پاسخ تمرین سری پنجم موعد تحویل: روز جمعه ۱۳۹۹/۰۴/۰۶



مبانی مهندسی برق

دانشکده مهندسی فناوریهای نوین سبلان نمین، دانشگاه محقق اردبیلی

$$2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$
 و $B = 4$ ، $|A|=5\sqrt{2}$ کنید که کنید که B و A را چنان تعیین کنید که ازورهای A

پاسخ: برای یافتن فازور A و B باید طرف چپ را به صورت یک عدد مختلط بنویسیم و بخش های حقیقی و موهومی طرفین را برابر قرار می دهیم.

$$2A + 5B = j10(1 + \sqrt{3})$$

$$2(5\sqrt{2}e^{j\theta}) + 5(4e^{j\varphi}) = j10(1 + \sqrt{3})$$

$$10\sqrt{2}(\cos\theta + j\sin\theta) + 20(\cos\varphi + j\sin\varphi) = j10(1 + \sqrt{3})$$

$$[10\sqrt{2}\cos\theta + 20\cos\varphi] + j[10\sqrt{2}\sin\theta + 20\sin\varphi] = j10(1 + \sqrt{3})$$

$$\begin{cases} 10\sqrt{2}\cos\theta + 20\cos\varphi = 0 \\ 10\sqrt{2}\sin\theta + 20\sin\varphi = 10(1 + \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \varphi = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

۲. با استفاده از روش فازوری عبارتهای زیر را به صورت یک سیگنال سینوسی نمایش دهید:

a)
$$2\sin(2t+18^{\circ})-3\cos(2t+35^{\circ})+2\frac{d^2}{dt^2}\sin(2t-25^{\circ})$$

b)
$$\cos 2t + \cos(2t + 120^{\circ}) + \cos(2t + 240^{\circ})$$

یاسخ:

میدانیم $\sin(x) = \sin(x)$ مینویسیم. هنگام دورت درجه هستند و یا برحسب رادیان. بنابراین بنابراین محاسبات با اعداد مختلط باید دقت کنیم که اعداد به صورت درجه هستند و یا برحسب رادیان. بنابراین هنگام محاسبه با ماشین حساب حتما دقت کنید که برحسب درجه اعداد رو وارد می کنید یا برحسب رادیان.

$$2\sin(2t+18^{\circ}) - 3\cos(2t+35^{\circ}) + 2\frac{d^{2}}{dt^{2}}\sin(2t-25^{\circ})$$

$$= 2\cos(2t+18^{\circ} - 90^{\circ}) - 3\cos(2t+35^{\circ}) + 2\frac{d^{2}}{dt^{2}}\cos(2t-25^{\circ} - 90^{\circ})$$

$$= 2\cos(2t-72^{\circ}) - 3\cos(2t+35^{\circ}) + 2\frac{d^{2}}{dt^{2}}\cos(2t-115^{\circ})$$

سپس با استفاده از فازورها، فازور تک تک عبارتها را نوشته و با هم جمع می کنیم.

$$\Rightarrow 2e^{-j72} - 3e^{j35} + 2(j2)^2 e^{-j115}$$

$$= 2[\cos(-72) + j\sin(-72)] - 3[\cos(35) + j\sin(35)] - 8[\cos(-115) + j\sin(-115)]$$

$$= [2\cos(-72) - 3\cos(35) - 8\cos(-115)] + j[2\sin(-72) - 3\sin(35) - 8\sin(-115)]$$

$$= [2 \times 0.309 - 3 \times 0.819 + 8 \times 0.423] + j[-2 \times 0.951 - 3 \times 0.574 + 8 \times 0.906]$$

$$= [0.618 - 2.457 + 3.384] + j[-1.902 - 1.722 + 7.248]$$

$$= 1.545 + j3.624 = \sqrt{2.387 + 13.133}e^{j66.91} = 3.939e^{j66.91}$$

در نهایت فازور نهایی را به حالت cos برمی گردانیم.

$$3.939e^{j66.91} \Rightarrow 3.939\cos(2t + 66.91)$$

b)
$$\cos 2t + \cos(2t + 120^{\circ}) + \cos(2t + 240^{\circ})$$

$$\Rightarrow 1e^{j0} + 1e^{j120} + 1e^{j240} = \left[\cos(0) + j\sin(0)\right] + \left[\cos(120) + j\sin(120)\right]$$

$$+ \left[\cos(240) + j\sin(240)\right] = 1 + \left[-0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right] + \left[-0.5 + j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0$$

دقت داریم که جمع سه کسینوسی همفرکانس که هر کدام ۱۲۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند برابر صفر است.

۳. پاسخ خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را با روش فازوری به دست آورید:

a)
$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{di}{dt} + 12i = 12\cos 3t$$

b)
$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 6x = 4\sin t - 2\cos(t - 27^\circ) + 3\sin(2t + 36^\circ)$$

یاسخ:

a)
$$\frac{d^{2}i}{dt^{2}} + \frac{di}{dt} + 12i = 12\cos 3t$$

$$(j3)^{2} I + (j3)I + 12I = 12e^{j0}$$

$$\Rightarrow (-9 + j3 + 12)I = 12$$

$$\Rightarrow I = \frac{12}{3 + j3} = \frac{4}{1 + j} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{j(0 - 45)} = 2\sqrt{2}e^{-j45}$$

$$\Rightarrow i(t) = 2\sqrt{2}\cos(3t - 45^{\circ})$$
b)
$$\frac{d^{3}x}{dt^{3}} + 2\frac{d^{2}x}{dt^{2}} + \frac{dx}{dt} + 6x = 4\sin t - 2\cos(t - 27^{\circ}) + 3\sin(2t + 36^{\circ})$$

همان طور که در کلاس گفته شد، برای حل چنین مسائلی می توان از قضیه جمع آثار بهره برد. دقت داریم که دو فرکانس زاویه فرکانس زاویه ای $\omega=2$ و $\omega=1$ در سمت راست معادله وجود دارد. بنابراین مسئله را برای هر دو فرکانس زاویه ای حل می کنیم و در نهایت جوابها را با هم جمع می کنیم.

 $\omega=1$ الف) برای

$$\frac{d^{3}x}{dt^{3}} + 2\frac{d^{2}x}{dt^{2}} + \frac{dx}{dt} + 6x = 4\sin t - 2\cos\left(t - 27^{\circ}\right)$$

$$(j1)^{3} X_{1} + 2(j1)^{2} X_{1} + (j1)X_{1} + 6X_{1} = 4e^{j(0-90)} - 2e^{-j27}$$

$$[-j - 2 + j + 6]X_{1} = 4\left[\cos\left(-90\right) + j\sin\left(-90\right)\right] - 2\left[\cos\left(-27\right) + j\sin\left(-27\right)\right]$$

$$X_{1} = \frac{-4j - 2\left[0.891 - j0.454\right]}{4} = \frac{-1.782 - j3.092}{4} = -0.446 - j0.773 = 0.893e^{-j120}$$

حال نتیجه را از حالت فازوری خارج و به صورت زمانی مینویسیم:

$$X_1 = 0.893e^{-j120} \Rightarrow x_1(t) = 0.893\cos(t - 120^\circ)$$

 $\omega = 2$ برای (-1)

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 6x = 3\sin(2t + 36^\circ)$$

$$(j2)^3 X_2 + 2(j2)^2 X_2 + (j2)X_2 + 6X_2 = 3e^{j(36-90)}$$

$$[-8j - 8 + j2 + 6]X_2 = 3e^{-j54}$$

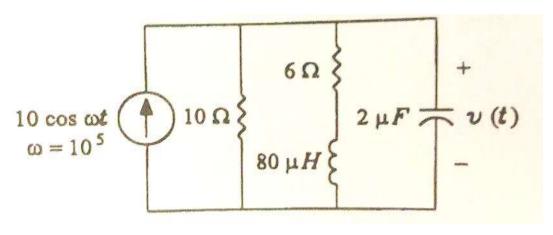
$$X_2 = \frac{3e^{-j54}}{-2 - j6} = \frac{3e^{-j54}}{6.325e^{-j108.43}} = 0.474e^{j(-54+108.43)} = 0.474e^{j54.43}$$

$$X_2 = 0.474e^{j54.43} \implies x_2(t) = 0.474\cos(2t + 54.43^\circ)$$

حال با استفاده از قانون جمع آثار داریم:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0.893\cos(t - 120^\circ) + 0.474\cos(2t + 54.43^\circ)$$

۴. مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. ولتاژv(t) را در حوزه زمان به دست آورید.



پاسخ: با دقت در مدار متوجه می شویم که سه شاخه موازی وجود دارد که مقدار ولتاژ v(t) به دلیل موازی بودن شاخه ها برابر ولتاژ همه شاخه هاست. بنابراین همان طور که در کلاس اشاره شد، می توان ابتدا ادمیتانس معادل را محاسبه کرد و سپس مقدار ولتاژ مدنظر را به راحتی به دست آورد.

$$Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{6 + j80 \times 10^{-6} \times 10^{5}} + j2 \times 10^{-6} \times 10^{5} = 0.1 + \frac{1}{6 + j8} + j0.2$$

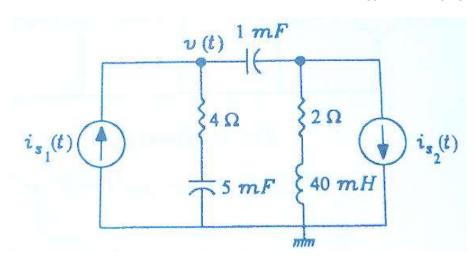
$$= 0.1 + j0.2 + \frac{1}{6 + j8} \times \frac{6 - j8}{6 - j8} = 0.1 + j0.2 + \frac{6 - j8}{36 + 64}$$

$$= 0.1 + j0.2 + 0.06 - j0.08$$

$$= 0.16 + j0.12$$

$$V = \frac{I}{Y} = \frac{10e^{j0}}{0.16 + j0.12} = \frac{10}{\sqrt{0.0256 + 0.0144}e^{j36.87}} = \frac{10}{0.2}e^{j(0-36.87)} = 50e^{-j36.87}$$
$$\Rightarrow v(t) = 50\cos(10^5t - 36.87)$$

۵. مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. $i_{s_1}(t) = \cos 100t$ و $i_{s_1}(t) = \sin 100t$. ولتاژ v(t) و ولتاژ v(t) . ولتاژ در حوزه زمان به دست آورید.



پاسخ: از تحلیل گره در حالت فازوری استفاده می کنیم. با توجه به اینکه فرکانس هر دو منبع جریان یکسان است، نیازی به استفاده از قانون جمع آثار نیست.

$$\begin{cases} KCL1: \frac{V_1}{4 + \frac{1}{j5 \times 10^{-3} \times 100}} + \frac{V_1 - V_2}{\frac{1}{j1 \times 10^{-3} \times 100}} = 1e^{j0} \\ KCL2: \frac{-V_1}{\frac{1}{j1 \times 10^{-3} \times 100}} + \frac{V_2}{2 + j40 \times 10^{-3} \times 100} + \frac{1}{2}e^{-j90} = 0 \end{cases}$$

با استفاده از روابط اعداد مختلط، عبارتهای فوق را ساده می کنیم.

$$\begin{cases} KCL1: \frac{V_1}{4-j2} + \frac{V_1 - V_2}{-j10} = 1 \\ KCL2: \frac{V_2 - V_1}{-j10} + \frac{V_2}{2+j4} - \frac{j}{2} = 0 \end{cases}$$

. حال از رابطه KCL1 مقدار V_2 را پیدا کرده و در رابطه KCL2 جایگذاری می کنیم

$$KCL1: \frac{(4+j2)V_1}{16+4} + \frac{j}{10}(V_1 - V_2) = 1 \Rightarrow (0.2+j0.1)V_1 + j0.1V_1 - j0.1V_2 = 1$$

$$\Rightarrow (0.2+j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1 \Rightarrow j0.1V_2 = 0.2(1+j)V_1 - 1$$

$$\Rightarrow -V_2 = 2(j-1)V_1 - 10j \Rightarrow V_2 = -2(j-1)V_1 + 10j$$

$$KCL2: \frac{V_2 - V_1}{-j10} + \frac{V_2}{2+j4} - \frac{j}{2} = 0 \Rightarrow j0.1V_2 - j0.1V_1 + \frac{2-j4}{4+16}V_2 - \frac{j}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 0.2(1+j)V_1 - 1 - j0.1V_1 + (0.1-j0.2)[-2(j-1)V_1 + 10j] - \frac{j}{2} = 0$$

$$\Rightarrow [0.2(1+j) - j0.1 - 2(0.1-j0.2)(j-1)]V_1 - 1 + (0.1-j0.2)(10j) - \frac{j}{2} = 0$$

$$\Rightarrow [0.2+j0.2-j0.1 - 2(0.1j-0.1+0.2+j0.2)]V_1 - 1 + j + 2 - 0.5j = 0$$

$$\Rightarrow -j0.5V_1 + (1+0.5j) = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1+0.5j}{j0.5} = 1 - j2 = \sqrt{5}e^{j\tan^{-1}(-2)} = \sqrt{5}e^{-j63.43}$$

$$\Rightarrow v_1(t) = \sqrt{5}\cos(100t - 63.43^\circ)$$

موفق باشيد

صفوي