**به نام خدا**

# مبانی مهندسی برق

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین

سبلان نمین، دانشگاه محقق اردبیلی

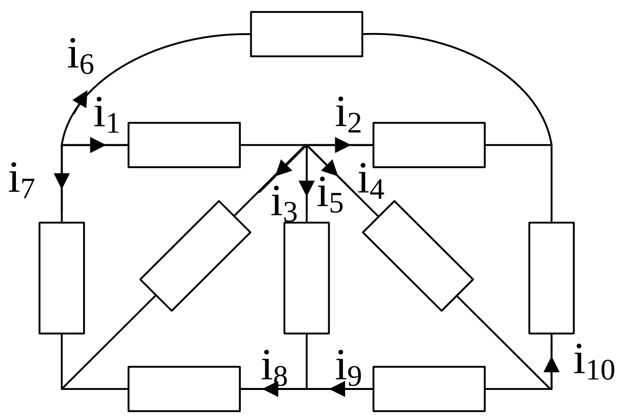
**پاسخ تمرین سری اول**

**موعد تحویل: روز سه شنبه**

**۹۸/۰۷/۲۸**

---

۱. (قضیه تلگان) در مدار شکل روبرو فرض کنید جهت‌های متناظر ولتاژ و جریان انتخاب شده‌اند. درستی قضیه تلگان، یعنی $\sum_{k=1}^{10} v_k i_k = 0$ را به دو طریق زیر (الف و ب) اثبات کنید.




الف) با انتخاب یک دسته متغیرهای مستقل جریان شاخه

ب) با انتخاب یک دسته متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه

ج) همچنین نشان دهید که

$$i_3 + i_5 + i_7 + i_4 = i_{10}$$
$$i_3 + i_5 + i_7 + i_9 = 0$$

جواب: الف) جریان شاخه‌هایی که به هر گره ساده و یا هر گره مرکب یک مدار وصل می‌شوند، نمی‌توانند به عنوان متغیرهای مستقل جریان در نظر گرفته شوند. زیرا مجموع جبری آن‌ها برابر صفر است. تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه در هر مدار برابر تعداد شاخه‌ها منهای تعداد گره‌ها به اضافه یک است.

در نتیجه برای این مسئله $10-6+1=5$ متغیر مستقل جریان شاخه وجود دارد. برای مثال دسته جریان‌های $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_6)$ مستقل می‌باشند.

گره ۱ $kcl: i_1 + i_6 + i_7 = 0 \rightarrow i_7 = -i_1 - i_6$

گره ۲ $kcl: i_1 = i_2 + i_3 + i_4 + i_5 \rightarrow i_5 = i_1 - i_2 - i_3 - i_4$

گره ۳ $kcl: i_2 + i_{10} + i_6 = 0 \rightarrow i_{10} = -i_2 - i_6$

گره۴ $kcl: i_8+i_7+i_3=0 \rightarrow i_8=-i_7-i_3 \rightarrow i_8=i_1+i_6-i_3$

گره۵ $kcl: i_5+i_9=i_8 \rightarrow i_9=i_8-i_5 \rightarrow i_9=i_1+i_6-i_3-i_1+i_2+i_3+i_4$
$\rightarrow i_9=i_2+i_4+i_6$

$$\sum_{k-1}^{10} v_k i_k \rightarrow \begin{aligned} & v_1i_1+v_2i_2+v_3i_3+v_4i_4+v_5i_5+v_6i_6+v_7i_7+v_8i_8+v_9i_9+v_{10}i_{10} \\ & =v_1i_1+v_2i_2+v_3i_3+v_4i_4+v_5(i_1-i_2-i_3-i_4)+v_6i_6+v_7(-i_1-i_6)+v_8(i_1+i_6-i_3) \\ & +v_9(i_2+i_4+i_6)+v_{10}(-i_2-i_6)=0 \\ & i_1(v_1+v_5-v_7+v_8)+i_2(v_2-v_5+v_9-v_{10})+i_3(v_3-v_5-v_8)+i_4(v_4-v_5+v_9) \\ & +i_6(v_6-v_7+v_8+v_9-v_{10})=0 \end{aligned}$$

ضرایب جملات فوق همگی صفر می باشند چون مجموع پتانسیل های درون یک حلقه است.

پس قضیه تلگان برقرار است.

ب) تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه‌ها برابر است با تعداد گره‌ها منهای یک. بنابراین $6-1=5$. درنتیجه $(v_1,v_2,v_3,v_4,v_5)$ را به عنوان متغیرهای مستقل ولتاژ انتخاب می‌کنیم.

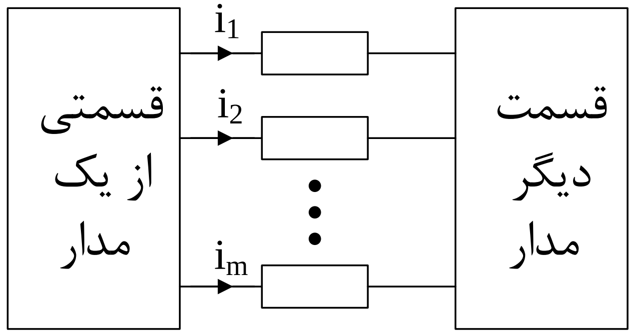
$$\sum_{i=1}^{10} v_k i_k = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & v_1i_1+v_2i_2+v_3i_3+v_4i_4+v_5i_5+v_6i_6+v_7i_7+v_8i_8+v_9i_9+v_{10}i_{10}=0 \\ & v_1i_1+v_2i_2+v_3i_3+v_4i_4+v_5i_5+(v_1+v_2)i_6+(v_1+v_3)i_7+(v_3-v_5)i_8 \\ & +(v_5-v_4)i_q+(v_2-v_4)i_{10}=0 \\ & v_1(i_1+i_6+i_7)+v_2(i_2+i_6+i_{10})+v_3(i_3+i_7+i_8)+v_4(i_4-i_q-i_{10}) \\ & +v_5(i_5-i_8+i_q)=0 \end{aligned}$$

چون هر کدام از ضرایب ولتاژها، مجموع جریان‌های مربوط به گره‌ای از مدار می‌باشد. بنابراین مجموع برابر صفر است.

ج) هر کدام از روابط بیان KCL در گره مرکب می‌باشد.

۲. فرض کنید یک مدار را بتوانیم مانند شکل روبرو به قسمت‌هایی چنان تقسیم کنیم که این قسمت‌ها توسط شاخه‌هایی با جریان‌های $i_1$، $i_2$، ... و $i_m$ به هم وصل شده باشند. نشان دهید:




$$i_1 + i_2 + \ldots + i_m = 0$$

در صورتی که KCL را در گره مرکب هر بخشی از مدار بنویسیم، به رابطه فوق خواهیم رسید.

۳. مقاومت غیرخطی با مشخصه $i = e^{2v} - 1$ به دو سر یک منبع ولتاژ سینوسی $v_s(t) = \cos \omega t$ وصل شده است. چه فرکانس‌هایی در جریان گذرنده از مقاومت وجود دارد؟

$$i = e^{2v} - 1 = e^{2\cos \omega t} - 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad |x| \le 1$$

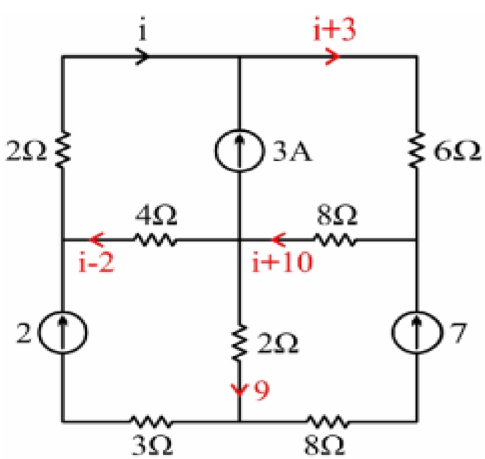
$$i = \left(1 + 2\cos \omega t + 2\cos^2 \omega t + \frac{4}{3}\cos^3 \omega t + \ldots\right) - 1$$

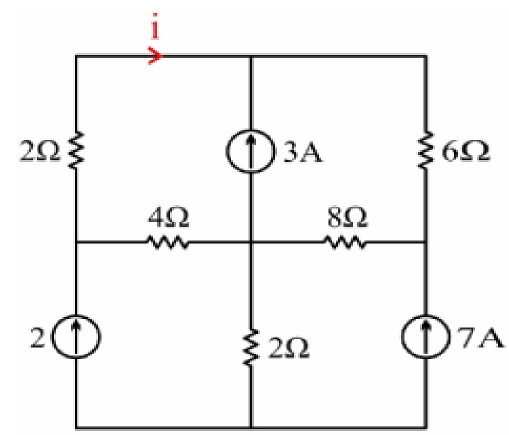
حال با استفاده از روابط تبدیل حاصلضرب به مجموع در مثلثات داریم:

$$i = \left(1 + 2\cos \omega t + 2\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{3\cos \omega t + \cos 3\omega t}{4}\right) + \ldots\right) - 1$$

بنابراین همه فرکانس‌هایی که مضرب صحیح و مثبتی از $\omega$ هستند، در جریان گذرنده از مقاومت وجود دارند.

۴. در مدار شکل زیر، جریان مقاومت ۲ اهمی را پیدا کنید.

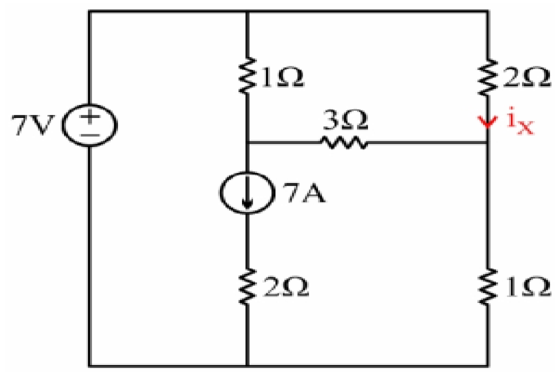



پس از نوشتن KCL ها به صورت ذهنی بر روی مدار، KVL را در مستطیل بالایی می‌نویسیم:

$$KVL: 2i + 6(i+3) + 8(i+10) + 4(i-2) = 0 \Rightarrow i = -4.5A$$

۵. در شکل روبرو $i_x$ را پیدا کنید.




جریان مقاومت ۳ اهمی را $i_y$ در نظر می‌گیریم. جریان مقاومت ۱ اهمی شاخه پایین را هم $i_z$. جریان شاخه مقاومت ۱ اهمی بالا را نیز $i_t$ در نظر می‌گیریم. سپس شروع به نوشتن KCL و KVL می‌کنیم تا مجهول مورد نظر را پیدا کنیم.

$$KCL1: -i_y - i_x + i_z = 0 \Rightarrow i_z = i_y + i_x$$
$$KCL2: -i_t + 7 + i_y = 0 \Rightarrow i_t = i_y + 7$$

$$KVL1: -1\times i_t + 2\times i_x - 3\times i_y = 0 \Rightarrow 4i_y - 2i_x + 7 = 0$$
$$KVL2: -7 + 2i_x + i_z = 0 \Rightarrow i_y + 3i_x = 7$$
$$\begin{cases} 4i_y - 2i_x = -7 \\ i_y + 3i_x = 7 \end{cases} \Rightarrow i_x = 2.5A, \qquad i_y = -0.5A$$

۶. مشخصه V-I یک مقاومت به صورت $V = 2I + e^{-t}I - \frac{1}{2}V\cos 2t$ است. این مقاومت کدام ویژگی‌ها را دارد؟
(خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان، دوطرفه بودن)

رابطه فوق را جوری ساده می‌کنیم که بتوانیم رابطه کلی ولتاژ با جریان را بیابیم. پس از ساده‌سازی به رابطه زیر خواهیم رسید. حال مشاهده می‌کنیم که رابطه ولتاژ و جریان خطی است، هرچند شیب آن با زمان تغییر می‌کند. شیب خط بیشتر از این ساده نمی‌شود. در نتیجه مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان است. حال برای بررسی دوطرفه بودن، متقارن بودن نسبت به مبدا مختصات را بررسی می‌کنیم. اگر جریان منفی شود، ولتاژ نیز همان مقدار قبلی را دارد و فقط منفی می‌شود. این یعنی اینکه نسبت به مبدا متقارن است. بنابراین دوطرفه می‌باشد.

$$V = \frac{2 + e^{-t}}{1 + \frac{1}{2}\cos 2t} I$$

موفق باشید

صفوی