Problème : Calcul de coupe minimale et algorithme de Karger

Soit $G = (S, A)$ un multigraphe (il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux sommets) connexe non orienté sans boucle (il n'y a pas d'arête entre un sommet et lui même). On note $n = |S|$ le nombre de sommets de G. Une *coupe* de G est une partition de S en deux sous ensembles X et Y tous les deux non vides. L'ensemble des arêtes d'une coupe (X, Y) (qu'on appelle souvent une coupe aussi, par abus) est $C_{X,Y} = \{(x, y) \in A \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}$. La taille d'une coupe (X, Y) est le cardinal de $C_{X,Y}$.

Dans cet exercice, on étudie le problème d'optimisation COUPE MIN (MIN-CUT en anglais) :

$$\begin{cases} \textbf{Entrée} : \text{Un multigraphe } G \text{ sans boucle connexe non orienté.} \\ \textbf{Solution} : \text{Une coupe } C \text{ de } G. \\ \textbf{Optimisation} : \text{Minimiser la taille de } C. \end{cases}$$

On cherche à le résoudre à l'aide de l'algorithme de Karger : c'est un algorithme probabiliste de type Monte Carlo dont l'opération principale est la *contraction* d'arêtes de G. Si G est un multigraphe et (s, t) est une arête dans G, contracter l'arête (s, t) consiste à construire le multigraphe noté $G/(s, t)$ correspondant au multigraphe G dans lequel s et t ont été fusionnés en r, où les arêtes entre s et t ont disparu et dans lequel toute arête entre s et u devient une arête entre r et u (de même pour les arêtes entre t et u). Alors l'algorithme de Karger est :

```
Karger(G) =
    Tant que G a strictement plus de 2 sommets
        Séléctionner uniformément aléatoirement une arête a de G
        G ← G/a
    Renvoyer S
```

Au passage, on peut facilement calculer la taille de la coupe ainsi calculée : il s'agit du nombre d'arêtes entre les deux sommets du graphe final.

1. Montrer que l'algorithme de Karger peut être implémenté de sorte à avoir une complexité en $O(n^2)$.
2. Montrer que l'algorithme de Karger renvoie bien une coupe de G. Est-elle forcément minimale ?
3. Soit C une coupe minimale de G de cardinal k. On note E l'évènement "l'algorithme de Karger appliqué à G renvoie la coupe C" et E_i l'évènement "à la i-ème itération de l'algorithme de Karger sur G l'arête choisie pour être contractée ne fait pas partie de C".
   a) Montrer que G a au moins $kn/2$ arêtes.
   b) Expliquer pourquoi C est la coupe renvoyée par l'algorithme de Karger si et seulement si aucune des arêtes de C n'est séléctionnée pour être contractée.
   c) Montrer que $\mathbb{P}(E_1) \geq (1 - 2/n)$.
   d) Montrer que $\mathbb{P}(E) \geq 2/n^2$.
4. Si on suppose qu'il y a m coupes minimales et qu'on tire aléatoirement et uniformément une coupe de G, quelle est la probabilité qu'elle soit minimale (en fonction de n et m) ? Comparer avec la probabilité que la coupe renvoyée par l'algorithme de Karger soit minimale et commenter.

La probabilité d'avoir calculé une coupe minimale avec l'algorithme de Karger est bien plus élevée que la probabilité d'avoir trouvé une coupe minimale en créant la partition des sommets au hasard mais reste très faible. On peut l'amplifier en répétant l'algorithme de Karger et en conservant la plus petite coupe obtenue.

5. Montrer que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, la probabilité que $\frac{n^2}{2} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ répétitions indépendantes de l'algorithme de Karger produisent une coupe minimale est supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$. *Indication : Montrer auparavant que pour tout $x > 0$, on a :*
$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x < \frac{1}{e}$$
6. Quel est l'ordre de grandeur de la complexité d'un algorithme utilisant l'algorithme de Karger et produisant une coupe minimale avec une "bonne" probabilité ?