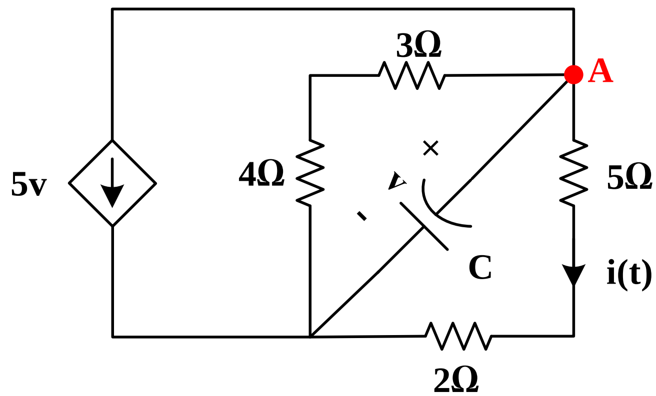
به نام خدا

مبانی مهندسی برق

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین
سبلان نمین، دانشگاه محقق اردبیلی

تمرین سری سوم
موعد تحویل: روز شنبه
۱۳۹۸/۰۹/۲۳

۱. در مدار شکل زیر $C = 4mF$ و $v_C(0_-) = 3v$ است. جریان $i(t)$ را برای $t > 0$ به دست آورید.



پاسخ: نکته اول دقت در پلاریته (سر مثبت و منفی) خازن است. همان‌طور که سر کلاس گفته شد، پایه ای که به صورت خمیده می‌باشد، پلاریته منفی است. در این مدار، منبع وابسته به ولتاژ خازن با پلاریته معکوس است. به عبارت دیگر $v(t) = -V_C(t)$. نکته بعدی این است که در صورتی که مقدار ولتاژ دو سر خازن محاسبه شود، به راحتی می‌توان جریان $i(t)$ را محاسبه نمود زیرا شاخه‌ای که مقاومت‌های ۵ اهمی و ۲ اهمی را دارد با شاخه‌ای که شامل خازن است، موازی شده است. بنابراین با تقسیم ولتاژ دو سر خازن به مجموع مقاومت‌های ۵ اهمی و ۲ اهمی، به راحتی می‌توان جریان $i(t)$ را محاسبه نمود ($i(t) = \frac{v(t)}{2^{\Omega} + 5^{\Omega}} = \frac{v(t)}{7^{\Omega}}$).

به کمک توضیحات داده شده و با استفاده از تحلیل گره و با فرض گره مبنا (گره ای که سر منفی خازن به آن متصل است) می‌توان KCL را در گره A به صورت زیر نوشت:

$$KCL: 5v(t) + \frac{v(t)}{3+4} + \frac{v(t)}{5+2} + 4\times10^{-3}\frac{dv(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 4\times10^{-3}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{37}{7}v(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} + 1321.43v(t) = 0$$

$$\Rightarrow v(t) = Ke^{-1321.43t}$$

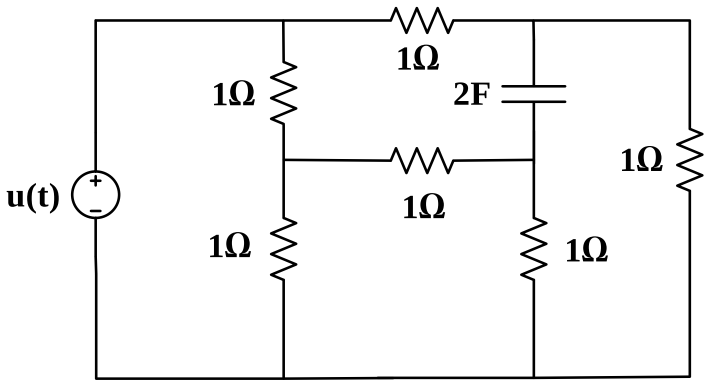
$$V_C(0_-) = 3 \qquad \Rightarrow v(0_-) = -V_C(0_-) = -3 \Rightarrow K = -3$$

$$\Rightarrow v(t) = -3e^{-1321.43t}$$

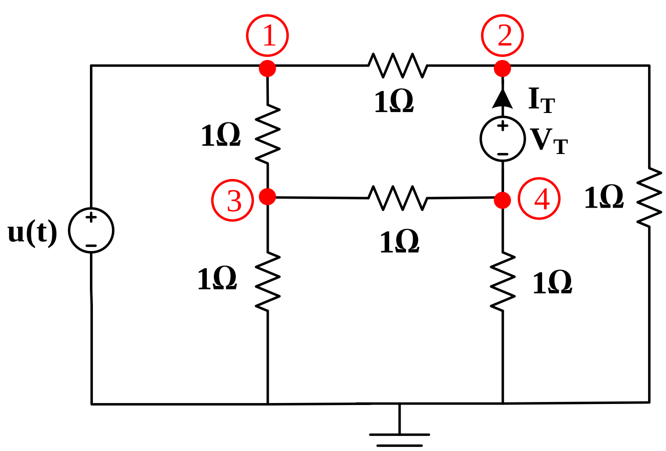
$$\boxed{i(t)=\frac{v(t)}{7^{\Omega}}=-\frac{3}{7}e^{-1321.43t}, \qquad t\geq 0}$$

۲. الف) در مدار شکل زیر ولتاژ دو سر خازن برای $t\geq 0$ را بیابید. (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

ب) اگر به جای خازن، یک سلف $L=2H$ با جریان اولیه صفر قرار می‌دادیم، با استفاده از نتایج قسمت الف جریان گذرنده از سلف را برای $t\geq 0$ حساب کنید.



پاسخ: همان‌طور که در کلاس توضیح داده شد، در اینگونه مدارها ابتدا مقدار مقاومت معادل از دو سر خازن را به دست می‌آوریم. با این کار ثابت زمانی مدار به دست می‌آید. در نتیجه تمامی متغیرهای مدار، دارای همین ثابت زمانی خواهند بود. از طرفی دیگر در بی‌نهایت، خازن معادل مدار باز می‌باشد. بنابراین برای یافتن حالت پایدار ولتاژ خازن در مدار ($v_c(+\infty)$) باید ولتاژ مدار باز از دو سر خازن را نیز به دست آوریم. در نتیجه، بدین منظور از تحلیل گره استفاده می‌کنیم.



$e_1=1$

$$KCL2: \frac{e_2-1}{1^{\Omega}}+\frac{e_2}{1^{\Omega}}-I_T=0$$

$$KCL3: \frac{e_3-1}{1^{\Omega}}+\frac{e_3}{1^{\Omega}}+\frac{e_3-e_4}{1^{\Omega}}=0$$

$$KCL4: \frac{e_4}{1^{\Omega}}+\frac{e_4-e_3}{1^{\Omega}}+I_T=0$$

بدیهی است که

$$V_T = e_2 - e_4$$

بنابراین باید از روی معادلات گره، متغیر V_T را برحسب I_T بیابیم.

$$\begin{cases} e_2 - 1 + e_2 - I_T = 0 \\ e_3 - 1 + e_3 + e_3 - e_4 = 0 \\ e_4 + e_4 - e_3 + I_T = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_2 = \frac{1}{2} I_T + \frac{1}{2} \\ e_3 = \frac{e_4 + 1}{3} \\ e_4 = -\frac{1}{2} I_T + \frac{1}{2} e_3 = -\frac{1}{2} I_T + \frac{1}{2}\left(\frac{e_4 + 1}{3}\right) \Rightarrow \frac{5}{6} e_4 = -\frac{1}{2} I_T + \frac{1}{6} \Rightarrow e_4 = -\frac{3}{5} I_T + \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$V_T = e_2 - e_4 = \left(\frac{1}{2} I_T + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{5} I_T + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) I_T + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{10} I_T + \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{11}{10}, \quad V_{oc} = \frac{3}{10}$$

حال ولتاژ خازن را به راحتی و با استفاده از رابطه زیر می‌توانیم بدست آوریم:

$$v_c(t) = \left[v_c(0) - v_c(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{T}} + v_c(+\infty)$$

$$\begin{cases} T = R_{eq} C = \frac{11}{10} \times 2 = \frac{11}{5} \\ v_c(0) = 0 \\ v_c(+\infty) = \frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_c(t) = \left[0 - \frac{3}{10}\right] e^{-\frac{5t}{11}} + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}\left(1 - e^{-\frac{5t}{11}}\right), \qquad t > 0}$$

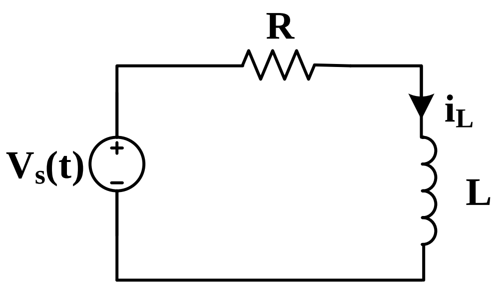
ب) اگر به جای خازن، در مدار مربوطه سلف قرار دهیم، تفاوتی که می‌کند این است که حالت پایدار مدار عوض می‌شود. زیرا سلف در بی‌نهایت اتصال کوتاه است. در نتیجه اگر جریان اتصال کوتاه را محاسبه کنیم، چون جریان اولیه صفر فرض شده‌است، به راحتی از رابطه زیر جریان سلف را برای همه مقادیر t می‌توانیم محاسبه کنیم.

$$i_L(t) = \left[i_L(0) - i_L(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{T}} + i_L(+\infty)$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{L}{R_{eq}} = \dfrac{2}{\frac{11}{10}} = \dfrac{20}{11} \\ i_L(0) = 0 \\ i_L(+\infty) = I_{SC} = \dfrac{V_{oc}}{R_{eq}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{10}} = \dfrac{3}{11} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow i_L(t) = \left[0 - \frac{3}{11}\right] e^{-\frac{20t}{11}} + \frac{3}{11} = \frac{3}{11}\left(1 - e^{-\frac{20t}{11}}\right), \qquad t > 0}$$

۳. مدر مدار شکل زیر $v_s(t) = V_m \cos(\omega t + \Phi)$ است. Φ را چنان تعیین کنید که هیچگونه پاسخ گذرایی در جریان i_L حاصل نشود. (جریان اولیه سلف برابر صفر فرض می‌شود.)



پاسخ:

$$KVL: -V_s + V_R + V_L = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = V_m \cos(\omega t + \Phi)$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = V_m \cos(\omega t)\cos(\Phi) + V_m \sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$i_L(t) = i_{Lh} + i_{Lp}$$

$$= Ke^{-\frac{R}{L}t} + A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{Sin}(\omega t)$$

$$i_L(0) = 0 \Rightarrow i_L(0) = K + A = 0 \Rightarrow K = -A$$

شرط آنکه پاسخ گذرایی نداشته باشیم، آن است که ضریب عبارت نمایی برابر صفر باشد. بنابراین

$$K = 0, \ \Rightarrow A = 0$$

حال پارامتر Φ را می‌توان از برقراری رابطه $A = 0$ بدست آورد.

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$L\frac{di_{Lp}}{dt}+Ri_{Lp}=V_m\cos(\omega t)\cos(\Phi)+V_m\sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$L\left(-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)\right)+R\left(A\cos(\omega t)+B\,\mathrm{Sin}(\omega t)\right)=V_m\cos(\omega t)\cos(\Phi)-V_m\sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$\left[-AL\omega+RB\right]\sin(\omega t)+\left[BL\omega+RA\right]\cos(\omega t)=V_m\cos(\omega t)\cos(\Phi)+V_m\sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-AL\omega+RB=-V_m\sin(\Phi)\\ BL\omega+RA=V_m\cos(\Phi)\end{cases}$$

حال معادله فوق را می‌توان به روش کرامر و یا هر روش دیگری حل کرد.

$$BL\omega+RA=V_m\cos(\Phi)\qquad\Rightarrow B=\frac{V_m\cos(\Phi)-RA}{L\omega}$$

$$-AL\omega+RB=-V_m\sin(\Phi)\qquad\Rightarrow -AL\omega+R\left(\frac{V_m\cos(\Phi)-RA}{L\omega}\right)=-V_m\sin(\Phi)$$

$$\Rightarrow A\left[-L\omega-\frac{R^2}{L\omega}\right]=-V_m\sin(\Phi)-\frac{RV_m\cos(\Phi)}{L\omega}$$

$$\Rightarrow A=\frac{V_m\sin(\Phi)+\dfrac{RV_m\cos(\Phi)}{L\omega}}{L\omega+\dfrac{R^2}{L\omega}}=0$$

$$\Rightarrow V_m\sin(\Phi)+\frac{RV_m\cos(\Phi)}{L\omega}=0,\qquad\Rightarrow\frac{\sin(\Phi)}{\cos(\Phi)}=-\frac{R}{L\omega},\quad\Rightarrow\tan(\Phi)=-\frac{R}{L\omega}$$

$$\boxed{\Rightarrow\Phi=\tan^{-1}\left(-\frac{R}{L\omega}\right)}$$

موفق باشید

صفوی