به نام خدا

مبانی مهندسی برق

دانشکده مهندسی فناوری‌های نوین

سبلان نمین، دانشگاه محقق اردبیلی

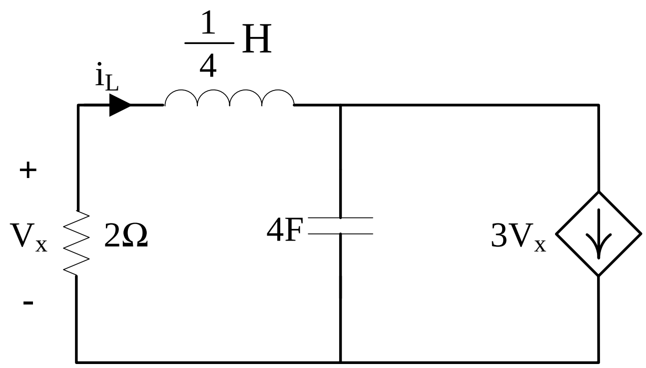
پاسخ تمرین سری چهارم

موعد تحویل: روز شنبه

۱۳۹۸/۱۰/۰۷

---

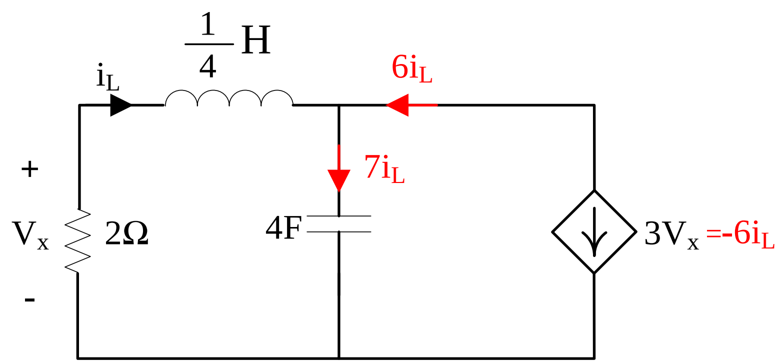
۱. پاسخ ورودی صفر جریان $i_L(t)$ را بیابید. ($i_L(0_-)=1A,\ \ V_c(0_-)=-2v$)



پاسخ:

$$V_x=-2i_L\ \ \Rightarrow 3V_x=-6i_L$$

با توجه به مقدار V_x به راحتی می‌توان KCL را بر روی مدار نوشت. بنابراین جریان خازن برابر $i_C=7i_L$ خواهد بود.



حال KVL حلقه چپ را می‌نویسیم:

$$2i_L+\frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}+V_c(0_-)+\frac{1}{4}\int_0^t i_c(t')\,dt'=0$$

$$\Rightarrow 2i_L+\frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}+V_c(0_-)+\frac{1}{4}\int_0^t 7i_L(t')\,dt'=0$$

حال می‌توان از معادله فوق یک بار مشتق گرفت تا انتگرال را نداشته باشیم.

$$\Rightarrow 2\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{4}\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{7}{4}i_L=0$$
$$\Rightarrow \frac{d^2i_L}{dt^2}+8\frac{di_L}{dt}+7i_L=0$$

حال برای حل معادله دیفرانسیل فوق باید شرایط اولیه را در نظر بگیریم. طبق صورت سوال $i_L(0_-)=1A,\ \ V_c(0_-)=-2v$. البته برای حل معادله دیفرانسیل فوق نیاز به یافتن $\frac{di_L}{dt}(0_-)$ است. بنابراین:

$$2i_L(0_-)+\frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}(0_-)+V_c(0_-)+\underbrace{\frac{7}{4}\int_0^t i_L(t')dt'}_{=0}=0$$
$$2+\frac{1}{4}\frac{di_L}{dt}(0_-)-2=0\Rightarrow \frac{di_L}{dt}(0_-)=0$$

حال معادله مشخصه معادله دیفرانسیل را می‌نویسیم:

$$S^2+8S+7=0$$
$$S_1=-1, S_2=-7$$

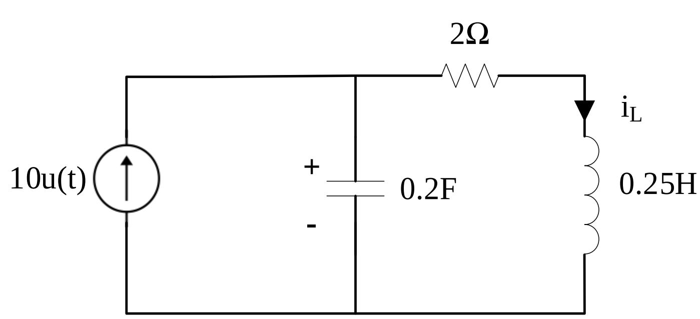
معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی منفی است. بنابراین مدار در حالت میرای شدید است. در نتیجه فرم کلی جواب عمومی در این حالت برابر است با:

$$i_L(t)=K_1e^{s_1t}+K_2e^{s_2t}=K_1e^{-t}+K_2e^{-7t}$$

چون دنبال پاسخ ورودی صفر هستیم، دیگر پاسخ خصوصی نداریم. بنابراین مجهولات را به کمک شرایط اولیه مدار در حالت جواب عمومی به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} i_L(0)=1 \\ \frac{di_L}{dt}(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1+K_2=1 \\ -K_1-7K_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1=\frac{7}{6} \\ K_2=\frac{-1}{6} \end{cases} \Rightarrow i_L(t)=\frac{7}{6}e^{-t}-\frac{1}{6}e^{-7t}$$

۲. در مدار شکل زیر جریان $i_L(t)$ را بیابید.



ابتدا KCL را در گره بالایی می‌نویسیم. سپس برای ولتاژ خازن از KVL مش سمت راست استفاده می‌کنیم. با این دو رابطه به راحتی معادله دیفرانسیل حاکم بر مدار به دست می‌آید. معادله مشخصه آن را نوشته و ریشه‌های آن را به دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{aligned}&0.2\frac{dV_c(t)}{dt}+i_L(t)=10u(t)\\&V_c(t)=2i_L(t)+0.25\frac{di_L(t)}{dt}\end{aligned}\right\}\Rightarrow 0.2\frac{d}{dt}\left[2i_L(t)+0.25\frac{di_L(t)}{dt}\right]+i_L(t)=10u(t)$$

$$\Rightarrow 0.05\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}+0.4\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)=10u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2i_L(t)}{dt^2}+8\frac{di_L(t)}{dt}+20i_L(t)=200u(t)$$

$$S^2+8S+20=0 \qquad \Rightarrow S_{1,2}=-4\pm j2$$

ریشه‌های معادله مشخصه مزدوج مختلط هستند. بنابراین مدار در حالت میرای ضعیف می‌باشد. در نتیجه فرم کلی جواب عمومی بدین صورت است.

$$i_{Lh}=e^{-4t}\left(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t\right)$$

هرچند می‌توان جواب عمومی را به صورت $i_{Lh}=K_1e^{-4t}\cos(2t+\theta)$ نیز فرض کرد و مجهولات K_1,θ را به دست آورد. جواب خصوصی معادله را نیز به دلیل اینکه سمت راست معادله $10u(t)$ است، با جایگذاری عدد ثابت در معادله دیفرانسیل به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$i_{Lp}=K \qquad \Rightarrow 0+0+20K=200\Rightarrow K=10$$

حال جواب کلی معادله برابر است با مجموع جواب عمومی و جواب خصوصی:

$$i_L(t)=e^{-4t}\left(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t\right)+10$$

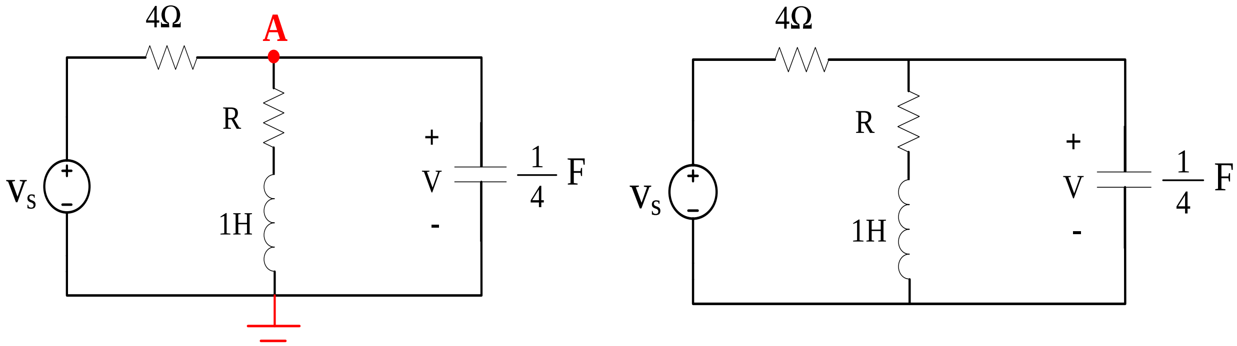
برای به دست آوردن مجهولات K_1,K_2، از شرایط اولیه کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases}i_L(0_-)=0\Rightarrow K_1+10=0\Rightarrow K_1=-10\\ \dfrac{di_L(0_-)}{dt}=0\Rightarrow\left[-4e^{-4t}\left(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t\right)+e^{-4t}\left(-2K_1\sin 2t+2K_2\cos 2t\right)\right]_{t=0}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow -4K_1+2K_2=0\Rightarrow K_2=20$$

$$i_L(t)=e^{-4t}\left(-10\cos 2t+20\sin 2t\right)+10$$

۳. در مدار شکل زیر معادله دیفرانسیلی برحسب ولتاژ خازن V تشکیل دهید. مقدار مقاومت R را چنان انتخاب کنید که مدار میرای بحرانی باشد.



پاسخ: ابتدا گره بالایی را A می‌نامیم و گره مرجع را مشخص می‌کنیم.

ولتاژ گره A همان ولتاژ دو سر خازن است. این ولتاژ برابر مجموع ولتاژ مقاومت R و سلف ۱ هانری است. به عبارت دیگر

$$V_A = V$$

$$V_A = Ri_L + 1\times\frac{di_L}{dt}$$

با استفاده از KCL در گره A به راحتی می‌توان جریان سلف را برحسب مجهولات دیگر به دست آورد.

$$\frac{V_A - V_s}{4} + i_L + \frac{1}{4}\frac{dV}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \frac{V - V_s}{4} + i_L + \frac{1}{4}\frac{dV}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow i_L = \frac{V_s - V}{4} - \frac{1}{4}\frac{dV}{dt}$$

حال مقدار جریان سلف را در رابطه ولتاژ گره A جایگذاری کرده و معادله دیفرانسیل مطلوب را به دست می‌آوریم:

$$V_A = V = Ri_L + 1\times\frac{di_L}{dt} = R\left[\frac{V_s - V}{4} - \frac{1}{4}\frac{dV}{dt}\right] + \frac{d}{dt}\left[\frac{V_s - V}{4} - \frac{1}{4}\frac{dV}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{RV_s}{4} - \frac{RV}{4} - \frac{R}{4}\frac{dV}{dt} + \frac{1}{4}\frac{dV_s}{dt} - \frac{1}{4}\frac{dV}{dt} - \frac{1}{4}\frac{d^2V}{dt^2}$$

$$\Rightarrow 4V + RV + R\frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{d^2V}{dt^2} = \frac{dV_s}{dt} + RV_s$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dt^2} + (R+1)\frac{dV}{dt} + (R+4)V = \frac{dV_s}{dt} + RV_s$$

شرط آنکه مدار میرای بحرانی باشد آن است که $\alpha = \omega_0$ باشد. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha &= R+1 \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{R+1}{2} \\ \omega_0^2 &= R+4 \qquad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{R+4} \end{aligned}\right\} \alpha = \omega_0 \Rightarrow \frac{R+1}{2} = \sqrt{R+4} \Rightarrow R = 5\Omega$$

موفق باشید

صفوی