# Fiche TD4 : Automates et langages rationnels

**Exercice 1 (*)** *Algorithme de Berry-Sethi*

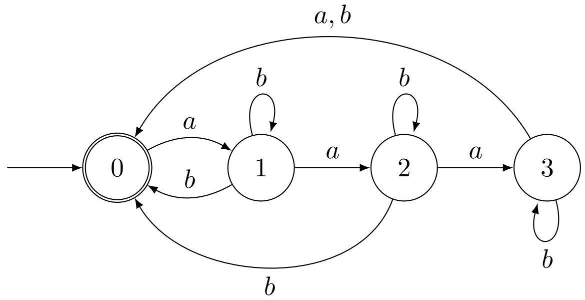
En appliquant l'algorithme de Berry-Sethi, déterminer pour chacune des expressions rationnelles suivantes un automate qui reconnaît le langage qu'elle dénote. Déterminiser les automates obtenus aux questions 1 et 2.

1. $a(ba+b)^\star b$
2. $(a+c)^\star(abb+\varepsilon)$
3. $aab^\star(ab)^\star + ab^\star + a^\star bba$

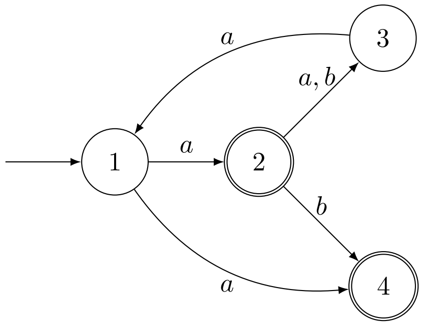
**Exercice 2 (*)** *Méthode d'élimination des états*

Déterminer le langage reconnu via la méthode d'élimination des états pour chacun des automates suivants. Pour l'automate $A_1$, on éliminera les états par ordre croissant de numéro, pour $A_2$, l'ordre est laissé libre.

$A_1$ :




$A_2$ :




**Exercice 3 (**)** *Algorithme de MacNaugthon et Yamada*

On présente dans cet exercice une variante de l'algorithme de Floyd-Warshall permettant de déterminer une expression rationnelle pour le langage reconnu par un automate.

On considère que l'automate $A$ (potentiellement non déterministe et dont on note $I$ les états initiaux et $F$ les finaux) en entrée de cet algorithme voit ses $n$ états être numérotés de 0 à $n-1$. On définit pour tous $i,j \in [\![0,n-1]\!]$ et tout $k \in [\![0,n]\!]$ le langage $L_{i,j}^{(k)}$ formé par les étiquettes des chemins allant de l'état $i$ à l'état $j$ et dont les sommets intermédiaires ont tous un numéro strictement inférieur à $k$. L'objectif est de calculer pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ une matrice $R^{(k)}$ contenant des expressions rationnelles de sorte à ce que la case $(i,j)$ de cette matrice contienne une expression rationnelle dénotant $L_{i,j}^{(k)}$.

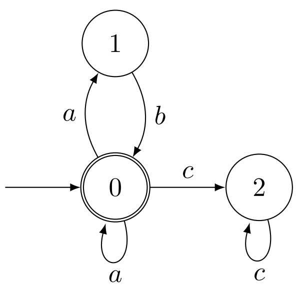
1. Que choisir pour la matrice $R^{(0)}$ pour répondre à cette contrainte ?

Si on a construit la matrice $R^{(k)}$, on en déduit $R^{(k+1)}$ comme suit :

$$\text{pour tout } i,j \in [\![0,n-1]\!],\ R_{i,j}^{(k+1)} = R_{i,j}^{(k)} + R_{i,k}^{(k)}\left(R_{k,k}^{(k)}\right)^\star R_{k,j}^{(k)}$$

L'expression renvoyée par l'algorithme de MacNaugthon-Yamada est alors $\sum\limits_{i\in I, j\in F} R_{i,j}^{(n)}$.

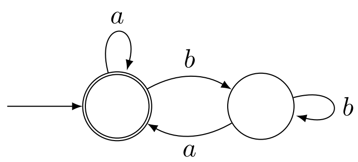
2. Expliquer la correction de cet algorithme.
3. Calculer la matrice $R^{(1)}$ pour l'automate suivant sans simplifier les expressions rationnelles obtenues :



4. Simplifier la matrice $R^{(1)}$ obtenue.

5. Sans simplifications, quel est l'ordre de grandeur de la taille de l'expression rationnelle obtenue en fin d'algorithme en fonction du nombre d'états de l'automate en entrée ?

6. Déterminer le langage reconnu par cet automate en appliquant l'algorithme de MacNaughton-Yamada :




**Exercice 4 (*)** *Et les Shadocks pompaient*

En utilisant le lemme de l'étoile, montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :

1. $L_1 = \{u \in \{a,b\}^\star \mid |u|_a = |u|_b\}$.
2. $L_2$ est l'ensemble des palindromes sur l'alphabet $\{0,1\}$.
3. $L_3 = \{a^{(n^2)} \mid n \in \mathbb{N}\}$.
4. $L_4$ est le langage de Dyck sur l'alphabet $\{(,)\}$.

**Exercice 5 (**)** *Rationnel ou pas rationnel ?*

On considère deux langages $L$ et $L'$ sur un même alphabet $\Sigma$. Pour chacune des propositions suivantes, la démontrer si elle est vraie et fournir un contre-exemple si elle est fausse.

1. Si $L$ est rationnel et $L \cap L'$ ne l'est pas alors $L'$ n'est pas rationnel.
2. Si $L$ est rationnel et $L'$ ne l'est pas alors $L \cap L'$ n'est pas rationnel.
3. Si $L^\star$ est rationnel alors $L$ est rationnel.
4. Si $L$ et $L'$ sont rationnels alors $L \setminus L'$ aussi.
5. Si $LL'$ est rationnel alors $L$ est rationnel ou $L'$ est rationnel.

**Exercice 6 (***)** *La pompe est cassée*

On considère sur $\Sigma = \{a,b\}$ le langage $L$ suivant :

$$L = \{v^t v w \mid v, w \in \Sigma^\star \text{ tels que } |v| \geq 1, |w| \geq 1\}$$

1. Montrer que le langage $L$ vérifie les conclusions du lemme de l'étoile.
2. Montrer que $L$ n'est pas un langage rationnel.
3. Que vient-on de montrer ?