Fiche TD1 : Déduction naturelle

Dans tout l'énoncé, sauf indication contraire, une lettre grecque majuscule désigne un ensemble de formules (du calcul propositionnel ou du calcul des prédicats selon le contexte), une lettre latine majuscule désigne une formule et une lettre latine minuscule une variable. Vous avez pouvez utiliser votre cours afin d'avoir les règles de la déduction naturelle sous les yeux au début, mais à terme il faudra pouvoir les utiliser sans rappel.

Exercice 1 (*) *Structures pour un langage du premier ordre*

On considère un langage L du premier ordre dont la signature est la suivante : l'ensemble des relations ne contient que l'égalité (d'arité 2) et l'ensemble des fonctions est constitué des symboles suivants :

- un symbole de fonction $\star$ d'arité 2, qu'on s'autorisera à utiliser de manière infixe (autrement dit, si t_1 et t_2 sont des termes, on écrira $t_1 \star t_2$ plutôt que $\star(t_1, t_2)$).
- un symbole de fonction $^{-1}$ d'arité 1, qu'on s'autorisera à utiliser de manière postfixe (autrement dit, si t est un terme, on écrira t^{-1} plutôt que $^{-1}(t)$).
- un symbole de fonction d'arité 0, noté e.

On se donne ensuite quatre formules du premier ordre sur le langage L :
- $A = \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \star y) \star z = x \star (y \star z))$
- $N = \forall x\, (x \star e = x \wedge e \star x = x)$
- $I = \forall x\, (x \star x^{-1} = e \wedge x^{-1} \star x = e)$
- $G = A \wedge I \wedge N$

1. Donner un exemple de modèle pour la formule G.
2. De manière générale, comment appelle-t-on les structures S qui sont modèles de G ?
3. Expliquer le nom des quatre formules de l'énoncé.
4. Expliquer sans formalisme pourquoi $G \models \forall x\, ((x^{-1})^{-1} = x)$.
5. On considère la formule Ab suivante : $\forall x\, \forall y\, (x \star y = y \star x)$.
   a) A-t-on $G \models Ab$? Justifier sans formalisme.
   b) A-t-on $G \models \neg Ab$? Justifier sans formalisme.

Exercice 2 (*) *Preuves en déduction naturelle (calcul propositionnel)*

Montrer en déduction naturelle les séquents du calcul propositionnel suivants. Dans chacun des cas, préciser si la preuve proposée a été faite en logique minimale, en logique intuitionniste ou en logique classique.

1. $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.
2. $A \vdash \neg\neg A$.
3. $\vdash \neg\neg(\neg\neg A \Rightarrow A)$.
4. $\vdash \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
5. $\vdash \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$. *Indication : le sens indirect est le plus simple.*
6. $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$.
7. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \Rightarrow A \vee (B \wedge C)$. *Indication : exploiter deux fois la règle elim-$\vee$.*

Exercice 3 (*) *Affaiblissement pour la déduction naturelle*

On se place dans le cadre du calcul propositionnel et on souhaite démontrer le théorème suivant : S'il existe une preuve en déduction naturelle de $\Gamma \vdash A$ alors pour toute formule du calcul propositionnel B, il existe une preuve de $\Gamma, B \vdash A$ (et la hauteur de l'arbre de preuve ne change pas).

1. Commençons par considérer un exemple : on donne ci-dessous une preuve de $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{A, B \vdash A}\ \text{ax}}{A \vdash B \Rightarrow A}\ \text{intro-}\Rightarrow}{\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\ \text{intro-}\Rightarrow$$

Si F est une formule, comment modifier cette preuve en une preuve de $F \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$?

2. Montrer rigoureusement le théorème d'affaiblissement de la déduction naturelle.

Remarque : Ce théorème signifie que, si on peut démontrer A sous les hypothèses Γ, alors en ajoutant des hypothèses supplémentaires, on peut toujours prouver A (cela ne devrait pas choquer votre intuition !). Dans certaines sources, on considère que la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\ \textit{aff}$$

fait partie des règles de la déduction naturelle et on l'appelle "règle d'affaiblissement". Il est néanmoins justifié de ne pas considérer cette règle comme faisant partie des règles de la déduction naturelle car on peut montrer qu'elle est "admissible" : tout séquent prouvable en déduction naturelle l'est sans utiliser la règle d'affaiblissement.

Exercice 4 (*) *Correction de la déduction naturelle*

Nous avons vu en cours que montrer la correction de la déduction naturelle revient à montrer la correction de ses règles. Montrer la correction des règles intro-$\wedge$, intro-$\neg$ et elim-$\neg$.

Exercice 5 (*) *Preuves de théorèmes du calcul des prédicats*

Montrer en déduction naturelle les théorèmes du premier ordre suivants. Dans les questions 2, 4, 5, les formules peuvent parfaitement dépendre de x. Pour s'aider, on pourra écrire $A(x)$ à la place de A dans les preuves.

1. $\forall x\, P(x) \Rightarrow \exists x\, P(x)$ où P est un prédicat unaire. On considère dans un premier temps tel qu'il existe un symbole de constante x_0 dans le langage du premier ordre considéré pour écrire cette formule. Montrer que même sans cette hypothèse, cette formule reste un théorème.
2. $\exists x\, (A \wedge B) \Rightarrow (\exists x\, A) \wedge (\exists x\, B)$. Que dire de la réciproque ?
3. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \Rightarrow (x = z))$. Quelle propriété exprime cette formule ?
4. (**) $\neg(\exists x\, P) \Leftrightarrow \forall x\, \neg P$.
5. (**) $(\forall x\, A) \vee B \Leftrightarrow \forall x\, (A \vee B)$ si x n'est pas libre dans B.
   Indication : pour la réciproque, se servir du tiers exclus.

Exercice 6 (**) *Preuves en déduction naturelle (calcul des prédicats)*

1. Ici, f est un symbole de fonction unaire et T un symbole de relation binaire. Montrer que $A_1, A_2, A_3 \vdash A$ où :
   - $A_1 = \forall x\, (\exists y\, T(x, y) \Rightarrow T(x, f(x)))$.
   - $A_2 = \forall x\, \exists y\, T(x, y)$.
   - $A_3 = \exists x\, T(f(f(x)), x)$.
   - $A = \exists x\, \exists y\, \exists z\, (T(x, y) \wedge T(y, z) \wedge T(z, x))$.
2. (***) Formaliser et montrer formellement que si f et g sont des fonctions unaires données alors :
   a) Si f est une involution alors c'est une bijection.
   b) Si f et g sont injectives alors $f \circ g$ l'est aussi.
   c) Si $f \circ g$ est injective et g est surjective alors f est injective.

Exercice 7 (*) *Preuve ou pas preuve ?*

Déterminer parmi les arbres suivants lesquels sont des arbres de preuve (corrects). Dans le cas où la preuve est erronnée, indiquer quelles sont les règles mal utilisées ou inventées.

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A\lor B\vdash A\lor B}\,\text{ax}}{A\lor B\vdash A}\,\text{elim-}\lor \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\lor B\vdash A\lor B}\,\text{ax}}{A\lor B\vdash B}\,\text{elim-}\lor}{A\lor B\vdash A\land B}\,\text{intro-}\land}{\vdash A\lor B\Rightarrow A\land B}\,\text{intro-}\Rightarrow$$

2. On note Δ l'ensemble de formules du calcul propositionnel $\{A\Rightarrow(B\Rightarrow C), A\land B\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta\vdash A\Rightarrow(B\Rightarrow C)}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta\vdash A\land B}\,\text{ax}}{\Delta\vdash A}\,\text{elim-}\land}{\Delta\vdash B\Rightarrow C}\,\text{elim-}\Rightarrow \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta\vdash A\land B}\,\text{ax}}{\Delta\vdash B}\,\text{elim-}\land}{\Delta\vdash C}\,\text{elim-}\Rightarrow}{\vdash (A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow(A\land B\Rightarrow C)}\,\text{intro-}\Rightarrow\text{ (deux fois)}$$

3. On note $F=\forall x\,A\lor\forall x\,B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\,A\vdash\forall x\,A}\,\text{ax}}{\forall x\,A\vdash A}\,\text{elim-}\forall}{\forall x\,A\vdash A\lor B}\,\text{intro-}\lor}{\forall x\,A\vdash\forall x\,(A\lor B)}\,\text{intro-}\forall}{F,\forall x\,A\vdash\forall x\,(A\lor B)}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x\,B\vdash\forall x\,B}\,\text{ax}}{\forall x\,B\vdash B}\,\text{elim-}\forall}{\forall x\,B\vdash A\lor B}\,\text{intro-}\lor}{\forall x\,B\vdash\forall x\,(A\lor B)}\,\text{intro-}\forall}{F,\forall x\,B\vdash\forall x\,(A\lor B)}\,\text{aff} \qquad \dfrac{}{F\vdash F}\,\text{ax}}{F\vdash\forall x\,(A\lor B)}\,\text{elim-}\lor}{\vdash\forall x\,A\lor\forall x\,B\Rightarrow\forall x\,(A\lor B)}\,\text{intro-}\Rightarrow$$

4. On note F la formule $\exists x\,A\land\exists x\,B$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F\vdash F}\,\text{ax}}{F\vdash\exists x\,A}\,\text{elim-}\land \qquad \dfrac{}{F,A\vdash A}\,\text{ax}}{F\vdash A}\,\text{elim-}\exists \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F\vdash\exists x\,A\land\exists x\,B}\,\text{ax}}{F\vdash\exists x\,B}\,\text{elim-}\land \qquad \dfrac{}{F,B\vdash B}\,\text{ax}}{f\vdash B}\,\text{elim-}\exists}{F\vdash A\land B}\,\text{intro-}\land}{F\vdash\exists x\,(A\land B)}\,\text{intro-}\exists}{\exists x\,A\land\exists x\,B\Rightarrow\exists x\,(A\land B)}\,\text{intro-}\Rightarrow$$

Exercice 8 (***) *Paradoxe du buveur*

"Dans toute pièce non vide, il existe une personne ayant la propriété suivante : si cette personne boit, alors tout le monde dans la pièce boit." Cet énoncé, noté E est connu sous le nom de "paradoxe du buveur" ou "principe des buveurs". Nous allons montrer qu'il n'a en fait rien de paradoxal, puisqu'il exprime en langage naturel une formule du premier ordre qui est universellement vraie (l'équivalent d'une tautologie dans le calcul propositionnel).

1. En s'appuyant sur le tiers exclus, expliquer en français pourquoi l'énoncé E est vrai.
2. En faisant abstraction de "dans toute pièce non vide", écrire une formule F du calcul des prédicats formalisant le paradoxe du buveur. On pourra utiliser un prédicat unaire B (intuitivement, $B(x)$ signifie "x boit").
3. Montrer en déduction naturelle les séquents $\forall x\,B(x)\vdash F$ et $\neg(\forall x\,B(x))\vdash F$. On suppose qu'on dispose d'une constante x_0 dans le langage (représentant le fait que la pièce n'est pas vide).
4. Conclure.

Remarque : Le paradoxe du buveur est une illustration flagrante du fait qu'en langage naturel, l'implication est souvent comprise comme une causalité, ce qu'elle n'est pas !

Exercice 8 (***) *Constructivisme et intuitionnisme*

On considère un langage du premier ordre disposant d'un symbole de constante c, d'un symbole de fonction e d'arité 2 et d'un prédicat unaire R. Donner une preuve en déduction naturelle du séquent suivant :

$$\neg R(c), R(e(e(c,c),c) \vdash \exists x\, \exists y\, (R(e(x,y)) \land \neg R(x) \land \neg R(y))$$

Remarque : La preuve de ce séquent constitue une preuve non constructive de l'existence de deux nombres x, y irrationnels tels que x^y est rationnel. En voici une version écrite en français (et qui présuppose que l'on sait que $\sqrt{2}$ est irrationnel). De deux choses l'une : soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, soit il ne l'est pas. S'il est rationnel, on conclut immédiatement. Sinon, il est irrationnel, $\sqrt{2}$ aussi et $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ est rationnel.

Cette preuve (dont vous pouvez vous inspirer pour construire une preuve en logique classique du séquent présenté) montre l'existence de nombres x, y convenables... si on accepte le principe du tiers exclus ! Elle ne les construit pas. C'est une des raisons pour laquelle certains mathématiciens (dont Brouwer, père philosophique de la logique intuitionniste) ont refusé et refusent le principe du tiers exclus : accepter le tiers exclus ou une formulation équivalente implique d'accepter des preuves existentielles non constructives.

Il peut paraître loufoque de ne pas vouloir accepter une preuve non constructive, d'autant qu'il est pénible de devoir se passer du tiers exclus (et de bien d'autres raisonnements comme le montre le DM1)... jusqu'à ce qu'on souhaite automatiser les preuves ! Il est en effet bien plus facile de concevoir un assistant de preuve dans un cadre constructif. Ce rejet de la logique classique au profit de la logique intuitionniste n'est donc pas qu'une posture philosophique - soit dit en passant, respectable.