به نام خدا

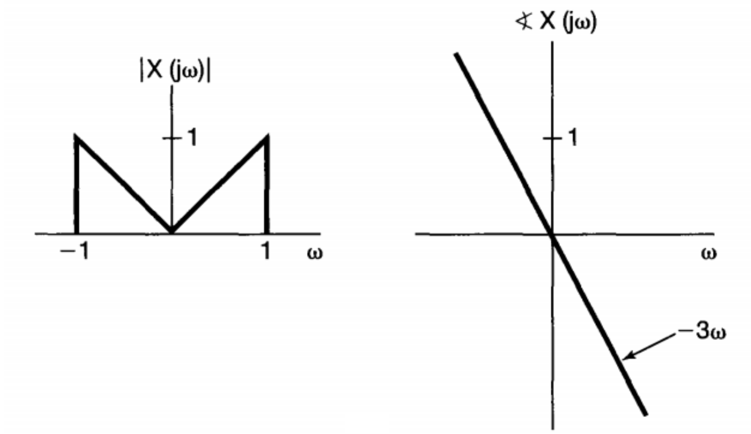
تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه محقق اردبیلی

پاسخ تمرین سری چهارم
موعد تحویل: روز چهارشنبه ۱۳۹۸/۱۰/۰۴

---

۱. تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به صورت زیر ($X(\omega)$) داده شده‌است. سیگنال $x(t)$ را بیابید.



پاسخ:

$$X(\omega)=\left|X(\omega)\right|e^{j\measuredangle X(\omega)}\overset{Y(\omega)=\left|X(\omega)\right|}{\Rightarrow}X(\omega)=Y(\omega)e^{-j3\omega}\quad\Rightarrow x(t)=y(t-3)$$

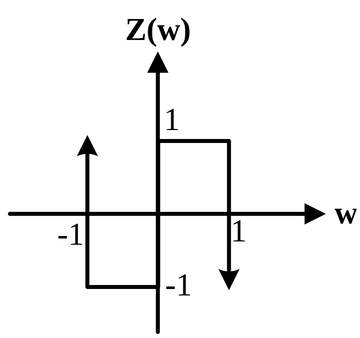
حال اگر سیگنال $y(t)$ را به دست آوریم، به راحتی می‌توان سیگنال $x(t)$ را با سه واحد شیفت به سمت راست به دست‌آورد. در ادامه از دو روش سیگنال $y(t)$ را به دست می‌آوریم:

روش اول: استفاده از مشتق

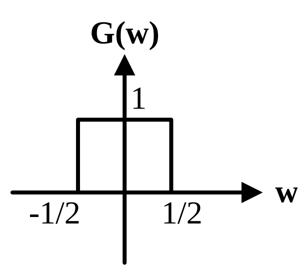
در شکل روبرو $Z(\omega)=Y'(\omega)$ را مشاهده می‌کنید.

یادآوری: رابطه دوگانی

$$f(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}g(\omega)$$
$$g(t)\overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow}2\pi f(-\omega)$$



از رابطه دوگانی داریم:



$$\Rightarrow g(t)=\frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

برگردیم به حل مثال. با توجه به مطالب فوق

$$Z(\omega) = G\left(\omega - \frac{1}{2}\right) - G\left(\omega + \frac{1}{2}\right) + \delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)$$

$$\Rightarrow z(t) = e^{j\frac{1}{2}t} g(t) - e^{-j\frac{1}{2}t} g(t) + \frac{1}{2\pi} e^{-jt} - \frac{1}{2\pi} e^{jt}$$

$$= g(t)\left(e^{j\frac{1}{2}t} - e^{-j\frac{1}{2}t}\right) + \frac{1}{2\pi}\left(e^{-jt} - e^{jt}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\left[2j\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] + \frac{1}{2\pi}\left[2j\sin(t)\right]$$

$$= \frac{j}{\pi}\left[\sin\left(\frac{t}{2}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) - \sin t\right]$$

حال باید سیگنال $y(t)$ را از روی سیگنال $z(t)$ به دست آوریم:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} Z(\eta)\, d\eta \quad \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{jt} z(t) + \pi \underbrace{z(0)}_{=0} \delta(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{1}{jt} z(t) = \frac{\sin t}{\pi t} - \frac{\sin(t/2)}{\pi t}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

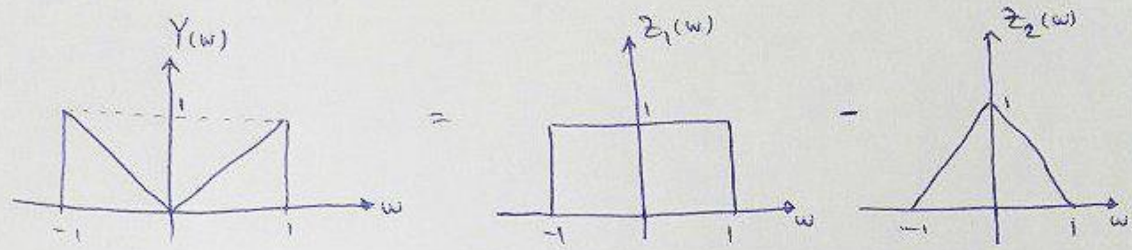
$$= \frac{\sin \pi \frac{t}{\pi}}{\pi \times \pi \frac{t}{\pi}} - \frac{\sin\left(\pi \times \frac{t}{2\pi}\right)}{2\pi \times \pi \frac{t}{2\pi}}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

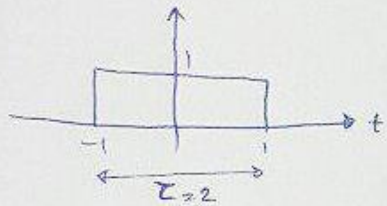
در نهایت به راحتی می‌توان سیگنال $x(t)$ را از روی سیگنال $y(t)$ به دست آورد:

$$x(t) = y(t-3) \Rightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{t-3}{\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{t-3}{2\pi}\right)$$

روش دوم:

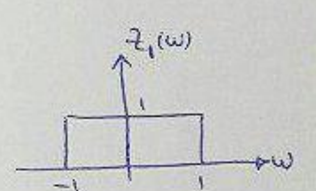


$Z_1(t)$ را از روی خاصیت دوگانی محاسبه می‌کنیم:



$\xleftrightarrow{F} \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) = 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$

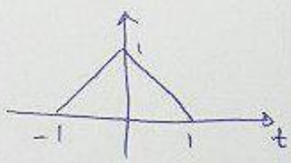
$2 \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) \xleftrightarrow{F} 2\pi \times$



در نتیجه:

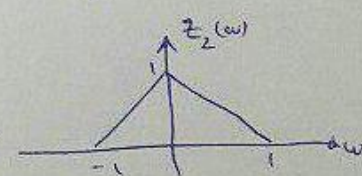
$z_1(t) = \frac{1}{2\pi} \times 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right)$

$Z_2(t)$ را نیز مشابه روش فوق از خاصیت دوگانی محاسبه می‌کنیم:



$\xleftrightarrow{F} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\right]^2$

$\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right]^2 \xleftrightarrow{F} 2\pi \times$



در نتیجه

$z_2(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right]^2$

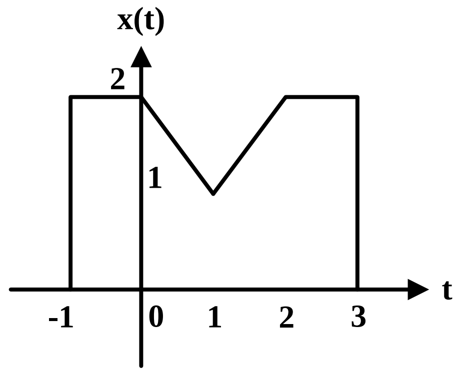
درنهایت

$Y(\omega) = Z_1(\omega) - Z_2(\omega)$

$\Rightarrow y(t) = z_1(t) - z_2(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right]^2$

---

۲. سیگنال $x(t)$ به صورت شکل زیر داده شده است:



بدون محاسبه $X(\omega)$ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) مطلوبست محاسبه $\measuredangle X(\omega)$.   ب) مطلوبست محاسبه $X(0)$.

ج) مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,d\omega$.   د) مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega$.

ه) مطلوبست محاسبه $\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2\,d\omega$.

پاسخ:

الف) با کمی دقت متوجه می‌شویم که سیگنال $y(t)=x(t+1)$ حقیقی و زوج است. در نتیجه تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج خواهد بود. بنابراین

$$x(t)=y(t-1) \qquad \Rightarrow X(\omega)=e^{-j\omega}Y(\omega)$$

با فرض مثبت بودن اندازه $Y(\omega)$، چون $Y(\omega)$ حقیقی است، فاز آن برابر صفر است. در نتیجه $\measuredangle X(\omega)=-\omega$.

ب) می‌دانیم $X(0)$ برابر سطح زیر منحنی سیگنال $x(t)$ است. بنابراین

$$X(0)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt=4\times 2-\frac{1}{2}(2\times 1)=7$$

ج)

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \Rightarrow x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\,d\omega=2\pi x(0)=4\pi$$

د) فرض کنید $Y(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}$ و $Z(\omega)=X(\omega)Y(\omega)$. در نتیجه

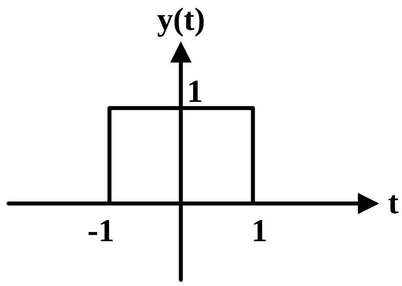
$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega=\int_{-\infty}^{\infty} Z(\omega)e^{j2\omega}d\omega=2\pi z(t)\big|_{t=2}=2\pi z(2)$$

بنابراین باید $z(2)$ را محاسبه کنیم.

$$Z(\omega)=X(\omega)Y(\omega) \quad \Rightarrow \qquad z(t)=x(t)*y(t)$$

$$Y(\omega)=\frac{2\sin\omega}{\omega}=\frac{2\sin\left(\pi\frac{\omega}{\pi}\right)}{\pi\frac{\omega}{\pi}}=2\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

می‌دانیم که دو سیگنال پالس و سینک زوج تبدیل فوریه هستند. در نتیجه سیگنال $y(t)$ برابر است با

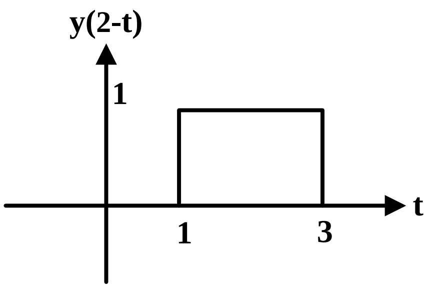


در ادامه

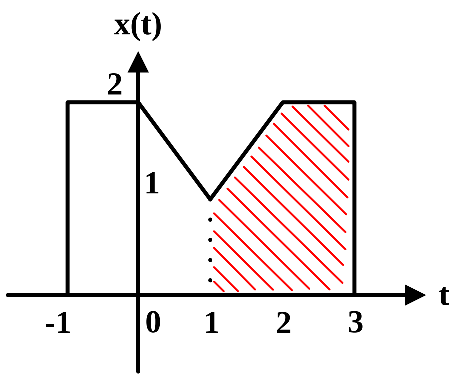
$$z(t)=x(t)*y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow z(2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(2-\tau)d\tau$$

سیگنال $y(2-\tau)$ در شکل روبرو رسم شده است:



با کمی دقت متوجه می‌شویم که مقدار $z(2)$ برابر سطح زیر نمودار $x(t)$ در بازه از ۱ تا ۳ است.



$$z(2)=4-\frac{1}{2}=3.5$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}e^{j2\omega}d\omega=2\pi z(2)=2\pi\times 3.5=7\pi$$

ه)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\omega)\right|^2 d\omega \qquad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\left|X(\omega)\right|^2 d\omega=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt$$

---

۳. می‌دانیم $X(\omega)$ تبدیل فوریه سیگنال $x[n]$ است. تبدیل فوریه سیگنال‌های زیر را برحسب $X(\omega)$ بیان کنید.

الف) $x_1[n]=x[1-n]+x[-1-n]$

ب) $x_2[n]=\dfrac{x^*[-n]+x[n]}{2}$

ج) $x_3[n]=(n-1)^2x[n]$

پاسخ: الف) با استفاده از خواص تبدیل فوریه داریم:

$$x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(\omega), \qquad x[-n] \overset{F}{\leftrightarrow} X(-\omega)$$

$$\left.\begin{array}{l} x[-n+1] \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n}X(-\omega) \\ x[-n-1] \overset{F}{\leftrightarrow} e^{j\omega n}X(-\omega) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow x_1[n] = x[-n+1] + x[-n-1] \overset{F}{\leftrightarrow} e^{-j\omega n}X(-\omega) + e^{j\omega n}X(-\omega) = 2X(-\omega)\cos\omega$$

ب)

$$x_2[n] = \frac{1}{2}\left(x^*[-n] + x[n]\right) \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{1}{2}\left(X^*(\omega) + X(\omega)\right) = \mathrm{Re}\{X(\omega)\}$$

ج)

$$\left.\begin{array}{l} nx[n] \overset{F}{\leftrightarrow} j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega} \\ n^2x[n] \overset{F}{\leftrightarrow} -\dfrac{d^2X(\omega)}{d\omega^2} \end{array}\right\} \Rightarrow x_3[n] = n^2x[n] - 2nx[n] + 1 \overset{F}{\leftrightarrow} -\frac{d^2X(\omega)}{d\omega^2} - 2j\frac{dX(\omega)}{d\omega} + X(\omega)$$

---

۴. عکس تبدیل فوریه گسسته $X(\omega)$ را با استفاده از خواص تبدیل فوریه بیابید.

$$X(\omega) = \frac{1}{1-e^{-j\omega}}\left(\frac{\sin\left(\dfrac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}\right) + 5\pi\delta(\omega), \qquad -\pi \le \omega < \pi$$

پاسخ: تبدیل فوریه پالس گسسته را می‌دانیم:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le 1 \\ 0, & |n| > 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad x_1[n] \overset{F}{\leftrightarrow} X_1(\omega) = \frac{\sin(3\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

با کمی دقت در رابطه $X(\omega)$ می‌توان متوجه شد که باید از خاصیت انتگرال بهره ببریم.

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{X_1(\omega)}{1-e^{-j\omega}} + \pi X_1(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - 2\pi k)$$

با جایگذاری $X_1(0) = 3$ داریم:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{X_1(\omega)}{1-e^{-j\omega}} + 3\pi\delta(\omega) \qquad -\pi \le \omega < \pi$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$1 \overset{F}{\leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega) \qquad -\pi \le \omega < \pi$$

در نتیجه با توجه به خاصیت خطی بودن داریم:

$$x[n] = 1 + \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k] \overset{F}{\leftrightarrow} \frac{X_1(\omega)}{1-e^{-j\omega}} + 5\pi\delta(\omega) \qquad -\pi \le \omega < \pi$$

در نهایت سیگنال $x[n]$ برابر است با:

$$x[n]=1+\sum_{k=-\infty}^{n}x_1[k]=\begin{cases}1, & n\le 2\\ n+3, & -1\le n\le 1\\ 4, & n\ge 2\end{cases}$$

---

۵. رابطه سیگنال خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI با سیگنال ورودی $x(t)$ به صورت زیر است:

$$\frac{dy(t)}{dt}+10y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)z(t-\tau)d\tau-x(t)$$

که در آن $z(t)=e^{-t}u(t)+3\delta(t)$.

الف) پاسخ فرکانسی سیستم را بیابید.

ب) پاسخ ضربه سیستم را بیابید.

پاسخ: الف) از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل فوریه می‌گیریم. بنابراین:

$$Y(j\omega)[10+j\omega]=X(j\omega)\left[Z(j\omega)-1\right]$$

با توجه به سیگنال $z(t)$ داده شده، تبدیل فوریه آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$Z(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega}+3$$

حال به راحتی می‌توان پاسخ فرکانسی سیستم را یافت.

$$H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}=\frac{1/9}{(1+j\omega)}+\frac{17/9}{(10+j\omega)}$$

ب) برای یافتن پاسخ ضربه سیستم باید عکس تبدیل فوریه پاسخ فرکانسی را به دست آوریم. در نتیجه باید پاسخ فرکانسی را به کسرهای جزئی بسط دهیم. بنابراین:

$$H(j\omega)=\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)(10+j\omega)}=\frac{A}{(1+j\omega)}+\frac{B}{(10+j\omega)}$$

$$A=\left.\frac{3+2j\omega}{(10+j\omega)}\right|_{j\omega=-1}=\frac{3-2}{(10-1)}=\frac{1}{9}$$

$$B=\left.\frac{3+2j\omega}{(1+j\omega)}\right|_{j\omega=-10}=\frac{3-20}{1-10}=\frac{17}{9}$$

$$\Rightarrow H(j\omega)=\frac{1/9}{(1+j\omega)}+\frac{17/9}{(10+j\omega)}$$

در نتیجه:

$$h(t)=\frac{1}{9}e^{-t}u(t)+\frac{17}{9}e^{-10t}u(t)$$

موفق باشید

صفوی