原論 I

Sexytant

2023 年 1 月 28 日

目次

第 I 部

準備

第 1 章

集合

1.1 集合

集合 set とは, ひとまず素朴に「ものの集まり」と定義される. 集合を構成する「もの」を**元 element** という.

記法 1.1. a が集合 S の元であることを $a \in S$ で表す.

記法 1.2. 集合は各元をカンマで区切り $\{\}$ で囲むことで表される.

記法 1.3. とある条件を満たす x 全体からなる集合は $\{x \mid x$ についての条件 $\}$ を用いて表す.

実例 1.4. $\{1, 2, 3\}$ や $\{a, b, c\}$, 自然数全体 $\mathbb{N}$, 整数全体 $\mathbb{Z}$, 実数全体 $\mathbb{R}$, 複素数全体 $\mathbb{C}$ は集合である.

実例 1.5. $\{2a \mid a \in \mathbb{N}\}$ や $\{a^3 \mid a \in \mathbb{N}\}$ は集合である.

集合論では, 元が存在しない集合 $\{\}$ の存在を認める.

定義 1.6. 元が存在しない集合 $\{\}$ を**空集合 emptyset** という.

記法 1.7. 空集合を $\emptyset$ で表す.

定義 1.8. 集合 A の任意の元が集合 B の元であるとき**集合 A は集合 B の部分集合 subset である**という.

記法 1.9. 集合 A が集合 B の部分集合であることを $A \subset B$ で表す.

定義 1.10. 集合 S に対する $\{A \mid A \subset S\}$ を**集合 S の冪集合 power set** という.

記法 1.11. 集合 S の冪集合を $\mathcal{P}S$ で表す.

定義 1.12. 集合 A, B に対する $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ を**集合 A と集合 B の直積 direct product** という.

記法 1.13. 集合 A と集合 B の直積を $A \times B$ で表す.

1.2 二項関係・写像

1.2.1 二項関係

定義 1.14. 集合 A, B の直積の部分集合を, **集合 A と集合 B の二項関係 binary relation** であるという.

1.2.2　順序集合

定義 1.15. 次を満たす集合 X から X への二項関係 R を**順序 order** という．

1. 任意の $x \in X$ について $(x, x) \in \mathrm{R}$ である．
2. 任意の $x \in X, y \in X$ について $(x, y) \in \mathrm{R}$ かつ $(y, x) \in \mathrm{R}$ ならば $x = y$ が成り立つ．
3. 任意の $x \in X, y \in X, z \in X$ について $(x, y) \in \mathrm{R}$ かつ $(y, z) \in \mathrm{R}$ ならば $(x, z) \in \mathrm{R}$ が成り立つ．

1.2.3　写像

定義 1.16. 集合 A, B の二項関係 f について，任意の $a \in A$ に対して，とある $b \in B$ が一意に存在して $(a, b) \in f$ となるとき，f を**集合 A から集合 B への写像 map** という．

記法 1.17. 集合 A から集合 B への写像 f を $f : A \to B$ で表す．

記法 1.18. 写像 $f : A \to B$ に関して，$b \in B$ が $a \in A$ に対応することを

$$b = f(a)$$

で表す．

定義 1.19. 写像 $f : A \to B$ が，任意の $a_1, a_2 \in A$ について

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

を満たすとき**写像 $f : A \to B$ は単射 injection である**という．

定義 1.20. 写像 $f : A \to B$ に関して，任意の $b \in B$ に対してとある $a \in A$ が存在して

$$b = f(a)$$

であるとき**写像 f は全射 surjection である**という．

定義 1.21. 写像 $f : A \to B$ が，単射であり，かつ全射であるとき**写像 $f : A \to B$ は全単射 bijection である**という．

定義 1.22. 写像 $f : A \to B$ に対して，写像 $g : B \to A$ が存在して，任意の $a \in A$ に対して

$$f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

が成り立つとき，**写像 $g : B \to A$ は写像 $f : A \to B$ の逆写像 inverse mapping である**という．

記法 1.23. 写像 f の逆写像を f^{-1} で表す．

1.2.4　合成と結合律

定義 1.24. 二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ に対する

$$\{(a, c) \in A \times C \mid \text{とある } b \in B \text{ が存在して } (a, b) \in F \text{ かつ } (b, c) \in G \text{ である }\}$$

を**二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ の合成 composition** という．

記法 1.25. 二項関係 $F \subset A \times B$ と $G \subset B \times C$ の合成を $G \circ F$ で表す.

命題 1.26. 二項関係 $F \subset A \times B, G \subset B \times C, H \subset C \times D$ について

$$(H \circ G) \circ F = H \circ (G \circ F)$$

が成り立つ.

このことを二項関係が**結合律 associative law** を満たすという.

命題 1.27. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ に対して, これらの合成を定義することができる.

定義 1.28. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ を合成して得られる写像を**写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の合成写像 composition mapping** という.

記法 1.29. 写像 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の合成写像を $g \circ f$ で表す.

命題 1.30. 写像 $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ について

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

が成り立つ.

このことを写像が結合律を満たすという.

1.3 宇宙

定義 1.31. 以下の性質を満たす集合 U を**宇宙 universe** という.

1. $X \in Y \wedge Y \in U \Rightarrow X \in U$
2. $X \in U \wedge Y \in U \Rightarrow \{X, Y\} \in U$
3. $X \in U \Rightarrow \mathscr{P}X \in U \wedge \cup X \in U$[*1]
4. $\mathbb{N} \in U$
5. $f : A \to B$ が全射で, $A \in U \wedge B \subset U \Rightarrow B \in U$

定義 1.32. 宇宙の元を**小集合 small set** という.

[*1] 未定義の記法

第 2 章

代数系

2.1　マグマ・半群・群

2.1.1　マグマ

定義 2.1. 写像 $\mu : S \times S \to S$ を**集合 S 上の二項演算 binary operation** という.

定義 2.2. 集合 M と集合 M 上の二項演算 μ の組 (M, μ) を**マグマ magma** という.

2.1.2　半群

定義 2.3. マグマ (G, μ) について, μ が結合律を満たす, すなわち任意の元 $g, h, k \in G$ に対して

$$\mu(g, \mu(h, k)) = \mu(\mu(g, h), k)$$

が成り立つとき, **マグマ (G, μ) は半群 semigroup である**という.

2.1.3　群

定義 2.4. マグマ (G, μ) について, とある $e \in G$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して

$$\mu(e, g) = \mu(g, e) = g$$

を満たすとき, e を**マグマ (G, μ) の単位元 identity element** という.

定義 2.5. マグマ (G, μ) について, 任意の $g \in G$ に対して, とある $h \in G$ が存在して

$$\mu(g, h) = \mu(h, g) = e$$

を満たすとき, h を**マグマ (G, μ) の元 g に対する逆元 inverse element** という. ここで e はマグマ (G, μ) の単位元である.

記法 2.6. マグマ (G, μ) における元 $g \in G$ の逆元を g^{-1} で表す.

定義 2.7. 半群 (G, μ) が単位元をもち, かつ任意の元に対して逆元が存在するとき**半群 (G, μ) は群 group である**という

定義 2.8. 群 $(G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2)$ について, 写像 $f : G_1 \to G_2$ が, 任意の $g \in G, g' \in G$ について

$$f(\mu_1(g, g')) = \mu_2(f(g), f(g'))$$

を満たすとき, f を**群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への準同型写像 homomorphism** という.

定義 2.9. 群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への準同型写像 f が全単射であるとき, f を**群 (G_1, μ_1) から群 (G_2, μ_2) への同型写像 isomorphism** という

定義 2.10. 群 (G, μ) について, 任意の $a, b \in G$ に対して $\mu(a, b) = \mu(b, a)$ が成り立つとき, **群 (G, μ) は可換群 commutative group である**という[*1].

2.2　環

定義 2.11. 集合 R と R 上の二項演算 $+, *$ が次を満たすとき, $(R, +, *)$ **は環 ring である**といい, $+$ を**加法**, $*$ を**乗法**という.

1. $(R, +)$ が可換群である.
2. $(R, *)$ が半群である.
3. 任意の $a, b, c \in R$ に対して

$$a * (b + c) = a * b + a * c$$
$$(a + b) * c = a * c + b * c$$

が成り立つ.

定義 2.11 の第 3 の条件のことを**乗法の加法に対する分配律 distributive property** という.

2.3　体

定義 2.12. 環 $(K, +, *)$ において, 群 $(K, +)$ の単位元を **$(K, +, *)$ の零元**という.

記法 2.13. 環 $(K, +, *)$ における零元を 0_K で表す.

定義 2.14. 環 $(K, +, *)$ において, 群 $(K, *)$ の単位元を **$(K, +, *)$ の乗法単位元**という.

記法 2.15. 環 $(K, +, *)$ における乗法単位元を 1_K で表す.

定義 2.16. 環 $(K, +, *)$ が次を満たすとき, $(K, +, *)$ **は体 field である**という.

1. 乗法について零元以外の元が可換群をなす, すなわち $(K \setminus \{0_K\}, *)$ が可換群である.
2. 零元と乗法単位元が異なる, すなわち $0_K \neq 1_K$ である.

[*1] アーベル群 abelian group ともいう

第 3 章

Haskell の基礎

関数型プログラミング言語 Haskell では圏論的な視点からライブラリが構築されている.

3.1　型

3.1.1　定義済みの型

Haskell には標準ライブラリに表 3.1 に示す型が定義済みである.

表 3.1　Haskell の標準ライブラリに定義済みの型

`Int`	固定長整数
`Integer`	多倍長整数
`Char`	文字
`Float`	単精度浮動小数点数
`Double`	倍精度浮動小数点数
`Bool`	ブール代数

例として, 固定長整数の変数 `a` は次のように宣言する.

```
a :: Int
```

3.1.2　データ構造

同じ型の値を一方向に並べ, 前の要素が後の要素のポインタをもつようにしたデータ構造を**リスト**という. 一方, リストに対して, 異なる型を含むことを許容するデータ構造を**タプル**という.

3.1.3　データ型

例として `Red`, `Green`, `Blue` からなるデータ `Color` の宣言は以下のように記述する.

```
data Color = Red | Green | Blue
```

第 II 部

圏論の諸概念

第 4 章

圏

4.1 圏

定義 4.1. 集合の組 $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ が次の条件を満たすとき**集合の組** $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ **は圏 category をなす**という．

1. 任意の $f \in S_{\mathrm{mor}}$ に対して $\mathrm{dom}(f) \in S_{\mathrm{obj}}, \mathrm{cod}(f) \in S_{\mathrm{obj}}$ がそれぞれ一意に定まる．
2. $f \in S_{\mathrm{mor}}, g \in S_{\mathrm{mor}}$ について，$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき，S_{mor} 上の二項演算 $\circ$ が存在する．
3. $f \in S_{\mathrm{mor}}, g \in S_{\mathrm{mor}}, h \in S_{\mathrm{mor}}$ について，
$$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g),$$
$$\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(h)$$
であるとき
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
が成り立つ．
4. 任意の $A \in S_{\mathrm{obj}}$ について次を満たす $1_A \in S_{\mathrm{mor}}$ が存在する．
   (a) $\mathrm{dom}(1_A) = A$
   (b) $\mathrm{cod}(1_A) = A$
   (c) $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{cod}(g) = A$ かつ $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ を満たす任意の $(f, g) \in S_{\mathrm{obj}} \times S_{\mathrm{obj}}$ について $f \circ 1_A = f$ かつ $1_A \circ g = g$ が成り立つ．

定義 4.1 における S_{obj} の元を**対象 object**，S_{mor} の元を**射 morphism** という． 1 つ目の条件の $\mathrm{dom} f, \mathrm{cod} f$ はそれぞれ**射 f の始域 domain と 終域 codomain** という．2 つ目の条件の二項演算 $\circ$ は射の合成という．3 つ目の条件で述べているのは，射の合成が結合律を満たすということである．最後に，4 つ目の条件の 1_A を**対象 A の恒等射 identity morphism** という．

これらの用語を導入して，定義 4.1 を改めて記述すると次のようになる．

1. 圏は対象の集合と射の集合からなる．
2. 射は始域と終域をもち，それらはそれぞれ一意に定まる．
3. 射は合成可能であり，射の合成は結合律を満たす．
4. 任意の対象について恒等射が存在する．

注意 4.2. 恒等射 1_A は一意に定まるので，定義に一意性を加えても問題ない．

記法 4.3. 圏 $\mathscr{C}$ の対象全体の集合を $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ で表す．

記法 4.4. 圏 $\mathscr{C}$ の射全体の集合を $\mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ で表す.

記法 4.5. 始域が A, 終域が B である射 f を $f : A \to B$ で表す.

記法 4.6. 集合 $\{f : A \to B \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})\}$ を $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ で表す.

定義 4.7. とある圏の射 $f : A \to B$ に対して, とある射 $g : B \to A$ が存在して $g \circ f = 1_A$ かつ $f \circ g = 1_B$ となるとき, **射 f は同型射 isomorphism である**という. また, このとき g を**射 f の逆射**という.

記法 4.8. 射 f の逆射を f^{-1} で表す.

命題 4.9. 射 f が同型射であるとき, f^{-1} は一意に定まる.

4.1.1 小圏・局所小圏・大圏

小圏

定義 4.10. 圏 $\mathscr{C}$ について, $\mathrm{Obj}(\mathscr{C}), \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ が小集合であるとき, **圏 $\mathscr{C}$ は小圏 small category** であるという.

命題 4.11. 対象も射もない圏 $\mathbf{0}$ は小圏である.

命題 4.12. 対象が *1* つで, 恒等射のみをもつ圏 $\mathbf{1}$ は小圏である.

命題 4.13. 対象が A, B の *2* つで, 恒等射と射 $f : A \to B$ のみをもつ圏 $\mathbf{2}$ は小圏である.

命題 4.14. 順序集合は小圏である.

局所小圏

定義 4.15. 圏 $\mathscr{C}$ について, 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ の組に対して $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ が小集合であるとき, **圏 $\mathscr{C}$ は 局所小圏 locally small category である**という.

大圏

定義 4.16. 圏 $\mathscr{C}$ が小圏でないとき**圏 $\mathscr{C}$ は大圏 large category である**という.

命題 4.17. すべての小集合を対象とし, それらの間の写像を射とする圏 Set は大圏である.

命題 4.18. すべての群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏 Grp は大圏である.

命題 4.19. すべての可換群を対象とし, それらの間の準同型写像を射とする圏 Ab は大圏である.

4.1.2 部分圏

記法 4.20. 圏 $\mathscr{C}$ における射 $f, g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ の合成を $g \circ_{\mathscr{C}} f$ で表す.

命題 4.21. 圏 $\mathscr{A}$ が圏 $\mathscr{B}$ に対して, 以下の条件を満たすとする.

1. $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$
2. $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \subset \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})\}$

このとき $\mathrm{Mor}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Mor}(\mathscr{B})$ が成り立つ.

定義 4.22. 圏 $\mathscr{A}$ が圏 $\mathscr{B}$ に対して, 以下の条件を満たすとき, **圏 $\mathscr{A}$ は圏 $\mathscr{B}$ の部分圏である**という.

1. $\mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \subset \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$
2. $\{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \subset \{(X_1, X_2) \mid X_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B}), X_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})\}$
3. 任意の $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}), g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ について $g \circ_{\mathscr{A}} f$ が存在するならば $g \circ_{\mathscr{B}} f$ が存在し
$$g \circ_{\mathscr{A}} f = g \circ_{\mathscr{B}} f$$
が成り立つ.
4. 任意の $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}), g \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ について $g \circ_{\mathscr{B}} f$ が存在するならば $g \circ_{\mathscr{A}} f$ が存在し
$$g \circ_{\mathscr{A}} f = g \circ_{\mathscr{B}} f$$
が成り立つ.

命題 4.23. 圏 Ab は圏 Grp の部分圏である.

4.1.3　双対

定義 4.24. 圏 $\mathscr{C}$ に対して, 対象が $\mathscr{C}$ と同じで, 射の向きが $\mathscr{C}$ と反対である圏を**圏 $\mathscr{C}$ の双対圏という.**

記法 4.25. 圏 $\mathscr{C}$ の双対圏を $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ で表す.

4.1.4　圏の生成

命題 4.26. 集合 A と写像 $f : A \to A$ について, 集合の組 $(\{A\}, \{1_A, f\})$ は圏をなす.

命題 4.27. 集合 A と写像 $f : A \to A$ について, 正の整数 n に対して $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$ とするとき, 集合の組 $(\{A\}, \{1_A, f, f^2, \ldots, \})$ は圏をなす.

命題 4.28. 集合 A, B と写像 $f : A \to B,\ g : B \to A$ について, 集合の組 $(\{A, B\}, \{1_A, 1_B, f, g, f \circ g\})$ は圏をなす.

定義 4.29. 集合 $S_1, \ldots, S_N$ に関する写像 $f_1, \ldots, f_M$ に関して, $\{S_1, \ldots, S_N\}$ を対象とし, $1_{S_1}, \ldots, 1_{S_N}$ と $f_1, \ldots, f_M$ およびそれらの合成のみを射とする圏 $\mathscr{C}$ が存在するとき, $\{f_1, \ldots, f_M\}$ を**圏 $\mathscr{C}$ の生成系 system of generators** という.

定義 4.30. 圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の積に対して, 次の集合の組 $(S_{\mathrm{Obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}), S_{\mathrm{Mor}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}))$ を**圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の積**という.

- $S_{\mathrm{Obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \{(A, B) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), B \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})\}$
- $S_{\mathrm{Mor}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) = \{(f_A, f_B) \mid f_A \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A}), f_B \in \mathrm{Mor}(\mathscr{B})\}$

定義 4.31. 圏 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ の積を $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ で表す.

命題 4.32. 圏の積は圏をなす.

第 5 章

関手

5.1 関手

定義 5.1. 写像 $f : \mathrm{Obj}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への対象関数 function on objects** という.

記法 5.2. 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への対象関数を $F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ で表す.

定義 5.3. 圏 $\mathscr{A}$ の射全体の集合

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{A}) = \{f_{\mathscr{A}} : A_1 \to A_2 \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

から, 対象関数 $F_{obj}(\mathscr{A}, \mathscr{B})(\cdot)$ を用いて定まる, 圏 $\mathscr{B}$ の射の集合

$$\mathrm{Mor}(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) = \{f_{\mathscr{B}} : F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})(A_1) \to F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})(A_2) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

への写像 $F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B}) : \mathrm{Mor}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Mor}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ が次の条件を満たすとき, これを**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への射関数 function on morphisms** という.

1. 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ に対して
$$F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})(1_A) = 1_{F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})(A)}$$
が成り立つ.
2. 任意の $(A_1, A_2, A_3) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})^3$ と $f_{1,2} : A_1 \to A_2, f_{2,3} : A_2 \to A_3$ に対して
$$F_{\mathrm{Mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})(f_{2,3} \circ f_{1,2}) = F_{\mathrm{Mor}}(f_{2,3}) \circ F_{\mathrm{Mod}}(f_{1,2}$$
が成り立つ.

記法 5.4. 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への射関数を $F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ で表す.

定義 5.5. 対象関数 $F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ と射関数 $F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{B})$ の組を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への関手 functor** という.

記法 5.6. 圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への関手 F を $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ で表す.

定義 5.7. 圏 $\mathscr{C}$ から圏 $\mathscr{C}$ への関手を**圏 $\mathscr{C}$ に関する恒等関手 identity functor** という.

記法 5.8. 圏 $\mathscr{C}$ に関する恒等関手を $\mathrm{Id}(\mathscr{C})$ で表す.

定義 5.9. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ に対して

$$F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{B}, \mathscr{C}) \circ F_{\mathrm{obj}}(\mathscr{A}, \mathscr{B}$$

を対象関数とし.

$$F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{B} \to \mathscr{C}) \circ F_{\mathrm{mor}}(\mathscr{A} \to \mathscr{A})$$

を射関数とする関手を**関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ の合成 composition** という.

記法 5.10. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, G : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ の合成を $G \circ F$ で表す.

5.1.1　反変関手

定義 5.11. 関手 $F : \mathscr{A}^{\mathrm{op}} \to \mathscr{B}$ を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への反変関手 contravariant functor** という.

5.1.2　定数関手

定義 5.12. 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ を唯一の $B_0 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{B})$ に写し, 任意の射 $f \in \mathrm{Mor}(\mathscr{A})$ を恒等射 $1_{B_0} \in \mathrm{Mor}(\mathscr{B})$ に写す関手を**圏 $\mathscr{A}$ から圏 $\mathscr{B}$ への定数関手 constant functor** という

5.1.3　忠実関手と充満関手

定義 5.13. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ に関して, 写像

$$f : \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \to \{(F(A_1), F(A_2)) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

が単射となっているとき, **関手 F は忠実 faithful である**という.

定義 5.14. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ に関して, 写像

$$f : \{(A_1, A_2) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\} \to \{(F(A_1), F(A_2)) \mid A_1 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A}), A_2 \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$$

が全射となっているとき, **関手 F は充満 full である**という.

定義 5.15. 関手 F が忠実かつ充満であるとき**関手 F は充満忠実 full and faithful である**という.

第 6 章

自然変換

6.1 自然変換

定義 6.1. 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ と関手 $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ について,

1. 任意の $A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})$ に対して $\mathscr{B}$ の射 $M_{\mathscr{B}}(A) : F(A) \to G(A)$ が存在する.
2. 任意の $\mathscr{A}$ の射 $f : A_1 \to A_2$ が

$$M_{\mathscr{B}}(A_2) \circ F(f) = G(f) \circ M_{\mathscr{B}}(A_1)$$

を満たす.

このとき $\{M_{\mathscr{B}}(A) \mid A \in \mathrm{Obj}(\mathscr{A})\}$ を**関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ から関手 $G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ への自然変換 natural transformation** という.

記法 6.2. 関手 F から関手 G への自然変換 μ を $\mu : F \to G$ で表す.

第 7 章

関手圏

7.1 関手圏

命題 7.1. 小圏 $\mathscr{A}$ と局所小圏 $\mathscr{B}$ に対して, 次の集合の組 $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ は圏をなす.

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{obj}} &= \{F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}\} \\ S_{\mathrm{mor}} &= \{\alpha : F_1 \to F_2 \mid F_1 \in S_{\mathrm{obj}}, F_2 \in S_{\mathrm{obj}}\} \end{aligned}$$

定義 7.2. 小圏 $\mathscr{A}$ と局所小圏 $\mathscr{B}$ に対する次の集合の組 $(S_{\mathrm{obj}}, S_{\mathrm{mor}})$ からなる圏を**小圏 $\mathscr{A}$ から局所小圏 $\mathscr{B}$ への関手圏 functor category** という.

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{obj}} &= \{F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}\} \\ S_{\mathrm{mor}} &= \{\alpha : F_1 \to F_2 \mid F_1 \in S_{\mathrm{obj}}, F_2 \in S_{\mathrm{obj}}\} \end{aligned}$$

記法 7.3. 小圏 $\mathscr{A}$ から局所小圏 $\mathscr{B}$ への関手圏を $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ で表す

定義 7.4. 関手圏における同型射を**自然同型 natural isomorphism** という.

第 8 章

圏同値

8.1 圏同値

定義 8.1. 圏 $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ に対して, 関手 $F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}', G : \mathscr{A} \to \mathscr{A}'$ と自然同型 $\eta : \mathrm{Id}(\mathscr{A}) \to G \circ F, \epsilon : F \circ G \to \mathrm{Id}(\mathscr{A}')$ が存在するとき**圏 $\mathscr{A}, \mathscr{A}'$ は圏同値であるという.**

命題 8.2. 圏同値は同値関係である.