برای سمپل گیری در توزیع اول ابتدا باید سمپلی که از طریق توزیع یونیفرم بدست می آوریم را با استفاده از روش box-muller تبدیل به سمپلی از یک توزیع نرمال کنیم.

Box-muller

$$Z_0 = R\,cos(\theta) = \sqrt{-2ln(U_1)}cos(2\pi \mathrm{U}_2)$$

$$Z_1 = R\,sin(\theta) = \sqrt{-2ln(U_1)}sin(2\pi \mathrm{U}_2)$$

$$A_0 = \sigma Z_0 + \mu$$

$$A_1 = \sigma Z_1 + \mu$$

$$A_0, A_1 \sim normal(\mu, \sigma)$$

اثبات

برای اثبات این روش من مطلبی پیدا نکردم تنها نکته ای که بود این لینک بود که مفهومی به توضیح این روش و استنتاجش پرداخته بود.

برای سمپل گیری از توزیع exponential نیز از روش inverse transform استفاده کردم.

Invers transform in exponential

اثبات

$$F(X) = 1 - e^{-\lambda X}$$

$$X = -ln(U)/\,\lambda$$

نشان میدهیم که Y هم cdf مشابه با X دارد.

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(F^{-1}(U) \le x) = P\left(F\left(F^{-1}(U)\right) \le F(x)\right) =$$

$$P\big(U \le F(x)\big) = F(x)$$

$$U \sim U(0,1)$$

برای سمپل گیری از توزیع هندسی نیز از روش inverse function استفاده کردم.

Inverse transform in geometric

$$X = \left\lfloor \frac{ln\,U}{ln\,q} \right\rfloor + 1$$

$$q = 1 - p$$

اثبات

$$U \sim U(0,1)$$

$$\sum_{n=1}^{x-1} (q)^{n-1}\,p \le U \le \sum_{n=1}^{x} (q)^{n-1}\,p$$

$$\sum_{n=1}^{x} ar^{n-1} = a\frac{r^x - 1}{r - 1}$$

$$1 - (q)^{x-1} \leq U \leq 1 - (q)^x \rightarrow (q)^x < 1 - U \leq (q)^{x-1}$$

$$x - 1 \leq \frac{ln(1-U)}{ln(q)} < x \rightarrow x = \left\lfloor \frac{ln(1-U)}{ln(q)} \right\rfloor + 1$$

$$x = \left\lfloor \frac{ln(U)}{ln(q)} \right\rfloor + 1$$

حال وقتی هر سه توزیع اصلی موارد سوال را میتوانیم داشته باشیم و از آنها سمپل بگیریم کافیست مشابه با صورت هر کدام از توزیع های ترکیبی در صورت سوال سمپل بگیریم از هر کدام از توزیع های base و سپس ترکیب خط انها را تحت عنوان یک سمپل از توزیع سوال بیان کنیم.