DM1 : Déduction naturelle et philosophie

Ce devoir est facultatif. Il est à rendre pour le 28/09. Les deux exercices sont indépendants et vous pouvez n'en rendre qu'un. Dans tout l'énoncé, sauf mention contraire, une lettre grecque majuscule désigne un ensemble de formules du calcul des prédicats et une lettre latine majuscule une formule du calcul des prédicats.

Exercice 1 *Logique classique*

L'objectif de cet exercice est de montrer que l'on peut construire la logique classique à partir de la logique intuitionniste de différentes façons, toutes équivalentes en un sens précisé par la suite. On rappelle ci-dessous les règles de la logique intuitionniste dont on note $\mathcal{R}$ l'ensemble :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\text{ ax} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}\text{ aff} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{ intro-}\Rightarrow \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\text{ elim-}\Rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\text{ intro-}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\text{ elim-}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\text{ elim-}\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\text{ intro-}\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\text{ intro-}\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\text{ elim-}\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{ elim-}\bot \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\text{ intro-}\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\text{ elim-}\neg$$

On introduit par ailleurs les règles suivantes, dont certaines ont été vues en cours :

- Axiome du tiers-exclus : $\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\text{ te}$
- Règle d'élimination de la double négation : $\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\text{ elim-}\neg\neg$
- Raisonnement par l'absurde : $\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{ ra}$
- Contraposition : $\frac{\Gamma \vdash \neg B \Rightarrow \neg A}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{ ctr}$
- Règle de Peirce : $\frac{}{\Gamma \vdash ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A}\text{ Peirce}$

On dit qu'un règle est *dérivable* dans un système de déduction si on peut construire sa conclusion avec les règles du système de déduction en supposant qu'on a déjà une preuve de ses prémisses. Par exemple, la règle suivante — dite de la coupure — est dérivable en logique intuitionniste :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\text{ cut}$$

En effet, on peut la prouver en n'utilisant que les règles de la logique intuitionniste comme le montre cet arbre :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{supposé}}{\Gamma, A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\text{ intro-}\Rightarrow \qquad \dfrac{\text{supposé}}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B}\text{ elim-}\Rightarrow$$

1. a) On considère le système de déduction S_1 dont les règles sont celles de $\mathcal{R}$ auxquelles on rajoute le tiers exclus. Montrer que l'élimination de la double négation est dérivable dans S_1.
   b) On considère le système de déduction S_2 dont les règles sont celles de $\mathcal{R}$ auxquelles on rajoute l'élimination de la double négation. Montrer que le raisonnement par l'absurde y est dérivable.
   c) On considère le système de déduction S_3 dont les règles sont celles de $\mathcal{R}$ auxquelles on rajoute le raisonnement par l'absurde. Montrer qu'on peut y dériver le tiers exclus. On pourra dans un premier temps prouver en logique intuitionniste les séquents $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ et $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$.

On dit que deux systèmes de déduction S et S' sont équivalents si les séquents prouvables dans S sont exactement les mêmes que les séquents prouvables dans S'.

2. Montrer que S_1 (qui correspond à la logique classique), S_2 et S_3 sont équivalents.

Ce résultat explique pourquoi on ajoute indifféremment soit le tiers exclus, soit l'élimination de la double négation, soit le raisonnement par l'absurde à la logique intuitionniste pour construire la logique classique : les trois options aboutissent au "même" système de déduction au sens où les trois systèmes obtenus permettent de prouver exactement les mêmes choses. Ainsi, pour chaque $i \in [\![1, 3]\!]$ il fait sens de dire que S_i "est" la logique classique. Il existe en fait d'autres façons de la construire :

3. Montrer que le système de déduction S_4 dont les règles sont celles de $\mathcal{R}$ auxquelles on ajoute la contraposition est équivalent à la logique classique. On expliquera précisément la démarche.

4. De même, montrer que le système de déduction S_5 dont les règles sont celles de $\mathcal{R}$ auxquelles on ajoute la règle de Peirce est équivalent à la logique classique.

5. Au vu des résultats précédents, expliquer cette citation attribuée à David Hilbert :

Priver le mathématicien du tiers exclus serait enlever son téléscope à l'astronome, son poing au boxeur.

Exercice 2 *Le paradoxe du barbier*

Si vous trouvez une preuve pour la question 3 qui ne les utilise pas, vous n'êtes pas tenu de répondre aux questions 1 et 2. Si vous ne trouvez pas de preuve pour la question 3, elles devraient néanmoins vous aider. On pourra utiliser toutes les règles de la logique classique pour le calcul des prédicats.

1. Montrer à l'aide d'une preuve en déduction naturelle que $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \vee Q)$ est un théorème.

2. En déduire une preuve en déduction naturelle du séquent suivant : $P \Leftrightarrow \neg P \vdash \bot$.

3. On considère un langage du premier ordre disposant d'un symbole de relation R d'arité 2. On note

$$F = \exists y\, \forall x\, (R(x, y) \Leftrightarrow \neg R(x, x))$$

Montrer en déduction naturelle que $\neg F$ est un théorème.

Le paradoxe du barbier, s'énonce ainsi : Le maire donne l'ordre au barbier du village de raser toutes les personnes qui ne se rasent pas elles-mêmes et seulement celles-ci. Qui rase le barbier ? S'il se rase lui même, alors il contredit la règle car cette dernière ne lui permet de raser que les personnes qui ne se rasent pas elles-mêmes. S'il ne se rase pas lui-même, il est à nouveau en tort puisqu'il doit raser les personnes qui ne se rasent pas elles-mêmes...

4. A l'aide de la question 3, expliquer pourquoi il n'y a rien de paradoxal dans le paradoxe du barbier ! Quelle particularité du langage naturel fait tout d'abord penser à un paradoxe ?