به نام خدا

مبانی مهندسی برق

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین

سبلان نمین، دانشگاه محقق اردبیلی

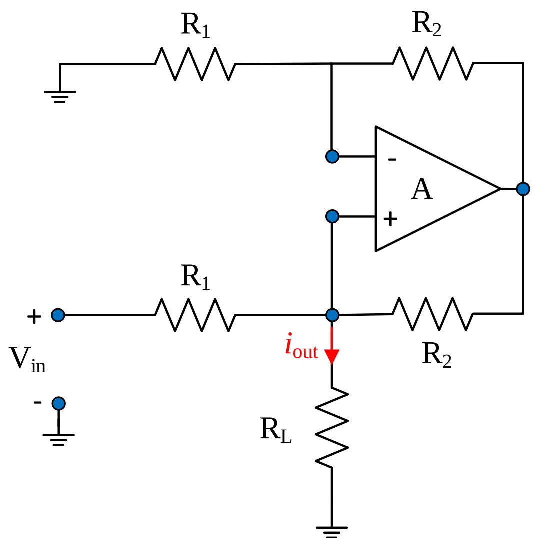
تمرین سری سوم

موعد تحویل: روز چهارشنبه

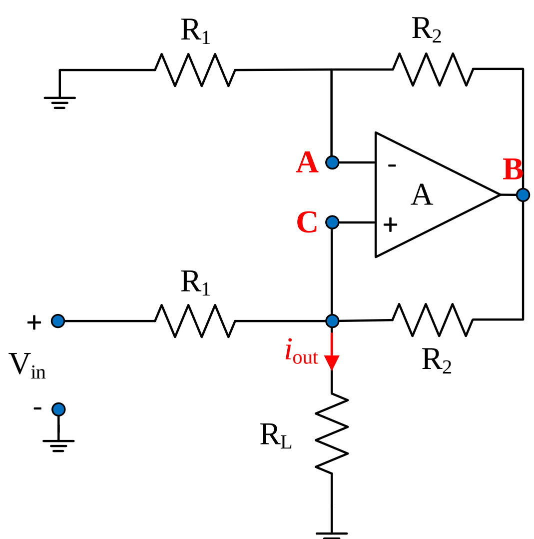
۱۳۹۹/۰۲/۲۴

---

۱. در مدار شکل زیر نشان دهید $i_{out} = \frac{v_{in}}{R_1}$. (از این رو به این مدار منبع جریان کنترل شده با ولتاژ می‌گویند.)



پاسخ: گره‌های موجود را نامگذاری می‌کنیم.



با ایده‌آل فرض کردن آپ امپ، ولتاژ گره‌های A و C برابر خواهد شد. این ولتاژ برابر است با:

$$v_A = v_C = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_B$$

در نتیجه با نوشتن KCL برای گره C داریم:

$$\frac{v_C - v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} + \frac{v_C - v_B}{R_2} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{v_C - v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} + \frac{v_C - \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) v_C}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{v_C - v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} + \frac{R_1 v_C - (R_1 + R_2) v_C}{R_1 R_2} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{v_C - v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} + \frac{R_1 v_C - R_1 v_C - R_2 v_C}{R_1 R_2} = 0$$

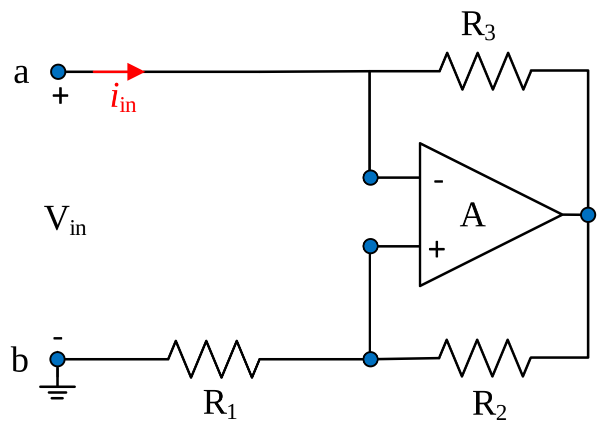
$$\Rightarrow \frac{v_C - v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} + \frac{-v_C}{R_1} = 0 \Rightarrow \frac{v_C}{R_1} - \frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} - \frac{v_C}{R_1} = 0$$

$$-\frac{v_{in}}{R_1} + \frac{v_C}{R_L} = 0 \quad \Rightarrow \frac{v_C}{R_L} = \frac{v_{in}}{R_1} \qquad \Rightarrow v_C = \frac{R_L}{R_1} v_{in} \quad \Rightarrow i_{out} = \frac{v_C}{R_L} = \frac{v_{in}}{R_1}$$

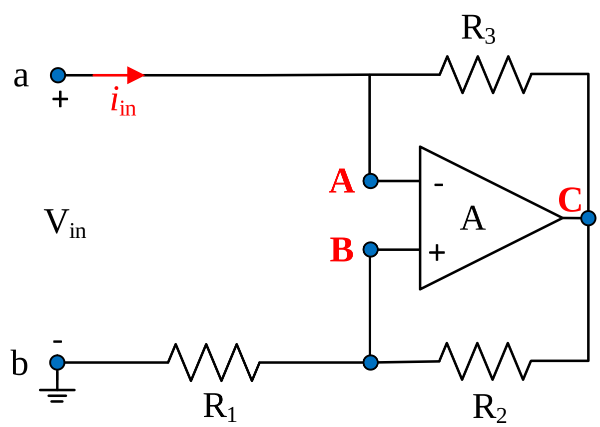
دقت کنید که نوشتن KCL در گره خروجی B هیچ کمکی به حل مسئله نخواهد کرد. زیرا جریان خروجی آپ امپ را نمی‌دانیم.

۲. مقاومت معادل دو سر a و b را به دست آورید.

چرا به این مدار مبدل مقاومت منفی گفته می‌شود؟



پاسخ:



با ایده‌آل فرض کردن آپ امپ، ولتاژ گره‌های A و B برابر خواهد شد. این ولتاژ برابر است با:

$$v_{in} = v_A = v_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_C$$

بنابراین با نوشتن KCL برای گره A داریم:

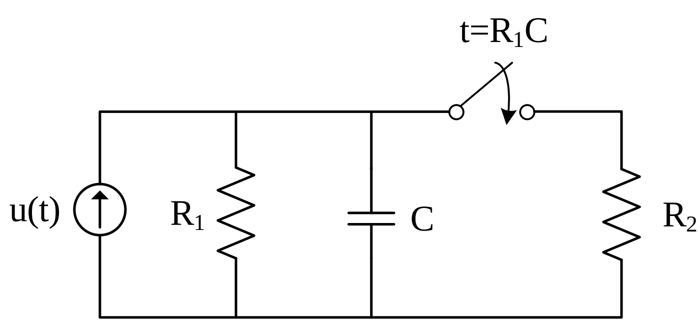
$$-i_{in}+\frac{v_A-v_C}{R_3}=0 \qquad \Rightarrow -i_{in}+\frac{\frac{R_1}{R_1+R_2}v_C-v_C}{R_3}=0 \qquad \Rightarrow -i_{in}+\frac{R_1v_C-(R_1+R_2)v_C}{(R_1+R_2)R_3}=0$$

$$\Rightarrow -i_{in}+\frac{R_1v_C-R_1v_C-R_2v_C}{(R_1+R_2)R_3}=0 \qquad \Rightarrow -i_{in}-\frac{R_2}{(R_1+R_2)R_3}v_C=0 \qquad \Rightarrow i_{in}=-\frac{R_2}{(R_1+R_2)R_3}v_C$$

$$\frac{v_{in}}{i_{in}}=\frac{\frac{R_1}{R_1+R_2}v_C}{-\frac{R_2}{(R_1+R_2)R_3}v_C}=-\frac{R_1R_3}{R_2} \qquad \Rightarrow R_{ab}=-\frac{R_1R_3}{R_2}$$

منظور از مبدل مقاومت منفی، مداری است که بتواند با استفاده از مقاومت‌های معمولی در دو سر ورودی خود یک مقاومت منفی ایجاد کند. بدیهی است که مقاومت معادل مدار از دو سر a و b منفی شد. به همین دلیل به این مدار مبدل مقاومت منفی گویند.

۳. در مدار شکل زیر مقدار مقاومت R_2 چقدر باشد تا پس از وصل کلید در $t=R_1C$ ولتاژ دو سر منبع جریان ثابت بماند؟ (ولتاژ اولیه خازن برابر صفر است.)



پاسخ: ورودی چون پله واحد است، پاسخ آن را در حالت صفر در نظر می‌گیریم. (هرچند خود صورت سوال نیز خازن را در حالت صفر فرض کرده‌است.) با توجه به اینکه قبل از لحظه صفر هیچ منبعی وجود ندارد که خازن را شارژ کند، رابطه ولتاژ خازن برابر است با:

$$V_C(t)=V_C(\infty)+\left[V_C(0)-V_C(\infty)\right]e^{-\frac{t}{R_1C}}=R_1+\left[0-R_1\right]e^{-\frac{t}{R_1C}}=R_1\left(1-e^{-\frac{t}{R_1C}}\right)$$

حال قبل از بسته شدن کلید می‌توان ولتاژ خازن را به دست آورد. به عبارت دیگر

$$V_C(t=R_1C)=R_1\left(1-e^{-\frac{R_1C}{R_1C}}\right)=R_1\left(1-e^{-1}\right)$$

حال اگر بخواهیم ولتاژ دو سر منبع جریان که همان ولتاژ دو سر خازن است (دقت کنید که منبع جریان و مقاومت و خازن موازی هستند.)، ثابت باقی بماند، باید مقدار ولتاژ خازن در لحظه $t=R_1C$ با مقدار ولتاژ خازن در لحظه بی‌نهایت برابر شود. امّا ولتاژ خازن در لحظه بی‌نهایت برابر چه مقداری است؟

در لحظه بی‌نهایت خازن مدار باز است. بنابراین:

$$V_C\left(t=\infty\right)=1\times\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

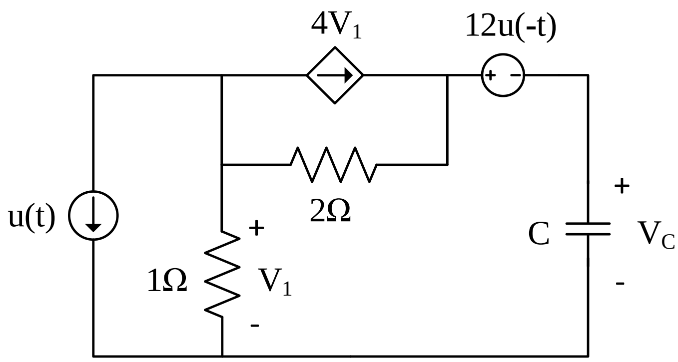
حال باید مقدار ولتاژ خازن در لحظه $t=R_1C$ را با مقدار ولتاژ خازن در لحظه بی‌نهایت برابر قرار دهیم:

$$V_C\left(t=R_1C\right)=V_C\left(t=\infty\right)\qquad\Rightarrow R_1\left(1-e^{-1}\right)=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

$$\Rightarrow\left(R_1+R_2\right)\left(1-e^{-1}\right)=R_2\qquad\Rightarrow R_1\left(1-e^{-1}\right)=R_2-R_2\left(1-e^{-1}\right)=R_2e^{-1}$$

$$\Rightarrow R_2=\frac{R_1\left(1-e^{-1}\right)}{e^{-1}}\qquad\Rightarrow R_2=\left(e-1\right)R_1$$

۴. مقدار ولتاژ خازن را در لحظه بی نهایت به دست آورید.



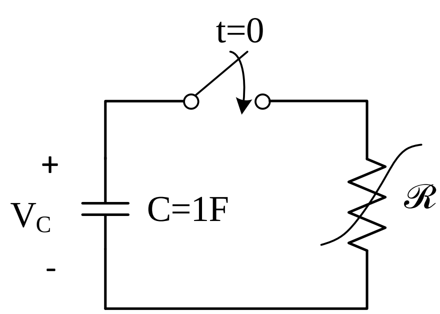
پاسخ:

در لحظه بی‌نهایت خازن مدار باز است. بنابراین جریانی از آن شاخه عبور نمی‌کند. در نتیجه جریان $4V_1$ وارد مقاومت ۲ اهمی می‌شود. همچنین منبع جریان پله واحد نیز از مقاومت ۱ اهمی عبور می‌کند. با توجه به پلاریته ولتاژ V_1، با استفاده از قانون اهم می‌دانیم که $V_1=-1$ ولت است. درنتیجه با نوشتن KVL در حلقه سمت راست داریم:

$$-V_1-2\times4V_1+V_C\left(\infty\right)=0\qquad\Rightarrow V_C\left(\infty\right)=9V_1=-9^v$$

دقت کنید که مقدار منبع ولتاژ $12u\left(-t\right)$، برای زمان‌های بزرگتر از صفر، برابر صفر است.

۵. یک مقاومت غیرخطی با مشخصه $V^3=3i$ با خازن خطی $C=1F$ موازی بسته شده است. اگر ولتاژ اولیه خازن هنگام موازی شدن برابر $V_C\left(0_-\right)=3v$ باشد، ولتاژ خازن بعد از یک ثانیه چقدر است؟



پاسخ:

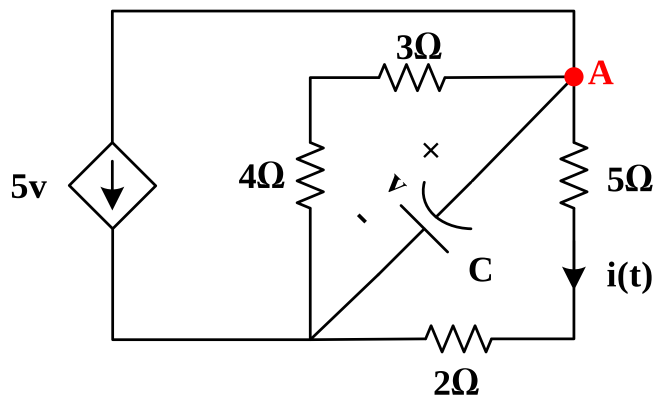
به دلیل اینکه مقاومت غیرخطی داریم، باید معادله دیفرانسیل را بیابیم و سپس آن را حل کنیم.

$$i_C + i_R = 0 \qquad \Rightarrow 1\times\frac{dV_C}{dt}+\frac{V_C^3}{3}=0 \qquad \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-\frac{V_C^3}{3} \qquad \Rightarrow \frac{dV_C}{V_C^3}=-\frac{dt}{3}$$

$$\int_3^{V_C}\frac{dV_C}{V_C^3}=-\frac{1}{3}\int_0^1 dt \qquad \Rightarrow \left.\frac{V_C^{-2}}{-2}\right|_3^{V_C}=-\frac{1}{3}t\Big|_0^1 \qquad \Rightarrow V_C^2=\frac{9}{7} \qquad \Rightarrow V_C=\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$$

بدیهی است که مقدار مثبت ولتاژ خازن قابل قبول است. ولتاژ خازن از ولتاژ اولیه ۳ ولت شروع به کاهش می‌کند تا به مقدار صفر برسد.

۶. در مدار شکل زیر $C=4mF$ و $v_C(0_-)=3v$ است. جریان $i(t)$ را برای $t>0$ به دست آورید.



پاسخ: نکته اول دقت در پلاریته (سر مثبت و منفی) خازن است. همان‌طور که سر کلاس گفته شد، پایه ای که به صورت خمیده می‌باشد، پلاریته منفی است. در این مدار، منبع وابسته به ولتاژ خازن با پلاریته معکوس است. به عبارت دیگر $v(t)=-V_C(t)$. نکته بعدی این است که در صورتی که مقدار ولتاژ دو سر خازن محاسبه شود، به راحتی می‌توان جریان $i(t)$ را محاسبه نمود زیرا شاخه‌ای که مقاومت‌های ۵ اهمی و ۲ اهمی را دارد با شاخه‌ای که شامل خازن است، موازی شده است. بنابراین با تقسیم ولتاژ دو سر خازن به مجموع مقاومت‌های ۵ اهمی و ۲ اهمی، به راحتی می‌توان جریان $i(t)$ را محاسبه نمود ($i(t)=\frac{v(t)}{2^\Omega+5^\Omega}=\frac{v(t)}{7^\Omega}$).

به کمک توضیحات داده شده و با استفاده از تحلیل گره و با فرض گره مبنا (گره ای که سر منفی خازن به آن متصل است) می‌توان KCL را در گره A به صورت زیر نوشت:

$$KCL: 5v(t)+\frac{v(t)}{3+4}+\frac{v(t)}{5+2}+4\times10^{-3}\frac{dv(t)}{dt}=0$$

$$\Rightarrow 4\times10^{-3}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{37}{7}v(t)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dv(t)}{dt}+1321.43v(t)=0$$

$$\Rightarrow v(t)=Ke^{-1321.43t}$$

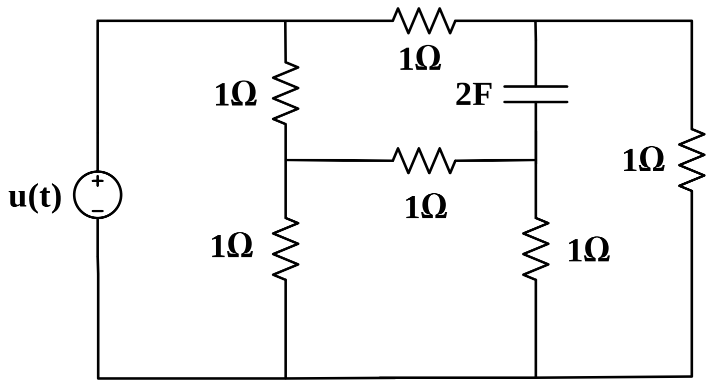
$$V_C(0_-)=3 \qquad \Rightarrow v(0_-)=-V_C(0_-)=-3 \Rightarrow K=-3$$

$$\Rightarrow v(t)=-3e^{-1321.43t}$$

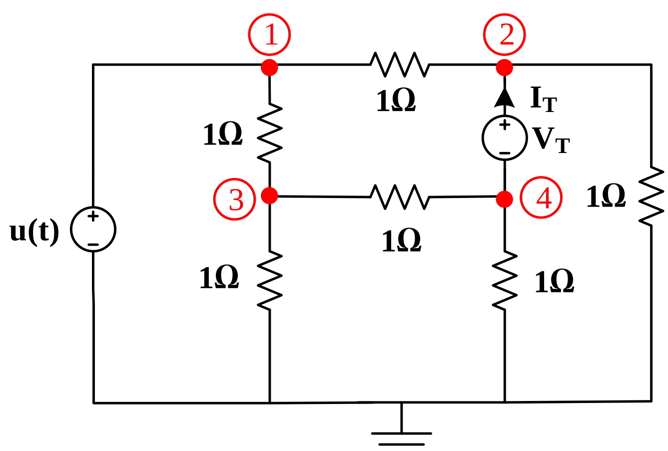
$$\boxed{i(t)=\frac{v(t)}{7^{\Omega}}=-\frac{3}{7}e^{-1321.43t}, \qquad t\geq 0}$$

۷. الف) در مدار شکل زیر ولتاژ دو سر خازن برای $t\geq 0$ را بیابید. (ولتاژ اولیه خازن صفر است)

ب) اگر به جای خازن، یک سلف $L=2H$ با جریان اولیه صفر قرار می‌دادیم، با استفاده از نتایج قسمت الف جریان گذرنده از سلف را برای $t\geq 0$ حساب کنید.



پاسخ: همان‌طور که در کلاس توضیح داده شد، در اینگونه مدارها ابتدا مقدار مقاومت معادل از دو سر خازن را به دست می‌آوریم. با این کار ثابت زمانی مدار به دست می‌آید. در نتیجه تمامی متغیرهای مدار، دارای همین ثابت زمانی خواهند بود. از طرفی دیگر در بی‌نهایت، خازن معادل مدار باز می‌باشد. بنابراین برای یافتن حالت پایدار ولتاژ خازن در مدار ($v_c(+\infty)$) باید ولتاژ مدار باز از دو سر خازن را نیز به دست آوریم. در نتیجه، بدین منظور از تحلیل گره استفاده می‌کنیم.



$$e_1=1$$

$$KCL2:\frac{e_2-1}{1^{\Omega}}+\frac{e_2}{1^{\Omega}}-I_T=0$$

$$KCL3:\frac{e_3-1}{1^{\Omega}}+\frac{e_3}{1^{\Omega}}+\frac{e_3-e_4}{1^{\Omega}}=0$$

$$KCL4:\frac{e_4}{1^{\Omega}}+\frac{e_4-e_3}{1^{\Omega}}+I_T=0$$

بدیهی است که

$$V_T = e_2 - e_4$$

بنابراین باید از روی معادلات گره، متغیر V_T را برحسب I_T بیابیم.

$$\begin{cases} e_2 - 1 + e_2 - I_T = 0 \\ e_3 - 1 + e_3 + e_3 - e_4 = 0 \\ e_4 + e_4 - e_3 + I_T = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_2 = \dfrac{1}{2} I_T + \dfrac{1}{2} \\ e_3 = \dfrac{e_4 + 1}{3} \\ e_4 = -\dfrac{1}{2} I_T + \dfrac{1}{2} e_3 = -\dfrac{1}{2} I_T + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e_4 + 1}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{5}{6} e_4 = -\dfrac{1}{2} I_T + \dfrac{1}{6} \Rightarrow e_4 = -\dfrac{3}{5} I_T + \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

$$V_T = e_2 - e_4 = \left(\frac{1}{2} I_T + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{3}{5} I_T + \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\right) I_T + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{10} I_T + \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow R_{eq} = \frac{11}{10}, \quad V_{oc} = \frac{3}{10}$$

حال ولتاژ خازن را به راحتی و با استفاده از رابطه زیر می‌توانیم بدست آوریم:

$$v_c(t) = \left[v_c(0) - v_c(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{T}} + v_c(+\infty)$$

$$\begin{cases} T = R_{eq} C = \dfrac{11}{10} \times 2 = \dfrac{11}{5} \\ v_c(0) = 0 \\ v_c(+\infty) = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow v_c(t) = \left[0 - \frac{3}{10}\right] e^{-\frac{5t}{11}} + \frac{3}{10} = \frac{3}{10}\left(1 - e^{-\frac{5t}{11}}\right), \qquad t > 0}$$

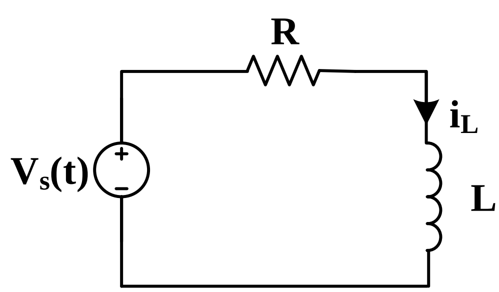
ب) اگر به جای خازن، در مدار مربوطه سلف قرار دهیم، تفاوتی که می‌کند این است که حالت پایدار مدار عوض می‌شود. زیرا سلف در بی‌نهایت اتصال کوتاه است. در نتیجه اگر جریان اتصال کوتاه را محاسبه کنیم، چون جریان اولیه صفر فرض شده‌است، به راحتی از رابطه زیر جریان سلف را برای همه مقادیر t می‌توانیم محاسبه کنیم.

$$i_L(t) = \left[i_L(0) - i_L(+\infty)\right] e^{-\frac{t}{T}} + i_L(+\infty)$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{L}{R_{eq}} = \dfrac{2}{\dfrac{11}{10}} = \dfrac{20}{11} \\ i_L(0) = 0 \\ i_L(+\infty) = I_{SC} = \dfrac{V_{oc}}{R_{eq}} = \dfrac{\dfrac{3}{10}}{\dfrac{11}{10}} = \dfrac{3}{11} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow i_L(t) = \left[0 - \frac{3}{11}\right] e^{-\frac{20t}{11}} + \frac{3}{11} = \frac{3}{11}\left(1 - e^{-\frac{20t}{11}}\right), \qquad t > 0}$$

۸. مدر مدار شکل زیر $v_s(t) = V_m \cos(\omega t + \Phi)$ است. Φ را چنان تعیین کنید که هیچگونه پاسخ گذرایی در جریان i_L حاصل نشود. (جریان اولیه سلف برابر صفر فرض می‌شود.)



پاسخ:

$$KVL: -V_s + V_R + V_L = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = V_m \cos(\omega t + \Phi)$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = V_m \cos(\omega t)\cos(\Phi) + V_m \sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$i_L(t) = i_{Lh} + i_{Lp}$$

$$= Ke^{-\frac{R}{L}t} + A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{Sin}(\omega t)$$

$$i_L(0) = 0 \Rightarrow i_L(0) = K + A = 0 \Rightarrow K = -A$$

شرط آنکه پاسخ گذرایی نداشته باشیم، آن است که ضریب عبارت نمایی برابر صفر باشد. بنابراین

$$K = 0, \ \Rightarrow A = 0$$

حال پارامتر Φ را می‌توان از برقراری رابطه $A = 0$ بدست آورد.

با جایگذاری پاسخ خصوصی در معادله دیفرانسیل داریم:

$$L\frac{di_{Lp}}{dt}+Ri_{Lp}=V_m\cos(\omega t)\cos(\Phi)+V_m\sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$L\left(-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t)\right)+R\left(A\cos(\omega t)+B\,\mathrm{Sin}(\omega t)\right)=V_m\cos(\omega t)\cos(\Phi)-V_m\sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$\left[-AL\omega+RB\right]\sin(\omega t)+\left[BL\omega+RA\right]\cos(\omega t)=V_m\cos(\omega t)\cos(\Phi)-V_m\sin(\omega t)\sin(\Phi)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-AL\omega+RB=-V_m\sin(\Phi)\\ BL\omega+RA=V_m\cos(\Phi)\end{cases}$$

حال معادله فوق را می‌توان به روش کرامر و یا هر روش دیگری حل کرد.

$$BL\omega+RA=V_m\cos(\Phi)\qquad\Rightarrow B=\frac{V_m\cos(\Phi)-RA}{L\omega}$$

$$-AL\omega+RB=-V_m\sin(\Phi)\qquad\Rightarrow -AL\omega+R\left(\frac{V_m\cos(\Phi)-RA}{L\omega}\right)=-V_m\sin(\Phi)$$

$$\Rightarrow A\left[-L\omega-\frac{R^2}{L\omega}\right]=-V_m\sin(\Phi)-\frac{RV_m\cos(\Phi)}{L\omega}$$

$$\Rightarrow A=\frac{V_m\sin(\Phi)+\dfrac{RV_m\cos(\Phi)}{L\omega}}{L\omega+\dfrac{R^2}{L\omega}}=0$$

$$\Rightarrow V_m\sin(\Phi)+\frac{RV_m\cos(\Phi)}{L\omega}=0,\qquad\Rightarrow\frac{\sin(\Phi)}{\cos(\Phi)}=-\frac{R}{L\omega},\quad\Rightarrow\tan(\Phi)=-\frac{R}{L\omega}$$

$$\boxed{\Rightarrow\Phi=\tan^{-1}\left(-\frac{R}{L\omega}\right)}$$

موفق باشید

صفوی