DM1 : Corrigé

Exercice 1

1. a) La règle elim-$\neg\neg$ est dérivable dans S_1 car l'arbre ci-dessous n'utilise que des règles de S_1 :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \lor \neg A}\,\text{te} \qquad \dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A \vdash \neg A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{supposé}}{\Gamma \vdash \neg\neg A}}{\Gamma, \neg A \vdash \neg\neg A}\,\text{aff}}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}\,\text{elim-}\neg}{\Gamma, \neg A \vdash A}\,\text{elim-}\bot}{\Gamma \vdash A}\,\text{elim-}\lor$$

Pour trouver cette preuve, on peut tenir le raisonnement suivant : le cours nous informe qu'on devra a priori utiliser le tiers exclus donc introduire (probablement) $A \lor \neg A$. Notre objectif est d'obtenir A. Si on a $A \lor \neg A$, soit on a A, soit on a $\neg A$. Dans le premier cas, on a directement obtenu A. Dans le second, on se rappelle qu'on a une hypothèse : $\Gamma \vdash \neg\neg A$. Or, si on a $\neg A$ et $\neg\neg A$, notre intuition sémantique nous dit qu'on a une contradiction. Ce qui tombe bien car d'une contradiction, on peut déduire ce qu'on veut, par exemple... A !

b) Le raisonnement par l'absurde est dérivable dans S_2 puisque l'arbre ci-dessous n'utilise que les règles de la logique intuitionniste et l'élimination de la double négation :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{supposé}}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\,\text{intro-}\neg}{\Gamma \vdash A}\,\text{elim-}\neg\neg$$

c) Suivons les indications de l'énoncé. L'arbre suivant est un arbre de preuve en logique intuitionniste :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(A \lor B), A \vdash A}\,\text{ax}}{\neg(A \lor B), A \vdash A \lor B}\,\text{intro-}\lor \qquad \dfrac{}{\neg(A \lor B), A \vdash \neg(A \lor B)}\,\text{ax}}{\neg(A \lor B), A \vdash \bot}\,\text{elim-}\neg}{\neg(A \lor B) \vdash \neg A}\,\text{intro-}\neg$$

Ceci prouve le séquent $\neg(A \lor B) \vdash \neg A$. Un raisonnement symétrique permet de prouver $\neg(A \lor B) \vdash \neg B$. En particulier, cela implique qu'on peut prouver en logique intuitionniste les séquents $\neg(A \lor \neg A) \vdash \neg A$ et $\neg(A \lor \neg A) \vdash \neg\neg A$ en spécialisant les résultats précédents avec $B = \neg A$.

Ainsi, le tiers exclus est dérivable dans S_3 via l'arbre suivant - qui n'utilise que les règles de S_3 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{prouvé}}{\neg(A \lor \neg A) \vdash \neg A}}{\Gamma, \neg(A \lor \neg A) \vdash \neg A}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{prouvé}}{\neg(A \lor \neg A) \vdash \neg\neg A}}{\Gamma, \neg(A \lor \neg A) \vdash \neg\neg A}\,\text{aff}}{\Gamma, \neg(A \lor \neg A) \vdash \bot}\,\text{elim-}\neg}{\Gamma \vdash A \lor \neg A}\,\text{ra}$$

2. La question 1 montre qu'ajouter à $\mathcal{R}$ n'importe laquelle des règles parmi le tiers exclus, le raisonnement par l'absurde et l'élimination de la double négation permet de dériver les deux autres. Le résultat est donc immédiat : fondamentalement, S_1, S_2 et S_3 disposent des mêmes règles donc prouvent les mêmes séquents.

3. Pour montrer que S_4 est équivalent à la logique classique, il suffit de montrer deux choses : qu'on peut, à partir de S_4, dériver l'une des règles parmi le tiers exclus, l'élimination de la double négation et le raisonnement par l'absurde et réciproquement, qu'on peut dériver la contraposition d'une de ces trois règles (pas forcément la même que pour la première dérivation). On choisit par exemple de montrer qu'on peut dériver la contraposition du raisonnement par l'absurde et le raisonnement par l'absurde de la contraposition :

   L'arbre suivant n'utilise que les règles de $\mathcal{R}$ et le raisonnement par l'absurde, on en déduit qu'on peut dériver la contraposition de S_3 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{supposé}}{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}}{\Gamma, A, \neg B \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}\text{aff} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg B \vdash \neg B}\text{ax}}{\Gamma, A, \neg B \vdash \neg B}\text{aff}}{\Gamma, A, \neg B \vdash \neg A}\text{elim-}\Rightarrow \quad \dfrac{}{\Gamma, A, \neg B \vdash A}\text{ax}}{\Gamma, A, \neg B \vdash \bot}\text{elim-}\neg}{\Gamma, A \vdash B}\text{ra}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{intro-}\Rightarrow$$

Cette preuve est la formalisation du raisonnement sémantique suivant. On suppose qu'on a $\neg B \Rightarrow \neg A$ et on veut montrer $A \Rightarrow B$. Supposons donc A et montrons B. Par l'absurde, on a $\neg B$. Dans ce cas, comme $\neg B \Rightarrow \neg A$, on a $\neg A$, ce qui contredit A.

Réciproquement, l'arbre suivant n'utilise que les règles de $\mathcal{R}$ et la contraposition. On en déduit que le raisonnement par l'absurde est dérivable dans S_4 et ceci conclut notre preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{supposé}}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}}{\Gamma, \neg A, \bot \Rightarrow \bot \vdash \bot}\text{aff}}{\Gamma, \neg A \vdash \neg(\bot \Rightarrow \bot)}\text{intro-}\neg}{\Gamma \vdash \neg A \Rightarrow \neg(\bot \Rightarrow \bot)}\text{intro-}\Rightarrow}{\Gamma \vdash (\bot \Rightarrow \bot) \Rightarrow A}\text{ctr} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \bot}\text{ax}}{\Gamma \vdash \bot \Rightarrow \bot}\text{intro-}\Rightarrow}{\Gamma \vdash A}\text{elim-}\Rightarrow$$

Cette preuve est la formalisation du raisonnement sémantique suivant. On suppose que $\neg A \Rightarrow \bot$ et on veut montrer A. Comme $\neg A \Rightarrow \neg\top$, par contraposition, l'implication $\top \Rightarrow A$ est vraie. Mais cette implication ne peut être vraie que si A l'est vu la sémantique standard de $\Rightarrow$. On s'aide du fait que $\bot \Rightarrow \bot$ est un raccourci pour $\top$.

4. La méthode est similaire à celle utilisée dans la question 4 : on montre que la loi de Peirce est dérivable du raisonnement par l'absurde puis que le raisonnement par l'absurde est dérivable de la loi de Peirce (ce n'est pas la seule façon de faire !). Cela montre l'équivalence des systèmes S_5 et S_3 et conclut d'après la question 2.

   L'arbre ci-dessous montre qu'on peut dériver la loi de Peirce de S_3 (F désigne la formule $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, F \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow A}\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \neg A, A \vdash \neg A}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma, \neg A, A \vdash A}\text{ax}}{\Gamma, \neg A, A \vdash \bot}\text{elim-}\neg}{\Gamma, \neg A, A \vdash B}\text{elim-}\bot}{\Gamma, \neg A \vdash A \Rightarrow B}\text{intro-}\Rightarrow}{\Gamma, F, \neg A \vdash A}\text{elim-}\Rightarrow + \text{aff} \quad \dfrac{}{\Gamma, F, \neg A \vdash \neg A}\text{ax}}{\Gamma, F, \neg A \vdash \bot}\text{elim-}\neg}{\Gamma, F \vdash A}\text{ra}}{\Gamma \vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\text{intro-}\Rightarrow$$

   Cette preuve est la formalisation du raisonnement suivant. On veut montrer $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$. Pour ce faire, on suppose $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ et on veut montrer A. Supposons par l'absurde que $\neg A$. Sémantiquement, A est faux, donc l'implication $A \Rightarrow B$ est vraie de part la sémantique de $\Rightarrow$. En utilisant le fait que $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$ par hypothèse on en déduit A et c'est une contradiction.

   Réciproquement, l'arbre ci-dessous montre qu'on peut dériver le raisonnement par l'absurde de S_5 :

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash ((A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\text{Peirce} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{supposé}}{\Gamma, \neg A \vdash \bot}}{\Gamma, \neg A \vdash A}\text{elim-}\bot}{\Gamma, \neg A \Rightarrow A}\text{intro-}\Rightarrow}{\Gamma, A \Rightarrow \bot \vdash \neg A \Rightarrow A}\text{aff} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, A \Rightarrow \bot \vdash A \Rightarrow \bot}\text{ax} \quad \dfrac{}{A, A \Rightarrow \bot \vdash A}\text{ax}}{A, A \Rightarrow \bot \vdash \bot}\text{elim-}\Rightarrow}{A \Rightarrow \bot \vdash \neg A}\text{intro-}\neg}{\Gamma, A \Rightarrow \bot \vdash \neg A}\text{aff}}{\Gamma, A \Rightarrow \bot \vdash A}\text{elim-}\Rightarrow}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A}\text{intro-}\Rightarrow}{\Gamma \vdash A}\text{elim-}\Rightarrow$$

Pour avoir une idée amenant à cette preuve, on peut tenir le raisonnement suivant. On veut montrer A sachant que $\Gamma, \neg A \vdash \bot$ et qu'a priori il faudra utiliser la loi de Peirce. En se rappelant que $\neg A \Leftrightarrow (A \Rightarrow \bot)$ est un théorème en logique intuitionniste (montré en cours), on suppute que l'instance de la loi de Peirce qu'il nous faudra utiliser est $((A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A) \Rightarrow A$. Pour montrer A à partir de cette formule, il suffit de montrer $(A \Rightarrow \bot) \Rightarrow A$. Notre intuition sémantique nous dit qu'on devrait pouvoir y arriver puisque par hypothèse, $\neg A$ est faux, donc l'implication $(A \Rightarrow \bot)$ est fausse, et de faux, on peut déduire n'importe quoi, par exemple... A.

5. On comprend Hilbert ! En effet, les questions 1 à 4 montrent que s'interdire d'utiliser le tiers exclus dans ses raisonnements revient à s'interdire l'utilisation du raisonnement par l'absurde, de la contraposition, de l'élimination de la double négation et de la loi de Peirce. Si cette dernière n'est pas couramment utilisée en mathématiques, il va tout autrement des trois premiers raisonnements !

Remarques : Cet exercice montre à quel point la réflexion "pour toute proposition P, soit on a P, soit on a $\neg P$" est tout sauf anodine ! C'est au contraire le pilier d'une grande partie des raisonnements que vous tenez en mathématiques. Le refuser comme le font les logiciens intuitionnistes, bien que peu pratique, peut néanmoins se justifier comme le montre l'exercice 8 de la fiche TD1.

La question 4 donne une formulation du principe du tiers exclus qui n'utilise comme connecteur que l'implication : la loi de Peirce. Cette loi semble dispensable d'un point de vue des raisonnements mathématiques usuels, mais elle est en revanche cruciale pour montrer la complétude du calcul purement implicationnel, c'est-à-dire du calcul propositionnel dans lequel le seul connecteur utilisable est $\Rightarrow$.

Exercice 2

1. Il s'agit d'exhiber une preuve en déduction naturelle pour le séquent $\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \lor Q)$. Tout d'abord :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg P, \neg(\neg P \lor Q) \vdash \neg(\neg P \lor Q)}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg P, \neg(\neg P \lor Q) \vdash \neg P}\,\text{ax}}{\neg P, \neg(\neg P \lor Q) \vdash \neg P \lor Q}\,\text{intro-}\lor}{\neg P, \neg(\neg P \lor Q) \vdash \bot}\,\text{elim-}\neg}{\neg(\neg P \lor Q) \vdash P}\,\text{ra}$$

On en déduit l'arbre de preuve suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{prouvé}}{\neg(\neg P \lor Q) \vdash P}}{\neg(\neg P \lor Q), P \Rightarrow Q \vdash P}\,\text{aff} \qquad \dfrac{}{\neg(\neg P \lor Q), P \Rightarrow Q \vdash P \Rightarrow Q}\,\text{ax}}{\neg(\neg P \lor Q), P \Rightarrow Q \vdash Q}\,\text{elim-}\Rightarrow}{\neg(\neg P \lor Q), P \Rightarrow Q \vdash \neg P \lor Q}\,\text{intro-}\lor \qquad \dfrac{}{\neg(\neg P \lor Q), P \Rightarrow Q \vdash \neg(\neg P \lor Q)}\,\text{ax}}{\neg(\neg P \lor Q), P \Rightarrow Q \vdash \bot}\,\text{elim-}\neg}{P \Rightarrow Q \vdash \neg P \lor Q}\,\text{ra}}{\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \lor Q)}\,\text{intro-}\Rightarrow$$

Cette preuve formalise l'intuition sémantique suivante. On souhaite montrer $\neg P \lor Q$ sachant $P \Rightarrow Q$. Supposons par l'absurde que $\neg P \lor Q$ est faux. Dans ce cas la sémantique du $\lor$ nous indique que Q est faux et P est vrai, mais dans ce cas, l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse et c'est une contradiction.

2. Notons $F = A \Leftrightarrow \neg A$ (attention, F désignera une autre formule à la question 3 !). On se rappelle que $A \Leftrightarrow \neg A$ n'est qu'un raccourci pour signifier $(A \Rightarrow \neg A) \land (\neg A \Rightarrow A)$. On a d'une part :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{prouvé en 1}}{\vdash (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg A \lor \neg A)}}{F \vdash (A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (\neg A \lor \neg A)}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,\text{ax}}{F \vdash A \Rightarrow \neg A}\,\text{elim-}\land}{F \vdash \neg A \lor \neg A}\,\text{elim-}\Rightarrow \qquad \dfrac{}{F, \neg A \vdash \neg A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{F, \neg A \vdash \neg A}\,\text{ax}}{F \vdash \neg A}\,\text{elim-}\lor$$

Et de manière très similaire (avec pour seule différence notable l'utilisation de elim-$\neg\neg$) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{prouvé en 1}}{\vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg\neg A \lor A)}}{F \vdash (\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg\neg A \lor A)}\,\text{aff} \qquad \dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,\text{ax}}{F \vdash \neg A \Rightarrow A}\,\text{elim-}\land}{F \vdash \neg\neg A \lor A}\,\text{elim-}\Rightarrow \qquad \dfrac{}{F, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{F, \neg\neg A \vdash \neg\neg A}\,\text{ax}}{F, \neg\neg A \vdash A}\,\text{elim-}\neg\neg}{F \vdash A}\,\text{elim-}\lor$$

En utilisant la règle elim-$\neg$, on déduit de ces deux arbres une preuve de $F \vdash \bot$ comme attendu.

3. On note G la formule $\forall x\,(R(y,x) \Leftrightarrow \neg R(x,x))$. Voici une preuve en déduction naturelle du séquent $\vdash \neg F$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F \vdash F}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{F, G \vdash G}\,\text{ax}}{F, G \vdash R(y,y) \Leftrightarrow \neg R(y,y)}\,\text{elim-}\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\text{prouvé en 2}}{R(y,y) \Leftrightarrow \neg R(y,y) \vdash \bot}}{F, G \vdash (R(y,y) \Leftrightarrow \neg R(y,y)) \Rightarrow \bot}\,\text{intro-}\Rightarrow + \text{aff}}{F, G \vdash \bot}\,\text{elim-}\Rightarrow}{F \vdash \bot}\,\text{elim-}\exists}{\vdash \neg F}\,\text{intro-}\neg$$

L'utilisation de la règle elim-$\exists$ ci-dessus est licite puisque la variable y n'est libre ni dans F ni dans $\bot$. On en déduit bien que $\neg F$ est un théorème. Cette preuve formalise l'intuition sémantique suivante : par l'absurde, si on avait F, il y aurait un y tel que $\forall x\,(R(y,x) \Leftrightarrow \neg R(x,x))$. En particulier, on aurait $R(y,y) \Leftrightarrow \neg R(y,y)$ ce qui est faux : c'est donc que $\neg F$.

4. Si on interprète le prédicat R de façon à ce que $R(x,y)$ signifie "x rase y", la preuve obtenue à la question 3 et la correction de la déduction naturelle pour le calcul des prédicats prouvent qu'il n'existe pas d'individu y tel que pour tout individu x, y rase x si et seulement si x ne se rase pas lui même. Autrement dit, sous les contraintes du paradoxe du barbier, le barbier n'existe pas et donc le paradoxe disparaît.

   L'impression de paradoxe provient du fait qu'en langage naturel, lorsqu'on dit "le barbier rase les personnes qui ne se rasent pas elles-mêmes et uniquement celles-ci", on présuppose implicitement l'existence d'un barbier.

Remarques : Le "paradoxe" (entre guillemets au vu de l'exercice !) du barbier, est une version édulcorée du paradoxe de Russell. Ce paradoxe a été soulevé lors de la formalisation de la théorie des ensembles. En effet, lors de la construction de cette théorie, il semblait naturel de considérer que tout prédicat P permettait de créer un ensemble, à savoir l'ensemble des éléments qui vérifient P. Mais, en acceptant cette phrase et en considérant le prédicat "ne pas appartenir à soi-même", il devenait possible de créer l'ensemble $E = \{x \mid x \notin x\}$ et l'existence de cet ensemble implique que $E \in E \Leftrightarrow E \notin E$ ce qui rendait la théorie des ensembles incohérente !

Outre l'explication utilisant les outils de la logique ci-dessus, il existe des "résolutions" du paradoxe du barbier plus philosophiques, allant de la simple remarque "le barbier est une femme" à des considérations sur la différence entre l'être et la fonction.