به نام خدا

اصول سیستم‌های مخابراتی

دانشکده فنی و مهندسی،
دانشگاه محقق اردبیلی

پاسخ تمرین سری اول

موعد تحویل: روز چهارشنبه

۱۳۹۸/۰۸/۰۱

۱. توان سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

الف) $10\cos\left(100t+\frac{\pi}{3}\right)$

ب) $10\cos\left(100t+\frac{\pi}{3}\right)+16\sin\left(150t+\frac{\pi}{5}\right)$

ج) $\left(10+2\sin 3t\right)\cos 10t$

د) $10\cos 5t\cos 10t$

ه) $e^{j\alpha t}\cos\omega_0 t$

پاسخ:

الف) توان یک سیگنال کسینوسی تک فرکانس همان‌طور که سر کلاس محاسبه شد، فقط و فقط به **دامنه** (**A**) آن بستگی دارد و به فرکانس و فاز بستگی ندارد.

$$P=\frac{A^2}{2}=\frac{10^2}{2}$$

ب) توان جمع دو سیگنال کسینوسی برابر جمع توان تک تک آن کسینوسی‌هاست. بنابراین:

$$P=\frac{10^2}{2}+\frac{16^2}{2}=178$$

دقت کنید که

$$10\cos\left(100t+\frac{\pi}{3}\right)+16\sin\left(150t+\frac{\pi}{5}\right)=10\cos\left(100t+\frac{\pi}{3}\right)+16\cos\left(150t+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{2}\right)$$

به عبارت دیگر اینکه $\sin$ داشته باشیم و یا $\cos$ فرقی نمی‌کند. چون این دو سیگنال فقط اختلاف فاز ۹۰ درجه دارند و فاز سیگنال در محاسبه توان سیگنال کسینوسی بی‌تأثیر است.

ج) ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\left(10+2\sin 3t\right)\cos 10t=10\cos 10t+2\sin 3t\cos 10t=10\cos 10t+\sin 13t-\sin 7t$$

$$P=\frac{10^2}{2}+\frac{1^2}{2}+\frac{1^2}{2}=51$$

د) همانند بخش قبل عبارت را ساده می‌کنیم:

$$10\cos 5t\cos 10t=5\left(\cos 15t+\cos 5t\right)$$

$$P=\frac{5^2}{2}+\frac{5^2}{2}=25$$

ه)

$$e^{j\alpha t}\cos\omega_0 t=e^{j\alpha t}\left[\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right]=\frac{1}{2}\left[e^{j(\alpha+\omega_0)t}+e^{j(\alpha-\omega_0)t}\right]$$

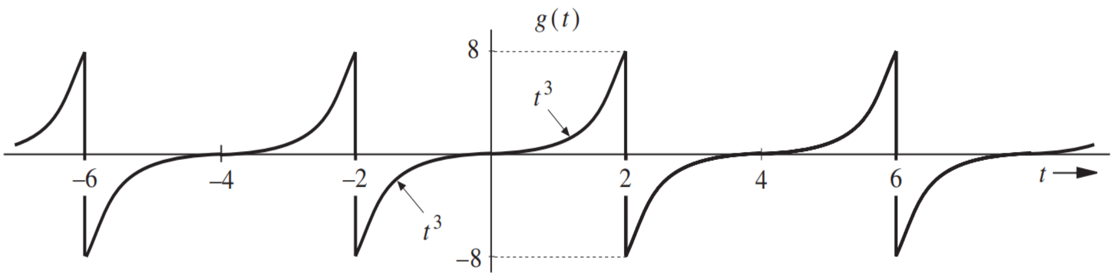
سیگنال داده شده را به فرم ترکیب خطی از نمایی ها نوشتیم. بنابراین

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

۲. توان سیگنال متناوب $g(t)$ را به دست آورید. سپس توان هر کدام از عبارت های زیر را محاسبه کنید.

الف) $-g(t)$ ب) $1.5g(t)$

ج) $g(-t)$ د) $g(at+b)$



پاسخ:

$$P_g = \frac{1}{T}\int_T \left[g(t)\right]^2 dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(t^3\right)^2 dt = \frac{1}{4}\frac{t^7}{7}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2^7}{7} + \frac{(-2)^7}{7}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2^8}{7}\right) = \frac{64}{7}$$

الف) $$P_{-g} = \frac{1}{T}\int_T \left[-g(t)\right]^2 dt = \frac{1}{T}\int_T \left[g(t)\right]^2 dt = P_g = \frac{64}{7}$$

ب) $$P_{1.5g} = \frac{1}{T}\int_T \left[1.5g(t)\right]^2 dt = (1.5)^2 \frac{1}{T}\int_T \left[g(t)\right]^2 dt = 2.25 \times \frac{64}{7}$$

ج) $$P_{g(-t)} = \frac{1}{T}\int_T \left[g(-t)\right]^2 dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left((-t)^3\right)^2 dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(-(t)^3\right)^2 dt == \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(t^3\right)^2 dt = P_g = \frac{64}{7}$$

د) $$P_{g(at+b)} = \frac{1}{T}\int_T \left[g(at+b)\right]^2 dt \underset{adt=dx}{\overset{at+b=x}{=}} \frac{1}{a}\frac{1}{T}\int_T \left[g(x)\right]^2 dx = \frac{1}{a}P_g = \frac{1}{a} \times \frac{64}{7}$$

۳. سیگنال نمایی $e^{-\alpha t}$ برای مقادیر حقیقی α سیگنال توان است و یا انرژی؟ اگر α عددی موهومی خالص باشد ($\alpha = jx$)، در این صورت سیگنال یادشده، سیگنال توان است و یا انرژی؟

پاسخ: برای مقادیر حقیقی α داریم:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-\alpha t}\right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \infty$$

$$P_g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(e^{-\alpha t}\right)^2 dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\alpha t} dt = \infty$$

برای مقادیر موهومی $\alpha = jx$ داریم:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{jxt}\right)\left(e^{-jxt}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} 1dt = \infty$$

$$P_g = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t)g^*(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left(e^{jxt}\right)\left(e^{-jxt}\right)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 1dt = 1$$

۴. تابع پله $u(t)$ و همچنین تابع ضربه $\delta(t)$ سیگنال توان هستند و یا انرژی؟ بحث کنید.

پاسخ: در رابطه با تابع پله به راحتی می‌توان از تعاریف انرژی و توان به صورت زیر استفاده کرد:

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} \left[u(t) \right]^2 dt = \int_0^{\infty} (1)^2 dt = t \Big|_0^{\infty} = \infty$$

$$P_u = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[u(t) \right]^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (1)^2 dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} t \Big|_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{2}$$

با توجه به اینکه انرژی سیگنال پله، بی‌نهایت است و مقدار توان آن عددی محدود بین صفر و بی‌نهایت است، **در نتیجه تابع پله سیگنال توان می‌باشد.**

و اما انرژی و توان تابع ضربه را در دو حالت محاسبه می‌کنیم.

حالت پیوسته:

در رابطه با تابع ضربه ممکن است تحلیل‌های اشتباه مختلفی را دیده باشید که برای نمونه یک مورد از این تحلیل‌ها را اینجا بیان خواهیم کرد. اما در نظر داشته باشید که **تابع ضربه، در تعریف تابع نمی‌گنجد.** ضربه یک توزیع است و نه تابع (بحث در مورد چرایی آن خارج از اهداف درس است). بنابراین در بررسی قضایایی که برای توابع استفاده می‌کنیم، هنگام استفاده برای ضربه باید دقت کنیم. مقدار ضربه در صفر بی‌نهایت است. در نتیجه مقدار $\delta^2(t)$ در صفر تعریف نشده است. **در نتیجه تابع ضربه، نه سیگنال توان است و نه سیگنال انرژی.**

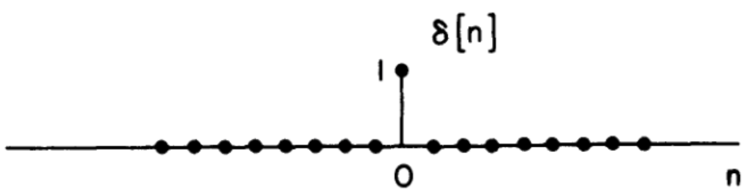
یکی از تحلیل‌های **اشتباه** که قضیه انرژی رالی و یا پارسوال را برای ضربه به کار برده و توان ضربه را محاسبه می‌کند:

$$g(t) = \delta(t) \Leftrightarrow G(f) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^2(f) df \quad \Rightarrow P = \lim_{B \to \infty} \frac{1}{2B} \int_{-B}^{B} X^2(f) df = \lim_{B \to \infty} \frac{2B}{2B} = 1$$

حالت گسسته: دقت داشته باشید برای حالت گسسته داستان فرق می‌کند. زیرا تابع ضربه در حالت گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



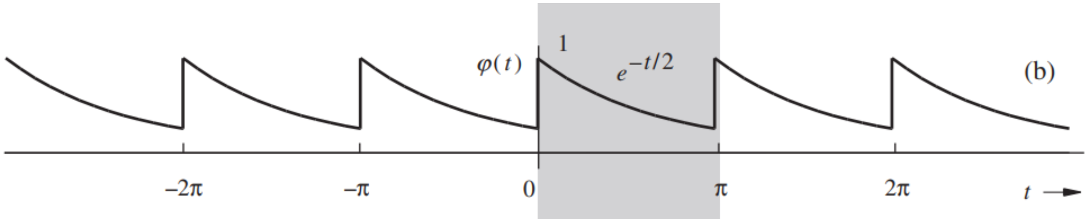
دقت کنید مقدار تابع در صفر برابر یک است.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta^2[n] = \ldots + 0^2 + 1^2 + 0^2 + \ldots = 1$$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \delta^2[n] = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} = 0$$

بنابراین تابع ضربه در حالت گسسته سیگنال انرژی است.

۵. سری فوریه نمایی تابع زیر را به دست آورید. همچنین طیف دوسمتی آن را نیز رسم کنید.



پاسخ:

$$T_0 = \pi, \qquad 2\pi f_0 = 2\pi \frac{1}{T_0} = 2$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2nt}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \varphi(t) e^{-j2nt} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-\left(\frac{1}{2}+j2n\right)t} dt = \frac{-1}{\pi\left(\frac{1}{2}+j2n\right)} e^{-\left(\frac{1}{2}+j2n\right)t}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{0.504}{1+j4n}$$

بنابراین

$$\varphi(t) = 0.504 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+j4n} e^{j2nt}$$

$$= 0.504\left[\ldots + \frac{1}{1-j12}e^{-j6t} + \frac{1}{1-j8}e^{-j4t} + \frac{1}{1-j4}e^{-j2t} + 1 + \frac{1}{1+j4}e^{j2t} + \frac{1}{1+j8}e^{j4t} + \frac{1}{1+j12}e^{j6t} + \ldots\right]$$

مشاهده می‌شود که ضرایب D_n مختلط هستند. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رفت، ضرایب D_n و D_{-n} مزدوج مختلط هستند.

حال برای رسم نمودار طیف داریم:

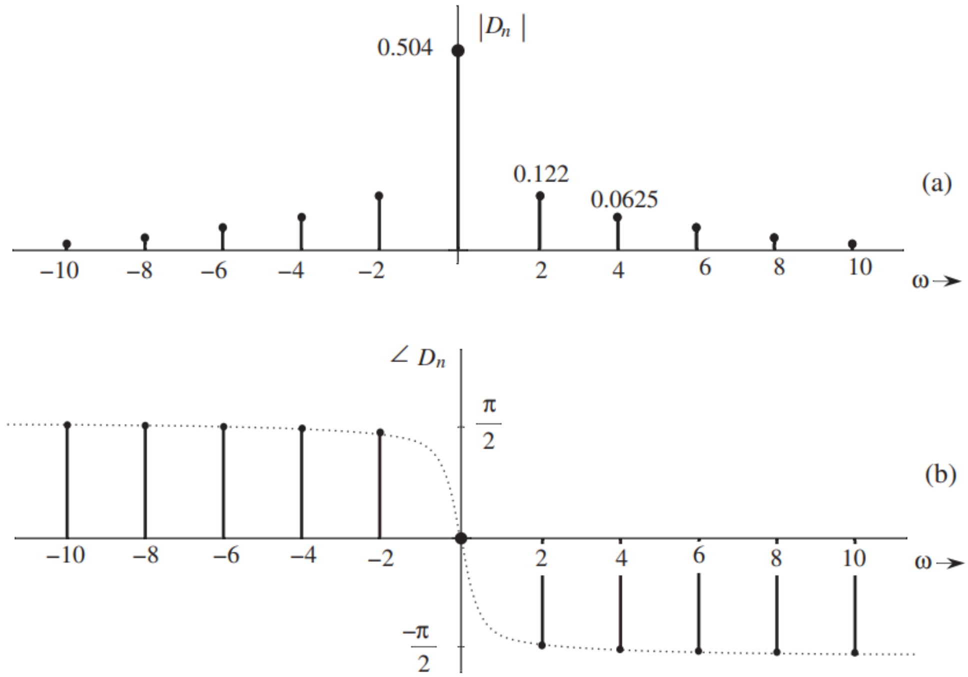
$$D_0 = 0.504$$

$$D_1 = \frac{0.504}{1+j4} = 0.122 e^{-j1.3258} \Rightarrow |D_1| = 0.122, \measuredangle D_1 = -1.3258 \text{ radians}$$

$$D_{-1} = \frac{0.504}{1-j4} = 0.122 e^{j1.3258} \Rightarrow |D_{-1}| = 0.122, \measuredangle D_{-1} = 1.3258 \text{ radians}$$

$$D_2 = \frac{0.504}{1+j8} = 0.0625 e^{-j1.4464} \Rightarrow |D_2| = 0.0625, \measuredangle D_2 = -1.4464 \text{ radians}$$

$$D_{-2} = \frac{0.504}{1-j8} = 0.0625 e^{j1.4464} \Rightarrow |D_{-2}| = 0.0625, \measuredangle D_{-2} = 1.4464 \text{ radians}$$



۶. سیگنال متناوب $g(t)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$g(t) = \sin 2t + \cos\left(5t - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(8t + \frac{\pi}{3}\right)$$

الف) طیف دامنه و فاز آن را برای سری فوریه مثلثاتی فوق رسم کنید.

ب) با استفاده از بخش الف، طیف سری فوریه نمایی را نیز رسم کنید.

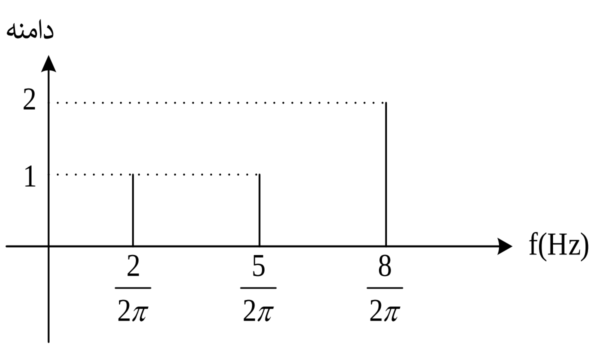
ج) با استفاده از بخش ب، سری فوریه نمایی تابع $g(t)$ را بنویسید.

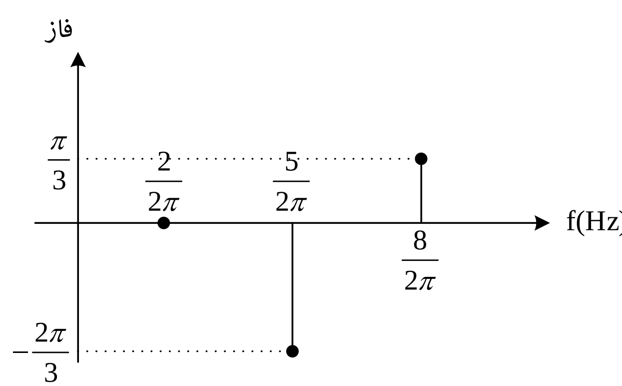
پاسخ: در ابتدا سیگنال را به فرم کسینوسی بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g(t) &= \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(5t - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(8t + \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(2\pi\left(\frac{2}{2\pi}\right)t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(2\pi\left(\frac{5}{2\pi}\right)t - \frac{2\pi}{3}\right) + 2\cos\left(2\pi\left(\frac{8}{2\pi}\right)t + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

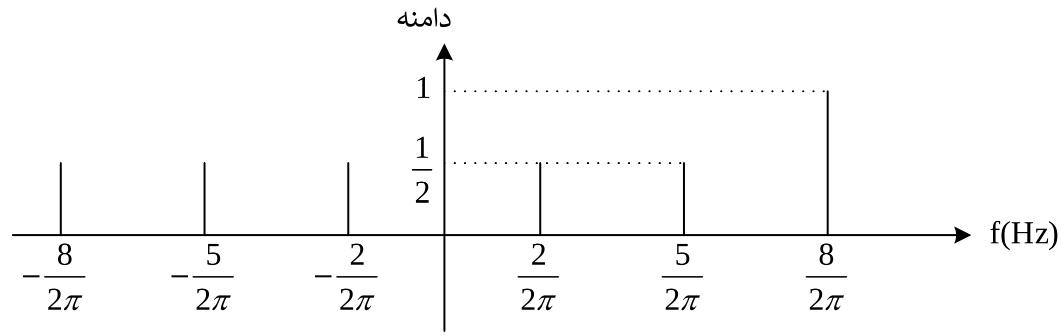
حال می‌توان طیف دامنه و فاز را رسم کرد.

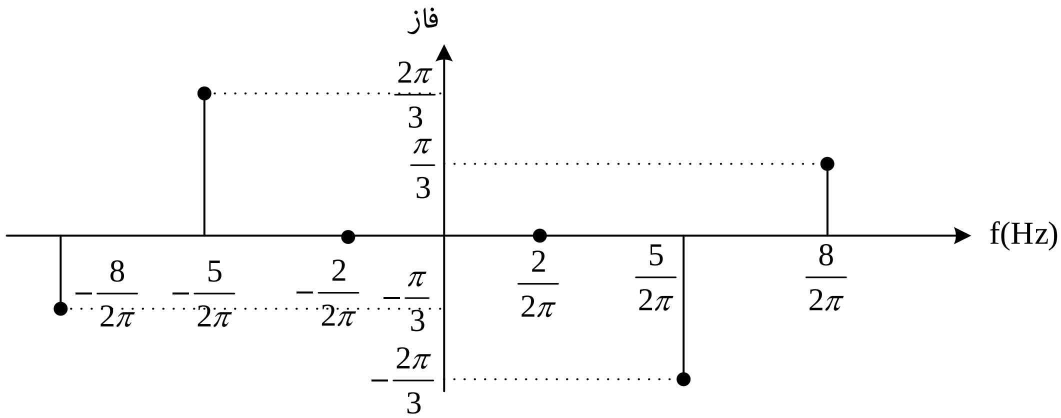
الف) در این بخش طیف یک سمتی مدنظر است.





ب) در این بخش طیف دوسمتی مدنظر است.

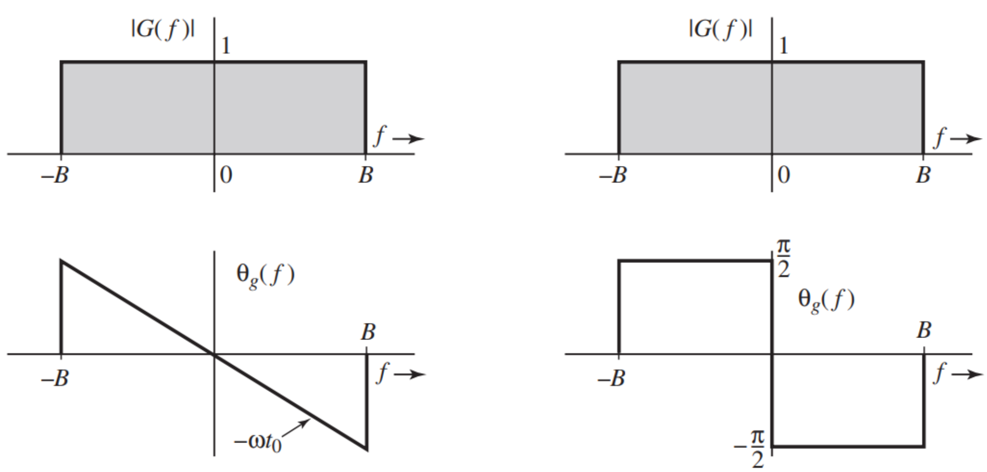




ج) $$g(t)=\frac{1}{2}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)+\frac{1}{2}\left(e^{j\left(5t-\frac{2\pi}{3}\right)}+e^{-j\left(5t-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)+\left(e^{j\left(8t+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-j\left(8t+\frac{\pi}{3}\right)}\right)$$

۷. شکل زیر طیف دامنه و فاز دو سیگنال متفاوت را نشان می‌دهد. رابطه این سیگنال‌ها را در حوزه زمان به دست آورید و نشان دهید که علی رغم اینکه در حوزه فرکانس در طیف دامنه مشابهت دارند، در حوزه زمان دو سیگنال کاملا متفاوتی هستند.

(راهنمایی: $G(f)=|G(f)|e^{j\theta_g(f)}$. در نتیجه برای شکل a، $G(f)=1e^{-j2\pi ft_0},\quad |f|\le B$. همچنین برای شکل b، $G(f)=\begin{cases}1e^{-j\frac{\pi}{2}}=-j, & 0<f\le B\\ 1e^{j\frac{\pi}{2}}=j, & -B\le f<0\end{cases}$)



(a) (b)

پاسخ:

الف) ابتدا دقت داریم که B همان فرکانس قطع سیگنال است.

$$g(t)=\int_{-B}^{B} e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df=\int_{-B}^{B} e^{j2\pi f(t-t_0)} df$$

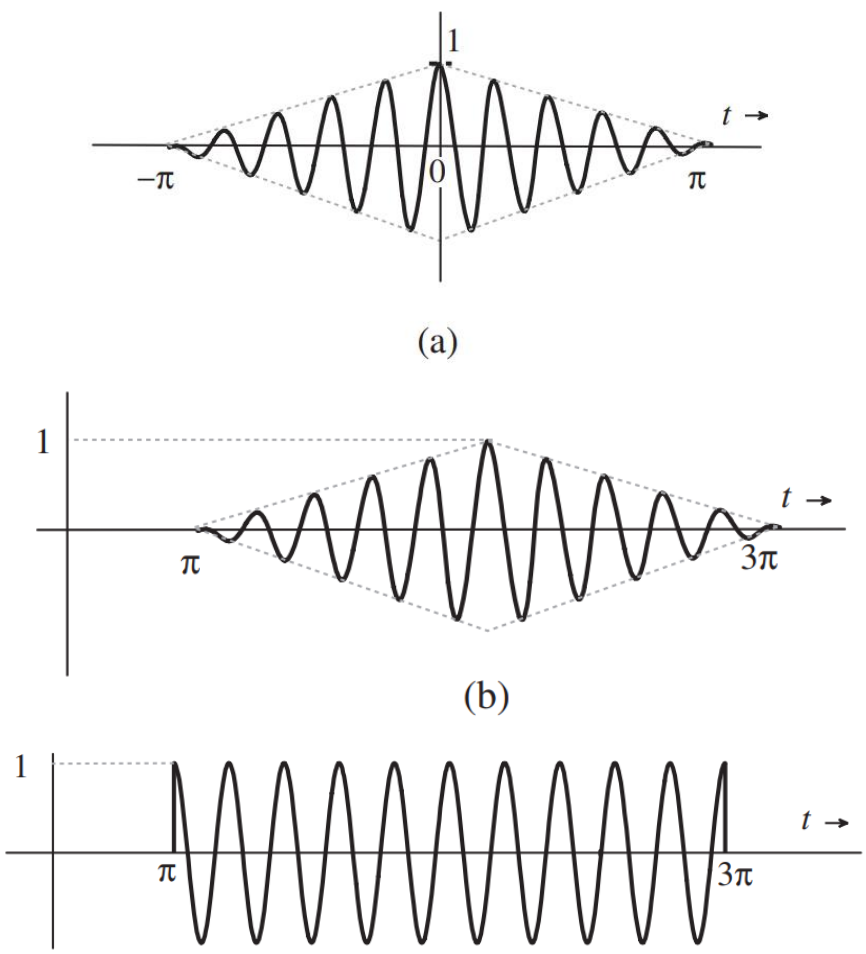
$$=\frac{1}{j2\pi(t-t_0)} e^{j2\pi f(t-t_0)}\Big|_{-B}^{B}=\frac{e^{j2\pi B(t-t_0)}-e^{-j2\pi B(t-t_0)}}{j2\pi(t-t_0)}=\frac{\sin 2\pi B(t-t_0)}{\pi(t-t_0)}$$

$$=2B\frac{\sin\left[2\pi B(t-t_0)\right]}{2\pi B(t-t_0)}=2B\operatorname{sinc}\left[2B(t-t_0)\right]$$

ب)

$$g(t)=\left[\int_{-B}^{0} je^{j2\pi f t} df+\int_{0}^{B} -je^{j2\pi f t} df\right]=\frac{1}{2\pi t} e^{j2\pi f t}\Big|_{-B}^{0}-\frac{1}{2\pi t} e^{j2\pi f t}\Big|_{0}^{B}=\frac{1-\cos 2\pi Bt}{\pi t}$$

۸. شکل‌های زیر با حامل $\cos 10t$ مدوله شده‌اند. تبدیل فوریه آن‌ها را با استفاده از خواصی که یاد گرفته‌اید به دست آورید. سپس طیف دامنه و فاز آن‌ها را رسم کنید. (راهنمایی: توابع شکل‌های زیر را می‌توانید به فرم $g(t)\cos 2\pi f_0 t$ بیان کنید.)



(a)

(b)

(c)

پاسخ:

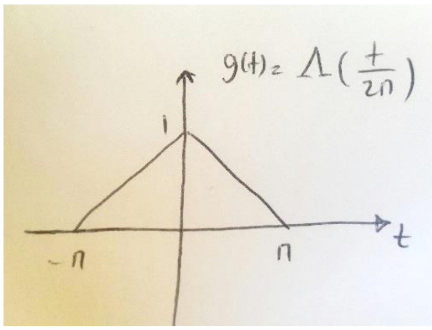
الف) سیگنال مدنظر در این حالت به صورت زیر است:

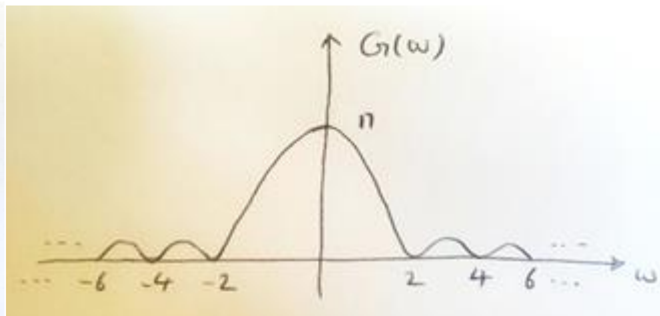
$$g(t)=\Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos 10t$$

به عبارت دیگر تابع مثلثی با حامل $\cos 10t$ مدوله شده‌است. از طرف دیگر تبدیل فوریه تابع مثلثی را می‌دانیم.

$$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)\Leftrightarrow\frac{\tau}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{f\tau}{2}\right)\qquad\Rightarrow\ \Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\Leftrightarrow\pi\operatorname{sinc}^2(\pi f)$$

نمودارهای حوزه فرکانس برای سادگی برحسب $\omega=2\pi f$ رسم شده‌اند.

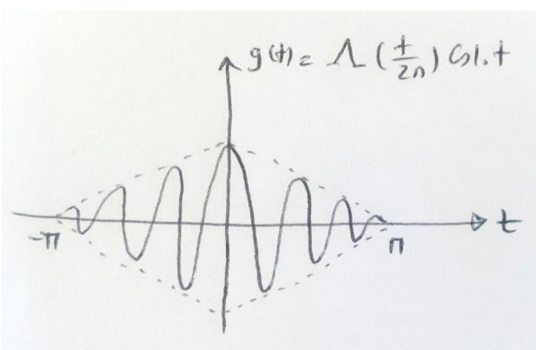


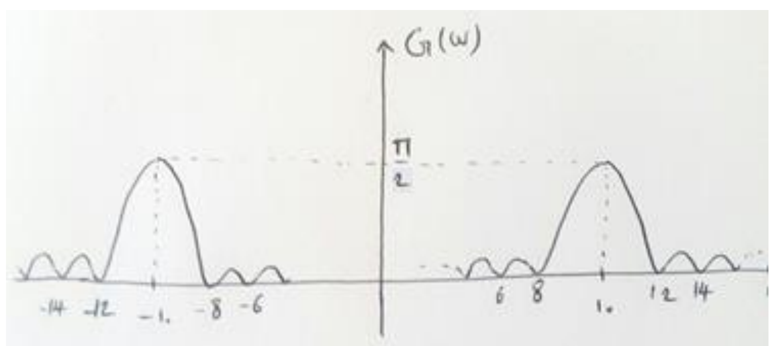


در نتیجه تبدیل فوریه تابع $g(t)=\Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos 10t$ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$g(t)=\Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos 10t\Leftrightarrow G(f)=\frac{\pi}{2}\left\{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi f-10}{2}\right)+\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi f+10}{2}\right)\right\}$$

حال می‌توانیم طیف دامنه و فاز را رسم نماییم. دقت داریم که تبدیل فوریه حاصل مقداری حقیقی است. بنابراین فقط طیف دامنه باید رسم شود. نمودار برای سادگی برحسب $\omega=2\pi f$ رسم شده است.





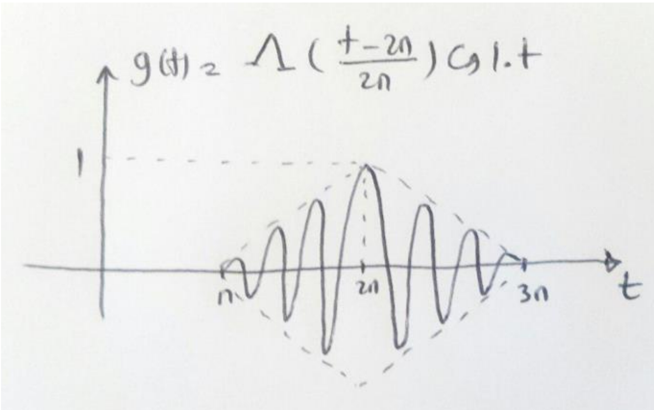
ب) پاسخ همانند بخش الف است فقط با این تفاوت که سیگنال به اندازه 2π تأخیر دارد. بنابراین طبق خاصیت time shift داریم:

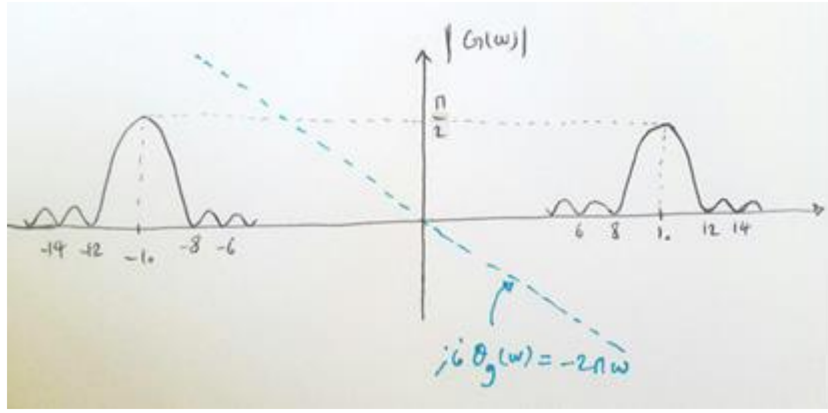
$$g(t)=\Lambda\left(\frac{t-2\pi}{2\pi}\right)\cos 10(t-2\pi)\Leftrightarrow G(f)=\frac{\pi}{2}\left\{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi f-10}{2}\right)+\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi f+10}{2}\right)\right\}e^{-j2\pi f\times 2\pi}$$

دقت داریم که اگر ابتدا تابع مثلثی را شیفت دهیم و سپس سیگنال حاصل را با حامل $\cos 10t$ مدوله کنیم حاصل مجددا مثل فوق خواهد شد. زیرا:

$$\Lambda\left(\frac{t-2\pi}{2\pi}\right)\cos 10(t-2\pi)=\Lambda\left(\frac{t-2\pi}{2\pi}\right)\cos 10t$$

حال می‌توان طیف دامنه و فاز را رسم نمود. نمودار برای سادگی برحسب $\omega=2\pi f$ رسم شده است. دقت داریم که به خاطر وجود $e^{-j2\pi\omega}$ فاز خطی $\measuredangle G(\omega)=-2\pi\omega$ خواهیم داشت. بنابراین





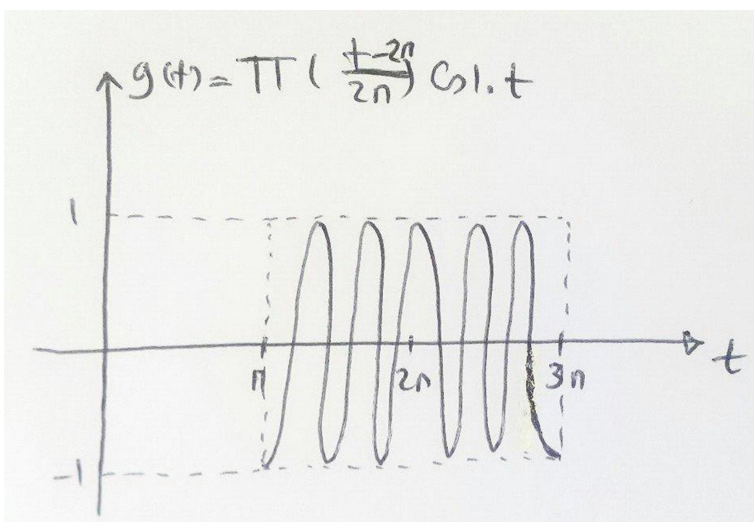
ج) این حالت مشابه حالت ب است با این تفاوت که به جای پالس مثلثی، پالس مستطیلی استفاده شده است.

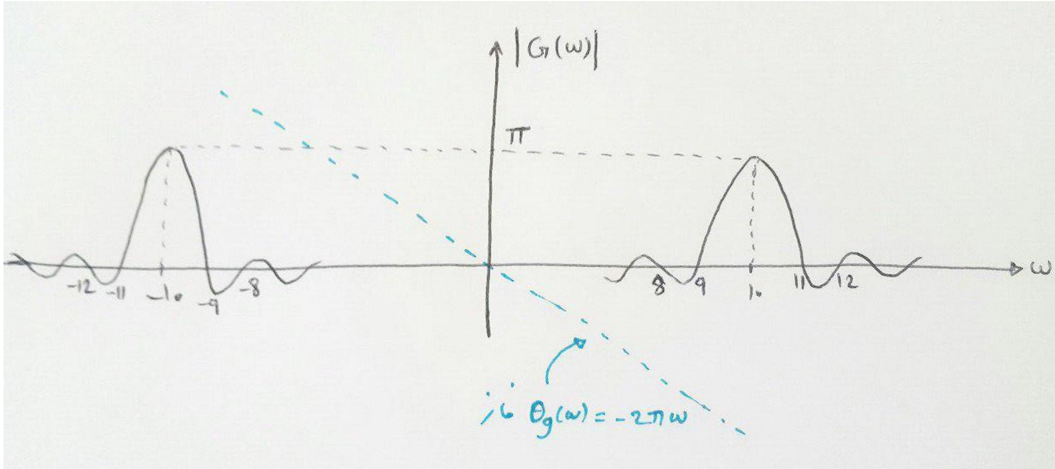
$$\Pi\left(\frac{t}{2\pi}\right)\Leftrightarrow 2\pi\operatorname{sinc}(2\pi f)$$

بنابراین با استفاده از پاسخ بخش ب داریم:

$$g(t)=\Pi\left(\frac{t-2\pi}{2\pi}\right)\cos 10(t-2\pi)\Leftrightarrow G(f)=\pi\left\{\operatorname{sinc}(2\pi f-10)+\operatorname{sinc}(2\pi f+10)\right\}e^{-j2\pi f\times 2\pi}$$

حال می‌توان طیف دامنه و فاز را رسم نمود. نمودار برای سادگی برحسب $\omega=2\pi f$ رسم شده است. به نقاط قطع محور ω دقت نمایید. متفاوت با بخش قبل است.





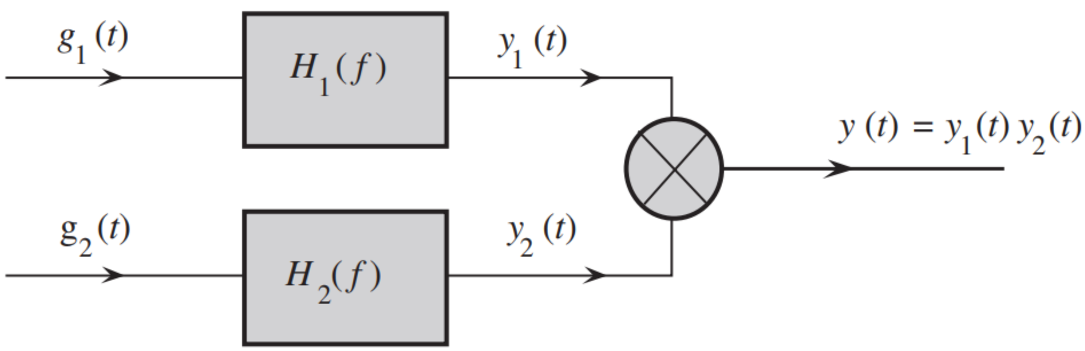
۹. سیگنال‌های $g_1(t)=10^4\Pi\left(\frac{t}{10^{-4}}\right)$ و $g_2(t)=\delta(t)$ به عنوان ورودی دو فیلتر پایین‌گذر $H_1(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{40000\pi}\right)$ و $H_2(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right)$ در نظر گرفته شده‌اند. خروجی این فیلترها در همدیگر ضرب شده‌اند تا سیگنال $y(t)=y_1(t)y_2(t)$ حاصل شود.

الف) $G_1(\omega)$ و $G_2(\omega)$ را رسم نمایید.

ب) $H_1(\omega)$ و $H_2(\omega)$ را رسم نمایید.

ج) $Y_1(\omega)$ و $Y_2(\omega)$ را رسم نمایید.

د) پهنای باند $y_1(t)$، $y_2(t)$ و $y(t)$ را بیابید.

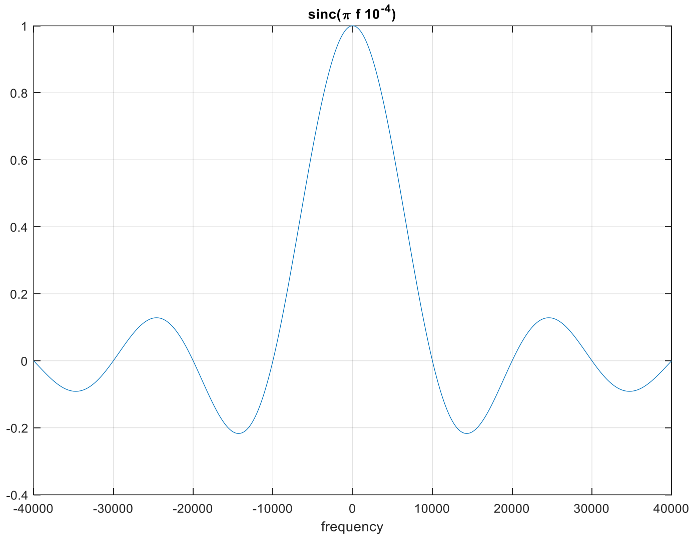


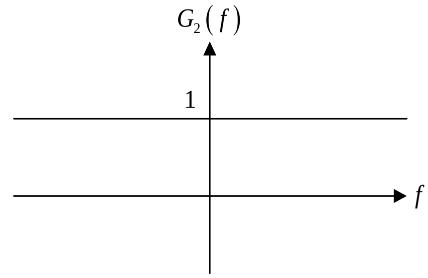
پاسخ:

الف) با توجه به تبدیل فوریه سیگنال‌های $g_1(t)=10^4\Pi\left(\frac{t}{10^{-4}}\right)$ و $g_2(t)=\delta(t)$

$$g_1(t)=10^4\Pi\left(\frac{t}{10^{-4}}\right)\Leftrightarrow G_1(f)=10^4\times\left[10^{-4}\mathrm{sinc}\left(f\times10^{-4}\right)\right]=\mathrm{sinc}\left(f\times10^{-4}\right)$$

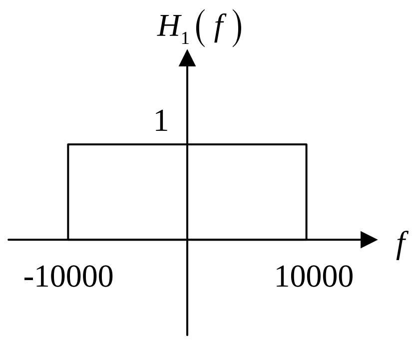
$$g_2(t)=\delta(t)\Leftrightarrow G_2(f)=1\;G_2(f)$$

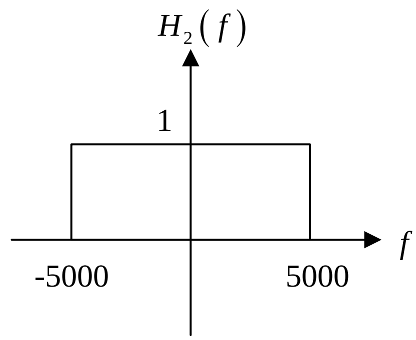




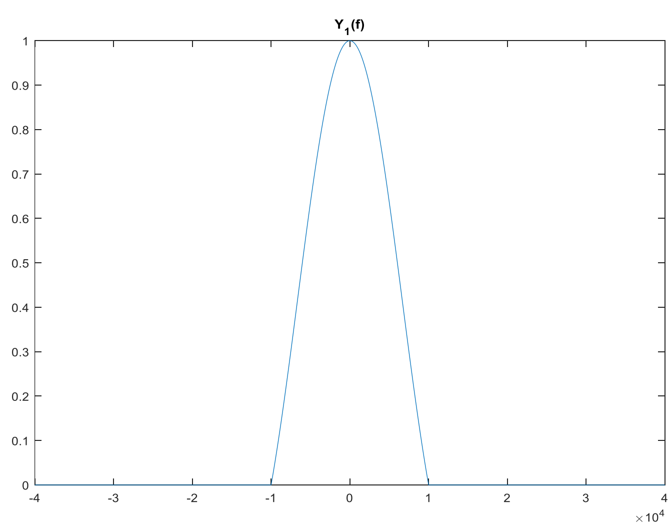
ب) دو فیلتر پایین‌گذر $H_1(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{40000\pi}\right)$ و $H_2(\omega)=\Pi\left(\frac{\omega}{20000\pi}\right)$ به شکل زیر می‌باشند.

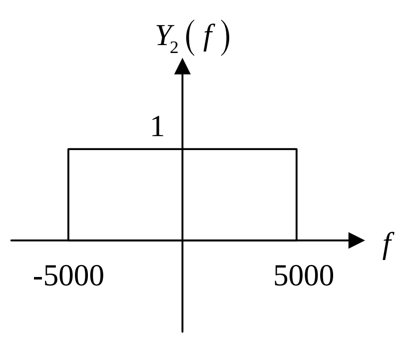
$$H_1(f)=\Pi\left(\frac{2\pi f}{40000\pi}\right)=\Pi\left(\frac{f}{20000}\right) \qquad H_2(f)=\Pi\left(\frac{f}{10000}\right)$$





ج) با توجه به اینکه خروجی هر یک از فیلترها برابر $Y_1(\omega)=G_1(\omega)H_1(\omega)$ و $Y_2(\omega)=G_2(\omega)H_2(\omega)$ می‌باشند، خروجی هر کدام به صورت زیر خواهد بود.





د) با توجه به نمودار رسم شده در بخش ج به راحتی مشاهده می‌شود که پهنای باند $Y_1(f)$ و $Y_2(f)$ به ترتیب برابر $10KHz$ و $5KHz$ است. اما برای محاسبه پهنای باند $Y(f)$ داریم:

$$y(t)=y_1(t)y_2(t)\Leftrightarrow Y(f)=Y_1(f)*Y_2(f)$$

با توجه به خواص کانولوشن، می‌دانیم که پهنای باند سیگنال $Y(\omega)$ در این حالت برابر جمع پهنای باندهای $Y_1(f)$ و $Y_2(f)$ است. در نتیجه پهنای باند $Y(f)$ برابر $15KHz$ است زیرا پهنای باند $Y_1(f)$ و $Y_2(f)$ به ترتیب برابر $10KHz$ و $5KHz$ است.

موفق باشید

صفوی