به نام خدا

# تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دانشکده فنی و مهندسی،

دانشگاه محقق اردبیلی

**پاسخ تمرین سری پنجم**

**موعد تحویل: روز جمعه**

**۱۳۹۸/۱۰/۲۷**

---

۱. تبدیل لاپلاس سیگنال‌های زیر و ناحیه همگرایی آن‌ها را مشخص کنید.

الف) $x_1(t)=e^{2t}u(-t)+e^{3t}u(-t)$ ب) $x_2(t)=|t|e^{-2|t|}$

**پاسخ:**

**الف)** می‌دانیم

$$-e^{-at}u(-t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{1}{S+a},\ \ \mathrm{Re}\{S\}<-\mathrm{Re}\{a\}$$

بنابراین با استفاده از نکته فوق و با استفاده از خاصیت خطی بودن:

$$x_1(t)=e^{2t}u(-t)+e^{3t}u(-t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}-\frac{1}{S-2}-\frac{1}{S-3},\qquad \mathrm{Re}\{S\}<2\cap\mathrm{Re}\{S\}<3=\mathrm{Re}\{S\}<2$$

**ب)** دقت داریم که می‌توان سیگنال $x_2(t)$ را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$|t|e^{-2|t|}=te^{-2t}u(t)-te^{2t}u(-t)$$

حال به راحتی و با استفاده از خاصیت خطی بودن تبدیل لاپلاس می‌توان تبدیل لاپلاس سیگنال مدنظر را یافت. با استفاده از خاصیت مشتق در حوزه $S$ داریم:

$$te^{-2t}u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}-\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{S+2}\right]=\frac{1}{(S+2)^2},\qquad \mathrm{Re}\{S\}>-2$$

$$-te^{2t}u(-t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{S-2}\right]=-\frac{1}{(S-2)^2},\qquad \mathrm{Re}\{S\}<2$$

بنابراین:

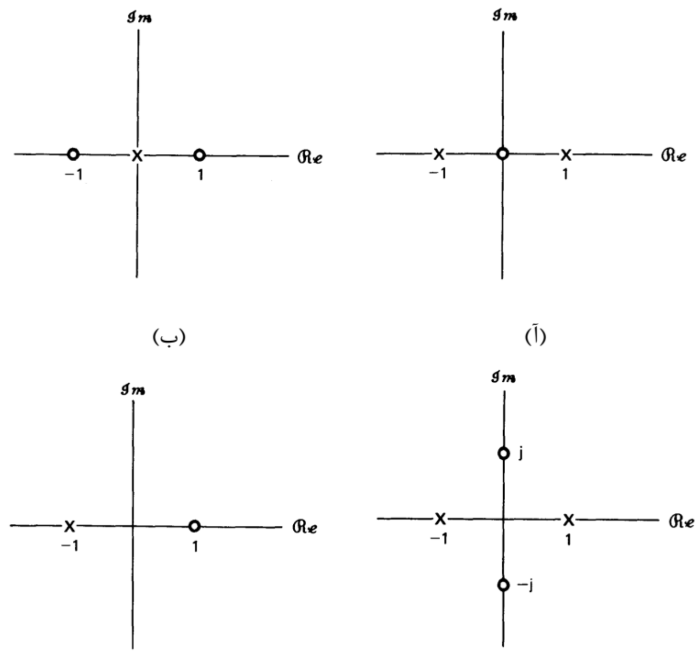
$$|t|e^{-2|t|}=te^{-2t}u(t)-te^{2t}u(-t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow}\frac{1}{(S+2)^2}-\frac{1}{(S-2)^2}=\frac{-4S}{(S+2)^2(S-2)^2},\qquad -2<\mathrm{Re}\{S\}<2$$

---

۲. الف) اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال زوج باشد، نشان دهید $X(s)=X(-s)$ .

ب) اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال فرد باشد، نشان دهید $X(s)=-X(-s)$ .

ج) با توجه به بندهای فوق، کدام یک از چهار نمودار قطب و صفر زیر می‌توانند نمایانگر یک سیگنال زوج در حوزه زمان باشند؟ برای آن دسته از نمودارها که می‌توانند شرایط زوج بودن را داشته باشند، ناحیه همگرایی لازم را تعیین کنید.




(ب) (آ)

(د) (ج)

**پاسخ:**

در ابتدا تبدیل لاپلاس سیگنال $y(t)=x(-t)$ بیابیم.

$$Y(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(-t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{st}dt=X(-s)$$

**الف)** اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال زوج باشد، آنگاه $x(t)=x(-t)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$x(t)=x(-t)\quad\Rightarrow X(s)=X(-s)$$

**ب)** اگر سیگنال $x(t)$ یک سیگنال فرد باشد، آنگاه $x(t)=-x(-t)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که

$$x(t)=-x(-t)\Rightarrow X(s)=-X(-s)$$

**ج)** ابتدا توجه داشته باشید برای آنکه سیگنالی زوج باشد، $x(t)$ یا باید دوطرفه باشد و یا باید دوره زمانی محدودی داشته باشد. بنابراین، اگر $X(s)$ قطبی داشته باشد، ناحیه همگرایی آن باید به صورت نوار در حوزه $s$ باشد.

با توجه به شکل (آ) داریم:

$$X(s)=\frac{As}{(s-1)(s+1)}$$

بنابراین

$$X(-s)=\frac{-As}{(s-1)(s+1)}=-X(s)$$

با توجه به بخش‌های الف و ب، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، سیگنال $x(t)$ متناظر با $X(s)$ فوق فرد است.

با توجه به شکل (ب) مشاهده می‌کنید که نمی‌توان ناحیه همگرایی به صورت نوار در نظر گرفت. در نتیجه سیگنال حوزه زمان این دیاگرام صفر و قطب نمی‌تواند برای سیگنال زوج باشد.

با توجه به شکل (ج) داریم:

$$X(s)=\frac{A(s-j)(s+j)}{(s+1)(s-1)}=\frac{A\left(s^2+1\right)}{s^2-1}$$

بنابراین:

$$X(-s)=\frac{A\left(s^2+1\right)}{s^2-1}=X(s)$$

با توجه به بخش‌های الف و ب، همان‌طور که مشاهده می‌کنید، سیگنال $x(t)$ متناظر با $X(s)$ فوق با ناحیه همگرایی $-1<\mathrm{Re}\{s\}<1$ زوج است.

---

۳. یک سیستم LTI با ورودی $x(t)=e^{-t}u(t)$ و پاسخ ضربه $h(t)=\left(e^{-2t}+e^{-t}\right)u(t)$ در نظر بگیرید.

الف) تبدیل لاپلاس ورودی ( $X(s)$ ) و تابع تبدیل سیستم ( $H(s)$ ) را بیابید.

ب) تبدیل لاپلاس خروجی سیستم را بیابید.

ج) به کمک بند قبل، سیگنال خروجی را در حوزه زمان بیان کنید.

**پاسخ: الف)**

$$x(t)=e^{-t}u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} X(s)=\frac{1}{s+1},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$h(t)=\left(e^{-2t}+e^{-t}\right)u(t)\overset{\mathcal{L}}{\leftrightarrow} H(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

**ب)**

$$Y(s)=H(s)X(s)=\left[\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+1}\right]\frac{1}{s+1}=\frac{1}{(s+2)(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2},\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

**ج)**

$$Y(s)=\frac{1}{(s+2)(s+1)}+\frac{1}{(s+1)^2}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$A=\left.\frac{1}{s+1}\right|_{s=-2}=-1$$

$$B=\left.\frac{1}{s+2}\right|_{s=-1}=1$$

$$Y(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}\ \Rightarrow y(t)=-e^{-2t}u(t)+e^{-t}u(t)+te^{-t}u(t)$$

---

۴. سیگنال $x(t)$ را برای هر یک از بندهای زیر به نحوی بیابید که $X(s)$ به صورت زیر بوده و

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)\left(s^2+2s+5\right)}$$

الف) سیگنال $x(t)$، یک سیگنال دست راستی باشد.

ب) سیگنال $x(t)$، یک سیگنال دست چپی باشد.

ج) سیگنال $x(t)$، یک سیگنال دوطرفه باشد.

**پاسخ:** ابتدا باید تابع تبدیل فوق را به کسرهای جزئی بسط داد. بنابراین:

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{s+1+j2}+\frac{E}{s+1-j2}$$

$$A=\frac{d}{ds}\left[\frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}\right]\Bigg|_{s=0}=\frac{(s+2)(s^2+2s+5)-(s+1)\left[(s^2+2s+5)+(2s+2)(s+2)\right]}{(s+2)^2(s^2+2s+5)^2}\Bigg|_{s=0}$$

$$=\frac{2(5)-(5+4)}{2^2\times5^2}=\frac{1}{100}$$

$$B=\frac{s+1}{(s+2)(s^2+2s+5)}\Bigg|_{s=0}=\frac{1}{10}$$

$$C=\frac{s+1}{s^2(s^2+2s+5)}\Bigg|_{s=-2}=\frac{-2+1}{(-2)^2\times\left((-2)^2+2\times(-2)+5\right)}=\frac{-1}{20}$$

$$D=\frac{s+1}{s^2(s+2)(s+1-j2)}\Bigg|_{s=-1-j2}=\frac{-1-j2+1}{(-1-j2)^2(-1-j2+2)(-1-j2+1-j2)}$$

$$=\frac{-j2}{(1-4+j4)(1-j2)(-j4)}=\frac{2}{4(-3+j6+j4+8)}=\frac{1}{2(5+j10)}=0.02-j0.04$$

$$E=\frac{s+1}{s^2(s+2)(s+1+j2)}\Bigg|_{s=-1+j2}=\frac{-1+j2+1}{(-1+j2)^2(-1+j2+2)(-1+j2+1+j2)}$$

$$=\frac{j2}{(1-4-j4)(1+j2)(j4)}=\frac{-2}{-4(-3-j6-j4+8)}=\frac{1}{2(5-j10)}=0.02+j0.04$$

در نهایت:

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)(s^2+2s+5)}=\frac{0.01}{s}+\frac{0.1}{s^2}+\frac{-0.05}{s+2}+\frac{0.02-j0.04}{s+1+j2}+\frac{0.02+j0.04}{s+1-j2}$$

**الف)** اگر سیگنال $x(t)$، یک سیگنال دست راستی باشد، آنگاه ناحیه همگرایی برابر $\mathrm{Re}\{s\}>0$ خواهد بود.

$$\begin{aligned}x(t)&=0.01u(t)+0.1tu(t)-0.05e^{-2t}u(t)\\&\quad+(0.02-j0.04)e^{-(1+2j)t}u(t)+(0.02+j0.04)e^{-(1-2j)t}u(t)\end{aligned}$$

**ب)** اگر سیگنال $x(t)$، یک سیگنال دست چپی باشد. آنگاه ناحیه همگرایی برابر $\mathrm{Re}\{s\}<-2$ خواهد بود.

$$\begin{aligned}x(t)&=-0.01u(-t)-0.1tu(-t)+0.05e^{-2t}u(-t)\\&\quad-(0.02-j0.04)e^{-(1+2j)t}u(-t)-(0.02+j0.04)e^{-(1-2j)t}u(-t)\end{aligned}$$

**ج)** اگر سیگنال $x(t)$، یک سیگنال دوطرفه باشد، آنگاه ناحیه همگرایی می‌تواند $-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$ و یا $-1<\mathrm{Re}\{s\}<0$ انتخاب شود.

حالت اول: ناحیه همگرایی $-2<\operatorname{Re}\{s\}<-1$

$$x(t)=-0.01u(-t)-0.1tu(-t)-0.05e^{-2t}u(t)$$
$$-(0.02-j0.04)e^{-(1+2j)t}u(-t)-(0.02+j0.04)e^{-(1-2j)t}u(-t)$$

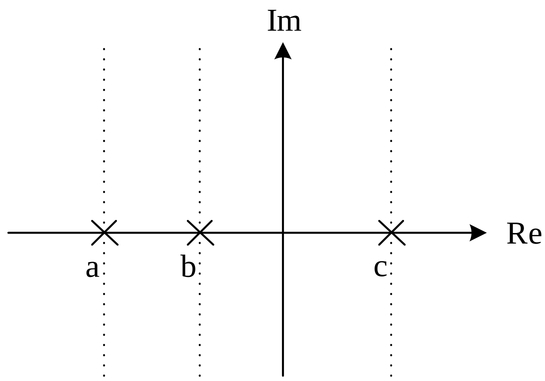
حالت دوم: ناحیه همگرایی $-1<\operatorname{Re}\{s\}<0$

$$x(t)=-0.01u(-t)-0.1tu(-t)-0.05e^{-2t}u(t)$$
$$+(0.02-j0.04)e^{-(1+2j)t}u(t)+(0.02+j0.04)e^{-(1-2j)t}u(t)$$

---

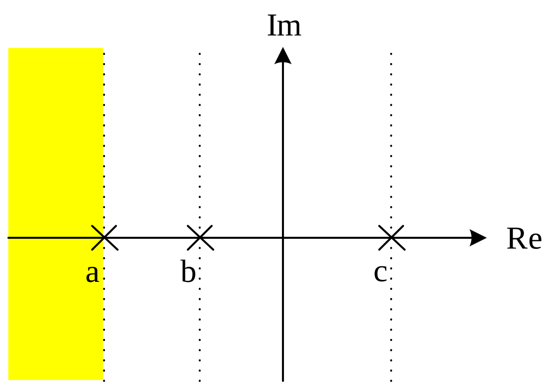
۵. اگر تابع تبدیل یک سیستم LTI برابر $H(s)=\dfrac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ باشد، به طوری که a و b و c اعداد حقیقی و $a<b<0<c$ باشند، در مورد پایداری و علی بودن کلیه سیستم‌های ممکن بحث کنید.

**پاسخ:** دیاگرام صفر و قطب تابع تبدیل فوق به صورت زیر است:




با توجه به اینکه سیستم فوق شامل سه قطب است، می‌توان متوجه شد که چهار ناحیه همگرایی مجزا می‌توان متصور شد که هر کدام متناظر با سیستم‌های مجزایی باشد.

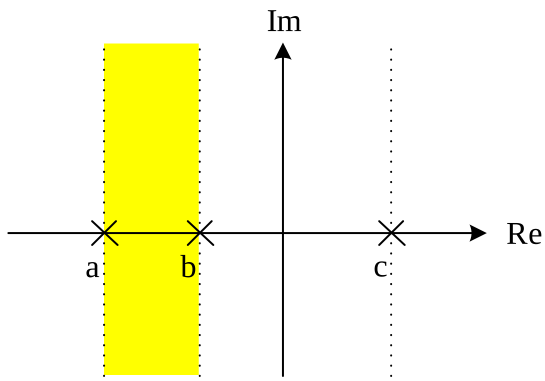
سیستم ۱:




ناحیه همگرایی این سیستم شامل محور $j\omega$ نمی‌باشد. در نتیجه این سیستم **پایدار نیست**.

ناحیه همگرایی این سیستم دست راست دست راست‌ترین قطب نیست. بنابراین این سیستم **علی نیست**.

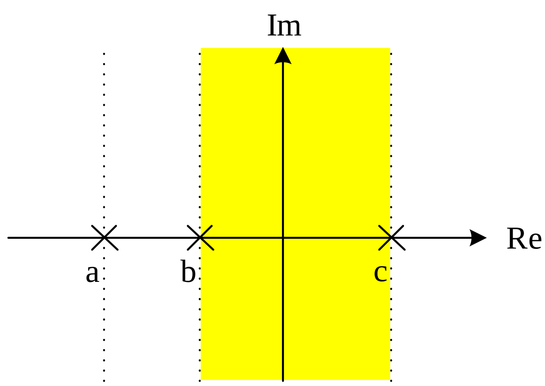
سیستم ۲:




ناحیه همگرایی این سیستم شامل محور $j\omega$ نمی‌باشد. در نتیجه این سیستم **پایدار نیست**.

ناحیه همگرایی این سیستم دست راست دست راست‌ترین قطب نیست. بنابراین این سیستم **علی نیست**.

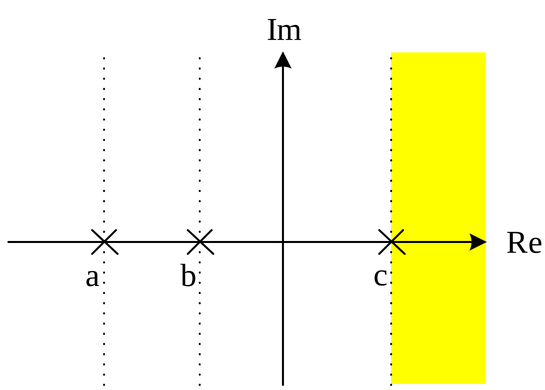
سیستم ۳:




ناحیه همگرایی این سیستم شامل محور $j\omega$ می‌باشد. در نتیجه این سیستم **پایدار است**.

ناحیه همگرایی این سیستم دست راست دست راست‌ترین قطب نیست. بنابراین این سیستم **علی نیست**.

سیستم ۴:




ناحیه همگرایی این سیستم شامل محور $j\omega$ نمی‌باشد. در نتیجه این سیستم **پایدار نیست**.

ناحیه همگرایی این سیستم دست راست دست راست‌ترین قطب است. بنابراین این سیستم **علی است**.

۶. یک سیستم زمان‌پیوسته LTI را در نظر بگیرید که در آن ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ توسط معادله دیفرانسیل زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=x(t)$$

که در آن $X(s)$ و $Y(s)$ و $H(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس ورودی، تبدیل لاپلاس خروجی و تابع تبدیل سیستم فوق هستند.

الف) $H(s)$ را تعیین کنید و نمودار صفر و قطب آن را ترسیم کنید.

ب) ناحیه همگرایی را برای هر یک از بندهای زیر رسم کنید:

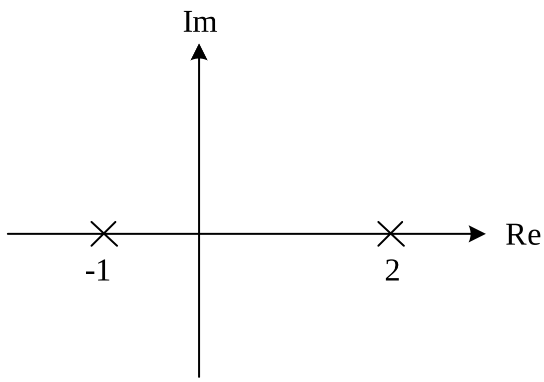
ب.۱: سیستم پایدار باشد. ب.۲: سیستم علی باشد. ب.۳: سیستم نه پایدار و نه علی باشد.

ج) اگر سیستم علی مدنظر باشد، $h(t)$ را تعیین کنید.

**پاسخ:** الف) از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس می‌گیریم و تابع تبدیل سیستم را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$H(x)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^2-s-2}$$

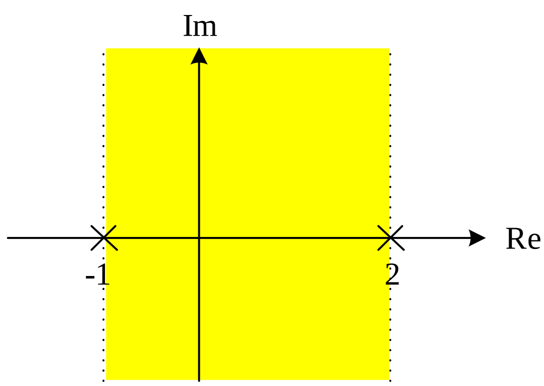
نمودار صفر و قطب تبدیل لاپلاس فوق به صورت زیر است:




ب) با استفاده از بسط به کسرهای جزئی داریم:

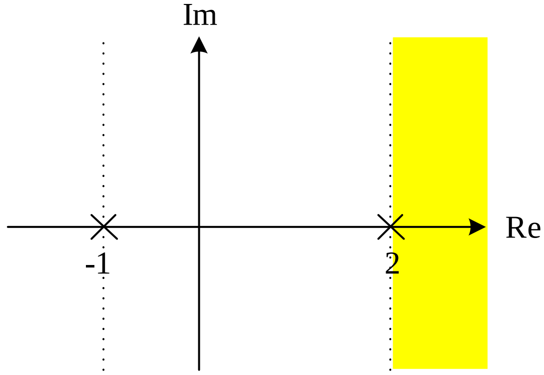
$$H(s)=\frac{1/3}{s-2}-\frac{1/3}{s+1}$$

ب.۱: اگر سیستم پایدار باشد، ناحیه همگرایی باید به صورت $-1<\mathrm{Re}\{s\}<2$ باشد. بنابراین:



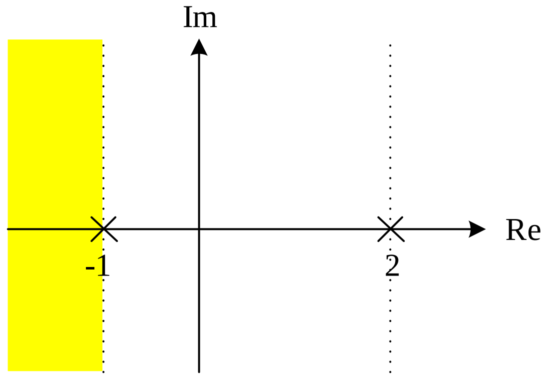
$$h(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

ب.۲: اگر سیستم علی باشد، ناحیه همگرایی باید به صورت $\mathrm{Re}\{s\}>2$ باشد. بنابراین:




$$h(t)=\frac{1}{3}e^{2t}u(t)-\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

ب.۳: اگر سیستم نه علی باشد و نه پایدار، ناحیه همگرایی باید به صورت $\mathrm{Re}\{s\}<-1$ باشد. بنابراین:




$$h(t)=-\frac{1}{3}e^{2t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(-t)$$

ج) در بخش ب برای همه نواحی همگرایی پاسخ ضربه متناظر بیان شده است.

---

۷. برای هر یک از بندهای زیر تبدیل Z را با توجه به خواص تبدیل Z بیابید. دیاگرام صفر و قطب را رسم کرده و ناحیه همگرایی را مشخص کنید.

الف) $x_1[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]$

ب) $x_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2]+(3)^n u[-n-1]$

ج) $x_3[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n \cos(n\omega_0)u[n]$

د) $x_4[n]=\alpha^{|n|}$

**پاسخ:**

الف) این مثال را با دو روش حل می‌کنیم. روش اول با استفاده از تعریف تبدیل Z و روش دوم با استفاده از تبدیل Z هایی که می‌دانیم.

روش اول:

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(3z)^{-n}=\frac{1}{1-3z}=-\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z|<\frac{1}{3}$$

روش دوم: دقت داریم که می‌توان به راحتی مقدار سیگنال در $n=0$ را جداگانه بیان کرد. به عبارت دیگر

$$x_1[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n]=\left(\frac{1}{3}\right)^0\delta[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]=\delta[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

حال به راحتی می‌توان تبدیل Z را محاسبه کرد:

$$X_1(z)=1-\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=-\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z|<\frac{1}{3}$$

ب) با کمی دقت و با استفاده از خاصیت شیفت زمانی داریم:

$$x_2[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n+2]+3^n u[-n-1]$$

$$=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} u[n+2]+3^n u[-n-1]$$

$$X_2(z)=4\frac{z^2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{1-3z^{-1}} \qquad ROC:|z|>\frac{1}{2}\cap|z|<3=\frac{1}{2}<|z|<3$$

ج) به راحتی و با نوشتن کسینوس به صورت سیگنال نمایی می‌توان تبدیل Z خواسته شده را محاسبه کرد:

$$x_3[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos(n\omega_0)u[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left\{\frac{e^{jn\omega_0}+e^{-jn\omega_0}}{2}\right\}u[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{j\omega_0}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega_0}\right)^n u[n]$$

$$X_3(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega_0}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega_0}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

د) می‌توان سیگنال $x_4[n]=\alpha^{|n|}$ را به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$x_4[n]=\alpha^{|n|}=\alpha^n u[n]+\alpha^{-n}u[-n-1]$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\alpha^n u[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad |z|>\alpha$$

$$\alpha^n u[-n-1]\leftrightarrow-\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}, \quad |z|<\alpha$$

بنابراین

$$X_4(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}-\frac{1}{1-\alpha^{-1}z^{-1}} \qquad ROC=|z|>\alpha \cap |z|<\alpha^{-1}$$

ناحیه همگرایی سیگنال بستگی به اشتراک دو ناحیه همگرایی یاد شده دارد. اگر $\alpha$ عددی بین صفر و یک باشد، اشتراک این دو ناحیه مقدار خواهد داشت. اما در صورتی که $\alpha$ عددی بزرگتر از یک باشد، اشتراک تهی خواهد بود.

---

۸. یک سیستم LTI و علی با معادله تفاضلی زیر تعریف شده‌است. تابع تبدیل سیستم ($H(z)$) و پاسخ ضربه سیستم ($h[n]$) را به دست آورید.

$$y[n]=\frac{1}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]+x[n]-x[n-1]$$

**پاسخ:** از طرفین معادله دیفرنس تبدیل Z می‌گیریم. بنابراین تابع تبدیل سیستم به راحتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-x[n-1]$$

$$Y(z)-\frac{1}{4}z^{-1}Y(z)-\frac{1}{8}z^{-2}Y(z)=X(z)-z^{-1}X(z)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

با توجه به علی بودن سیستم ناحیه همگرایی تبدیل Z فوق به صورت $|z|>\frac{1}{2}$ خواهد بود.

با بسط به کسرهای جزئی داریم:

$$H(z)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A=\left.\frac{1-z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z^{-1}=2}=\frac{1-2}{1+\frac{1}{4}\times 2}=-\frac{2}{3}, \qquad B=\left.\frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right|_{z^{-1}=-4}=\frac{1+4}{1+\frac{1}{2}\times 4}=\frac{5}{3}$$

در نهایت

$$H(z)=-\frac{2/3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{5/3}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

در نتیجه با توجه به علی بودن سیستم و دست راستی بودن ناحیه همگرایی، با تبدیل Z معکوس داریم:

$$h[n]=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{5}{3}\left(\frac{-1}{4}\right)^n u[n]$$

موفق باشید

صفوی