

# Chapitre 1

## Fonctions de plusieurs variables

### Introduction.

Comment apparaissent les fonctions de plusieurs variables ?

Les fonctions sont utilisées pour modéliser certains phénomènes naturels ; mais pour cela les fonctions d'une variable ne suffisent pas, on a souvent besoin de fonctions de plusieurs variables. Si vous voulez décrire le temps qu'il fait sur terre, à un moment donné (fixés), vous allez modéliser les grandeurs "pression" et "température" par des fonctions de deux variables :  $P(x, y)$  et  $T(x, y)$  qui varie en fonction de la position  $(x, y)$  (par exemple,  $x$  représente la longitude et  $y$  la latitude). Bien sûr, pour être plus précis, il faudra introduire la variable altitude  $z$  ; pour décrire l'évolution de  $P$  et  $T$  au cours du temps, vous aurez besoin d'une quatrième variable, et  $P$  et  $T$  seront des fonctions de 4 variables  $(x, y, z, t)$ . Nous commençons par étudier les fonctions qui dépendent de deux variables seulement. Pour cela, il est important de bien se repérer dans le plan et l'espace.

### 1.1 Notions topologique de $\mathbb{R}^p$ , $p \in \mathbb{N}^*$

#### 1.1.1 Espaces métriques, définition de la distance

On note  $\mathbb{R}^p = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{p \text{ fois}} = \{X = (x_1, \dots, x_p) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in [1, \dots, p]\}$  - espace vectoriel réel de dimension  $p$ .

On s'intéresse aux fonctions  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Il faut d'abord étudier la structure du domaine  $D$  car le domaine est aussi important que la fonction. Pour cela on va définir une notion de distance.

**Définition 1** Soit  $E$  un ensemble non-vide. On dit qu'une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $d : (x, y) \mapsto d(x, y)$  est une distance sur  $E$  si elle vérifie les trois axiomes suivants :

- D1 (séparation)  $\forall (x, y) \in E \times E, \{x = y\} \Leftrightarrow \{d(x, y) = 0\}$ ;
- D2 (symétrie)  $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$ ;
- D3 (inégalité triangulaire)  $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

#### Définition 2

On appelle espace métrique tout couple  $(E, d)$  où  $E \neq \emptyset$  est un espace vectoriel et  $d$  est une distance.

### Exemple 1

1.  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$

2. Métriques sur  $E = \mathbb{R}^p$  :

Soient  $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  et  $Y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ . On définit

$$d_2(X, Y) = \left( \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}, \quad (\text{appelée métrique euclidienne}),$$

ou  $d_1(X, Y) = \sum_{i=1}^p |x_i - y_i|$ ,

ou  $d_\infty(X, Y) = \sup_{i=1, \dots, p} |x_i - y_i|$  appelée distance TCHEBYCHEV

3. Soit  $E$  un ensemble quelconque. Pour  $x, y \in E$  on définit

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque : Dans cet exemple  $(E, d)$  n'est pas un espace métrique.

### 1.1.2 Boules ouvertes, fermées. Sphères. Parties bornées

**Définition 3** Soit  $a$  un point de  $\mathbb{R}^p$  et  $r > 0$  un nombre réel.

1.

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a, x) \leq r\}$$

est appelée boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ .

2. Une boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  est

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a, x) < r\}$$

3. Une sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  est

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid d(a, x) = r\}$$

**Définition 4** Une partie bornée  $P$  de  $\mathbb{R}^p$  est une partie de  $\mathbb{R}^p$  pour laquelle on peut trouver une boule (ouverte ou fermée) qui contient tous les points de  $P$ .

### 1.1.3 Ouverts et Fermés

**Définition 5**

1. Une partie ouverte (ou un ouvert) de  $\mathbb{R}^p$  est une partie  $U$  t.q.  $\forall a \in U, \exists r > 0$  tq  $B(a, r) \subset U$  ie tout point de  $U$  est le centre d'une boule ouverte, de rayon non-nul, incluse dans  $U$ .
2. Une partie fermée (ou un fermé) de  $\mathbb{R}^p$  est une partie telle que son complémentaire  $U$  dans  $\mathbb{R}^p$  est un ouvert.

Proposition Dans un espace métrique  $(E, d)$ ,

- (1) une boule ouverte est un ouvert, et
- (2) une boule fermée est un fermé.

### 1.1.4 Normes des espaces vectoriels

**Définition 6** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . On appelle norme sur  $E$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{R}_+$  qui à  $x \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}_+$ , et vérifie

N1 (séparation)  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2 (homogénéité positive)  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

N3 (inégalité triangulaire)  $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  muni d'une norme est appelé

espace vectoriel normé (e.v.n.).

## 1.2 Fonctions de plusieurs variables.

### 1.2.1 Fonctions de plusieurs variables. Graphes. Lignes de niveau.

On s'intéresse maintenant aux fonctions

$$f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q.$$

On distinguera les cas suivants :

- Les fonctions scalaires :  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $q = 1$  et,
- les fonctions vectorielles :  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $q > 1$ .

On va commencer par l'étude des fonctions de deux variables. Une fonction définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs réelles fait correspondre à tout point  $X = (x, y)$  de  $D$ , (appelé le domaine de définition de  $f$ ) un réel unique  $f(X)$ .

On va commencer par l'étude des fonctions de deux variables.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \in D &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $X = (x, y)$ ,  $f(X) = f(x, y)$ .  $D$  est appelé le domaine de définition de  $f$ .

### Définition 7

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ .

1. L'ensemble des points de  $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, z = f(x, y)\}.$$

est appelé la surface représentative de  $f$ .  $S$  est aussi appelé le graphe de la fonction  $f$ .

2. Soit  $A = (a, b)$  un point intérieur de  $D$ , càd, il existe une boule centrée en  $x$  de rayon  $r > 0$  logé dans  $D$ .

Les fonctions  $x \mapsto f(x, b)$  et  $y \mapsto f(a, y)$  définies sur des intervalles ouverts, contenant respectivement  $b$  et  $a$  sont appelées les fonctions partielles associées à  $f$  au point  $A$ .

3. Soit  $k \in \mathbb{R}$ . L'ensemble

$$L_k = \{(x, y) \in D \text{ tq } f(x, y) = k\}$$

est la ligne de niveau  $k$  de la fonction  $f$ .

### Remarque 1

Pour les fonctions de trois variables, la notion analogue à la ligne de niveau est celle de surface de niveau (Formulez-là !)

Les lignes de niveau et les fonctions partielles sont utiles pour dessiner les graphes des fonctions.

### Exemple 2

- a)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2$  sur  $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$ . On calcule et représente des lignes de niveau  $k = 0$ ,  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k = 4$ ,  $k = -1$ .

**Rappel :** Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . L'équation canonique d'une ellipse centrée en  $(x_0, y_0)$ , d'axe horizontal mesurant  $2a$  et d'axe vertical mesurant  $2b$  est :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Celle de l'hyperbole étant

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

1. Pour  $k = 0$ ,  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 = 0$  admet  $(0, 0)$  comme solution.
2. Pour  $k = 1, 2, 4$  on obtient des ellipses.  
Par exemple pour  $k = 1$ ,

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

etc.

3. La ligne de niveau  $k = -1$  est l'ensemble vide (la fonction ne prend la valeur  $-1$  en aucun point.)

B) Sur  $D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$  et  $x \neq 0$  on considère la fonction  $f(x, y) = y/x$  avec ses lignes de niveau  $k = 0, 1, -1, 2, -2$ . Ce sont des intervalles des droites

$$y = 0, y = x, y = -x, y = 2x, y = -2x$$

sans le point  $x = y = 0$ . La valeur de la fonction sur la droite  $y = x$  est égale à 1, sur  $y = -x$  est égale à  $-1$ , etc.

### 1.2.2 Notion de limite

Une fois qu'on a les normes et les voisinages, la définition de limite est la même que dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  :

**Définition 8** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^p$  et  $A \in \mathbb{R}^p$ . On dit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$  ssi  $\forall V$  voisinage de  $A$ ,  $\exists N_V \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N_V \Rightarrow X_n \in V$ .  
C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \|X_n - A\| \leq \varepsilon.$$

Lien avec les limites dans  $\mathbb{R}$  :

#### Propriété 1

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((x_{n_1}, \dots, x_{n_p}))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^p$  et  $A = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A \iff \forall i = 1, \dots, p, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n_i} = a_i.$$

#### Définition 9

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $A \in D$ . On dit que  $f$  a une limite  $L \in \mathbb{R}^q$  en  $A$  ssi  $\forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = L$ .

Il y a une autre définition de la limite d'une fonction utilisant  $\varepsilon - \delta$  qui est équivalente à la définition 9.

**Définition 10** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^q$  une fonction définie sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^p$  et  $A$  un point adhérent à  $D$ ,  $L$  un point de  $\mathbb{R}^q$ . On dit que  $f$  a pour limite  $L$  lorsque  $X \rightarrow A$  si :

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 ; \|X - A\| \leq \eta, X \in D) \implies (\|f(X) - L\| \leq \varepsilon).$$

## Remarque 2

1. La notion de limite ne dépend pas des normes utilisées (pourquoi?).
2. La limite, si elle existe, est unique (trivial mais très important).
3. Les propriétés sur la somme et le produit de limite de deux fonctions restent le même que sur  $\mathbb{R}$ . Il en est aussi de même pour la composition de deux fonctions.
4. Majoration. Si  $\lim_{X \rightarrow A} g(X) = 0$  et  $\|f(X) - C\| \leq g(X), C \in \mathbb{R}^q$  pour tout  $X$  au voisinage de  $A$ , alors  $\lim_{X \rightarrow A} f(X) = C$ .

### 1.2.3 Continuité

#### Définition 11

Une fonction  $f$  est continue en un point  $A \in D$  si la limite de  $f$  en ce point existe et est égale à la valeur de la fonction en  $A$ . La fonction est continue sur  $D$  si elle est continue en tout point de  $D$ .

Ou bien on peut reformuler cette définition à l'aide des suites :

**Définition 12** Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $A \in D$ . On dit que  $f$  est continue en  $A$  ssi  $\forall (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $D$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(X_n) = f(A)$ .

**Propriété 2 Opérations sur les fonctions continues** : suite à la Proposition 1 la somme, le produit et le quotient (là où le dénominateur ne s'annule pas) des fonctions continues sont continus. La composée de fonctions continues est continue.

#### Remarque 3

Toute fonction obtenue à l'aide de fonctions continues élémentaires de variables  $(x_1, \dots, x_p)$  en utilisant les opérations algébriques et la composition est continue dans son domaine naturel de définition.

Exemples : des polynômes  $x^k y^n$ , exponentielles  $e^{2x+xy}$ , trigonométriques  $\sin(xy)$  etc sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Attention** :  $\frac{1}{x^n y^m}, n, m > 0$  n'est pas un polynôme.

Il peut être pratique de fixer toutes les composantes sauf une. On obtient alors ce qu'on appelle une fonction partielle :

#### Définition 13 (fonction partielle)

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ . Soit  $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p) \in D$ . Pour  $i = 1 \dots, p$ , on appelle  $i$ -ème fonction partielle de  $f$  en  $X_0$  la fonction :

$$f_{X_0, i} : \begin{cases} D_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^q \\ x \mapsto f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x, x_0^{i+1}, \dots, x_0^p) \end{cases}$$

où  $x$  est à la  $i$ -ème place, et  $D_i$  est tel que pour  $x \in D_i, (x_0^1, \dots, x, \dots, x_0^p) \in D$ .

#### Exemple 3

1. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2$$

Les fonctions partielles correspondantes au point  $(a, b) = (0, 0)$  sont :

$$x \mapsto f(x, 0) = 4x^2$$

et

$$y \mapsto f(0, y) = y^2.$$

2. Soit  $f$  définie sur le disque  $D$  de centre 0 et de rayon 2 par

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Soit  $a = (1/2, 1)$ . Les fonctions partielles en  $a$  sont

$$f_1 : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{3 - x^2};$$

$$f_2 : [-\sqrt{15}/2, \sqrt{15}/2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \sqrt{15/2 - y^2};$$

3. Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  par  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ . Soit  $a = (1, -1, 2)$ . Les fonctions partielles de  $f$  en  $a$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f_1(x) = f(x, -1, 2) = 8x, \quad f_2(y) = f(1, y, 2) = 8y, \quad f_3(z) = f(1, -1, z) = z.$$

**Proposition**

Si  $f$  est continue en  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^p)$  alors  $\forall i = 1 \dots, p$ , la fonction partielle  $f_{x_0, i}$  est continue en  $x_0^i$ .

**Remarque 4**

*La réciproque est fausse !*

**Exemple 4**

1) On considère  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . On va montrer que pour toutes valeurs  $(x, y) = (a, b)$  la limite de  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$  existe et est égale à la valeur au point  $f(a, b) = a^2 + b^2$ . Si  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  (par exemple dans une norme euclidienne) cela veut dire que  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \rightarrow 0$  donc on a :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - a \rightarrow 0 \\ y - b \rightarrow 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \end{cases}$$

Donc  $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ , c'est exactement ce qu'on cherche à montrer, et alors la fonction est continue en chaque point.

*En général on ne vérifie pas la continuité en chaque point comme dans cet exemple - aux points réguliers on utilise plutôt les propriétés des fonctions continues.*

2) On considère une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la façon suivante

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ses 2 fonctions partielles en  $(0, 0)$  sont

$$f_{(0,0),1} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et

$$f_{(0,0),2} : y \mapsto \begin{cases} \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} & \text{si } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Elles sont donc continues. Pourtant  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . En effet

Dans la direction  $y = x$ ,  $f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$  lorsque  $(x, y) = (x, x) \rightarrow (0, 0)$ .

Dans la direction  $y = -x$ ,  $f(x, y) = f(x, -x) = -\frac{x^2}{2x^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$  lorsque  $(x, y) = (x, -x) \rightarrow (0, 0)$ . D'après l'unicité de la limite,  $f$  n'admet pas de limite.

Si la limite existe en un point, alors quelque soit la direction choisie, on doit avoir une constante. On pouvez prendre les directions polaires comme méthode pour montrer que la limite n'existe pas en  $(0, 0)$ . Notation :  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ . On a une application bijective de  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$  vers  $\mathbb{R}^2$  donnée par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad (1.1)$$

Son application réciproque est l'application de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[$  suivante :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ t = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad (1.2)$$

Donc en particulier, on a  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Souvent c'est pratique d'utiliser les coordonnées polaires pour étudier la continuité, car la condition sur deux variables  $(x, y) \rightarrow 0$  devient une condition sur une seule variable  $r \rightarrow 0$ .

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$(x, y) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow r \rightarrow 0 \Rightarrow f(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

qui prend des valeurs différentes en variant  $\theta$  d'où la non unicité de la limite en  $(0, 0)$ .



3) Prenons un autre exemple :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 3, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

alors  $f(x, y) = \frac{y}{x}$  pour  $x \neq 0$  étant une fraction de fonctions continues est continue sauf pour  $x = 0$ .

Comme  $x \in \mathbb{R}$ , faisons une étude au point  $(0, y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ . On a  $f(0, y) = 3$ . Sur les droites  $y = kx$ ,

$$f(x, y) = f(x, kx) = k, \quad k \in \mathbb{R}_*.$$

on obtient des limites différentes quand  $x \rightarrow 0$ . On conclut que la fonction n'est pas continue en  $(0, y)$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ . Il y a une droite des points de discontinuité. Cette droite a pour équation  $x = 0$ .

4) Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la façon suivante

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  en tant que fraction de fonctions continues. En  $(0, 0)$  on a :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \rightarrow 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r^2}.$$

Cette limite est égale à  $\cos^2 t - \sin^2 t$ . Le résultat dépend de  $\theta$ , i.e. il n'y a pas de limite unique, donc la limite n'existe pas et  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

5) Soit la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie de la façon suivante :

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  en tant qu'une fraction des fonctions continues. En  $(0, 0)$  on a :

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^3 \theta}{r^2}$$

Cette limite est égale au produit des limites :

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\cos^3 \theta) \lim_{r \rightarrow 0} r = 0 = f(0, 0),$$

car  $|\cos \theta| \leq 1$  - une fonction bornée. Finalement, la fonction  $g$  est continue en  $(0, 0)$  et donc elle est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

## TD : Lignes de niveaux, Domaine et continuité

### Fonctions de plusieurs variables réelles

#### Exercice 1

En utilisant les lignes de niveau, donner l'allure des surfaces d'équations :

$$1. z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 2. z = xy$$

#### Exercice 2

Soit  $f(x, y) = x - y - |x - y|$ . Étudier les lignes de niveaux de la fonction  $f$ .

#### Exercice 3

Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= \frac{1}{x-y}, & 2. f(x, y) &= \sqrt{\frac{x^2+3x-1}{y+2}}, \\ 3. f(x, y) &= \ln(x^2+y^2-2y+4x) \text{ (penser à la forme canonique).} & 4. f(x, y) &= \frac{\ln(y-x)}{x} \end{aligned}$$

#### Exercice 4

Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition

1.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2.

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{y^3}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

3.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x \ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

## 1.3 Notion sur le calcul différentiel

### 1.3.1 Dérivées. Matrice jacobienne. Gradient

#### 1.3.2 ▷ Dérivées sur $\mathbb{R}^p$ , $p \in \mathbb{N}_*$

**Rappel.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ . La dérivée de  $f$  au point  $a \in I$  est :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (1.3)$$

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $A \in D$ . Une expression du type " $\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - f(A)}{X - A}$ " n'est pas bien définie parce que diviser par  $X - A$ , qui est un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ , n'a aucun sens! Néanmoins, si on fixe toutes les composantes de  $X$  sauf une, on peut définir des dérivées partielles.

**Définition 14** Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $A \in D$ . Pour  $i = 1, \dots, p$ , on appelle dérivée partielle par rapport à  $x_i$  de  $f$  en  $A = (a_1, \dots, a_p)$ , et on note  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ , ou bien  $f'_{x_i}(A)$ , la dérivée de la fonction partielle  $f_{A,i}$  prise en  $a_i$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = f'_{A,i}(a_i) = \lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{x_i - a_i}.$$

Pour une fonction de deux variables  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en point  $A = (a, b) \in D$  les dérivées partielles de  $f(x, y)$  en  $(a, b)$  sont les dérivées des fonctions partielles  $f(x, b)$  et  $f(a, y)$  qui se calculent alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

Parfois, on les note aussi  $f'_x(a, b)$  et  $f'_y(a, b)$ .

### Exemple 5

- Soit  $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$ . Calculer les dérivées partielles au point  $(1, 2)$ . En considérant  $y$  constant et en dérivant par rapport à  $x$  on a :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x,y)=(1,2)} = (4x - 3y) \Big|_{(x,y)=(1,2)} = -2$$

En considérant  $x$  constant et en dérivant par rapport à  $y$  on a :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x,y)=(1,2)} = (-3x + 8y) \Big|_{(x,y)=(1,2)} = 13$$

- Soit  $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ . Calculer les dérivées partielles au point  $(a, b)$ . Alors  $f$  admet des dérivées partielles en tout point  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a \neq b$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{-2b}{(a-b)^2}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{2b}{(a-b)^2}$$

### Définition 15 (Fonction de classe $C^1$ )

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^1$ , ou continument différentiable sur  $U$  si ses dérivées partielles sont définies et continues sur  $U$ .

**Exemple :**  $f(x, y) = x^3y^2$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $f$  est de classe  $C^1$ , on peut en particulier introduire la matrice Jacobienne de cette application en un point de  $U \subset \mathbb{R}^p$  qui est l'équivalent du nombre dérivée pour une fonction d'une variable réelle.

### 1.3.3 ▷ Matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^q$

#### Définition 16

La matrice des dérivées partielles de  
 $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  ( $f \in \mathbb{R}^q$ ,  $f = (f_1, \dots, f_q)$ )  
s'appelle la matrice jacobienne ou la Jacobienne de  $f$ .

La matrice jacobienne  $Jac(f)(X_0)$  fait passer de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^q$  : elle a  $p$  colonnes et  $q$  lignes.

$$Jac(f)(X_0) = f'(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(X_0) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}(X_0) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Autrement dit, pour une fonction vectorielle  $f(x_1, \dots, x_p)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^q$ ,

$$X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto f(x_1, \dots, x_p) = (f_1(X), \dots, f_q(X)) \in \mathbb{R}^q$$

la matrice jacobienne a pour colonnes les vecteurs  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

#### Cas particulier :

Pour une fonction de  $p$  variables à valeurs réelles  $q = 1$ , la matrice jacobienne est simplement une matrice-ligne :

$$Jac(f)(x_1, \dots, x_p) = f'(X) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right).$$

C'est un vecteur ligne (ou colonne dans certains ouvrages) qu'on va appeler vecteur gradient de  $f$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_1, \dots, x_p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p} \right)$$

#### Remarque 5

*Le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur. Il généralise ici la notion de dérivée pour une fonction de plusieurs variables  $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ . Il est noté souvent par le symbole nabla :  $\vec{\nabla}$ . Le vecteur nabla ou l'opérateur nabla s'écrit :*

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_p} \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p} \right)$$

On a aussi :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_p} \vec{e}_p$$

avec  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\}$  représentant la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ . C'est l'expression du gradient en coordonnées cartésiennes.

**Signification :** C'est un vecteur qui indique la direction et le sens de croissance de la fonction  $f$  dans l'espace.

### Exemple 6

1. Soit  $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ , définie par

$$X = (t, x, y) \mapsto (ye^{tx^2}, txy).$$

Calculons la matrice Jacobienne de  $f$ .

Posons  $f = (f_1, f_2)$ , alors  $f_1(t, x, y) = ye^{tx^2}$  et  $f_2(t, x, y) = txy$ .

$$Jac(f)(X) = f'(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} & \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} & \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yx^2e^{tx^2} & 2ytxe^{tx^2} & e^{tx^2} \\ xy & ty & tx \end{pmatrix}$$

Notons que son gradient ne sera pas défini car  $q = 2 \neq 1$ .

2. Soit la fonction

$$f : X = (x, y) \mapsto x^2 - 2e^y + xy.$$

Cette fonction est à valeur dans  $\mathbb{R}^1$  donc une fonction scalaire. Son gradient sera défini.

$$Jac(f)(X) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

et

$$\vec{\nabla}(f) = f'(X) = (2x + y, -2e^y + x)$$

### 1.3.4 Derivées partielles d'ordre supérieur.

Fonctions de classe  $C^k$ . Théorème de Schwarz

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Les dérivées partielles définissent  $p$  nouvelles fonctions

$$f'_{x_i}(x_1, \dots, x_p) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p).$$

On peut regarder les dérivées partielles de chacune de ces nouvelles fonctions. Cela nous donne les dérivées partielles d'ordre 2 (aussi appelées les dérivées partielles secondes) et à leur tour on peut regarder les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre 2, etc. Cela s'écrit par exemple :

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

**Définition 17** Une fonction  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  est une fonction dont toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  existent et sont continues. Une fonction est dite de classe  $C^\infty$  si elle est de classe  $C^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

### Théorème 1 (Schwarz)

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $D$ . Les fonctions de dérivées partielles d'ordre 2,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \text{ et } \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

sont égales en tout point de  $D$ .

**Remarque 6**

Le théorème de Schwarz implique que les dérivées partielles d'ordre  $k$ ,  $k \geq 2$ , d'une fonction de classe  $C^k$ ,  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les dérivées partielles sont prises. Par exemple, pour une fonction de deux variables  $f(x, y)$  de classe  $C^3$ , on a :  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ .

**Exemple 7**

Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^2(x + y), \text{ et } g(x, y) = e^{xy}$$

Il suffit de dériver successivement par rapport aux bonnes variables. Remarquons que les fonctions sont clairement de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et donc que les dérivées croisées d'ordre 2 sont égales.

1. On trouve pour  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x$$

2. On trouve pour  $g$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = ye^{xy}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = x^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

TD : Dérivées partielles, différentielle, Jacobien

Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 1

a) Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1.  $f(x, y) = e^x \cos y$
2.  $g(x, y) = (x^2 + y^2) \cos xy$
3.  $h(x, y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$

b) Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = x^2(x + y)$
2.  $g(x, y) = e^{xy}$

Exercice 2 Soit

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

1.  $f$  admet-elle un prolongement continu à  $\mathbb{R}^2$  ?
2.  $f$  admet-elle un prolongement  $C^1$  à  $\mathbb{R}^2$  ?

Exercice 3

Calculer la matrice jacobienne en tout point de la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  suivante :

$$f(x, y) = \left( \sin(xy), x e^{-(x^2 + y^2)} \right)$$

## 1.4 Formule de Taylors, Extrema des fonctions de plusieurs variables

### 1.4.1 Formule de Taylor d'une fonction de plusieurs variables

**Rappel : La formule de Taylor avec le reste en forme de Lagrange.** Si  $f$  est  $n + 1$  fois différentiable en  $a$ , on a une approximation de  $f$  par un polynôme :

$$f(a + t) = f(a) + f'(a)t + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}t^n + r_n(a, t)$$

où il existe  $\theta \in [a, a + t]$  tel que  $r_n(a, t) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!}t^{n+1}$ . C'est une conséquence du théorème des accroissements finis : si  $f$  est continue et dérivable sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  $a < b$  alors  $\exists x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(b) = f(a) + f'(x_0)(b - a)$ .

C'est cette formule qu'on va généraliser au cas de plusieurs variables de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi  $f^{(k)} = \vec{\nabla}^k f$ .

**Théorème 2** (Formule de Taylor)

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^n$  au voisinage du point  $A(a_1, a_2, \dots, a_p) \in D$ . Soient  $H(h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$  et l'intervalle  $[A, A+H] \subset D$ . Alors,

$$f(A+H) - f(A) = (\vec{\nabla}.H)(f)(A) + \frac{(\vec{\nabla}.H)^2(f)}{2!}(A) + \dots + \frac{(\vec{\nabla}.H)^n(f)}{n!}(A) + o(\|H\|^n)$$

ou bien

$$f(A+H) - f(A) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left( (h_1 \partial_1 + \dots + h_p \partial_p)^k (f) \right) (A) + o(\|H\|^n)$$

ou encore

$$f(A+H) - f(A) = df_A(H) + o(\|H\|^n)$$

Cas particuliers :

Pour  $f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A = (x, y)$  et  $H = (dx, dy)$   $A+H = (x+dx, y+dy)$ , on a les formules de Taylor suivantes :

a) à l'ordre 0 :

$$f(A+H) - f(A) = o\left((\sqrt{dx^2 + dy^2})^0\right) = o(1)$$

Conséquence : Comme  $\lim_{H \rightarrow 0} f(A+H) - f(A) = 0$ , alors  $f$  est continue en  $A$ .

b) à l'ordre 1 :

$$f(A+H) - f(A) = \vec{\nabla}.H(f)(A) + o(\|H\|)$$

$$f(A+H) - f(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy + o(\|H\|)$$

Conséquences :

► Différentiabilité. Il suffit de fixer  $y$  et faire varier  $x$  ou inversement.

► Pour  $A = (x_0, y_0)$ ,  $A+H = (x, y)$ , le plan

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0)$$

avec  $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  est appelé le plan tangent au graphe de la fonction  $z = f(x, y)$  au point  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .

c) à l'ordre 2 :

$$f(A+H) - f(A) = \vec{\nabla}.H(f)(A) + \frac{(\vec{\nabla}.H)^2(f)}{2!}(A) + o(\|H\|^2)$$

$$(\vec{\nabla}.H)^2(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

La matrice  $p \times p$  des dérivées secondes

$$Hess_f(A) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice Hessienne de  $f$  en  $A$ . Par le théorème de Schwarz cette matrice est symétrique si  $f$  est de classe  $C^2$ .



## 1.5 Extremums d'une fonction de plusieurs variables

### Définition 18

1. Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une partie  $D \subset \mathbb{R}^p$ . On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) global au point  $A \in D$  si pour tout  $X \in D$  on a  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si  $f(X) < f(A)$  (resp.  $f(X) > f(A)$ ).

2. On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local au point  $A \in D$  si on peut trouver un nombre  $r > 0$  tel que  $X \in D$  et  $\|X - A\| < r$  entraîne  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ).

Les extrema globaux sont appelés aussi extrema absolus.

### Théorème des extrema sur un compact

**Théorème 3** Soit  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un compact  $K \subset \mathbb{R}^p$ . Alors  $f$  admet un maximum et un minimum sur  $K$ .

**Définition 19** Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^p$ . On dit que  $A \in D$  est un point critique de  $f$  si toutes les dérivées partielles s'annulent en  $A$  (équivalent à dire que le gradient de  $f$  est nul en  $A$ , équivalent à dire aussi que la différentielle de  $f$  est nulle en  $A$ ).

### Théorème 4 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^p$  admettant un maximum ou un minimum local au point  $A \in U$ . Alors  $A$  est un point critique de  $f$ .

Alors pour  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $A = (a, b)$  et  $H = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ . D'après Taylor à l'ordre 2,

$$f'(A) = 0 \iff \vec{\nabla}(f)(A) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) = (0, 0)$$

D'où

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

et

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \frac{1}{2} \left( h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) + o(\|(h, k)\|^2)$$

### Extrema de fonctions de 2 variables - critère par le déterminant de matrice Hessienne

Comme dans le cas d'une fonction de variable réelle  $f''$  permet de dire si un point critique est maximum ou minimum local (Règle de la parapluie ! i.e,  $f''(A) > 0$ , minimum,  $f''(A) < 0$ , maximum)

**Définition 20** En mathématiques, un point col ou point-selle (en anglais : saddle point) d'une fonction  $f$  définie sur un produit cartésien  $X \times Y$  de deux ensembles  $X$  et  $Y$  est un point  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  tel que :

1.  $y \mapsto f(\bar{x}, y)$  atteint un maximum en  $\bar{y}$  sur  $Y$ ,
2.  $x \mapsto f(x, \bar{y})$  atteint un maximum en  $\bar{x}$  sur  $X$ ,

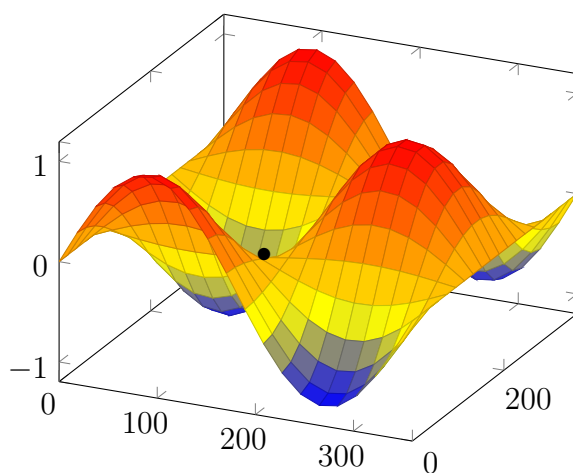
On dit aussi que  $a$  est un point col, ou point selle si  $a$  est un point critique ( $df(a) = 0$  et si  $f$  ne présente pas d'extrémum local en  $a$ ).

Dans le cas de plusieurs variables à la place de  $f''$ , on étudie la Hessienne.

Posons

$$Hess_f(A) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}, \quad \text{Shwartz}$$

1. Si  $\det(Hess_f(A)) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$  alors  
 $a_{11} > 0$ ,  $A$  est un point où  $f$  atteint son minimum local.  
 $a_{11} < 0$ ,  $A$  est un point où  $f$  atteint son maximum local.
2. Si  $\det(Hess_f(A)) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$  alors  $A$  est un point dit selle.
3. Si  $\det(Hess_f(A)) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  alors utiliser la définition pour conclure en testant plusieurs points autour de  $A$ .



**Exemple 8** *Extrema locaux et globaux de  $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Points critiques :*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y + 1) = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques  $(0, 0)$ ,  $(-1, -1)$  et  $(1, -1)$ .

<i>pts critiques :</i>	$(0, 0)$	$(-1, -1)$	$(1, -1)$
$a_{11} = 4y + 4$	4	0	0
$a_{12} = 4x$	0	-4	4
$a_{22} = 2$	2	2	2
$a_{11}a_{22} - a_{12}^2$	8	-16	-16
<i>Signe de <math>a_{11}</math></i>	$> 0$		
<i>Nature du pt critique :</i>	<i>min</i>	<i>pt selle</i>	<i>pt selle</i>

Les extrêma globaux : on voit que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global. Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, -2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty$$

Ici on a utilisé un critère par le signe du déterminant (et de la trace) de la matrice hessienne pour déterminer la nature du point critique. Si le déterminant est 0 on doit regarder la formule de Taylor à l'ordre supérieur (à l'ordre 3 et parfois plus).

**Exemple 9** On cherche des extrêma locaux de  $g(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

On trouve 3 points critiques  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  pour lesquels on ne peut pas utiliser le critère car  $RT - S^2 = 0$  mais  $g(x, y) = (x^2 - 1)^2 + y^4 - 1$  donc en  $(\pm 1, 0)$  il y a un minimum local. En  $(0, 0)$  on a  $g(0, 0) = 0$  et au voisinage de  $(0, 0)$  on a des valeurs positives et négatives  $g(0, y) = y^4 > 0$  et  $g(y, 0) = x^4 - 2x^2 < 0$  pour  $x$  suffisamment petit. Donc  $(0, 0)$  n'est pas un max ni un min, c'est un point-selle.

**Exercice 1** Soit  $f$  défini sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}$

1. Calculer  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$
2. Déterminer les points critiques de  $f$
3. Indiquer si ces points correspondent à un minimum ou un maximum.

**Exercice 2** On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ .

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de  $f$ .
2. Déterminer un équivalent de  $f(x, x) - f(0, 0)$  et de  $f(x, 0) - f(0, 0)$  lorsque  $x$  tend vers 0. La fonction  $f$  présente-t-elle un extremum en  $(0, 0)$  ?
3. Rechercher les extrema de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$