به نام خدا

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دانشکده فنی و مهندسی،

دانشگاه محقق اردبیلی

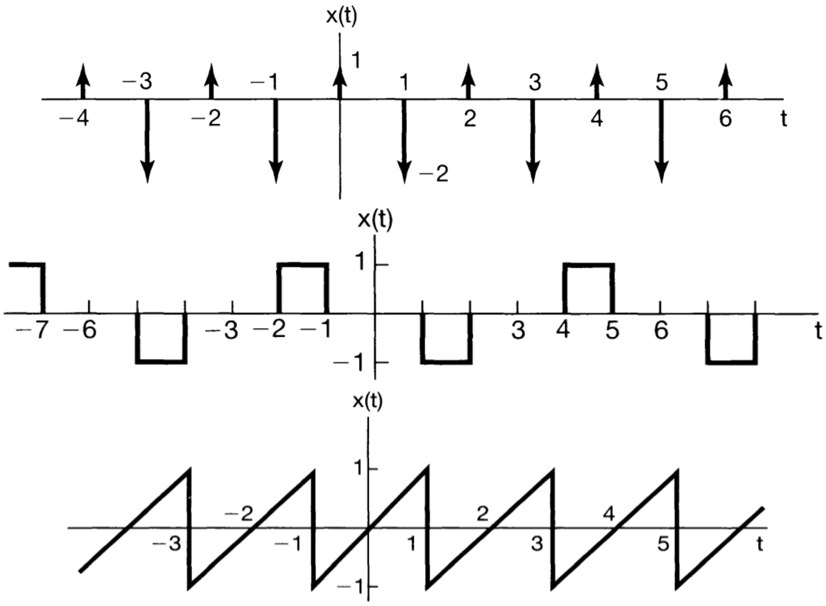
پاسخ تمرین سری سوم

موعد تحویل: روز سه‌شنبه

۱۳۹۸/۰۹/۰۵

---

۱. سری فوریه سیگنال‌های زیر را با استفاده از خواص سری‌های فوریه محاسبه کنید.



(الف)

(ب)

(ج)

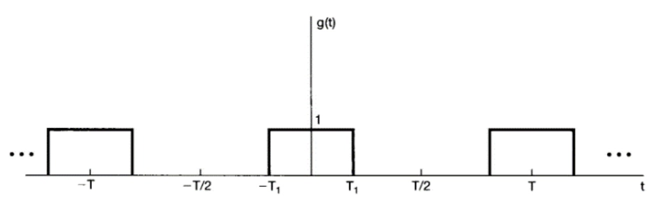
پاسخ:

الف) با استفاده از ضرایب سری فوریه قطار ضربه و همچنین خواص خطی و شیفت زمانی ضرایب سری فوریه می‌توان نوشت:

$$S(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k) \quad \overset{F.S.}{\leftrightarrow} \; a_k=\frac{1}{T}=\frac{1}{2}$$

$$x(t)=S(t)-2S(t-1) \; \overset{F.S.}{\leftrightarrow} \; b_k=a_k-2e^{jk\omega_0\times 1}a_k=a_k-2e^{jk\pi}a_k=\frac{1}{2}-(-1)^k$$

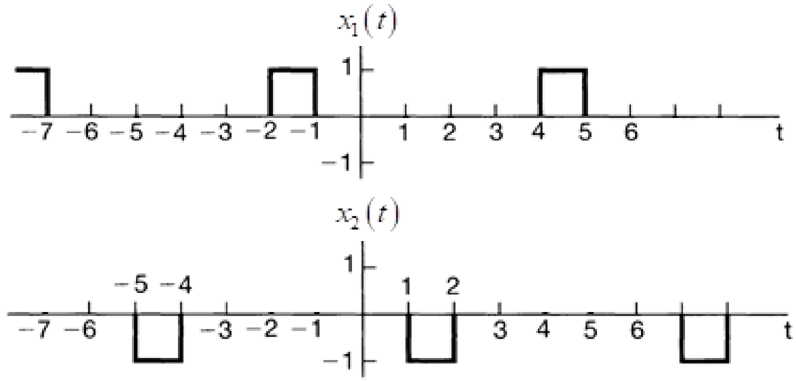
ب) با استفاده از ضرایب سری فوریه شکل موج مربعی:



$$\overset{F.S.}{\leftrightarrow} \; a_k=\tau\,\mathrm{sinc}(k\tau)$$

$$\tau=\frac{2T_1}{T}$$

دوره تناوب سیگنال $x(t)$ برابر $T=6$ است. همچنین مشاهده می‌شود که سیگنال $x(t)$ مجموع دو سیگنال $x_1(t)$ و سیگنال $x_2(t)$ زیر است:



برای سیگنال $x_1(t)$ دوره تناوب برابر $T=6$ و $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ و همچنین $\tau=\frac{1}{6}$ است.

$$x_1(t)=g\left(t+\frac{3}{2}\right)\overset{F.S.}{\leftrightarrow} b_k=e^{-jk\omega_0 t_0}a_k=e^{jk\frac{\pi}{3}\times\frac{3}{2}}a_k=e^{jk\frac{\pi}{2}}a_k$$

برای سیگنال $x_2(t)$ دوره تناوب برابر $T=6$ و $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ و همچنین $\tau=\frac{1}{6}$ است.

$$x_2(t)=-g\left(t-\frac{3}{2}\right)\overset{F.S.}{\leftrightarrow} c_k=-e^{-jk\omega_0 t_0}a_k=-e^{-jk\frac{\pi}{3}\times\frac{3}{2}}a_k=-e^{-jk\frac{\pi}{2}}a_k$$

در نتیجه طبق خاصیت خطی ضرایب سری فوریه، برای سیگنال $x(t)$ خواهیم داشت:

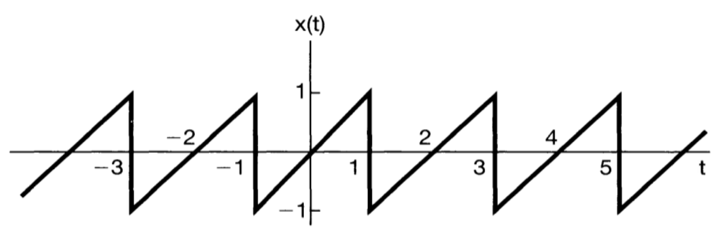
$$x(t)=x_1(t)+x_2(t)\overset{F.S.}{\leftrightarrow} d_k=b_k+c_k$$

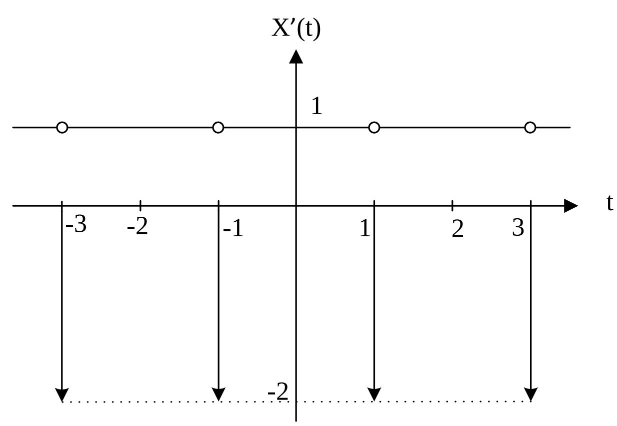
$$\Rightarrow d_k=e^{jk\frac{\pi}{2}}a_k-e^{-jk\frac{\pi}{2}}a_k=a_k\times\left(e^{jk\frac{\pi}{2}}-e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)=a_k\times 2\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{6}\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{6}\right)\Rightarrow d_k=\frac{1}{6}\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{6}\right)\times 2\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{6}\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

در نهایت با توجه به اینکه سطح زیرنمودار سیگنال $x(t)$ برابر صفر است، بنابراین $a_0=0$ می‌باشد.

ج) ابتدا از سیگنال $x(t)$ مشتق می‌گیریم:





$$x'(t) = -2S(t-1)+1 \overset{F.S.}{\leftrightarrow} (jk\omega_0)a_k = -2\times e^{-jk\omega_0\times 1}\times b_k \qquad k\neq 0$$

$$\Rightarrow a_k = -\frac{e^{-jk\omega_0}}{jk\omega_0} = -\frac{e^{-jk\pi}}{jk\pi} = -\frac{\left(e^{-j\pi}\right)^k}{jk\pi} = -\frac{(-1)^k}{jk\pi} = j\frac{(-1)^k}{k\pi} \qquad k\neq 0$$

$$a_0 = 0$$

---

۲. سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T=4$ متناوب است که ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ (j)^k \dfrac{\sin(k\pi/4)}{k\pi}, & k\neq 0 \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه و رسم سیگنال $x(t)$.

پاسخ:

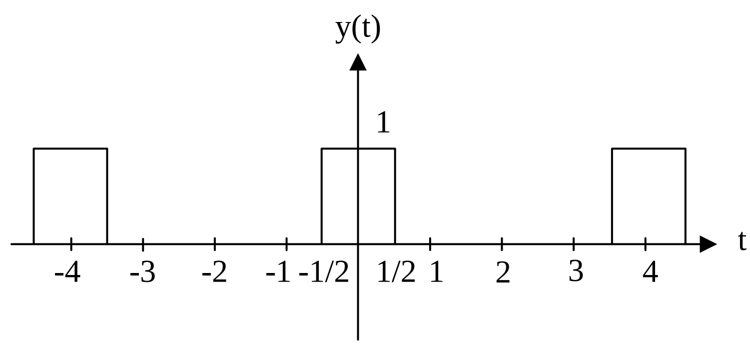
می‌دانیم که $\mathrm{sinc}(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. از طرف دیگر می‌دانیم ضرایب سری فوریه شکل موج مربعی به صورت سینک است. در نتیجه حدس می‌زنیم که سیگنال $x(t)$ مطلوب به شکل موج مربعی باشد. احتمالاً کمی شیفت زمانی و مقدار DC داشته باشد. همچنین پارامتر duty cycle آن را نیز باید به دست آوریم.

موج مربعی با duty cycle برابر τ $\overset{F.S.}{\leftrightarrow} \tau\,\mathrm{sinc}(k\tau)$

ابتدا برای $k\neq 0$ محاسبه را شروع می‌کنیم:

$$c_k = (j)^k \underbrace{\frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi}}_{b_k},\ k\neq 0$$

$$b_k = \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} = \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{4}\right) \Rightarrow \tau = \frac{1}{4}$$

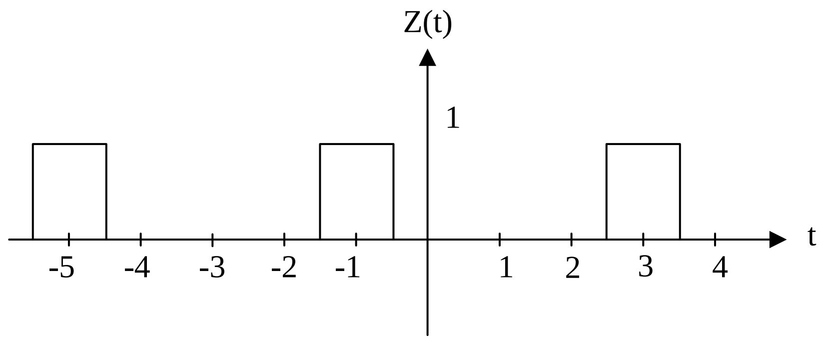


$$c_k = (j)^k b_k = e^{jk\frac{\pi}{2}} b_k$$

با استفاده از خاصیت شیفت زمانی مشاهده می‌شود که سیگنال حاصل از ضرایب سری فوریه c_k شیفت یافته سیگنال حاصل از ضرایب سری فوریه b_k است. حال باید مقدار این شیفت زمانی محاسبه شود.

برای این کار باید ω_0 را بدانیم که چون سیگنال متناوب با دوره تناوب ۴ است، در نتیجه $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ می باشد. در نتیجه:

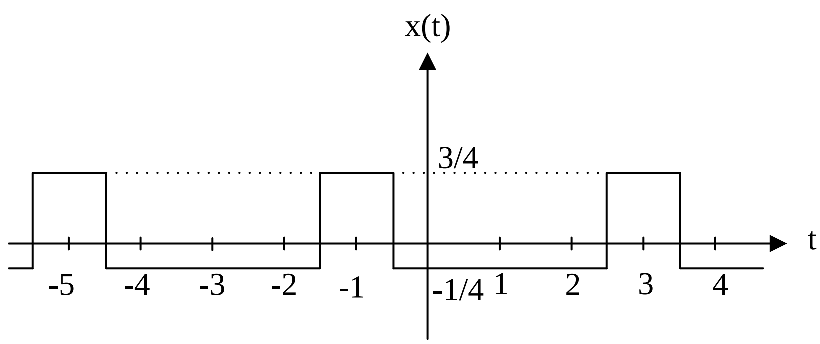
$$c_k = (j)^k b_k = e^{jk\frac{\pi}{2}} b_k = e^{jk\omega_0 \times 1} b_k$$
$$Z(t) = y(t+1)$$



حال در حالت کلی داریم:

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ c_k, & k \neq 0 \end{cases}$$

برای آنکه ضریب a_0 برابر صفر باشد، باید سطح زیرنمودار سیگنال برابر صفر شود. در نتیجه با بالا پایین کردن سیگنال فوق می‌توان این کار را انجام داد. شکل نهایی سیگنال مطلوب به صورت زیر خواهد بود:



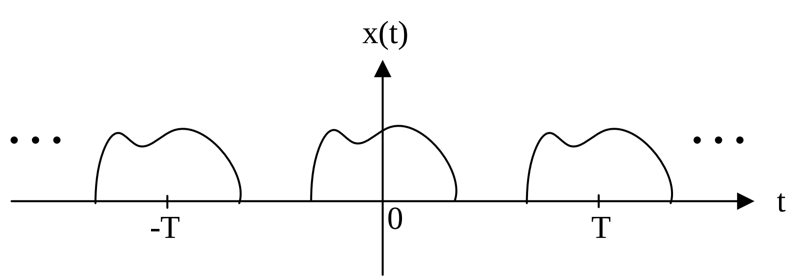
---

۳. سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T = 4$ متناوب است که ضرایب سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$a_k = \begin{cases} 1, & k \ even \\ 2, & k \, odd \end{cases}$$

مطلوبست محاسبه سیگنال $x(t)$.

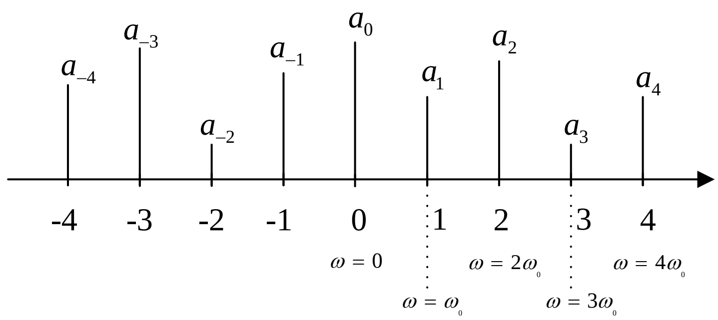
قبل از حل این مسئله به مثال زیر دقت کنید:



بدیهی است سیگنالی مانند $x(t)$ که با دوره تناوب T متناوب است، با دوره تناوب $2T$ نیز متناوب است. حال می‌خواهیم نحوه نمایش سری فوریه آن سیگنال را بر اساس فرکانس‌های مختلف متناظر با دوره تناوب مختلف بیان کنیم. بدیهی است همه این فرم‌های نمایش بیان‌شده برای یک سیگنال هستند.

نمایش سیگنال $x(t)$ بر اساس دوره تناوب T:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad (۱)$$



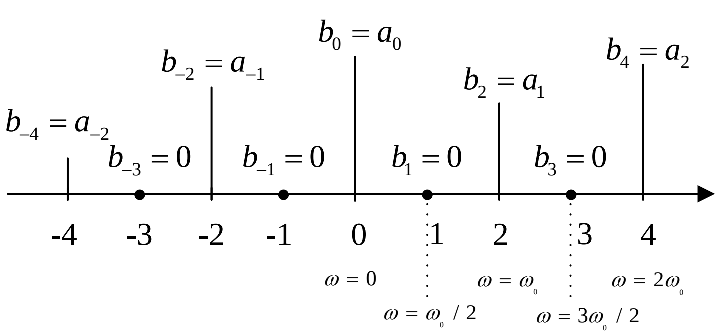
نمایش سیگنال $x(t)$ بر اساس دوره تناوب $2T$:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega_0}{2} \qquad \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\frac{\omega_0}{2}t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{j\left(\frac{k}{2}\right)\omega_0 t} \qquad (۲)$$

مشاهده می‌کنید که $\omega_1 = \omega_0 / 2$ است. به عبارت دیگر هنگامی که رابطه (۱) استفاده می‌شود، سیگنال بر اساس فرکانس ω_0 بسط داده شده‌است. اما هنگامی که رابطه (۲) استفاده می‌شود، سیگنال بر اساس فرکانس $\omega_0 / 2$ بسط داده می‌شود. چون هر دو نمایش فوق، یک سیگنال را نمایش می‌دهند، بنابراین رابطه زیر بین ضرایب سری فوریه دو نمایش برقرار است:

$$b_k = \begin{cases} a_{k/2}, & k \ even \\ 0, & k \ odd \end{cases}$$

برای درک بهتر مفهوم فوق، به شکل زیر توجه کنید:



نتیجه: می‌توان سری فوریه را براساس دوره تناوب‌های مختلفی بیان کرد. در صورتی که ضرایب را بر اساس فرکانس حاصل از دو برابر دوره تناوب اصلی بنویسیم، ضرایب فرد سری فوریه حاصل برابر صفر خواهند شد و ضرایب زوج سری فوریه برابر ضرایب سری فوریه حاصل از بسط بر اساس دوره تناوب اصلی خواهند بود.

پاسخ: مشاهده می‌شود که ضرایب سری فوریه a_k را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

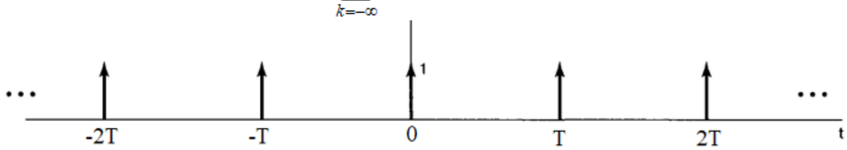
$$a_k = b_k + c_k$$

$$b_k = 1, \qquad c_k = \begin{cases} 1, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$$

در نتیجه سیگنال $x(t)$ از مجموع دو سیگنال $y(t)$ و $z(t)$ حاصل می‌شود که ضرایب سری فوریه آن‌ها به ترتیب برابر b_k و c_k می‌باشد.

از طرفی می‌دانیم سیگنالی که ضرایب سری فوریه آن برابر $b_k = 1$ است، همان قطار ضربه است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$$



همچنین دوره تناوب آن نیز طبق صورت سوال برابر $T=4$ است. در نتیجه

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k) \overset{F.S.}{\leftrightarrow} \frac{1}{T} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow \quad y(t) = 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k)$$

حال باید سیگنالی را بیابیم که ضرایب سری فوریه آن برابر c_k باشد. با توجه به مثال بیان شده در ابتدای پاسخ این سوال، می‌توان سیگنال متناظر با ضرایب سری فوریه $c_k = \begin{cases} 1, & k \text{ odd} \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$ را یافت. به زوج و فرد بودن مقادیر k در مقایسه با مثال مطرح شده دقت کنید.

فرض کنید سیگنالی مانند $r(t)$ وجود دارد که ضرایب سری فوریه آن برابر

$$d_k = \begin{cases} 1, & k \text{ even} \\ 0, & k \text{ odd} \end{cases}$$

است. با کمی دقت می‌توانیم متوجه شویم که $c_k = d_{k-1}$ است. چون با یک واحد شیفت در k زوج و فرد بودن عوض می‌شود. بنابراین با توجه به خواص سری فوریه ($e^{jk_0\omega_0 t}x(t) \overset{F.S.}{\leftrightarrow} a_{k-k_0}$) داریم:

$$z(t) = e^{j\omega_0 t} r(t),\ \omega_0 = \frac{\pi}{2}, \ \Rightarrow z(t) = e^{j(\pi/2)t} r(t)$$

سیگنال $r(t)$ نیز همان سیگنال قطار ضربه با دوره تناوب اصلی $T=2$ است که بر اساس دوره تناوب دوبرابر دوره تناوب اصلی $2T=4$ نمایش داده شده‌است. در نتیجه:

$$r(t) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$$

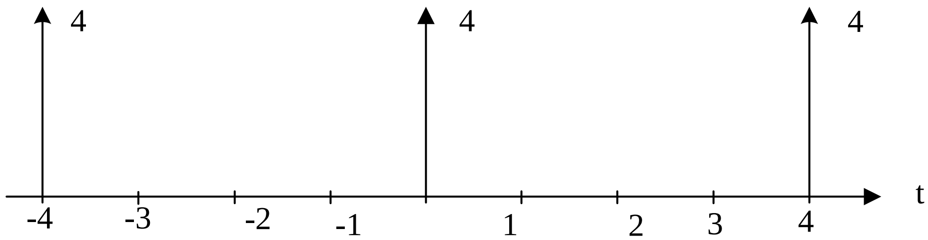
$$\Rightarrow z(t) = e^{j(\pi/2)t} r(t) = e^{j(\pi/2)t} \times 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\pi/2)t}\delta(t-2k)$$

$$= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j(\pi/2)2k}\delta(t-2k) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\pi k}\delta(t-2k) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t-2k)$$

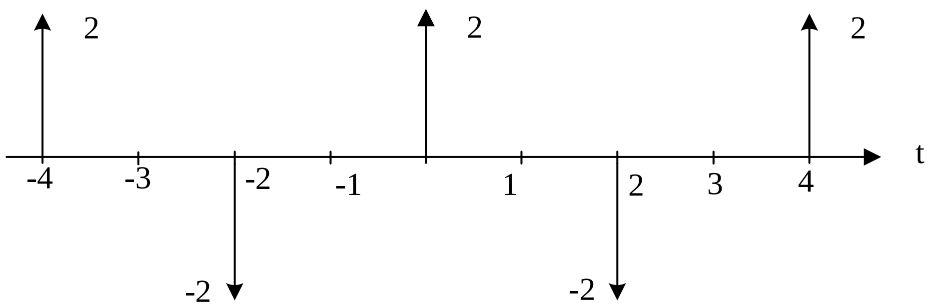
در نهایت سیگنال $x(t)$ به فرم زیر خواهد بود:

$$\boxed{x(t) = y(t) + z(t) = 4\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-4k) + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(t-2k)}$$

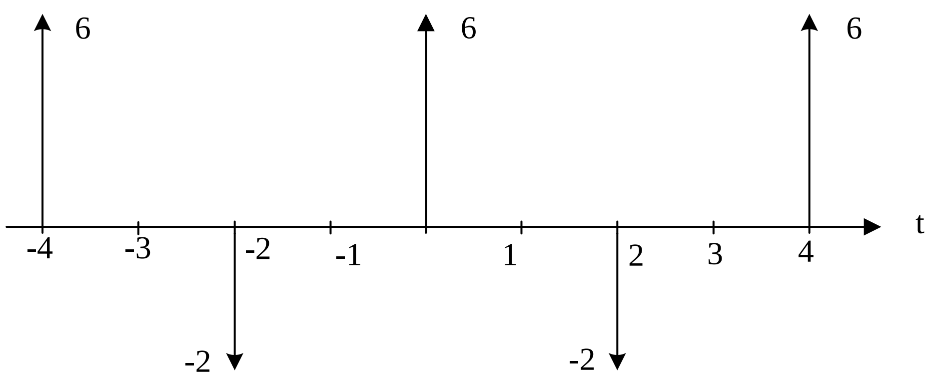
شکل سیگنال $y(t)$:



شکل سیگنال $z(t)$:



و در نهایت شکل سیگنال $x(t)$:



---

۴. اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده‌است:

الف) سیگنال $x(t)$ یک سیگنال حقیقی است.

ب) سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب $T=4$ متناوب است و ضرایب سری فوریه آن برابر a_k است.

ج) $a_k = 0, \qquad for\ |k|>1$

د) سیگنالی با ضرایب سری فوریه $b_k = e^{-jk\pi/2}a_{-k}$ یک سیگنال فرد است.

ه) رابطه $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}$ برای سیگنال $x(t)$ برقرار است.

نشان دهید که اطلاعات فوق برای مشخص کردن سیگنال $x(t)$ کفایت می‌کند و تنها ابهام باقیمانده فقط در علامت آن است.

پاسخ:

با توجه به مورد (ج)، سیگنال $x(t)$ فقط سه ضریب فوریه a_{-1}, a_0, a_1 دارد. همچنین با توجه به مورد (ب) فرکانس زاویه‌ای اصلی این سیگنال برابر $\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ است. در نتیجه این سیگنال را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t} + a_{-1} e^{-j\frac{\pi}{2}t}$$

با توجه به مورد (الف) که سیگنال حقیقی است، می‌دانیم $a_1 = a_{-1}^*$. در نتیجه

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t} + \left(a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t}\right)^* = a_0 + 2\,\mathrm{Re}\left\{a_1 e^{j\frac{\pi}{2}t}\right\}$$

حال می‌خواهیم از مورد (د) بهره ببریم. با استفاده از خاصیت معکوس زمانی می‌دانیم که ضرایب سری فوریه a_{-k} متناظر با سیگنال $x(-t)$است. همچنین با استفاده از خاصیت شیفت زمانی می‌دانیم که ضرب شدن ضرایب سری فوریه در مقدار $e^{-jk\pi/2} = e^{-jk\omega_0}$ متناظر با شیف زمانی به اندازه یک واحد به سمت راست است. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که ضرایب سری فوریه b_k متناظر با سیگنال $x(-(t-1)) = x(-t+1)$ است که با استناد به مورد (د) باید فرد باشد. همچنین چون سیگنال $x(t)$ حقیقی است، بنابراین سیگنال $x(-t+1)$ نیز باید حقیقی باشد. از خواص سری فوریه می‌دانیم که ضرایب سری فوریه باید موهومی خالص و فرد باشد. در نتیجه $b_0 = 0$ و $b_{-1} = -b_1$ است.

علاوه بر این به دلیل اینکه شیفت زمانی و معکوس زمانی، توان متوسط سیگنال متناوب را تغییر نمی‌دهد، در مورد (ه) می‌توان به جای سیگنال $x(t)$ از سیگنال $x(-t+1)$ استفاده کرد. به عبارت دیگر:

$$\frac{1}{4}\int_4 |x(-t+1)|^2\, dt = \frac{1}{2}$$

حال با استفاده از قضیه پارسوال نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\frac{1}{4}\int_4 |x(-t+1)|^2\, dt = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; |b_0|^2 + |b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2}$$
$$\overset{b_0=0}{\Rightarrow}\; |b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2}$$
$$\overset{b_{-1}=-b_1}{\Rightarrow}\; |b_1|^2 + |-b_1|^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; 2|b_1|^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; |b_1|^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; |b_1| = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر می‌دانیم که ضریب سری فوریه b_1 باید موهومی خالص باشد. بنابراین یا $b_1 = \frac{j}{2}$ است و یا $b_1 = -\frac{j}{2}$ است.

حال می‌توان از روی b_0 و b_1 ضرایب a_0 و a_1 را محاسبه کرد. به دلیل اینکه $b_0 = 0$ است، می‌توان با استناد به این استدلال که شیفت زمانی و معکوس زمانی، توان متوسط سیگنال متناوب را تغییر نمی‌دهد، نتیجه گرفت که $a_0 = 0$ است. برای ضریب a_1 می‌دانیم که $a_1 = e^{-j\pi/2} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1$. بنابراین دو حالت می‌توان متصور شد:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{j}{2} \;\Rightarrow a_1 = jb_1 = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{j\pi t}{2}} - \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi t}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ b_1 = -\frac{j}{2} \;\Rightarrow a_1 = jb_1 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{j\pi t}{2}} + \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi t}{2}} = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \end{cases}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تنها ابهام باقیمانده فقط در علامت سیگنال است.

موفق باشید

صفوی