

Sur les fonction de deux variables $f(x,y)$

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables.

-Dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

-Dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

-Matrice Hessienne :

La matrice Hessienne d'une fonction $f(x,y)$ est la matrice des dérivées partielles secondes :

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

-Recherche des Extrema sur $f(x,y)$

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables définie et dérivable. Pour trouver ses extremums, on suit les étapes suivantes :

1. Calcul des dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Ces équations permettent de déterminer les **points critiques** (x_0, y_0) .

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

3. Calcul du discriminant $D = \det(H)$:

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$

- Si $D > 0$ et $f_{xx} > 0$, alors (x_0, y_0) est un **minimum local**.
- Si $D > 0$ et $f_{xx} < 0$, alors (x_0, y_0) est un **maximum local**.
- Si $D < 0$, alors (x_0, y_0) est un **point selle**.
- Si $D = 0$, le test est indéterminé.

Exemple 1

Soit la fonction :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Étape 1 : Calcul des dérivées premières

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

En résolvant $3x^2 - 3y = 0$ et $3y^2 - 3x = 0$, on trouve les points critiques : $(0, 0)$ et $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

Étape 2 : Calcul des dérivées secondes

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3$$

Étape 3 : Calcul du discriminant

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x)(6y) - (-3)^2 = 36xy - 9$$

- Pour $(0, 0)$, $D = \det(H(0, 0)) = -9$ donc c'est un **point selle**.
- Pour $(1, 1)$, $D = \det(H(1, 1)) = 36 - 9 = 27 > 0$ et $f_{xx} = 6 > 0$ donc **minimum local**.
- Pour $(-1, -1)$, $D = \det(H(-1, -1)) = 27 > 0$ et $f_{xx} = -6 < 0$ donc **maximum local**.

Exemple 2

Cas où le test de la Hessienne est indéterminé

Considérons la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

Calcul des dérivées

Dérivées premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

En résolvant $4x^3 = 0$ et $4y^3 = 0$, on trouve un unique point critique :

$$(0, 0)$$

Dérivées secondes :

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{yy} = 12y^2, \quad f_{xy} = 0$$

Matrice Hessienne

$$H_f = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Calcul du discriminant

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (12x^2)(12y^2) - (0)^2 = 144x^2y^2$$

Interprétation

- Pour $(0,0)$, on a $D = 144(0)(0) = 0$. - Le test est donc **indéterminé**.

Pour conclure, on doit analyser $f(x,y)$ directement. On remarque que $f(x,y) = x^4 + y^4 \geq 0$ et que $f(0,0) = 0$, donc $(0,0)$ est un ****minimum global****, mais ce résultat ne pouvait pas être déduit uniquement du test de la Hessienne.

Comparaison avec d'autres points

Nous calculons les valeurs de $f(x,y)$ en quelques points proches de $(0,0)$:

$$f(1,0) = 1^4 + 0^4 = 1$$

$$f(0,1) = 0^4 + 1^4 = 1$$

$$f(1,1) = 1^4 + 1^4 = 2$$

$$f(-1,0) = (-1)^4 + 0^4 = 1$$

Dans chaque cas, nous avons $f(x,y) \geq 0$ et $f(0,0) = 0$, donc $f(x,y) > f(0,0)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Conclusion

La fonction $f(x,y) = x^4 + y^4$ est toujours positive ou nulle. Comme $f(0,0)$ est le plus petit des valeurs obtenues, $(0,0)$ est un **minimum global**.