به نام خدا

تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها

دانشکده فنی و مهندسی،

دانشگاه محقق اردبیلی

پاسخ تمرین سری دوم

موعد تحویل: روز سه‌شنبه

۱۳۹۸/۰۸/۱۴

---

۱. تعیین کنید که سیستم‌های زیر حافظه‌دار، وارون‌پذیر، علی، پایدار، تغییرناپذیر با زمان و خطی هستند یا خیر؟

الف) $y(t)=\cos\left(x(t-2)\right)$ ب) $y(t)=\ln\left(x(t)\right)$

ج) $y[n]=nx[n]$ د) $y[n]=\max\left\{x[n],x[n-1],...,x[-\infty]\right\}$

پاسخ:

الف) حافظه‌دار بودن: این سیستم حافظه‌دار است. زیرا مقدار خروجی سیستم در هر لحظه به ورودی در لحظات قبل ($t-2$) بستگی دارد.

علّی بودن: این سیستم علّی می‌باشد. چون به مقدار سیگنال ورودی در آینده بستگی ندارد.

تغییرپذیری با زمان: فرض کنید که $y_1(t)$ پاسخ سیستم T به ورودی $x_1(t)=x(t-t_0)$ باشد. آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t)=T\left\{x(t-t_0)\right\}=\cos\left(x(t-t_0-2)\right) \\ y(t-t_0)=\cos\left(x(t-t_0-2)\right) \end{array}\right\}\Rightarrow y(t-t_0)=T\left\{x(t-t_0)\right\}$$

مشاهده می‌شود که این سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

خطی بودن: این سیستم غیرخطی است.

$$\begin{aligned} &x(t)=ax_1(t)+bx_2(t) \\ &y(t)=\cos\left(x(t-2)\right)=\cos\left(ax_1(t-2)+bx_2(t-2)\right) \\ &\quad\neq a\cos\left(x_1(t-2)\right)+b\ln\left(x_2(t-2)\right) \end{aligned}$$

پایداری: این سیستم برای ورودی‌های محدود خروجی محدود (بین -1 و 1) دارد. بنابراین پایدار است.

وارون‌پذیری: وارونناپذیر است زیرا خروجی به ازای $x(t-2)$ و $x(t-2)+2\pi$ یکسان است.

ب) حافظه‌دار بودن: بدیهی است که این سیستم بدون حافظه می‌باشد. زیرا خروجی سیستم در لحظه n، فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

علّی بودن: این سیستم علّی می‌باشد. چون به مقدار سیگنال ورودی در آینده بستگی ندارد.

تغییرپذیری با زمان: فرض کنید که $y_1(t)$ پاسخ سیستم T به ورودی $x_1(t)=x(t-t_0)$ باشد. آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(t)=T\left\{x(t-t_0)\right\}=\ln\left(x(t-t_0)\right) \\ y(t-t_0)=\ln\left(x(t-t_0)\right) \end{array}\right\}\Rightarrow y(t-t_0)=T\left\{x(t-t_0)\right\}$$

مشاهده می‌شود که این سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

خطی بودن: این سیستم غیرخطی است.

$$x(t)=ax_1(t)+bx_2(t)$$

$$y(t)=\ln\left(x(t)\right)=\ln\left(ax_1(t)+bx_2(t)\right)$$
$$\neq a\ln\left(x_1(t)\right)+b\ln\left(x_2(t)\right)$$

پایداری: این سیستم پایدار است. چراکه اگر مقدار ورودی محدود باشد، مقدار خروجی نیز محدود خواهد بود.

وارون‌پذیری: این سیستم وارون‌پذیر است.

$$y(t)=\ln\left(x(t)\right)\Rightarrow x(t)=e^{y(t)}$$

ج) حافظه‌دار بودن: بدیهی است که این سیستم بدون حافظه می‌باشد. زیرا خروجی سیستم در لحظه n، فقط به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

علّی بودن: این سیستم علّی می‌باشد. چون به مقدار سیگنال در آینده بستگی ندارد.

تغییرپذیری با زمان: این سیستم به دلیل وجود ضریب n تغییرپذیر با زمان است.

فرض کنید که $y_1[n]$ پاسخ سیستم T به ورودی $x_1[n]=x[n-n_0]$ باشد. آنگاه:

$$\left.\begin{aligned} y_1[n]&=T\left\{x[n-n_0]\right\}=nx[n-n_0]\\ y[n-n_0]&=(n-n_0)x[n-n_0]\end{aligned}\right\}\Rightarrow y[n-n_0]\neq T\left\{x[n-n_0]\right\}$$

مشاهده می‌شود که این سیستم تغییرپذیر با زمان است.

خطی بودن: این سیستم خطی است. فرض کنید:

$$x[n]=ax_1[n]+bx_2[n]$$

آنگاه

$$y[n]=T\left\{x[n]\right\}=n\left\{ax_1[n]+bx_2[n]\right\}$$
$$=anx_1[n]+bnx_2[n]=ay_1[n]+by_2[n]$$

پایداری: این سیستم ناپایدار است. به دلیل وجود ضریب n، حتی اگر ورودی هم محدود باشد، خروجی می‌تواند مقادیر نامحدود را اختیار کند.

وارون‌پذیری: وارون ناپذیر است. زیرا این سیستم به ازای هر دو ورودی $\delta[n]$ و $2\delta[n]$، خروجی برابر صفر است.

د) حافظه‌دار بودن: بدیهی است که این سیستم حافظه‌دار می‌باشد. چرا که خروجی در لحظه n به تمام مقادیر قبل از لحظه n بستگی دارد.

علّی: این سیستم علّی می‌باشد. چون به مقدار سیگنال ورودی در آینده بستگی ندارد.

خطی بودن:

$$y[n]=\max\left\{x[n],\dots,x[-\infty]\right\}=T\left[x[n]\right]$$

$$T\left[ax_1[n]+bx_2[n]\right]=\max\left\{ax_1[n]+bx_2[n],\dots,ax_1[-\infty]+bx_2[-\infty]\right\}$$
$$\neq a\max\left\{x_1[n],\dots,x_1[-\infty]\right\}+b\max\left\{x_2[n],\dots,x_2[-\infty]\right\}$$

در نتیجه این سیستم، خطی نمی‌باشد.

وارون‌پذیر بودن: این سیستم وارون‌پذیر نیست. برای مثال سیگنال ورودی $x[n]=1,\ \forall n$ و همچنین سیگنال ورودی $\begin{cases} x[n]=1, & n=0 \\ x[n]=0, & n\neq 0 \end{cases}$ هر دو دارای خروجی $y[n]=1$ هستند.

تغییرپذیری با زمان: فرض کنید که $y_1[n]$ پاسخ سیستم T به ورودی $x_1[n]=x[n-n_0]$ باشد. آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l} y_1[n]=T\{x[n-n_0]\}=\max\{x[n-n_0],\dots,x[-\infty-n_0]\} \\ y[n-n_0]=\max\{x[n-n_0],\dots,x[-\infty-n_0]\} \end{array}\right\}\Rightarrow y[n-n_0]=T\{x[n-n_0]\}$$

مشاهده می‌شود که این سیستم تغییرناپذیر با زمان است.

پایداری: این سیستم پایدار است. چراکه اگر مقدار ورودی محدود باشد، مقدار خروجی که بیشینه مقادیر ورودی لحظات قبل است نیز محدود خواهد بود.

۲. سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\{u[n+3]-u[n-10]\}$$

مقادیر A و B در رابطه زیر را برحسب n طوری بیابید که رابطه زیر برقرار باشد.

$$h[n-k]=\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1}, & A\le k\le B \\ 0, & elsewhere. \end{cases}$$

پاسخ:

سیگنال $h[k]$ در بازه $-3\le k\le 9$ مخالف صفر است و مقدار دارد. بنابراین سیگنال $h[-k]$ در بازه $-9\le k\le 3$ مقدار خواهد داشت. در نتیجه سیگنال $h[n-k]$ در بازه $n-9\le k\le n+3$ مقدار خواهد داشت. در نهایت:

$A=n-9, \qquad B=n+3$

۳. مقدار $y[n]=x[n]*h[n]$ را محاسبه و رسم کنید.

$$x[n]=\begin{cases} 1, & 3\le n\le 8 \\ 0, & otherwise. \end{cases} \qquad h[n]=\begin{cases} 1, & 4\le n\le 15 \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

پاسخ:

برای آنکه درک درستی از کانولوشن دو سیگنال داشته باشیم، ابتدا آن‌ها را رسم می‌کنیم.

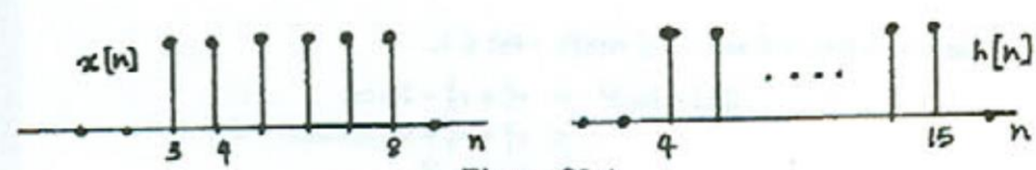


Figure S2.4

حال برای محاسبه کانولوشن می‌دانیم که

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

با کمی دقت در شکل‌های رسم شده مشاهده می‌کنید که حاصل جمع فوق برابر مقدار زیر است چراکه $x[k]$ برای مقادیر کمتر از ۳ و بیشتر از ۸ برابر صفر است.

$$\begin{aligned}y[n]&=x[3]h[n-3]+x[4]h[n-4]+x[5]h[n-5]\\&+x[6]h[n-6]+x[7]h[n-7]+x[8]h[n-8]\end{aligned}$$

همچنین با رسم تک تک عبارت‌های فوق و جمع آن‌ها به راحتی رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$y[n]=\begin{cases}n-6, & 7\le n\le 11\\ 6, & 12\le n\le 18\\ 24-n, & 19\le n\le 23\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

۴. پاسخ ضربه سیستم‌های LTI مختلف در ادامه آمده است. درباره علّی بودن و پایدار بودن این سیستم‌ها بحث کنید.

الف) $h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$ ب) $h[n]=(0.8)^n u[n+2]$

ج) $h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$ د) $h[n]=5^n u[3-n]$

ه) $h(t)=e^{-4t}u(t-2)$ و) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$

ز) $h(t)=e^{-6|t|}$ ح) $h(t)=te^{-t}u(t)$

پاسخ:

الف) مشاهده می‌شود که $n<0 \qquad h[n]=0,$. در نتیجه سیستم **علّی** است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{5}\right)^k u[k]\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k=1\times\frac{1}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}<\infty$$

بنابراین سیستم **پایدار** است.

ب) مشاهده می‌شود که $n<0 \qquad h[n]\neq 0,$. در نتیجه سیستم **غیرعلّی** است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|(0.8)^k u[k+2]\right|=\sum_{k=-2}^{\infty}(0.8)^k<\infty$$

بنابراین سیستم **پایدار** است.

ج) مشاهده می‌شود که $n<0 \qquad h[n]\neq 0,$. در نتیجه سیستم **غیرعلّی** است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^k u[-k]\right|=\sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}2^k=\infty$$

بنابراین سیستم **ناپایدار** است.

د) مشاهده می‌شود که $n<0 \qquad h[n]\neq 0,$. در نتیجه سیستم **غیرعلّی** است.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|h[k]\right|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|5^k u[3-k]\right|=\sum_{k=-\infty}^{3}5^k=\sum_{k=-3}^{\infty}(5)^{-k}=\sum_{k=-3}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k=\frac{125}{1-\frac{1}{5}}=\frac{625}{4}<\infty$$

بنابراین سیستم **پایدار** است.

ه) مشاهده می‌شود که $t<0 \qquad h(t)=0,$. در نتیجه سیستم **علّی** است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-4t}u(t-2)\right|dt=\int_{2}^{\infty}e^{-4t}dt=\frac{1}{-4}e^{-4t}\Big]_2^{\infty}=\frac{1}{-4}\left[0-e^{-8}\right]=\frac{e^{-8}}{4}<\infty$$

بنابراین سیستم **پایدار** است.

و) مشاهده می‌شود که $t<0 \qquad h(t)\neq 0,$. در نتیجه سیستم **غیرعلّی** است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-6t}u(3-t)\right|dt=\int_{-\infty}^{3}e^{-6t}dt=\frac{1}{-6}e^{-6t}\Big]_{-\infty}^{3}=\frac{1}{-6}\left[e^{-18}-e^{+\infty}\right]=\infty$$

بنابراین سیستم **ناپایدار** است.

ز) مشاهده می‌شود که $t<0 \qquad h(t)\neq 0,$. در نتیجه سیستم **غیرعلّی** است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-6|t|}\right|dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-6|t|}dt=\int_{-\infty}^{0}e^{6t}dt+\int_{0}^{\infty}e^{-6t}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-6t}dt$$
$$=2\times\frac{1}{-6}e^{-6t}\Big]_0^{\infty}=\frac{-1}{3}[0-1]=\frac{1}{3}<\infty$$

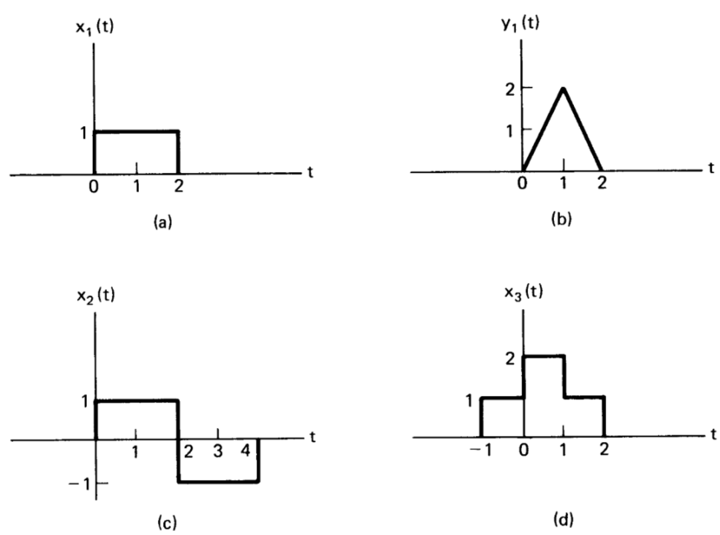
بنابراین سیستم **پایدار** است.

ح) مشاهده می‌شود که $t<0 \qquad h(t)=0,$. در نتیجه سیستم **علّی** است.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(t)\right|dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left|te^{-t}u(t)\right|dt=\int_{0}^{\infty}te^{-t}dt=-te^{-t}-e^{-t}\Big]_0^{\infty}=1<\infty$$

بنابراین سیستم **پایدار** است.

۵. فرض کنید پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان پیوسته به ورودی $x_1(t)$ نشان داده‌شده در شکل زیر، سیگنال $y_1(t)$ باشد. پاسخ این سیستم به سیگنال‌های $x_2(t)$ و $x_3(t)$ نشان داده‌شده در شکل زیر، چه سیگنال‌هایی است؟



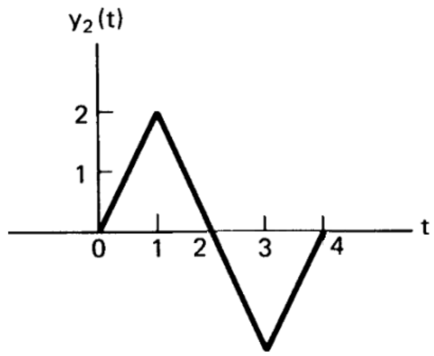
پاسخ:

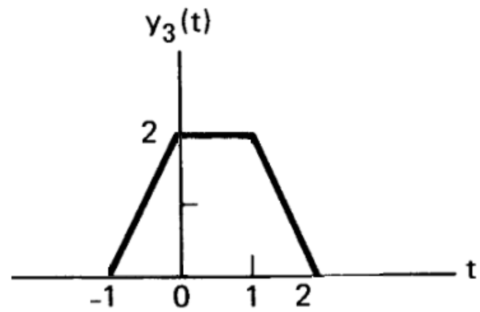
به راحتی مشاهده می‌شود که سیگنال‌های $x_2(t)$ و $x_3(t)$ یک ترکیب خطی از ورودی $x_1(t)$ هستند.

$$x_2(t) = x_1(t) - x_1(t-2)$$
$$x_3(t) = x_1(t) + x_1(t+1)$$

حال چون سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان است، می‌توان خروجی سیگنال‌های ورودی $x_2(t)$ و $x_3(t)$ را با اعمال همان ترکیب خطی به خروجی سیگنال ورودی $x_1(t)$ محاسبه کرد. به عبارت دقیق‌تر خواهیم داشت:

$$y_2(t) = y_1(t) - y_1(t-2)$$
$$y_3(t) = y_1(t) + y_1(t+1)$$





موفق باشید

صفوی