Fiche TD9 : algorithmes d'approximation

Exercice 1 (**) *Sac à dos illimité*

On considère le problème d'optimisation SAC A DOS ILLIMITE :

$$\begin{cases} \textbf{Entrée} : \text{Une liste de poids } p_1,...,p_n \in \mathbb{N}^\star, \text{ une liste de valeurs } v_1,...v_n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } P \in \mathbb{N}^\star. \\ \textbf{Solution} : \text{Une liste d'entiers naturels } a_1,...,a_n \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} a_i p_i \leq P. \\ \textbf{Optimisation} : \text{Maximiser } \sum_{i=1}^{n} a_i v_i. \end{cases}$$

Ce problème est une variante du problème du sac à dos dans lequel on considère que chaque objet est disponible en quantité illimitée. Tout comme son homologue, c'est un problème NP-difficile. On considère l'algorithme suivant :

```
S ← 0
Trier les densités v_i/p_i par ordre décroissant.
Renuméroter les objets de sorte à ce que le i-ème ait la i-ème plus grande densité
Pour tout i ∈ ⟦1, n⟧
   Déterminer a_i ∈ ℕ maximal tel que S + a_i p_i ≤ P
   S ← S + a_i p_i
Renvoyer a_1, ..., a_n
```

1. Déterminer la complexité de cet algorithme.
2. Montrer que cet algorithme est une $1/2$-approximation de SAC A DOS ILLIMITE. *Indication : quelle est la proportion du sac remplie par les a_1 premiers objets mis dans le sac ?*

Exercice 2 (**) *Couverture par sommets*

On considère le problème d'optimisation COUVERTURE PAR SOMMETS :

$$\begin{cases} \textbf{Entrée} : \text{Un graphe non orienté } G = (S, A). \\ \textbf{Solution} : \text{Un sous-ensemble } R \subset S \text{ tel que pour toute arête } (u, v) \in A,\ u \in R \text{ ou } v \in R. \\ \textbf{Optimisation} : \text{Minimiser } |R|. \end{cases}$$

Autrement dit, on cherche dans ce problème à déterminer un ensemble de sommets du graphe le plus petit possible qui couvre (c'est-à-dire, touche) toutes les arêtes. Le problème de décision associé à ce problème d'optimisation est NP-complet. On considère l'algorithme A_1 suivant prenant en entrée le graphe $G = (S, A)$:

```
R ← ∅
Tant qu'il y a des arêtes non couvertes
   Choisir une arête (s, t) non couverte
   R ← R ∪ {s}
Renvoyer R
```

1. Montrer que A_1 n'est pas un algorithme d'approximation de COUVERTURE PAR SOMMETS à facteur constant, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que A_1 soit une α-approximation de ce problème.

On considère à présent l'algorithme A_2 suivant prenant en entrée le graphe $G = (S, A)$:

```
C ← ∅
Tant que A ≠ ∅
   Choisir a = (s, t) dans A
   C ← C ∪ {a}
   Supprimer du graphe G toutes les arêtes incidentes à s ou à t
Renvoyer C
```

2. Montrer que l'ensemble renvoyé par l'algorithme précédent est un couplage maximal de G.
3. Déduire de A_2 un algorithme A_3 qui soit une 2-approximation de COUVERTURE PAR SOMMETS.
4. Montrer qu'on peut implémenter A_3 avec une complexité linéaire en la taille du graphe et conclure.

Exercice 3 (***) *Calcul de k-centre*

Si $G = (S, A)$ est un graphe non orienté et $S' \subset S$, on dit que :

- S' est un ensemble indépendent de G si deux sommets de S' ne sont jamais liés par une arête de G.
- S' est un ensemble dominant de G si tout sommet de S est soit dans S', soit voisin d'un sommet de S'. On note $dom(G)$ le cardinal minimal d'un ensemble dominant dans G.

On note par ailleurs pour tout sous-ensemble $S' \subset S$ et tout sommet $u \in S \setminus S'$ $\delta(u, S')$ le poids minimal d'une arête reliant u à un sommet de S' et $c(S') = \max\limits_{u \in S \setminus S'} \delta(u, S')$. On considère les problèmes de décision suivants :

DOM : $\begin{cases} \textbf{Entrée} : G = (S, A) \text{ non orienté et } k \in \mathbb{N}. \\ \textbf{Question} : \text{Y a-t-il un ensemble dominant dans } G \text{ de taille inférieure à } k \text{ ?} \end{cases}$

CENTRE : $\begin{cases} \textbf{Entrée} : G = (S, A) \text{ non orienté, complet, pondéré par une fonction vérifiant l'inégalité} \\ \qquad\qquad \text{triangulaire, } m \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{N}^\star. \\ \textbf{Question} : \text{Y a-t-il } S' \subset S \text{ de cardinal } k \text{ tel que } c(S') \leq m \text{ ?} \end{cases}$

On admet que DOM est NP-complet. Le problème d'optimisation associé à CENTRE est connu sous le nom de problème du k-centre. Il consiste à trouver un sous ensemble S' des sommets d'un graphe, de taille k, et tel que la distance maximale à parcourir depuis un sommet quelconque du graphe pour atteindre S' soit la plus petite possible.

1. Donner une application dans laquelle déterminer un k-centre peut être utile.
2. Par réduction depuis DOM, montrer que calculer un k-centre est un problème NP-difficile.

On cherche à construire une 2-approximation pour le calcul d'un k-centre. Pour ce faire, on note $a_1, ..., a_m$ (avec $m = |A|$) les arêtes de G qu'on peut supposées triées par ordre de poids croissant. On note $G_i = (S, A_i)$ avec $A_i = \{a_1, ...a_i\}$ l'ensemble des i arêtes de plus petit poids. On définit par ailleurs le carré d'un graphe $H = (V, E)$, noté H^2, comme étant le graphe (V, E') avec $(u, v) \in E'$ si et seulement si $((u, v) \in E)$ ou (il existe $s \in V$ tel que $(u, s) \in E$ et $(s, v) \in E$) (autrement dit, il y a une arête entre u et v dans H^2 si et seulement si il y a un chemin de longueur au plus 2 entre u et v dans H).

3. Montrer que résoudre le problème du k-centre revient à trouver le plus petit i tel que G_i admet un ensemble dominant de cardinal au plus k.
4. Si H est un graphe et I un ensemble indépendant dans H^2, montrer que $|I| \leq dom(H)$.

Voici l'algorithme d'approximation qu'on se propose d'étudier (prenant en entrée le graphe G) :

```
Calculer G_1^2, G_2^2, ..., G_m^2
Trouver de manière gloutonne un ensemble indépendant inextensible (auquel
   on ne peut pas rajouter de sommet), noté M_i, dans chaque G_i^2
Déterminer le plus petit indice i tel que |M_i| ≤ k, notons le j.
Renvoyer M_j.
```

5. Montrer que $w(a_j) \leq C^\star$ où $C^\star$ est le coût d'une solution optimale au problème du k-centre.
6. Montrer qu'il s'agit bien d'une 2-approximation pour le calcul du k-centre.
7. Déterminer la complexité de cet algorithme.
8. Montrer que le facteur d'approximation de cet algorithme n'est pas strictement plus petit que 2 en exhibant un graphe pour lequel il est atteint.
9. Soit $0 < \varepsilon < 2$. Montrer que si P $\neq$ NP alors il n'existe pas de $(2 - \varepsilon)$ approximation au problème du k-centre.