

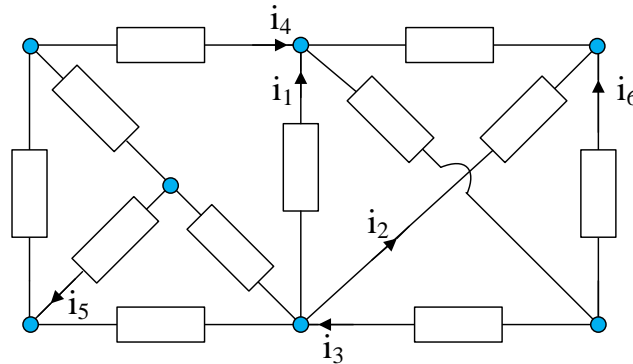


۱. در مدار شکل زیر فرض کنید $i_1 = 3A$ و $i_2 = -4A$ و $i_3 = 5A$.

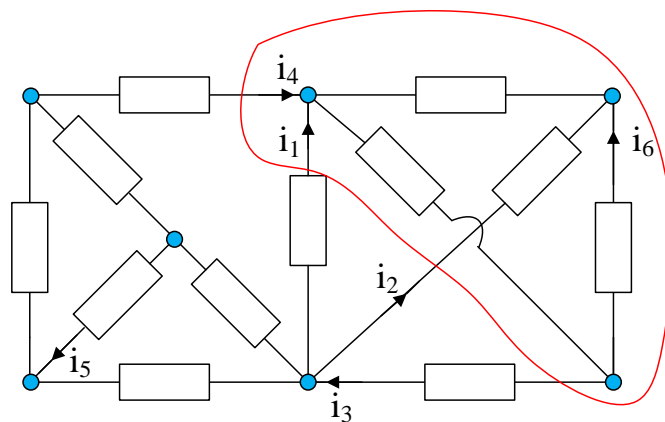
الف) جریان i_4 را حساب کنید.

ب) آیا می‌توانید جریان شاخه دیگری از این مدار را نیز محاسبه کنید؟

ج) اکنون فرض کنید $i_5 = 3A$ و $i_6 = 4A$. آیا می‌توان جریان بقیه شاخه‌ها را محاسبه کرد؟



پاسخ: الف) با نوشتن KCL در گره مرکب زیر داریم:



$$-i_4 - i_1 - i_2 + i_3 = 0 \Rightarrow i_4 = i_3 - i_2 - i_1 \Rightarrow i_4 = 5 + 4 - 3 = 6A$$

ب) خیر. زیرا گره مرکب دیگری نمی‌توان یافت که شامل یک جریان مجهول باشد.

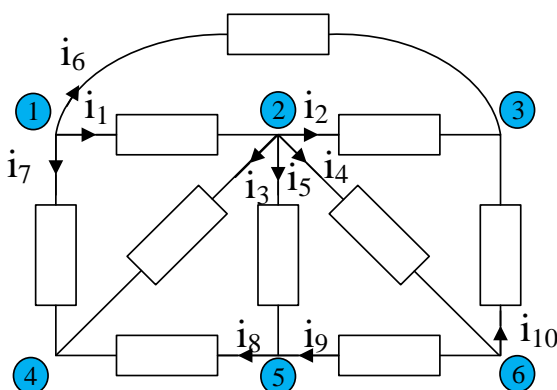
ج) تعداد متغیر مستقل جریان شاخه‌ها برابر است با: تعداد شاخه‌ها منهای تعداد گره‌ها به اضافه یک.
بنابراین:

$$12 - 7 + 1 = 6$$

به عبارت دیگر با داشتن ۶ جریان از جریان‌های شاخه‌ها که مستقل باشند، می‌توان جریان بقیه شاخه‌ها را نیز محاسبه کرد. با توجه به قسمت الف، چون یک گره مرکب شامل جریان‌های i_1, i_2, i_3, i_4 داریم، پس این جریان‌ها مستقل نیستند و نمی‌توان جریان بقیه شاخه‌ها را محاسبه کرد. اگر به صورت دستی امتحان کنید متوجه می‌شوید که مجهول‌های جریان شاخه‌های سمت چپ شکل فوق را نمی‌توانید به دست آورید.

۲. (قضیه تلگان) در مدار شکل روبرو فرض کنید جهت‌های متناظر ولتاژ و جریان انتخاب شده‌اند. درستی قضیه

تلگان، یعنی $\sum_{k=1}^{10} v_k i_k = 0$ را به دو طریق زیر (الف و ب) اثبات کنید.



(الف) با انتخاب یک دسته متغیرهای مستقل جریان شاخه

(ب) با انتخاب یک دسته متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه

(ج) همچنین نشان دهید که

$$i_3 + i_5 + i_7 + i_4 = i_{10}$$

$$i_3 + i_5 + i_7 + i_9 = 0$$

پاسخ: (الف) جریان شاخه‌هایی که به هر گره ساده و یا هر گره مرکب یک مدار وصل می‌شوند، نمی‌توانند به عنوان متغیرهای مستقل جریان در نظر گرفته شوند. زیرا مجموع جبری آن‌ها برابر صفر است. تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه در هر مدار برابر تعداد شاخه‌ها منهای تعداد گره‌ها به اضافه یک است.

در نتیجه برای این مسئله $10 - 6 + 1 = 5$ متغیر مستقل جریان شاخه وجود دارد. برای مثال دسته جریان‌های $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_6)$ مستقل می‌باشند.

$$KCL1: i_1 + i_6 + i_7 = 0$$

$$\Rightarrow i_7 = -i_1 - i_6$$

$$KCL2: -i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

$$\Rightarrow i_5 = i_1 - i_2 - i_3 - i_4$$

$$KCL3: -i_6 - i_2 - i_{10} = 0$$

$$\Rightarrow i_{10} = -i_2 - i_6$$

$$KCL4: -i_7 - i_3 - i_8 = 0$$

$$\Rightarrow i_8 = -i_7 - i_3 = i_1 + i_6 - i_3$$

$$KCL5: -i_5 - i_9 + i_8 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_9 &= i_8 - i_5 = (i_1 + i_6 - i_3) - (i_1 - i_2 - i_3 - i_4) \\ &= i_2 + i_4 + i_6 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{10} v_k i_k = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 + v_7 i_7 + v_8 i_8 + v_9 i_9 + v_{10} i_{10}$$

$$= v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 (i_1 - i_2 - i_3 - i_4) + v_6 i_6 + (-i_1 - i_6) + v_8 (i_1 + i_6 - i_3)$$

$$+ v_9 (i_2 + i_4 + i_6) + v_{10} (-i_2 - i_6)$$

$$= i_1 (v_1 + v_5 - v_7 + v_8) + i_2 (v_2 - v_5 + v_9 - v_{10}) + i_3 (v_3 - v_5 - v_8)$$

$$+ i_4 (v_4 - v_5 + v_9) + i_6 (v_6 - v_7 + v_8 + v_9 - v_{10}) = 0$$

ضرایب جملات فوق همگی برابر صفر می‌باشند. زیرا جمع جبری ولتاژها دروی یک مسیر بسته برابر صفر است. در نتیجه قضیه تلگان برقرار است.

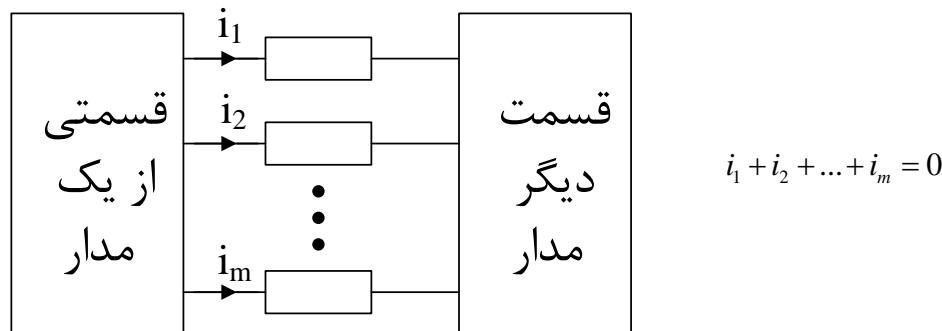
ب) تعداد متغیرهای مستقل ولتاژ شاخه‌ها برابر است با **تعداد گره‌ها منهای یک**. بنابراین $5 = 6 - 1$. در نتیجه $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ را به عنوان متغیرهای مستقل ولتاژ انتخاب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} v_k i_k &= v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 + v_7 i_7 + v_8 i_8 + v_9 i_9 + v_{10} i_{10} \\ &= v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + (v_1 + v_2)(v_1 + v_3) i_7 + (v_3 - v_5) i_8 \\ &\quad + (v_5 - v_4) i_9 + (v_2 - v_4) i_{10} \\ &= v_1 (i_1 + i_6 + i_7) + v_2 (i_2 + i_6 + i_{10}) + v_3 (i_3 + i_7 + i_8) \\ &\quad + v_4 (i_4 - i_9 - i_{10}) + v_5 (i_5 - i_8 + i_9) = 0 \end{aligned}$$

چون هر کدام از ضرایب ولتاژها، مجموع جریان‌های مربوط به گره‌ای از مدار می‌باشد. بنابراین مجموع برابر صفر است.

ج) هر کدام از روابط بیان KCL در گره مرکب می‌باشد.

۳. فرض کنید یک مدار را بتوانیم مانند شکل روبرو به قسمت‌هایی چنان تقسیم کنیم که این قسمت‌ها توسط شاخه‌هایی با جریان‌های i_1, i_2, \dots, i_m به هم وصل شده باشند. نشان دهید:



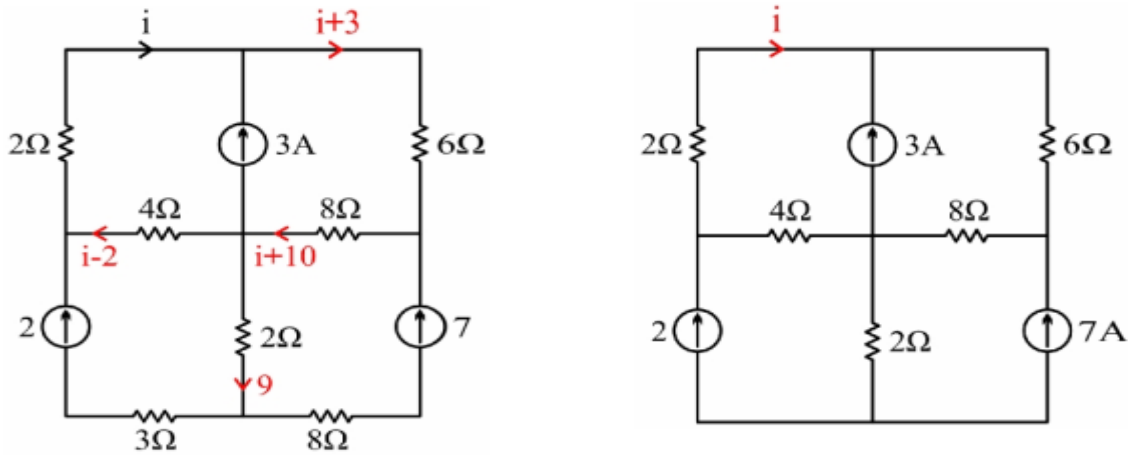
پاسخ: در صورتی که KCL را در گره مرکب هر بخشی از مدار بنویسیم، به رابطه فوق خواهیم رسید. در کلاس نشان داده شد.

۴. مشخصه V-I یک مقاومت به صورت $V = 2I + e^{-t}I - \frac{1}{2}V \cos 2t$ است. این مقاومت کدام ویژگی‌ها را دارد؟ (خطی بودن، تغییرناپذیری با زمان، دوطرفه بودن)

پاسخ: رابطه فوق را جوری ساده می‌کنیم که بتوانیم رابطه کلی ولتاژ با جریان را بیابیم. پس از ساده‌سازی به رابطه زیر خواهیم رسید. حال مشاهده می‌کنیم که رابطه ولتاژ و جریان خطی است، هرچند شیب آن با زمان تغییر می‌کند. شیب خط بیشتر از این ساده نمی‌شود. در نتیجه مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان است. حال برای بررسی دوطرفه بودن، متقارن بودن نسبت به مبدا مختصات را بررسی می‌کنیم. اگر جریان منفی شود، ولتاژ نیز همان مقدار قبلی را دارد و فقط منفی می‌شود. این یعنی اینکه نسبت به مبدا متقارن است. بنابراین دوطرفه می‌باشد.

$$V = \frac{2 + e^{-t}}{1 + \frac{1}{2} \cos 2t} I$$

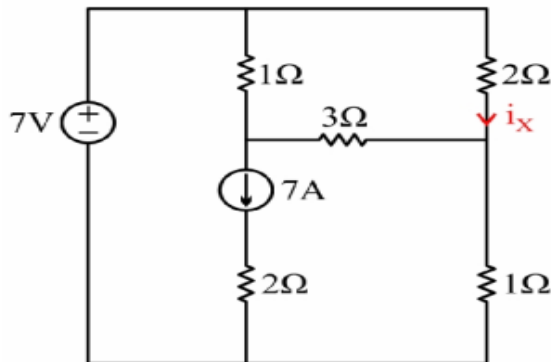
۵. در مدار شکل زیر، جریان مقاومت ۲ اهمی (i) را پیدا کنید.



پاسخ: پس از نوشتن KCL ها به صورت ذهنی بر روی مدار، KVL را در مستطیل بالایی می‌نویسیم:

$$KVL: 2i + 6(i+3) + 8(i+10) + 4(i-2) = 0 \Rightarrow i = -4.5A$$

۶. در شکل روبرو i_x را پیدا کنید.



پاسخ: جریان مقاومت ۳ اهمی را i_y در نظر می‌گیریم. جریان مقاومت ۱ اهمی شاخه پایین را هم i_z . جریان شاخه مقاومت ۱ اهمی بالا را نیز i_t در نظر می‌گیریم. سپس شروع به نوشتن KCL و KVL می‌کنیم تا مجهول مورد نظر را پیدا کنیم.

$$KCL1: -i_y - i_x + i_z = 0 \Rightarrow i_z = i_y + i_x$$

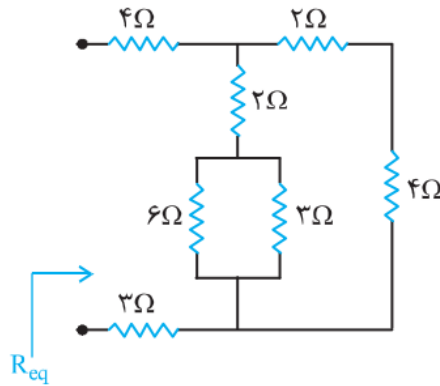
$$KCL2: -i_t + 7 + i_y = 0 \Rightarrow i_t = i_y + 7$$

$$KVL1: -1 \times i_t + 2 \times i_x - 3 \times i_y = 0 \Rightarrow 4i_y - 2i_x + 7 = 0$$

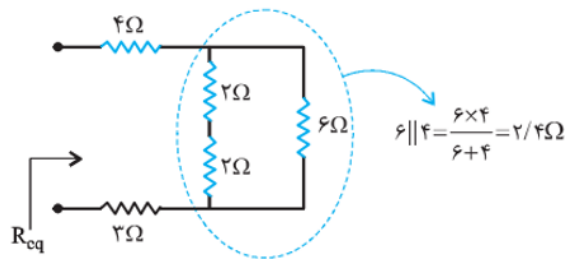
$$KVL2: -7 + 2i_x + i_z = 0 \Rightarrow i_y + 3i_x = 7$$

$$\begin{cases} 4i_y - 2i_x = -7 \\ i_y + 3i_x = 7 \end{cases} \Rightarrow i_x = 2.5A, \quad i_y = -0.5A$$

۷. مقاومت معادل مدار شکل زیر چند اهم است؟



پاسخ: دو مقاومت ۴ و ۲ اهمی در مدار با همدیگر سری هستند. بنابراین $(4 + 2 = 6\Omega)$. همچنین دو مقاومت ۶ و ۳ اهمی با همدیگر موازی هستند. بنابراین $(6 \parallel 3 = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega)$. حال مطابق شکل دو مقاومت ۲ اهمی با همدیگر سری هستند و معادل آن‌ها یک مقاومت ۴ اهمی می‌باشد که با مقاومت ۶ اهمی موازی است. در نتیجه:



و در نهایت مقاومت‌های ۴ و ۳ و ۲،۴ اهمی با همدیگر سری هستند.

$$R_{eq} = 4 + 2.4 + 3 = 9.4\Omega$$

موفق باشید

صفوی