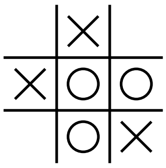
Fiche TD6 : Jeux à deux joueurs

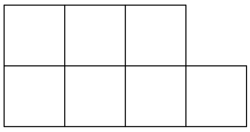
Exercice 1 (*) *Positions gagnantes*

1. En considérant que c'est au joueur X de jouer, déterminer si la configuration suivante au jeu du morpion est une position gagnante pour X, gagnante pour O ou ni l'un ni l'autre.



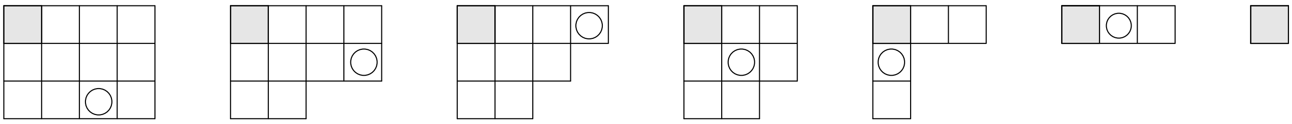
   Reprendre la question si cette configuration appartient au joueur O.

2. On se place dans le contexte du jeu du domineering présenté en cours. En dessinant le graphe des configurations, déterminer pour quel joueur le plateau suivant est gagnant en fonction du joueur qui commence.



Exercice 2 (**) *Jeu de Chomp*

Le jeu de Chomp a comme support une tablette de chocolat rectangulaire dont le coin supérieur gauche est empoisonné. Chaque joueur choisit tour à tour un carré et le mange, ainsi que tous les carrés situés en dessous et à la droite de celui choisi. Le joueur qui n'a plus d'autre choix que de manger le carré empoisonné a perdu. Voici un exemple de partie dans laquelle le joueur qui a commencé perd (le carré gris représente le carré empoisonné et les cercles les coups des deux joueurs) :



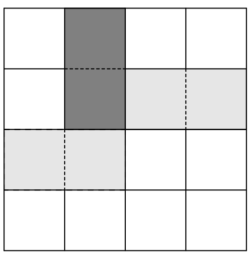
1. En dessinant le graphe des configuration de ce jeu, déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante sur une tablette de longueur 3 et de hauteur 2.

2. Le jeu de Chomp est paramétré par la taille (p, q) de la tablette de chocolat. Montrer que si $(p, q) \neq (1, 1)$ alors il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs, qu'on identifiera.

Remarque : La preuve de l'existence d'une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs à la question 2 se fait de manière non constructive. Ce type de preuve est appelé "preuve par vol de stratégie".

Exercice 3 (*) *Min-max avec heuristique*

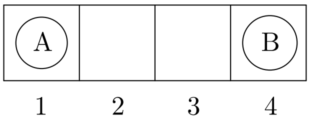
On considère la configuration suivante au jeu du domineering : elle correspond à une situation où c'est au joueur qui place les dominos verticaux de jouer (par convention ledit joueur sera le joueur 1 et l'autre le joueur 2).



1. Dessiner le sous-graphe des configurations à profondeur 2 depuis cette configuration.
2. Déterminer le score de chaque sommet dans ce graphe via l'algorithme min-max en utilisant l'heuristique suivante : le score d'une configuration vaut $+\infty$ si elle est finale gagnante pour 1, $-\infty$ si elle est finale gagnante pour 2 et vaut le nombre de coups possibles pour le joueur 1 moins celui pour le joueur 2 sinon.
3. En déduire le coup que jouerait le joueur 1 dans cette situation selon l'algorithme min-max avec cette heuristique et une profondeur d'exploration de deux.
4. Pour chaque sommet du sous-graphe précédent, déterminer en justifiant s'il s'agit d'une position gagnante pour le joueur 1 ou pour le joueur 2. Que dire de la qualité de l'heurisique ?

Exercice 4 (**) *Min-max avec cycles*

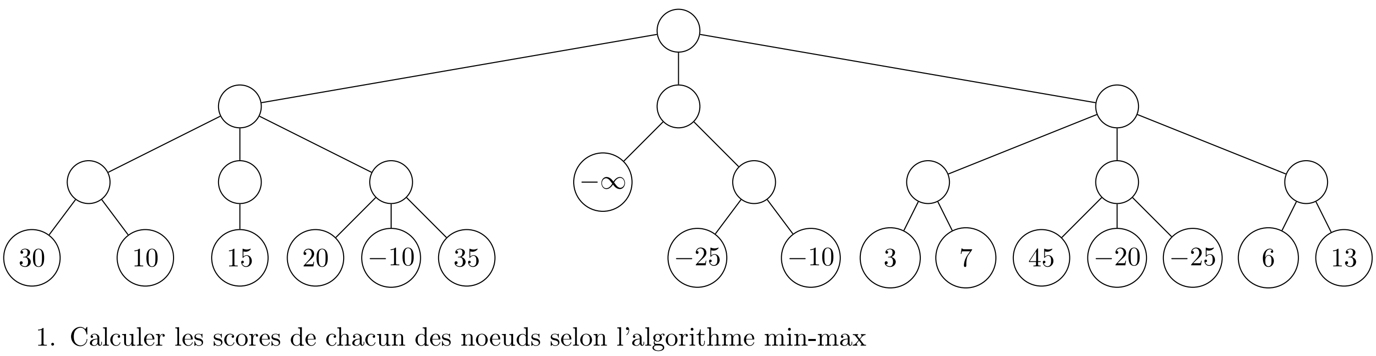
On considère le jeu dont la configuration initiale est présentée ci-dessous. Les joueurs A et B doivent bouger alternativement leur pion dans un couloir de 4 cases. Ils ne peuvent déplacer leur pion que sur une case adjacente vide dans n'importe quelle direction. Si l'adversaire occupe une case adjacente, le joueur peut sauter ce pion et avancer ainsi jusqu'à la prochaine case libre, à condition qu'elle existe. Par exemple, si A est en 2 et B en 3, A peut immédiatemment aller en 4. Le joueur A gagne s'il atteint la case 4 avant que le joueur B n'atteigne la case 1, la chose est symétrique du point de vue de B. Le joueur A commence toujours.



1. Dessiner le graphe des configurations de ce jeu. Que remarque-t-on ?
2. Dessiner le pseudo-arbre des configurations de ce jeu : il s'agit de son arbre dans lequel on ne dessine pas les configurations filles d'une configuration qu'on rencontre pour la deuxième fois.
3. On considère que la valeur minmax d'une feuille de cet arbre vaut 1 si la configuration est gagnante pour A, -1 si la configuration est perdante pour A et ? dans les autres cas.
   a) Calculer la valeur minmax de la racine en expliquant comment gérer les valeurs ?.
   b) La configuration initiale du jeu est-elle une position gagnante pour A ?
4. La version modifiée de l'algorithme min-max utilisée à la question précédente permet-elle d'obtenir une stratégie optimale pour tous les jeux où interviennent des cycles ?
5. Ce jeu à 4 cases peut être généralisé à n cases pour tout $n > 2$. Montrer que pour tout $n > 2$, la configuration initiale est une position gagnante pour l'un des deux joueurs.

Exercice 5 (*) *Calcul de score avec et sans élagage*

On considère un sous-graphe des configurations d'un jeu donné par l'arbre suivant. La valeur de l'heuristique pour chaque feuille y est indiquée : elle est positive pour le joueur 1 et négative pour le joueur 2.



1. Calculer les scores de chacun des noeuds selon l'algorithme min-max
   a) En supposant que c'est au joueur 1 de jouer à la racine.
   b) En supposant que c'est au joueur 2 de jouer à la racine.

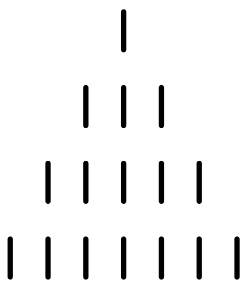
2. Représenter l'arbre obtenu et les scores des noeuds visités (en supposant qu'il le sont de gauche à droite) lors de l'application de l'algorithme min-max avec élagage alpha-beta sur le graphe des configurations de la première question en supposant que c'est au joueur 1 de jouer à la racine.

Exrecice 6 (***) *Théorème de Sprague-Grundy*

Le jeu de Nim est un jeu à deux joueurs dans lequel la configuration initiale consiste en un certain nombre de rangées d'allumettes. Tour à tour, chaque joueur doit choisir une des rangées et en retirer au moins une allumette. Le gagnant est celui qui retire la dernière allumette, autrement dit, celui qui ne peut plus jouer perd. Par convention, le joueur 1 est celui qui commence.

1. Dans sa version la plus simple, il n'y a qu'une seule rangée de n allumettes. Montrer qu'il existe toujours un joueur qui possède une stratégie gagnante pour le jeu de Nim dans ces conditions.

On considère à présent un jeu de Nim à plusieurs rangées. Par exemple, la figure ci-dessous représente le jeu de Nim $(1, 3, 5, 7)$.



2. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le deuxième joueur pour le jeu de Nim (n, n).
3. Soit $1 \leq m < n$ deux entiers. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur pour le jeu de Nim (m, n).

Les deux questions précédentes sont des cas particuliers du théorème de Sprague-Grundy qu'on se propose de démontrer dans la suite de l'exercice : il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur au jeu de Nim $(x_1, ..., x_n)$ si et seulement si $x_1 \oplus ... \oplus x_n \neq 0$ où $\oplus$ désigne le ou exclusif bit à bit.

On remarque que jouer un coup transforme une instance du jeu de Nim en une nouvelle instance du jeu de Nim. Notons $(x_1, ..., x_n)$ l'état du jeu avant le coup du premier joueur (l'entier x_i est donc le nombre d'allumettes sur la rangée i avant le coup du joueur 1) et $(y_1, ..., y_n)$ l'état du jeu après le coup du premier joueur et définissons de surcroît :

$$x = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \text{ et } y = \bigoplus_{i=1}^{n} y_i$$

4. a) Montrer que si le joueur 1 a enlevé des allumettes dans la rangée k alors $y = x \oplus x_k \oplus y_k$.
   b) Montrer que si $x = 0$ alors $y \neq 0$ quel que soit le coup choisi par le premier joueur.
   c) Montrer que si $x \neq 0$ alors il existe un coup tel que $y = 0$.
   d) En déduire le théorème de Sprague-Grundy.
5. Pour chacune des instances du jeu de Nim suivantes, déterminer si la configuration initiale est gagnante pour le premier joueur et décrire un premier coup gagnant si elle l'est.
   a) $(1, 3, 5, 7)$.
   b) $(1, 3, 5, 7, 9)$.
   c) $(1, 2, 4, ..., 2^n)$ pour $n \geq 1$.
   d) $(1, 3, 7, ..., 2^n - 1)$ pour $n \geq 2$.