**به نام خدا**

# اصول سیستم‌های مخابراتی

دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه محقق اردبیلی

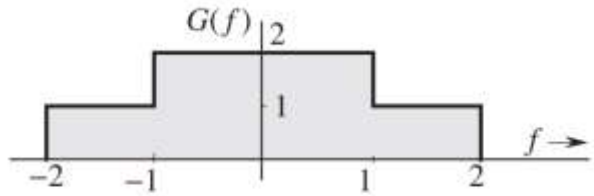
**پاسخ تمرین سری دوم**

**موعد تحویل: روزشنبه**

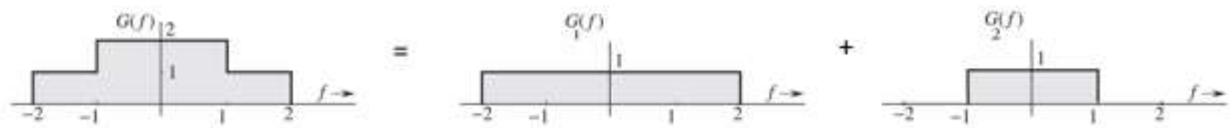
**۱۳۹۹/۰۲/۲۷**

---

۱. تبدیل فوریه معکوس طیف شکل زیر را بیابید.




**پاسخ:**




محاسبه معکوس تبدیل فوریه شکل فوق می‌تواند با تفکیک آن به جمع دو سیگنال آشنا، ساده شود. مشاهده می‌کنید که شکل فوق مجموع دو تابع پالس مستطیلی است. بنابراین:

$$g(t)=\int_{-2}^{2}\left[G_1(f)+G_2(f)\right]e^{j2\pi ft}df=\left[\int_{-2}^{2}e^{j2\pi ft}df+\int_{-1}^{1}e^{j2\pi ft}df\right]$$

$$=\left[\frac{1}{j2\pi t}e^{j2\pi ft}\Big|_{-2}^{2}+\frac{1}{j2\pi t}e^{j2\pi ft}\Big|_{-1}^{1}\right]=\left[\frac{1}{j2\pi t}\left(e^{j2t}-e^{-j2t}\right)+\frac{1}{j2\pi t}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]$$

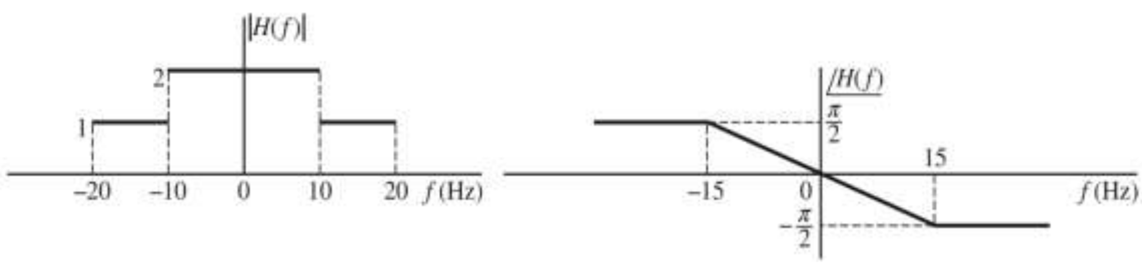
$$=\left[\frac{1}{\pi t}\sin(2t)+\frac{1}{\pi t}\sin(t)\right]=\frac{\sin(2t)+\sin(t)}{\pi t}$$

دقت داریم که $\sin(x)=\dfrac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$.

۲. شکل‌های زیر دامنه و فاز تابع تبدیل فیلتری را نشان می‌دهند. در هر حالت بیان کنید در صورت وجود، چه نوع اعوجاجی در خروجی ظاهر می‌شود. با دلیل توضیح دهید.

الف) $x_1(t)=\cos(10\pi t)+\cos(12\pi t)$ ب) $x_2(t)=\cos(10\pi t)+\cos(26\pi t)$

ج) $x_3(t)=\cos(26\pi t)+\cos(34\pi t)$ د) $x_4(t)=\cos(32\pi t)+\cos(34\pi t)$



**پاسخ:** اگر ورودی $x(t)=A\cos(2\pi f_1 t)$ به سیستم اعمال شود، خروجی آن برابر $y(t)=A|H(f_1)|\cos(2\pi f_1 t+\theta(f_1))$ خواهد بود. با این مقدمه می‌توانیم خروجی هر یک از سیگنال‌ها را به دست آوریم:

$$\begin{aligned}y_1(t)&=2\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(12\pi t-\frac{\pi}{5}\right)\\&=2\cos\left[10\pi\left(t-\frac{1}{60}\right)\right]+2\cos\left[12\pi\left(t-\frac{1}{60}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_2(t)&=2\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(26\pi t-\frac{13\pi}{30}\right)\\&=2\cos\left[10\pi\left(t-\frac{1}{60}\right)\right]+\cos\left[26\pi\left(t-\frac{1}{60}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3(t)&=\cos\left(26\pi t-\frac{13\pi}{30}\right)+\cos\left(34\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\cos\left[26\pi\left(t-\frac{1}{60}\right)\right]+\cos\left[34\pi\left(t-\frac{1}{68}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_3(t)&=\cos\left(32\pi t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(34\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\\&=\cos\left[32\pi\left(t-\frac{1}{64}\right)\right]+\cos\left[34\pi\left(t-\frac{1}{68}\right)\right]\end{aligned}$$

به دامنه‌ها و تأخیرهای زمانی مولفه‌های مختلف سیگنال‌های خروجی دقت کنید. مشاهده می‌شود که فقط سیگنال $x_1(t)$ بدون اعوجاج از سیستم عبور می‌کند. برای سیگنال $x_2(t)$ اعوجاج دامنه رخ می‌دهد. سیگنال‌های $x_3(t)$ و $x_4(t)$ نیز به دلیل اینکه دارای تأخیر زمانی مختلف برای مولفه‌های مختلف سیگنال هستند، در نتیجه اعوجاج فاز دارند.

۳. تابع تبدیل کانالی به فرم زیر است:

$$H(f)=\begin{cases}4\Pi\left(\dfrac{f}{40}\right)e^{-j\pi f/30}, & for\ |f|\le 15Hz\\[2ex] 4\Pi\left(\dfrac{f}{40}\right)e^{-j\pi/2}, & for\ |f|>15Hz\end{cases}$$

تأخیر فاز $t_d(f)$ و تأخیر گروه $t_g(f)$ را برحسب فرکانس رسم نمایید. در کدام بازه فرکانسی تأخیر فاز و گروه با همدیگر برابر است؟

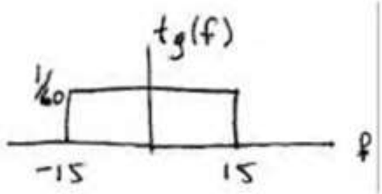
**پاسخ:** برای محاسبه تأخیر فاز و گروه، ابتدا باید فاز کانال را به دست آوریم. با دامنه تابع تبدیل کانال کاری نداریم.

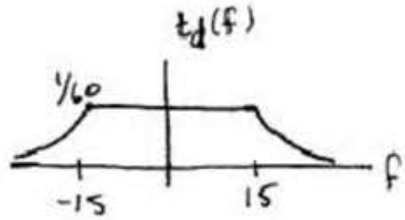
$$\arg H(f)=\begin{cases}-\dfrac{\pi f}{30}, & for\ |f|\le 15Hz\\ -\dfrac{\pi}{2}, & for\ |f|>15Hz\end{cases}$$

$$t_g(f)=-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{df}\arg H(f)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi}\left(-\dfrac{\pi}{30}\right)=\dfrac{1}{60}, & for\ |f|\le 15Hz\\ 0, & for\ |f|>15Hz\end{cases}$$

$$t_d(f)=-\frac{\arg H(f)}{2\pi f}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi f}\left(-\dfrac{\pi f}{30}\right)=\dfrac{1}{60}, & for\ |f|\le 15Hz\\ -\dfrac{1}{2\pi f}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{4f}, & for\ |f|>15Hz\end{cases}$$

بنابراین فقط برای بازه $|f|\le 15Hz$ تأخیر فاز و گروه با همدیگر برابرند.




۴. کانال انتقالی با $H_c(f)=(1+2\alpha\cos\omega T)e^{-j\omega T}$ را در نظر بگیرید.

الف) این کانال دارای چه اعوجاجی است؟

ب) نشان دهید که $y(t)=\alpha x(t)+x(t-T)+\alpha x(t-2T)$ است.

ج) فرض کنید $x(t)=\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$ و $\alpha=0.5$ است. $y(t)$ را برای $\tau=\frac{2T}{3}$ و $\tau=\frac{4T}{3}$ رسم نمایید.

د) یک متعادل‌گر خطی تأخیر سرک‌دار برای $H_c(f)$ با $\alpha=0.4$ طراحی کنید.

**پاسخ:**

الف) اعوجاج دامنه

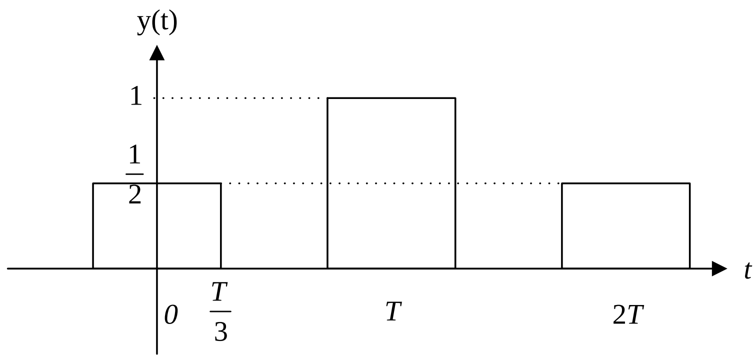
ب)

$$H_c(f)=\left[1+2\alpha\frac{1}{2}\left(e^{j\omega T}+e^{-j\omega T}\right)\right]e^{-j\omega T}=\alpha+e^{-j\omega T}+\alpha e^{-j\omega 2T}$$

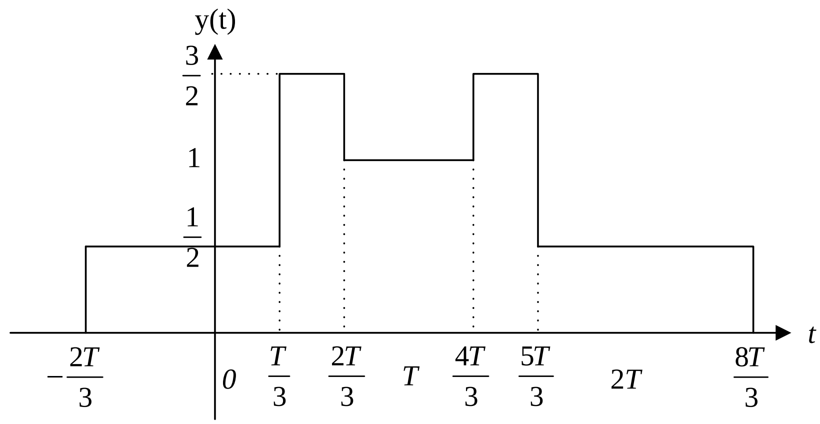
$$y(t)=\alpha x(t)+x(t-T)+\alpha x(t-2T)$$

ج)

$$\alpha=0.5,\tau=\frac{2T}{3}$$




$$\alpha = 0.5, \tau = \frac{4T}{3}$$




د)

$$H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega(t_d - T)}\left(1 + 0.8\cos\omega T\right)^{-1}$$

$$= Ke^{-j\omega(t_d - T)}\left[1 - 0.8\cos\omega T + 0.64\cos^2\omega T - 0.51\cos^3\omega T + \ldots\right]$$

$$\cos\omega T = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right),$$

$$\cos^2\omega T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\omega T = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T}\right),$$

$$\cos^3\omega T = \frac{1}{4}\left(3\cos\omega T + \cos 3\omega T\right) = \frac{3}{8}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + \frac{1}{8}\left(e^{j3\omega T} + e^{-j3\omega T}\right)$$

$$H_{eq}(f) = Ke^{-j\omega(t_d - T)}\left[1 - 0.8\cos\omega T + 0.64\cos^2\omega T - 0.51\cos^3\omega T + \ldots\right]$$

$$= Ke^{-j\omega(t_d - T)}\Bigg[1 - 0.8\times\frac{1}{2}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + 0.64\times\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^{j2\omega T} + e^{-j2\omega T}\right)\right)$$

$$-0.51\times\left(\frac{3}{8}\left(e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}\right) + \frac{1}{8}\left(e^{j3\omega T} + e^{-j3\omega T}\right)\right) + \ldots\Bigg]$$

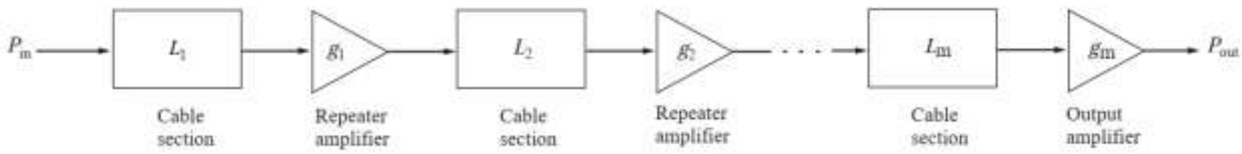
$$= Ke^{-j\omega(t_d - T)}\Big[1 - 0.4e^{j\omega T} - 0.4e^{-j\omega T} + 0.32 + 0.16e^{j2\omega T} + 0.16e^{-j2\omega T}$$

$$-\frac{1.53}{8}e^{j\omega T} - \frac{1.53}{8}e^{-j\omega T} - \frac{0.51}{8}e^{j3\omega T} - \frac{0.51}{8}e^{-j3\omega T} + \ldots\Big]$$

$$= Ke^{-j\omega(t_d - T)}\Big[-0.064e^{j3\omega T} + 0.16e^{j2\omega T} - 0.59e^{j\omega T} + 1.32 - 0.59e^{-j\omega T}$$

$$+0.16e^{-j2\omega T} - 0.064e^{-j3\omega T} + \ldots\Big]$$

۵. یک تکرارکننده با طول مسیر ۴۰۰ کیلومتر از m قطعه کابل مشابه با $\alpha = 0.5\text{dB}/Km$ و m تقویت کننده با بهره حداکثر 30dB تشکیل شده‌است. m و بهره تقویت‌کننده را طوری تعیین کنید که $P_{out} = 50mW$ در ازای $P_{in} = 2W$ باشد.




**پاسخ:** با توجه به شمای گرافیکی فوق، ابتدا توان ورودی و خروجی را برحسب dBm بیان می‌کنیم:

$$P_{out} = 50mW \Rightarrow P_{out,dBm} = 10\log_{10}\frac{P_{out}}{1mW} = 10\log_{10}\frac{50mW}{1mW} \approx 17dBm$$

$$P_{in} = 2W \Rightarrow P_{in,dBm} = 10\log_{10}\frac{P_{in}}{1mW} = 10\log_{10}\frac{2W}{1mW} = 10\log_{10} 2\times 10^3 = 33dBm$$

می‌دانیم که رابطه بین توان ورودی و خروجی به صورت زیر است:

$$P_{out} = \left(\frac{g_1 g_2 \dots g_m}{L_1 L_2 \dots L_m}\right) P_{in}$$

و بر حسب دسی بل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_{out,dBm} = g_{1,dB} + g_{2,dB} + \dots + g_{m,dB} - L_{1,dB} - L_{2,dB} - \dots - L_{m.dB} + P_{in,dBm}$$

در نتیجه با فرض بهره یکسان برای همه تقویت کننده‌ها ( $g$ ) و همچنین تلفات یکسان در هر قطعه از مسیر( $L_{dB}$ ):

$$17dBm = m\left(g - L_{dB}\right) + 33dBm \qquad \Rightarrow \qquad m\left(g - L_{dB}\right) = -16$$

تلفات کل مسیر برابر $mL_{dB} = 0.5 \times 400 = 200dB$ خواهد بود. همچنین طبق صورت سوال بهره هر تقویت کننده حداکثر 30dB فرض شده‌است ( $g \le 30dB$ ). در نتیجه:

$$m \times 30dB - 200 \ge -16 \;\Rightarrow \qquad m \ge 6.13$$

در نهایت برای آنکه شرط فوق برآورده شود، تعداد ۷ تقویت‌کننده انتخاب می‌شود. بهره هر تقویت‌کننده نیز برابر خواهد بود

$$g = \left(200 - 16\right)/7 = 26.28dB$$

موفق باشید

صفوی