به نام خدا

اصول سیستم‌های مخابراتی

دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه محقق اردبیلی

پاسخ تمرین سری سوم

موعد تحویل: روز شنبه

۱۳۹۹/۰۳/۱۰

۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $0 \le X \le 2$ است. برای فرآیندهای $v_1(t)=6e^{Xt}$ و $v_2(t)=6\cos Xt$ مقادیر زیر را بیابید:

الف) $\overline{v_1(t)}$ و $\overline{v_2(t)}$

ب) $R_{v_1}(t_1,t_2)$ و $R_{v_2}(t_1,t_2)$

ج) $\overline{v_1^2(t)}$ و $\overline{v_2^2(t)}$

پاسخ: الف)

$$\overline{v_1(t)}=E\left[v_1(t)\right]=E\left[6e^{Xt}\right]=\frac{6}{2}\int_0^2 e^{xt}dx=\frac{3}{t}\left(e^{2t}-1\right)$$

$$\overline{v_2(t)}=E\left[v_2(t)\right]=E\left[6\cos Xt\right]=\frac{6}{2}\int_0^2 \cos xt\,dx=\frac{3}{t}\sin 2t$$

ب)

$$R_{v_1}(t_1,t_2)=E\left[v_1(t_1)v_1(t_2)\right]=E\left[6e^{Xt_1}\times 6e^{Xt_2}\right]=E\left[36e^{X(t_1+t_2)}\right]$$

$$=\frac{36}{2}\int_0^2 e^{x(t_1+t_2)}dx=\frac{18}{t_1+t_2}\left(e^{2(t_1+t_2)}-1\right)$$

$$R_{v_2}(t_1,t_2)=E\left[v_2(t_1)v_2(t_2)\right]=E\left[36\cos Xt_1\times\cos Xt_2\right]=18E\left[\cos X(t_1-t_2)+\cos X(t_1+t_2)\right]$$

$$=18\left[\int_0^2\cos X(t_1-t_2)\,dx+\int_0^2\cos X(t_1+t_2)\,dx\right]=18\left[\frac{\sin 2(t_1-t_2)}{2(t_1-t_2)}+\frac{\sin 2(t_1+t_2)}{2(t_1+t_2)}\right]$$

ج)

$$\overline{v_1^2(t)}=R_{v_1}(t,t)=\frac{18}{(t+t)}\left(e^{2(t+t)}-1\right)=\frac{9}{t}\left(e^{4t}-1\right)$$

$$\overline{v_2^2(t)}=R_{v_2}(t,t)=18\left[1+\frac{\sin 4t}{4t}\right]$$

۲. فرض کنید متغیرهای تصادفی X و Y مستقل باشند که میانگین آن‌ها برابر صفر و واریانس هر یک از آن‌ها برابر σ^2 است. تابع همبستگی متقابل فرآیندهای زیر را پیدا کنید:

$$v(t)=X\cos\omega_0 t+Y\sin\omega_0 t$$
$$w(t)=Y\cos\omega_0 t-X\sin\omega_0 t$$

پاسخ:

$$R_{vw}(t_1,t_2)=E\left[v(t_1)w(t_2)\right]=E\Big[XY\left(\cos\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2-\sin\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2\right)$$
$$-X^2\cos\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2+Y^2\sin\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2\Big]$$

می‌دانیم:

$$E[XY]=\overline{XY}=\overline{X}\,\overline{Y}=0,\qquad E\left[X^2\right]=E\left[Y^2\right]=\sigma^2$$
$$R_{vw}(t_1,t_2)=E\left[v(t_1)w(t_2)\right]=\sigma^2\left(\sin\omega_0 t_1\cos\omega_0 t_2-\cos\omega_0 t_1\sin\omega_0 t_2\right)=\sigma^2\sin\omega_0(t_1-t_2)$$

۳. فرض کنید $z(t)=v(t)-v(t+T)$ که در آن $v(t)$ یک سیگنال تصادفی ایستان و T ثابت است. ابتدا $R_z(t_1,t_2)$ را بیابید. آیا می‌توان تابع خودهمبستگی فرآیند $z(t)$ را به صورت بیان $R_z(\tau)$ کرد؟ مقدار $G_z(f)$ را نیز برحسب $G_v(f)$ بیابید.

پاسخ:

$$R_z(t_1,t_2)=E\left[v(t_1)v(t_2)+v(t_1+T)v(t_2+T)-v(t_1+T)v(t_2)-v(t_1)v(t_2+T)\right]$$
$$=R_v(t_1-t_2)+R_v(t_1+T-t_2-T)-R_v(t_1+T-t_2)-R_v(t_1-t_2-T)$$
$$R_z(\tau)=2R_v(\tau)-R_v(\tau+T)-R_v(\tau-T)$$
$$G_z(f)=2G_v(f)-G_v(f)\left(e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}\right)=2G_v(f)(1-\cos 2\pi fT)$$

۴. فرض کنید $y(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ باشد. مقادیر $R_y(\tau)$ و $R_{yx}(\tau)$ را برحسب $R_x(\tau)$ بیابید. (راهنمایی: برای این کار از تبدیل فوریه معکوس $G_y(f)$ و $G_{yx}(f)$ استفاده کنید.)

پاسخ:

$$R_y(\tau)=F_\tau^{-1}\left[G_y(f)\right]=F_\tau^{-1}\left[\left|H(f)\right|^2G_x(f)\right]=F_\tau^{-1}\left[(2\pi f)^2G_x(f)\right]$$
$$=-F_\tau^{-1}\left[(j2\pi f)^2G_x(f)\right]=-\frac{d^2R_x(\tau)}{d\tau^2}$$
$$G_{xy}(f)=F_\tau\left[h(\tau)*R_x(\tau)\right]=H(f)G_x(f),\qquad H(f)=j2\pi f$$
$$R_{yx}(\tau)=F_\tau^{-1}\left[(j2\pi f)G_x(f)\right]=\frac{dR_x(\tau)}{d\tau}$$

۵. فرض کنید در ورودی گیرنده، به جای فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل از یک فیلتر پایین‌گذر RC برای محدود کردن پهنای باند نویز استفاده شده‌است. نویز ورودی گیرنده را نویز سفید با چگالی طیف توان $\dfrac{N_0}{2}$ در نظر بگیرید.

الف) چگالی طیف توان نویز فیلترشده $G_y(f)$ را به دست آورید.

ب) همچنین تابع خودهبستگی $R_y(\tau)$ را به دست آورید.

ج) توان نویز فیلترشده را نیز به دست آورید.

پاسخ: الف) تابع تبدیل فیلتر پایین‌گذر RC به صورت زیر است:

$$H(f)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{B}\right)^2}},\qquad B=\frac{1}{2\pi RC}$$

بنابراین، چگالی طیف توان خروجی فیلتر برای نویز ورودی با چگالی طیف توان $G_n(f)=\frac{N_0}{2}$ برابر است با:

$$G_y(f)=\left|H(f)\right|^2 G_n(f)=\frac{N_0/2}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}$$

ب) تابع خودهمبستگی $R_y(\tau)$ برابر تبدیل فوریه معکوس چگالی طیف توان خروجی است.

$$R_y(\tau)=F^{-1}\left[G_y(f)\right]$$

برای به دست آوردن تبدیل فوریه معکوس تابع داده شده از زوج تبدیل فوریه زیر استفاده می‌کنیم:

$$e^{-b|t|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2b}{b^2+(2\pi f)^2}$$

بنابراین:

$$\frac{2b}{b^2+(2\pi f)^2}=\frac{2/b}{1+\left(\frac{2\pi f}{b}\right)^2} \quad \Rightarrow B=\frac{b}{2\pi}\Rightarrow b=2\pi B$$

$$R_y(\tau)=F^{-1}\left[G_y(f)\right]=F^{-1}\left[\frac{N_0/2}{1+\left(\frac{f}{B}\right)^2}\right]=\frac{N_0}{2}\pi B e^{-2\pi B|\tau|}=\frac{N_0}{4RC}e^{-\frac{|\tau|}{RC}}$$

ج) حال به راحتی می‌توان توان نویز فیلترشده را به دست آورد:

$$\overline{y^2}=R_y(0)=\frac{N_0}{4RC}$$

روش دیگر نیز با استفاده از انتگرال‌گیری از $G_y(f)$ است.

۶. یک سیستم تکرار کننده کابلی به طول $400Km$ مفروض است که در آن $\alpha=0.5dB/Km$ است. حداقل تعداد بخش‌های تکرارکننده هم طول لازم را برای به دست آوردن $\left(\frac{S}{N}\right)_D \geq 30dB$ پیدا کنید، به شرطی که $\frac{S_T}{N_0 W}=80dB$ باشد. (راهنمایی: حتماً به کتاب کارلسون مراجعه شود.)

پاسخ:

در متن کتاب کارلسون اشاره شده است که با استفاده از تحلیل در بخش پیوست این کتاب، اگر سیستم شامل m بخش تکرارکننده مشابه باشد (هر کدام با تلفات یکسان L_1)، نسبت سیگنال به نویز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D \approx \frac{1}{m}\left(\frac{S}{N}\right)_1=\frac{L}{mL_1}\left(\frac{S_T}{LN_0W}\right)$$

که در آن $\left(\frac{S}{N}\right)_1 = \frac{S_T}{L_1 N_0 W}$ برابر نسبت سیگنال به نویز در انتهای بخش اول است. رابطه فوق یک رابطه کاربردی بوده و نشان می‌دهد که برای اصلاح رفتار سیستم زمانی که نسبت سیگنال به نویز در گیرنده کوچک است، می‌توان از تکرارکننده‌های مشابه استفاده کرده و نسبت سیگنال به نویز در گیرنده را از رابطه تقریبی فوق محاسبه نمود.

تلفات هر بخش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$L = 0.5 \times 400 = 200dB, \qquad L_1 = \frac{200}{m} dB$$

با استفاده از رابطه گفته شده:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_D = 10\log_{10}\left(\frac{S_T}{mL_1 N_0 W}\right) = 80 - 10\log_{10} m - \frac{200}{m} \geq 30dB$$

$$\log_{10} m + \frac{20}{m} \leq 5$$

حال برای آنکه رابطه فوق برآورده شود، مقادیر مختلف m را امتحان می‌کنیم تا حداقل تعداد بخش‌های تکرارکننده هم طول لازم را به دست آوریم:

m	$\log_{10} m + \frac{20}{m}$
10	$1.0 + 2 = 3$
9	$0.954 + \frac{20}{9} = 0.954 + 2.22 = 3.174$
8	$0.903 + \frac{20}{8} = 0.903 + 2.5 = 3.403$
7	$0.845 + \frac{20}{7} = 0.845 + 2.857 = 3.702$
6	$0.778 + \frac{20}{6} = 0.778 + 3.333 = 4.111$
5	$0.699 + 4 = 4.699 \Rightarrow \mathbf{m_{min} = 5}$
4	$0.602 + 5 = 5.602$

موفق باشید

صفوی