به نام خدا

مبانی مهندسی برق

دانشکده فناوری‌های نوین سبلان نمین،

دانشگاه محقق اردبیلی

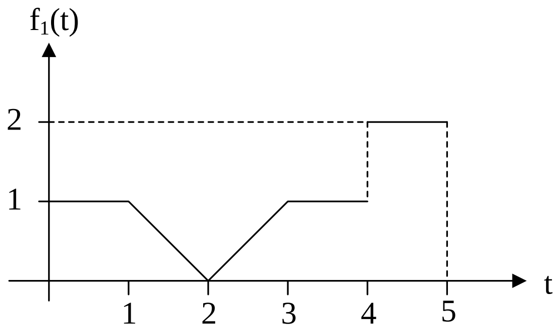
پاسخ تمرین سری دوم

موعد تحویل: روز یکشنبه

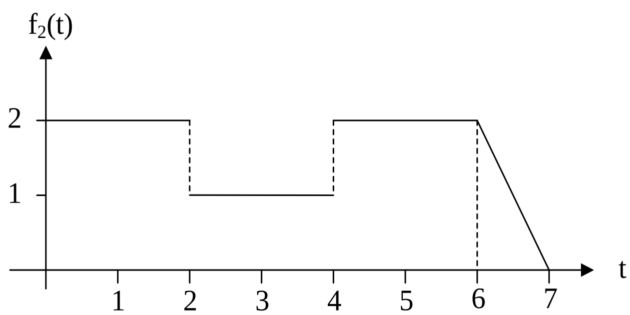
۱۳۹۹/۰۱/۱۷

---

۱. شکل موج‌های زیر را بر حسب توابع ویژه (پله واحد، شیب واحد و ...) بیان کنید. همچنین مشتق آن‌ها را نیز تعیین کنید.



$$f_1(t)=u(t)-r(t-1)+2r(t-2)-r(t-3)+u(t-4)-2u(t-5)$$
$$f_1'(t)=\delta(t)-u(t-1)+2u(t-2)-u(t-3)+\delta(t-4)-2\delta(t-5)$$



$$f_2(t)=2u(t)-u(t-2)+u(t-4)-2r(t-6)+2r(t-7)$$
$$f_2'(t)=2\delta(t)-\delta(t-2)+\delta(t-4)-2u(t-6)+2u(t-7)$$

۲. نشان دهید که $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$.

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(2t)\,d(2t)=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta(2t)\,dt=1\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1\end{array}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta(2t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt\Rightarrow\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$$

۳. مشتق هر یک از توابع زیر را حساب کنید.

الف) $\left(1-te^{-t}\right)u(t)$

$$f(t)=\left(1-te^{-t}\right)u(t)$$

$$\begin{aligned}f'(t)&=\left(1-te^{-t}\right)'\times u(t)+\left(1-te^{-t}\right)\times\delta(t)\\&=-\left(e^{-t}-te^{-t}\right)\times u(t)+\delta(t)\\&=(t-1)e^{-t}u(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

ب) $\cos 2t\,u(t)$

$$f(t)=\cos 2t\,u(t)$$

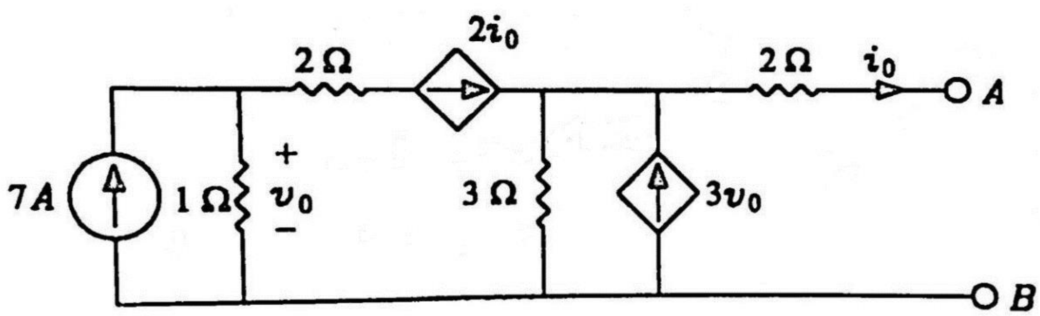
$$\begin{aligned}f'(t)&=(\cos 2t)'\times u(t)+\cos 2t\times\delta(t)\\&=-2\sin 2t\times u(t)+\cos 2t\times\delta(t)\\&=-2\sin 2t\times u(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

ج) $e^{-t}u(t)$

$$f(t)=e^{-t}u(t)$$

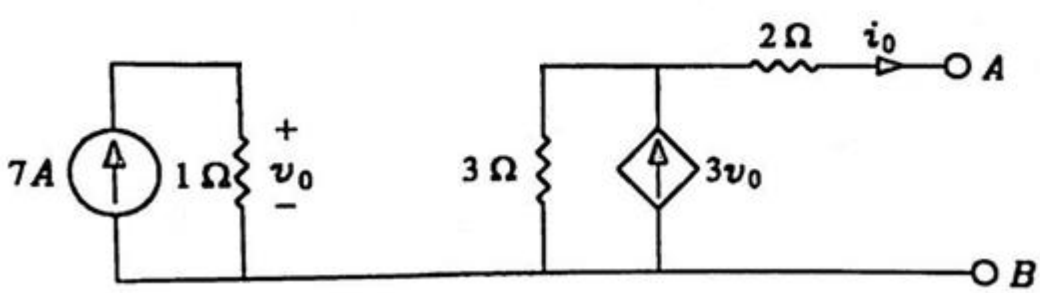
$$\begin{aligned}f'(t)&=\left(e^{-t}\right)'\times u(t)+e^{-t}\times\delta(t)\\&=-e^{-t}\times u(t)+\delta(t)\end{aligned}$$

۴. مدار معدل تونن دیده شده در سرهای A و B مدار شکل زیر را به دست آورید.



ابتدا ولتاژ تونن و یا همان ولتاژ مدار باز را محاسبه می‌کنیم:

اگر دو سر A و B مدار باز باشد، جریان $i_0=0$ است. در نتیجه مدار به شکل زیر ساده می‌شود:



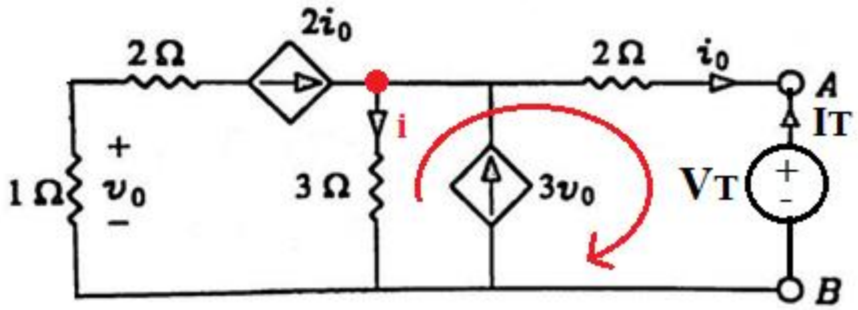
حال به راحتی می‌توان ولتاژ مدار باز را محاسبه کرد.

$$v_0=7\times 1=7v$$

ولتاژ دو سر A و B نیز به دلیل اینکه جریان $i_0 = 0$ است، برابر ولتاژ دو سر مقاومت ۳ اهمی است. در نتیجه:

$v_{AB} = 3 \times 3v_0 = 3 \times 3 \times 7 = 63v$

پس ولتاژ مدار باز برابر ۶۳ ولت است. حال برای محاسبه مقاومت معادل می‌توان از منبع ولتاژ آزمون V_T کمک گرفت. ابتدا باید منابع نابسته را صفر کنیم که در این مثال، منبع جریان **مدار باز** خواهد شد.



$I_T = -i_0$

جریان مقاومت ۳ اهمی را i در نظر گرفتیم. بنابراین:

$KCL: -2i_0 + i - 3v_0 + i_0 = 0 \Rightarrow i = i_0 + 3v_0$

جریان شاخه سمت چپ برابر $2i_0$ است. از طرف دیگر می‌دانیم ولتاژ دو سر مقاومت ۱ اهمی برابر v_0 است. در نتیجه با استفاده از قانون اهم:

$v_0 = -2i_0$

بنابراین:

$i = i_0 + 3v_0 = i_0 + 3\times(-2i_0) = -5i_0$

حال KVL را در حلقه مشخص شده می‌نویسیم:

$KVL: -3i + 2i_0 + V_T = 0 \Rightarrow V_T = 3i - 2i_0 = 3\times(-5i_0) - 2i_0 = -17i_0 = 17I_T$

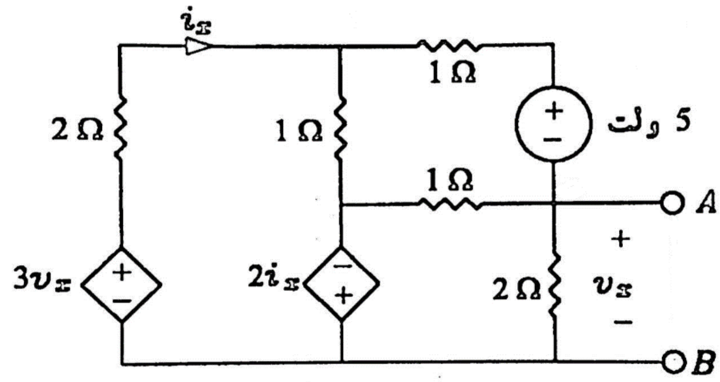
در نهایت $R_{eq} = \dfrac{V_T}{I_T} = 17$

۵. در مدار شکل زیر می‌خواهیم مقادیر v_x و i_x را به دست آوریم.

الف) با استفاده از تحلیل مش، این کار را انجام دهید.

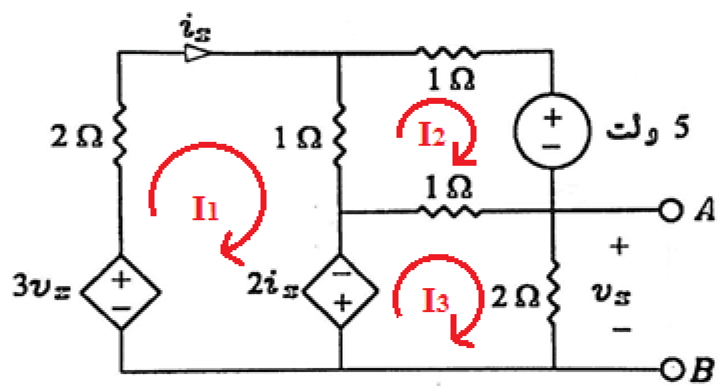
ب) با استفاده از روش تحلیل گره این کار را انجام دهید.

پ) اگر از دو سر A و B به مدار نگاه کنیم، مدار معادل تونن را به دست آورید.



پاسخ: الف) با تحلیل مش

برای هر یک از شاخه ها جریان مش نسبت می‌دهیم.



با توجه به مدار داریم:

$$i_x = I_1, \qquad v_x = 2I_3$$

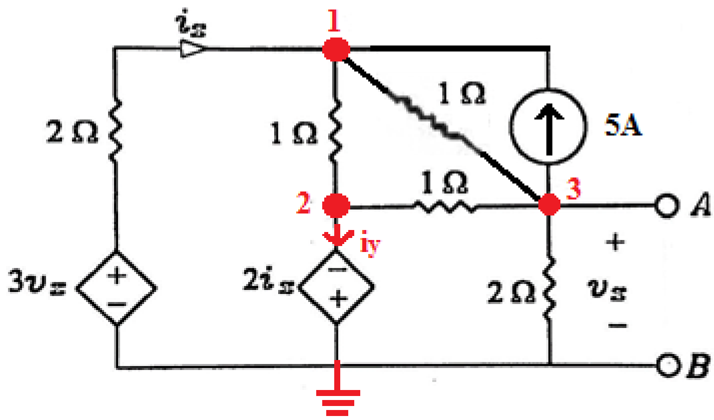
حال، KVL های مش‌ها را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} KVL1: -3v_x + 2I_1 + 1\times(I_1 - I_2) - 2i_x = 0 \\ KVL2: 1\times(I_2 - I_1) + 1\times I_2 + 5 + 1\times(I_2 - I_3) = 0 \\ KVL3: 2i_x + 1\times(I_3 - I_2) + 2I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} KVL1: -3\times(2I_3) + 2I_1 + I_1 - I_2 - 2I_1 = 0 \\ KVL2: I_2 - I_1 + I_2 + 5 + I_2 - I_3 = 0 \\ KVL3: 2I_1 + I_3 - I_2 + 2I_3 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} KVL1: I_1 - I_2 - 6I_3 = 0 \\ KVL2: -I_1 + 3I_2 - I_3 = -5 \\ KVL3: 2I_1 - I_2 + 3I_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_1 = i_x = -\dfrac{45}{37} \\ I_2 = -\dfrac{75}{37} \\ I_3 = \dfrac{5}{37} \Rightarrow v_x = 2I_3 = \dfrac{10}{37} \end{cases}$$

ب) با تحلیل گره



ابتدا گره‌ها را شماره‌گذاری کرده و گره مبنا را انتخاب می‌کنیم. سپس مقاومت سری با منبع ولتاژ نابسته را به مقاومت موازی با منبع جریان نابسته تبدیل می‌کنیم (تبدیل تونن-نرتن). در نهایت شروع به نوشتن KCL در گره‌ها می‌کنیم:

$$\begin{cases} KCL1: \frac{e_1 - 3v_x}{2} + \frac{e_1 - e_2}{1} + \frac{e_1 - e_3}{1} - 5 = 0 \\ KCL2: \frac{e_2 - e_1}{1} + \frac{e_2 - e_3}{1} + i_y = 0 \\ KCL3: \frac{e_3 - e_2}{1} + \frac{e_3 - e_1}{1} + 5 + \frac{e_3}{2} = 0 \end{cases}$$

توجه شود که در نوشتن KCL2، جریان شاخه‌ای که منبع وابسته حضور دارد را مقدار مجهول i_y فرض کردیم. هرچند برای حل مسئله نیازی به آن جریان نداریم. همچنین دقت داریم که ولتاژ گره‌های ۲ و ۳ با توجه به مدار برابر است با:

$$\left.\begin{aligned} & e_2 = -2i_x = -2 \times \left(-\frac{e_1 - 3v_x}{2} \right) = e_1 - 3v_x \\ & e_3 = v_x \end{aligned}\right\} e_2 = e_1 - 3e_3$$

با در نظر داشتن ولتاژ گره‌های ۲ و ۳ روابط KCL را ساده می‌کنیم:

$$\begin{cases} KCL1: e_1 - 3e_3 + 2e_1 - 2e_2 + 2e_1 - 2e_3 = 10 \\ KCL2: e_2 - e_1 + e_2 - e_3 + i_y = 0 \\ KCL3: 2e_3 - 2e_2 + 2e_3 - 2e_1 + 10 + e_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} KCL1: 5e_1 - 2e_2 - 5e_3 = 10 \\ KCL2: -e_1 + 2e_2 - e_3 = -i_y \\ KCL3: -2e_1 - 2e_2 + 5e_3 = -10 \\ e_2 = e_1 - 3e_3 \end{cases}$$

بعد از حل دستگاه معادلات فوق مقادیر ولتاژ گره‌ها به دست می‌آیند. دقت کنید که از رابطه KCL2 می‌توان استفاده نکرد. زیرا ما به دنبال یافتن i_y نیستیم. با جمع KCL1 و KCL3 به رابطه زیر می‌رسیم

$$3e_1 - 4e_2 = 0 \Rightarrow e_1 = \frac{4}{3}e_2$$

از طرفی

$$e_2 = e_1 - 3e_3 \Rightarrow e_1 = e_2 + 3e_3$$

درنتیجه:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= e_2 + 3e_3 \\ e_1 &= \frac{4}{3}e_2 \end{aligned}\right\} e_2 + 3e_3 = \frac{4}{3}e_2 \Rightarrow e_2 = 9e_3,\ e_1 = \frac{4}{3}\times 9e_3 = 12e_3$$

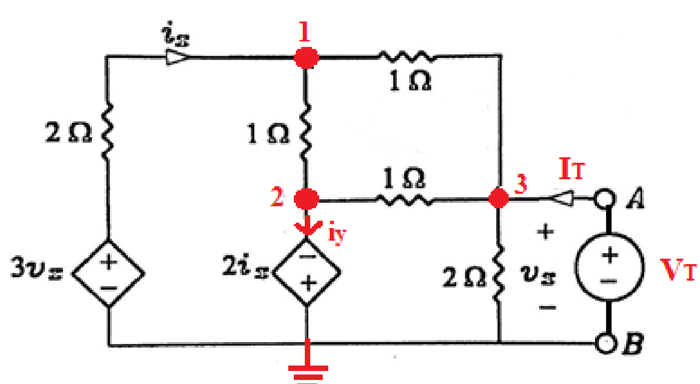
حال با جایگذاری e_1 و e_2 در KCL1 مقادیر ولتاژها به دست می‌آیند:

$$KCL1: 5e_1 - 2e_2 - 5e_3 = 10 \Rightarrow 5\times 12e_3 - 2\times 9e_3 - 5e_3 = 10$$
$$\Rightarrow e_3 = \frac{10}{37},\ e_1 = \frac{120}{37},\ e_2 = \frac{90}{37}$$

$$\begin{cases} v_x = e_3 = \dfrac{10}{37} \\ i_x = -\dfrac{e_1 - 3v_x}{2} = -\dfrac{\frac{120}{37} - 3\frac{10}{37}}{2} = -\dfrac{\frac{90}{37}}{2} = -\dfrac{45}{37} \end{cases}$$

همچنین می‌توان دستگاه معادلات را با استفاده از روش کرامر نیز حل کرد.

پ) همان طور که می‌دانیم، برای یافتن مدار معادل تونن، ابتدا ولتاژ تونن که برابر ولتاژ مدار باز است را به دست می‌آوریم. طبق بندهای الف و ب مقدار v_x که همان ولتاژ مدار باز دو سر A و B است، برابر $v_x = \frac{10}{37}$ می‌باشد.
حال با استفاده از منبع ولتاژ آزمون (V_T) و جریان (I_T) پس از صفر کردن منابع نابسته می‌توان مقاومت معادل مدار را به دست آورد. در نتیجه داریم:



$$\begin{cases} KCL1: \dfrac{e_1 - 3v_x}{2} + \dfrac{e_1 - e_2}{1} + \dfrac{e_1 - e_3}{1} = 0 \\ KCL2: \dfrac{e_2 - e_1}{1} + \dfrac{e_2 - e_3}{1} + i_y = 0 \\ KCL3: \dfrac{e_3 - e_2}{1} + \dfrac{e_3 - e_1}{1} + \dfrac{e_3}{2} - I_T = 0 \end{cases}$$

$$e_2 = -2i_x = -2\left(-\frac{e_1 - 3e_3}{2}\right) = e_1 - 3e_3$$

$$KVL: -e_3 + V_T = 0 \Rightarrow V_T = e_3$$

حال KCL1 را ساده می‌کنیم:

$$KCL1: e_1 - 3e_3 + 2e_1 - 2\left(e_1 - 3e_3\right) + 2e_1 - 2e_3 = 0$$

$$\Rightarrow 3e_1 + e_3 = 0 \Rightarrow e_1 = -\frac{e_3}{3}$$

حال با استفاده از KCL3 و این نکته که $e_3 = V_T$ است، نسبت $\dfrac{V_T}{I_T}$ را به دست می‌آوریم:

$$KCL3: \frac{e_3 - e_2}{1} + \frac{e_3 - e_1}{1} + \frac{e_3}{2} - I_T = 0$$

$$\Rightarrow V_T - e_2 + V_T - e_1 + \frac{V_T}{2} - I_T = 0$$

$$\overset{e_2 = e_1 - 3e_3}{\Rightarrow} V_T - \left(e_1 - 3e_3\right) + V_T - e_1 + \frac{V_T}{2} - I_T = 0$$

$$\overset{e_1 = -\frac{e_3}{3}}{\Rightarrow} V_T - \left(-\frac{e_3}{3} - 3e_3\right) + V_T + \frac{e_3}{3} + \frac{V_T}{2} - I_T = 0$$

$$\overset{e_3 = V_T}{\Rightarrow} V_T - \left(-\frac{V_T}{3} - 3V_T\right) + V_T + \frac{V_T}{3} + \frac{V_T}{2} - I_T = 0$$

$$\Rightarrow \frac{37}{6}V_T = I_T \Rightarrow \frac{V_T}{I_T} = \frac{6}{37}$$

روش دیگر به دست آوردن جریان اتصال کوتاه است. می‌توانستیم بعد از به دست آوردن جریان اتصال کوتاه، مقاومت معادل را از تقسیم ولتاژ مدار باز به جریان اتصال کوتاه محاسبه کنیم.

موفق باشید

صفوی