به نام خدا

مبانی مهندسی برق

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین
سبلان نمین، دانشگاه محقق اردبیلی

پاسخ تمرین سری پنجم
موعد تحویل: روز شنبه
۱۳۹۸/۱۰/۰۷

---

۱. فازورهای A و B را چنان تعیین کنید که $|A|=5\sqrt{2}$ ، $|B|=4$ و $2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$

پاسخ: برای یافتن فازور A و B باید طرف چپ را به صورت یک عدد مختلط بنویسیم و بخش های حقیقی و موهومی طرفین را برابر قرار می‌دهیم.

$$2A+5B=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$
$$2\left(5\sqrt{2}e^{j\theta}\right)+5\left(4e^{j\varphi}\right)=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$
$$10\sqrt{2}\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)+20\left(\cos\varphi+j\sin\varphi\right)=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$
$$\left[10\sqrt{2}\cos\theta+20\cos\varphi\right]+j\left[10\sqrt{2}\sin\theta+20\sin\varphi\right]=j10\left(1+\sqrt{3}\right)$$
$$\begin{cases}10\sqrt{2}\cos\theta+20\cos\varphi=0\\ 10\sqrt{2}\sin\theta+20\sin\varphi=10\left(1+\sqrt{3}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta=\dfrac{3\pi}{4}\\ \varphi=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$$

۲. با استفاده از روش فازوری عبارت‌های زیر را به صورت یک سیگنال سینوسی نمایش دهید:

a) $2\sin\left(2t+18^\circ\right)-3\cos\left(2t+35^\circ\right)+2\dfrac{d^2}{dt^2}\sin\left(2t-25^\circ\right)$

b) $\cos 2t+\cos\left(2t+120^\circ\right)+\cos\left(2t+240^\circ\right)$

پاسخ:

a) می‌دانیم $\sin(x)=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$. بنابراین ابتدا عبارت‌های شامل sin را برحسب cos می‌نویسیم. هنگام محاسبات با اعداد مختلط باید دقت کنیم که اعداد به صورت درجه هستند و یا برحسب رادیان. بنابراین هنگام محاسبه با ماشین حساب حتما دقت کنید که برحسب درجه اعداد رو وارد می‌کنید یا برحسب رادیان.

$$2\sin\left(2t+18^\circ\right)-3\cos\left(2t+35^\circ\right)+2\frac{d^2}{dt^2}\sin\left(2t-25^\circ\right)$$
$$=2\cos\left(2t+18^\circ-90^\circ\right)-3\cos\left(2t+35^\circ\right)+2\frac{d^2}{dt^2}\cos\left(2t-25^\circ-90^\circ\right)$$
$$=2\cos\left(2t-72^\circ\right)-3\cos\left(2t+35^\circ\right)+2\frac{d^2}{dt^2}\cos\left(2t-115^\circ\right)$$

سپس با استفاده از فازورها، فازور تک تک عبارت‌ها را نوشته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow 2e^{-j72}-3e^{j35}+2(j2)^2 e^{-j115}$$
$$=2\left[\cos(-72)+j\sin(-72)\right]-3\left[\cos(35)+j\sin(35)\right]-8\left[\cos(-115)+j\sin(-115)\right]$$
$$=\left[2\cos(-72)-3\cos(35)-8\cos(-115)\right]+j\left[2\sin(-72)-3\sin(35)-8\sin(-115)\right]$$
$$=\left[2\times 0.309-3\times 0.819+8\times 0.423\right]+j\left[-2\times 0.951-3\times 0.574+8\times 0.906\right]$$
$$=\left[0.618-2.457+3.384\right]+j\left[-1.902-1.722+7.248\right]$$
$$=1.545+j3.624=\sqrt{2.387+13.133}e^{j66.91}=3.939e^{j66.91}$$

در نهایت فازور نهایی را به حالت cos برمی‌گردانیم.

$$3.939e^{j66.91}\Rightarrow 3.939\cos(2t+66.91)$$

b)

$$\cos 2t+\cos\left(2t+120^\circ\right)+\cos\left(2t+240^\circ\right)$$
$$\Rightarrow 1e^{j0}+1e^{j120}+1e^{j240}=\left[\cos(0)+j\sin(0)\right]+\left[\cos(120)+j\sin(120)\right]$$
$$+\left[\cos(240)+j\sin(240)\right]=1+\left[-0.5+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right]+\left[-0.5+j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]=0$$

دقت داریم که جمع سه کسینوسی هم‌فرکانس که هر کدام ۱۲۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند برابر صفر است.

۳. پاسخ خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را با روش فازوری به دست آورید:

a) $\dfrac{d^2 i}{dt^2}+\dfrac{di}{dt}+12i=12\cos 3t$

b) $\dfrac{d^3 x}{dt^3}+2\dfrac{d^2 x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+6x=4\sin t-2\cos\left(t-27^\circ\right)+3\sin\left(2t+36^\circ\right)$

پاسخ:

a) $\dfrac{d^2 i}{dt^2}+\dfrac{di}{dt}+12i=12\cos 3t$

$$(j3)^2 I+(j3)I+12I=12e^{j0}$$
$$\Rightarrow(-9+j3+12)I=12$$
$$\Rightarrow I=\frac{12}{3+j3}=\frac{4}{1+j}=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{j(0-45)}=2\sqrt{2}e^{-j45}$$
$$\Rightarrow i(t)=2\sqrt{2}\cos\left(3t-45^\circ\right)$$

b) $\dfrac{d^3 x}{dt^3}+2\dfrac{d^2 x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+6x=4\sin t-2\cos\left(t-27^\circ\right)+3\sin\left(2t+36^\circ\right)$

همان‌طور که در کلاس گفته شد، برای حل چنین مسائلی می‌توان از قضیه جمع آثار بهره برد. دقت داریم که دو فرکانس زاویه ای $\omega = 1$ و $\omega = 2$ در سمت راست معادله وجود دارد. بنابراین مسئله را برای هر دو فرکانس زاویه ای حل می‌کنیم و در نهایت جواب‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

الف) برای $\omega = 1$

$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 6x = 4\sin t - 2\cos\left(t - 27^\circ\right)$$
$$(j1)^3 X_1 + 2(j1)^2 X_1 + (j1) X_1 + 6X_1 = 4e^{j(0-90)} - 2e^{-j27}$$
$$\left[-j - 2 + j + 6\right] X_1 = 4\left[\cos(-90) + j\sin(-90)\right] - 2\left[\cos(-27) + j\sin(-27)\right]$$
$$X_1 = \frac{-4j - 2\left[0.891 - j0.454\right]}{4} = \frac{-1.782 - j3.092}{4} = -0.446 - j0.773 = 0.893e^{-j120}$$

حال نتیجه را از حالت فازوری خارج و به صورت زمانی می‌نویسیم:

$$X_1 = 0.893e^{-j120} \Rightarrow x_1(t) = 0.893\cos\left(t - 120^\circ\right)$$

ب) برای $\omega = 2$

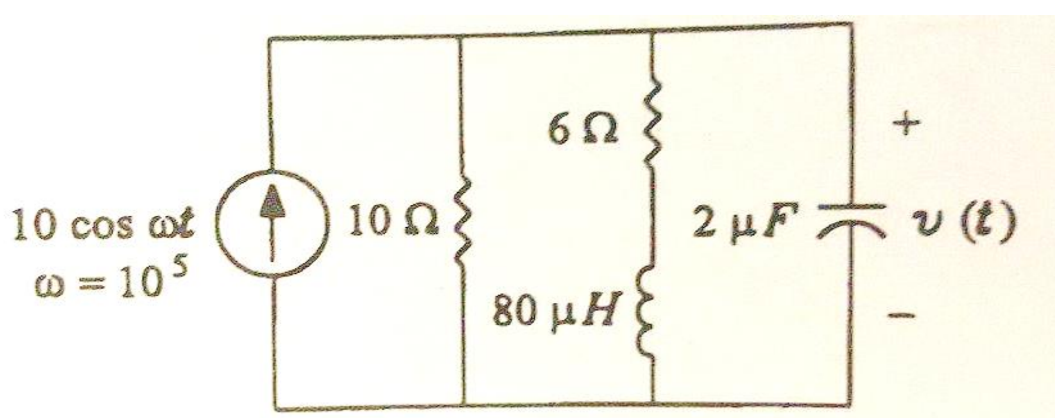
$$\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 6x = 3\sin\left(2t + 36^\circ\right)$$
$$(j2)^3 X_2 + 2(j2)^2 X_2 + (j2) X_2 + 6X_2 = 3e^{j(36-90)}$$
$$\left[-8j - 8 + j2 + 6\right] X_2 = 3e^{-j54}$$
$$X_2 = \frac{3e^{-j54}}{-2 - j6} = \frac{3e^{-j54}}{6.325e^{-j108.43}} = 0.474e^{j(-54+108.43)} = 0.474e^{j54.43}$$

$$X_2 = 0.474e^{j54.43} \Rightarrow x_2(t) = 0.474\cos\left(2t + 54.43^\circ\right)$$

حال با استفاده از قانون جمع آثار داریم:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0.893\cos\left(t - 120^\circ\right) + 0.474\cos\left(2t + 54.43^\circ\right)$$

۴. مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. ولتاژ $v(t)$ را در حوزه زمان به دست آورید.

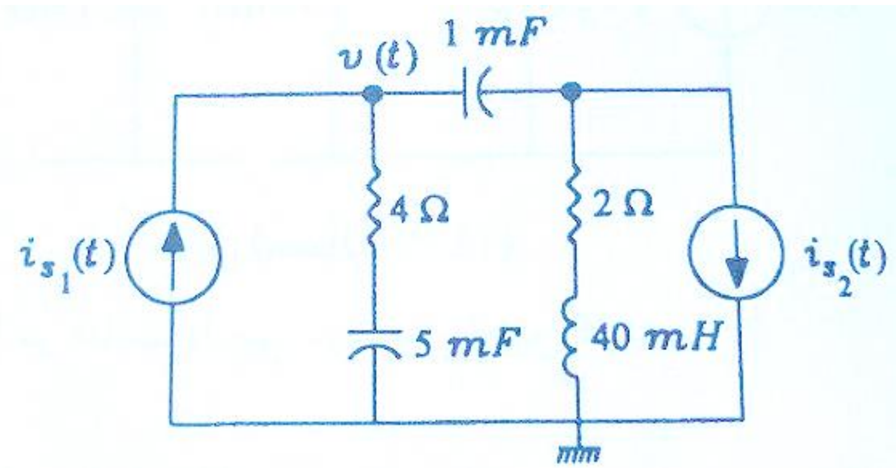


پاسخ: با دقت در مدار متوجه می‌شویم که سه شاخه موازی وجود دارد که مقدار ولتاژ $v(t)$ به دلیل موازی بودن شاخه‌ها برابر ولتاژ همه شاخه‌هاست. بنابراین همان‌طور که در کلاس اشاره شد، می‌توان ابتدا ادمیتانس معادل را محاسبه کرد و سپس مقدار ولتاژ مدنظر را به راحتی به دست آورد.

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{10}+\frac{1}{6+j80\times10^{-6}\times10^{5}}+j2\times10^{-6}\times10^{5}=0.1+\frac{1}{6+j8}+j0.2\\
&=0.1+j0.2+\frac{1}{6+j8}\times\frac{6-j8}{6-j8}=0.1+j0.2+\frac{6-j8}{36+64}\\
&=0.1+j0.2+0.06-j0.08\\
&=0.16+j0.12
\end{aligned}$$

$$V=\frac{I}{Y}=\frac{10e^{j0}}{0.16+j0.12}=\frac{10}{\sqrt{0.0256+0.0144}e^{j36.87}}=\frac{10}{0.2}e^{j(0-36.87)}=50e^{-j36.87}$$
$$\Rightarrow v(t)=50\cos\left(10^{5}t-36.87\right)$$

۵. مدار شکل زیر در حالت دائمی سینوسی است. $i_{s_1}(t)=\cos100t$ و $i_{s_2}(t)=\frac{1}{2}\sin100t$. ولتاژ $v(t)$ را در حوزه زمان به دست آورید.



پاسخ: از تحلیل گره در حالت فازوری استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه فرکانس هر دو منبع جریان یکسان است، نیازی به استفاده از قانون جمع آثار نیست.

$$\begin{cases}
KCL1:\dfrac{V_1}{4+\dfrac{1}{j5\times10^{-3}\times100}}+\dfrac{V_1-V_2}{\dfrac{1}{j1\times10^{-3}\times100}}=1e^{j0}\\[2ex]
KCL2:\dfrac{-V_1}{\dfrac{1}{j1\times10^{-3}\times100}}+\dfrac{V_2}{2+j40\times10^{-3}\times100}+\dfrac{1}{2}e^{-j90}=0
\end{cases}$$

با استفاده از روابط اعداد مختلط، عبارت‌های فوق را ساده می‌کنیم.

$$\begin{cases} KCL1: \dfrac{V_1}{4-j2} + \dfrac{V_1 - V_2}{-j10} = 1 \\ KCL2: \dfrac{V_2 - V_1}{-j10} + \dfrac{V_2}{2+j4} - \dfrac{j}{2} = 0 \end{cases}$$

حال از رابطه KCL1 مقدار V_2 را پیدا کرده و در رابطه KCL2 جایگذاری می‌کنیم.

$$KCL1: \frac{(4+j2)V_1}{16+4} + \frac{j}{10}(V_1 - V_2) = 1 \Rightarrow (0.2+j0.1)V_1 + j0.1V_1 - j0.1V_2 = 1$$
$$\Rightarrow (0.2+j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1 \Rightarrow j0.1V_2 = 0.2(1+j)V_1 - 1$$
$$\Rightarrow -V_2 = 2(j-1)V_1 - 10j \Rightarrow V_2 = -2(j-1)V_1 + 10j$$

$$KCL2: \frac{V_2 - V_1}{-j10} + \frac{V_2}{2+j4} - \frac{j}{2} = 0 \Rightarrow j0.1V_2 - j0.1V_1 + \frac{2-j4}{4+16}V_2 - \frac{j}{2} = 0$$
$$\Rightarrow 0.2(1+j)V_1 - 1 - j0.1V_1 + (0.1-j0.2)\left[-2(j-1)V_1 + 10j\right] - \frac{j}{2} = 0$$
$$\Rightarrow \left[0.2(1+j) - j0.1 - 2(0.1-j0.2)(j-1)\right]V_1 - 1 + (0.1-j0.2)(10j) - \frac{j}{2} = 0$$
$$\Rightarrow \left[0.2+j0.2-j0.1-2(0.1j-0.1+0.2+j0.2)\right]V_1 - 1 + j + 2 - 0.5j = 0$$
$$\Rightarrow -j0.5V_1 + (1+0.5j) = 0 \Rightarrow V_1 = \frac{1+0.5j}{j0.5} = 1 - j2 = \sqrt{5}e^{j\tan^{-1}(-2)} = \sqrt{5}e^{-j63.43}$$
$$\Rightarrow v_1(t) = \sqrt{5}\cos\left(100t - 63.43^{\circ}\right)$$

موفق باشید

صفوی