به نام خدا

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دانشکده فنی و مهندسی،

دانشگاه محقق اردبیلی

پاسخ تمرین سری اول

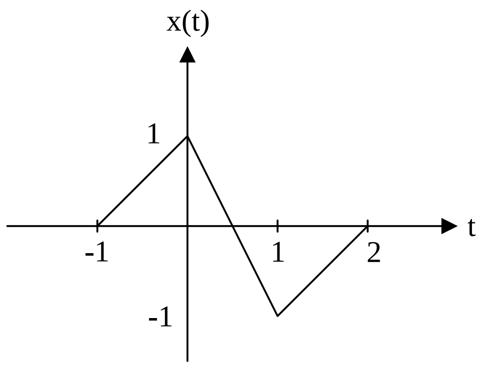
موعد تحویل: روز سه‌شنبه

۱۳۹۸/۰۷/۲۳

---

۱. برای سیگنال داده شده در شکل زیر، سیگنال‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x\left(-2\left(t-1\right)\right)$ ب) $x\left(t/2+1/2\right)$

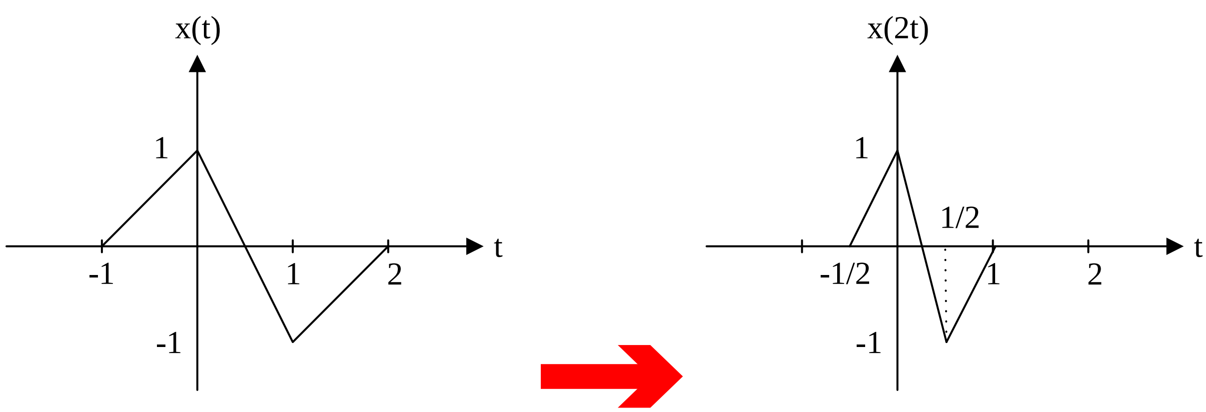


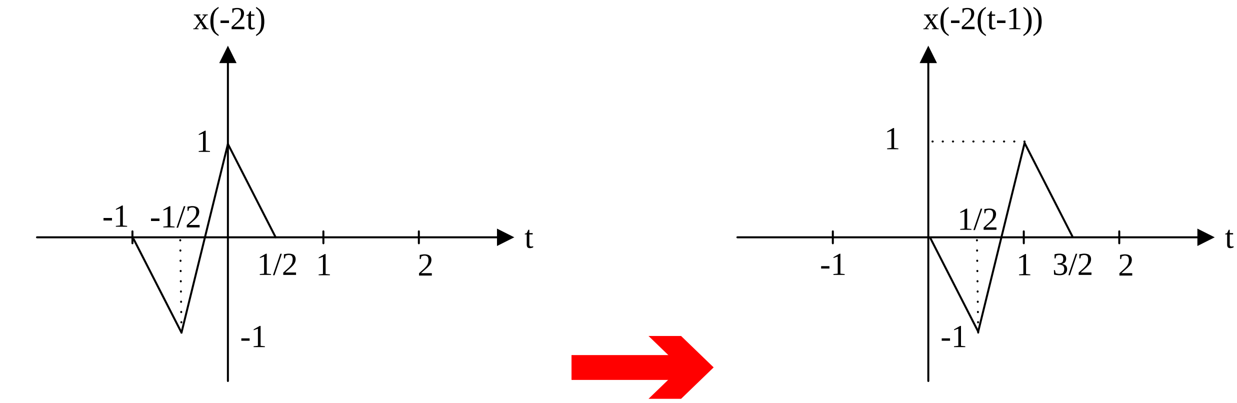
پاسخ:

لطفاً به پاسخ این سوال دقت نمایید. در بسیاری از مواقع تبدیل متغیر مستقل به صورت t به $\alpha t+\beta$ است. در این حالت دو روش برای حل مسئله وجود دارد که در ادامه هر دو روش توضیح داده می‌شود.

روش اول: می‌توان ابتدا تغییر مقیاس را انجام داد و سپس جابجایی زمانی را اعمال کرد. در این صورت $\alpha t+\beta=\alpha\left(t+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ است. **در نتیجه مقدار جابجایی زمانی برابر $\frac{\beta}{\alpha}$ است.**

الف) دقت کنید که صورت مسئله بخش الف، خود به صورت $\alpha\left(t+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ است. بنابراین پس از تغییر مقیاس به اندازه -2، مقدار جابجایی برابر -1 خواهد بود.



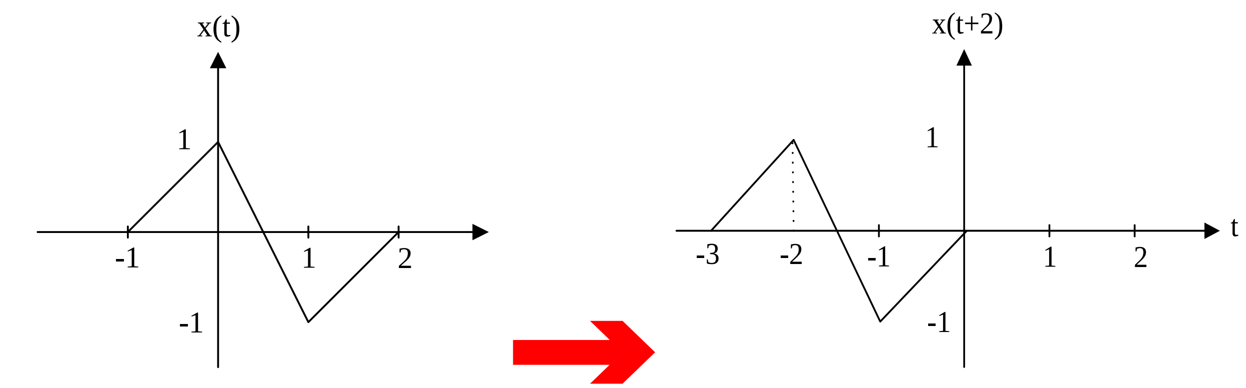


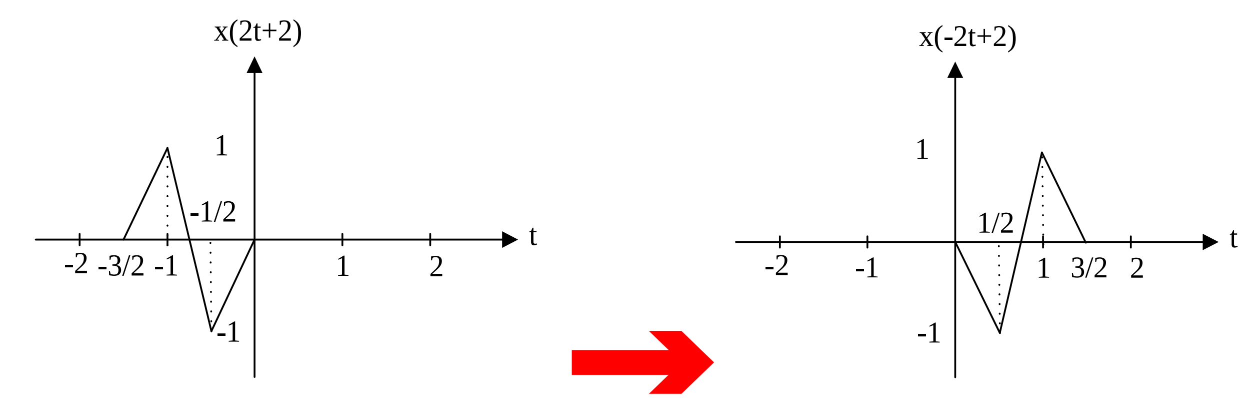
روش دوم: می‌توان ابتدا جابجایی زمانی را اعمال کرده و سپس تغییر مقیاس را انجام داد. همان‌طور که در کلاس توصیه شد از این روش استفاده نمایید.

برای بخش الف، ابتدا صورت مسئله را به فرم $\alpha t+\beta$ بیان می‌کنیم. بنابراین:

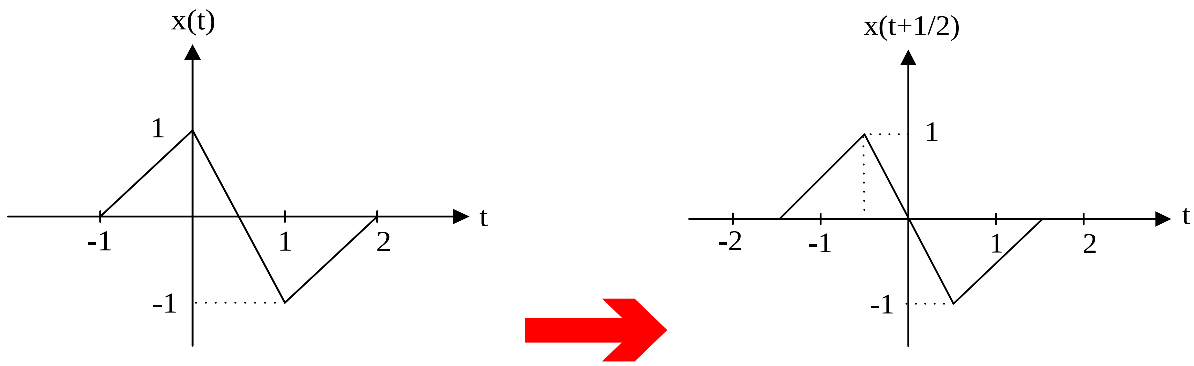
$x\left(-2\left(t-1\right)\right)=x\left(-2t+2\right)$

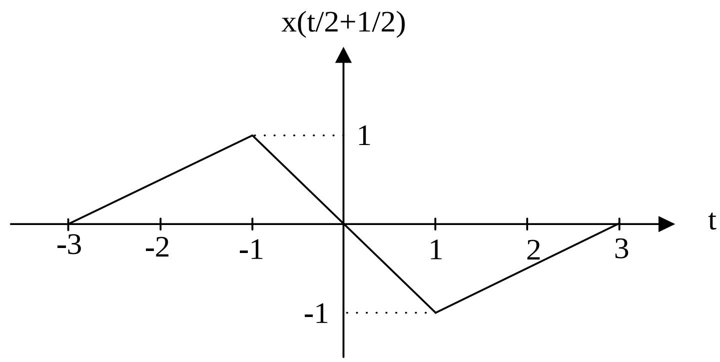
حال باید ابتدا به اندازه $+2$ جابجایی را اعمال کرده و سپس تغییر مقیاس به اندازه -2 را انجام دهیم.





ب) برای یافتن جواب از روش دوم بیان شده در بخش قبل استفاده می‌کنیم.





۲. تعیین کنید که کدام یک از سیگنال‌های زیر متناوب هستند؟

الف) $x(t)=e^{(-1+j)t}$

ب) $x[n]=u[n]+u[-n]$

ج) $x[n]=e^{j7\pi n}$

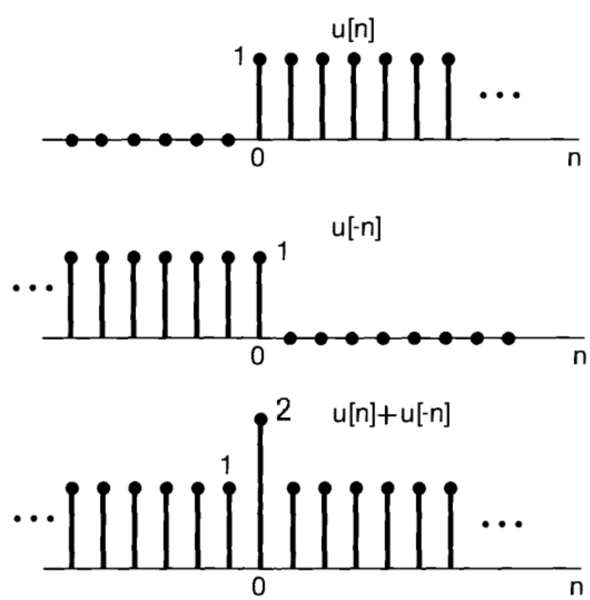
د) $x[n]=3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$

ه) $x[n]=3e^{j3/5(n+1/2)}$

پاسخ:

الف) سیگنال $x(t)$ یک تابع نمایی مختلط است e^{jt} که در یک تابع نمایی کاهشی e^{-t} ضرب شده‌است. بنابراین متناوب نیست.

ب) سیگنال $x[n]=u[n]+u[-n]$ را می‌توانیم رسم کنیم.



به دلیل اینکه مقدار $x[n]$ در لحظه صفر برابر 2 می‌باشد و با هیچ دوره تناوبی تکرار نمی‌شود، در نتیجه این سیگنال متناوب نیست.

ج) این سیگنال برابر است با $x[n]=e^{j7\pi n}=e^{j\pi n}$. در نتیجه متناوب است با دوره تناوب $N=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

د) متناوب است با دوره تناوب اصلی $N=m\left(\dfrac{2\pi}{3\pi/5}\right)=m\left(\dfrac{10}{3}\right)$ با انتخاب $m=3$ دوره تناوب اصلی برابر $N=10$ است.

ه) متناوب نیست چراکه با انتخاب هر مقدار صحیح m، مقدار $N=m\left(\dfrac{2\pi}{3/5}\right)=m\left(\dfrac{10\pi}{3}\right)$ عددی صحیح نخواهد شد.

۳. اگر $x(t)$ سیگنالی زوج و $x(t-1)$ نیز سیگنالی زوج باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $x(t)$ یک سیگنال متناوب است؟

پاسخ:

در صورتی که سیگنال $x(t)$ زوج باشد، داریم: $x(-t)=x(t)$

همچنین اگر سیگنال $x(t-1)$ نیز زوج باشد، خواهیم داشت: $x(-t-1)=x(t-1)$

حال باید متناوب بودن سیگنال $x(t)$ را بررسی کنیم. برای این منظور از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$-t-1=-r \Rightarrow t=r-1$

با جایگزینی متغیر جدید داریم:

$$x(-r)=x(-t-1)=x(t-1)=x(r-1-1)=x(r-2)$$

چون تابع $x(t)$ زوج می‌باشد، بنابراین $x(-r)=x(r)$. در نتیجه

$$x(r)=x(r-2)$$

در نهایت اثبات شد که تابع $x(t)$ متناوب با دوره تناوب ۲ می‌باشد.

۴. سیگنال نمایی $e^{-\alpha t}$ برای مقادیر حقیقی α سیگنال توان است و یا انرژی؟ اگر α عددی موهومی خالص باشد ($\alpha = jx$)، در این صورت سیگنال یادشده، سیگنال توان است و یا انرژی؟

پاسخ:

برای مقادیر حقیقی α داریم:

$$E_g=\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\alpha t}\right)^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\alpha t}dt=\infty$$

$$P_g=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(e^{-\alpha t}\right)^2 dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-2\alpha t}dt=\infty$$

بنابراین برای مقادیر برای مقادیر موهومی $\alpha = jx$ داریم:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) g^*(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{jxt}\right)\left(e^{-jxt}\right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dt = \infty$$

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) g^*(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left(e^{jxt}\right)\left(e^{-jxt}\right) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1 dt = 1$$

بنابراین برای مقادیر موهومی α سیگنال نمایی، یک سیگنال توان است.

۵. تابع پله $u(t)$ و همچنین تابع ضربه $\delta(t)$ سیگنال توان هستند و یا انرژی؟ بحث کنید.

پاسخ: در رابطه با تابع پله به راحتی می‌توان از تعاریف انرژی و توان به صورت زیر استفاده کرد:

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(t)\right]^2 dt = \int_{0}^{\infty} (1)^2\, dt = t\Big|_0^{\infty} = \infty$$

$$P_u = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[u(t)\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{T}{2}} (1)^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} t\Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه انرژی سیگنال پله، بی‌نهایت است و مقدار توان آن عددی محدود بین صفر و بی‌نهایت است، **در نتیجه تابع پله سیگنال توان می‌باشد.**

و اما انرژی و توان تابع ضربه را در دو حالت محاسبه می‌کنیم.

حالت پیوسته:

در رابطه با تابع ضربه ممکن است تحلیل‌های اشتباه مختلفی را دیده باشید که برای نمونه یک مورد از این تحلیل‌ها را اینجا بیان خواهیم کرد. اما در نظر داشته باشید که **تابع ضربه، در تعریف تابع نمی‌گنجد.** ضربه یک توزیع است و نه تابع (بحث در مورد چرایی آن خارج از اهداف درس است). بنابراین در بررسی قضایایی که برای توابع استفاده می‌کنیم، هنگام استفاده برای ضربه باید دقت کنیم. مقدار ضربه در صفر بی‌نهایت است. در نتیجه مقدار $\delta^2(t)$ در صفر تعریف نشده است. **در نتیجه تابع ضربه در حالت پیوسته، نه سیگنال توان است و نه سیگنال انرژی.**

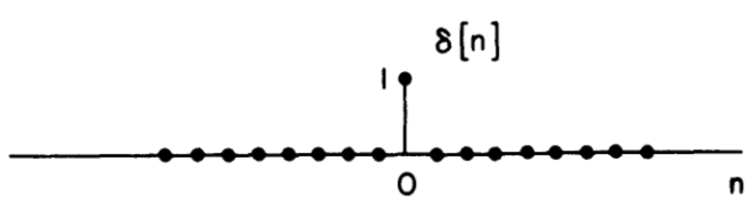
یکی از تحلیل‌های **اشتباه** که قضیه انرژی رالی و یا پارسوال را برای ضربه به کار برده و توان ضربه را محاسبه می‌کند:

$$g(t) = \delta(t) \Leftrightarrow G(f) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(f)\, df \quad \Rightarrow P = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} X^2(f)\, df = \lim_{B\to\infty} \frac{2B}{2B} = 1$$

حالت گسسته: دقت داشته باشید برای حالت گسسته داستان فرق می‌کند. زیرا تابع ضربه در حالت گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



دقت کنید مقدار تابع در صفر برابر یک است.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^2[n] = \ldots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \ldots = 1$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \delta^2[n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} = 0$$

بنابراین تابع ضربه در حالت گسسته سیگنال انرژی است.

موفق باشید

صفوی