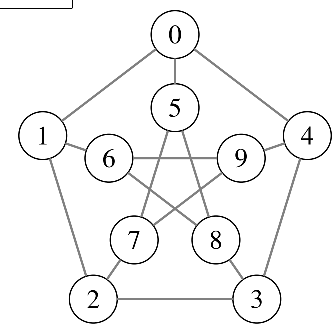
Este es el examen final del curso *Programación Imperativa Modular (PIMO)*, 2014-2. El examen tiene 6 preguntas; otorga un total de 65 puntos y 25 de bono. El examen es *individual* y no es permitido el uso de libros, apuntes ni equipos electrónicos.

Nombre y código: ______________________________

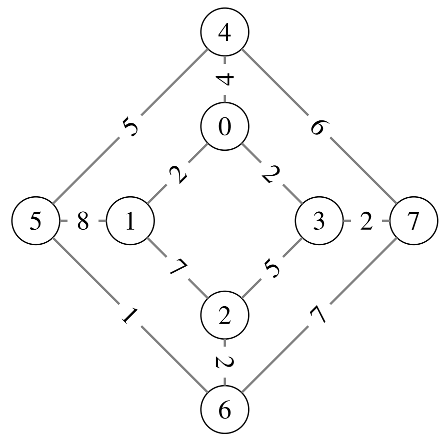
Pregunta	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos	10	10	10	10	10	15	65
Bono	0	10	10	0	0	5	25
Puntaje							

1. Considere el grafo (A) (i.e., el grafo de Petersen). Este grafo está formado por 10 vértices y 15 arcos. Responda y justifique cada una de las siguientes preguntas:
   (a) (1 punto) ¿Es este grafo no dirigido?
   (b) (1 punto) ¿Es este grafo conexo?
   (c) (1 punto) ¿Es este grafo completo?
   (d) (1 punto) ¿Es este grafo acíclico?
   (e) (3 puntos) Dibuje una representación de matriz de adyacencia.
   (f) (3 puntos) Dibuje una representación de lista de adyacencia.

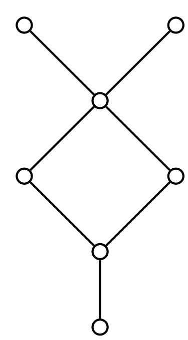


(A) Grafo de Petersen

2. La *secuencia de grados* de un grafo G de n vértices es la lista de los grados de los vértices de G ordenada descendentemente. Por ejemplo, la secuencia de grados del grafo (A) es $[3,3,3,3,3,3,3,3,3,3]$.
   (a) (2 puntos) Determine la secuencia de grados del grafo (B).
   (b) (2 puntos) Determine la secuencia de grados del grafo (C).
   (c) (6 puntos) Dibuje un grafo con secuencia de grados $[4,2,1,1,1,1]$.
   (d) (10 +) No toda secuencia de números naturales ordenada descendentemente corresponde a una secuencia de grados de un grafo. Por ejemplo, $[2,1]$ no es una secuencia de grados porque no hay ningún grafo de dos vértices, en donde uno de ellos tiene grado 2 y el otro grado 1. Diseñe un algoritmo que dada una secuencia s de n números naturales ordenada descendentemente, determine si s es una secuencia de grados. La complejidad temporal del algoritmo debe ser $O(n^3)$.



(B) Grafo circular en escalera



(C) Grafo molecular de $1,3,3$-trimetilciclobutano

3. (a) (5 puntos) Simule una búsqueda en amplitud sobre (A), iniciando desde 0, y liste los vértices en el orden en que son visitados.
   (b) (5 puntos) Simule una búsqueda en profundidad sobre (A), iniciando desde 0, y liste los vértices en el orden en que son visitados.
   (c) (5 +) Dibuje el árbol de búsqueda generado por la búsqueda en amplitud de la parte (a).
   (d) (5 +) Dibuje el árbol de búsqueda generado por la búsqueda en profundidad de la parte (b).

4. Suponga que el grafo (B) (i.e., el grafo circular en escalera) corresponde a un mapa de una ciudad en donde los vértices representan intersecciones y los arcos calles que las conectan. Cada calle tiene asociado un número que representa el tiempo que toma ir, en cualquiera de los dos sentidos, entre ese par de intersecciones.

   (a) (3 puntos) Determine el tiempo mínimo que toma ir desde la intersección 0 a cualquier intersección en el mapa.

   (b) (7 puntos) Diseñe un algoritmo que dado un grafo $G = (V, E, w)$ no dirigido, con función de costo $w : E \to \mathbb{N}$ y un vértice $v \in V$, determine el costo mínimo de ir desde v a cualquier vértice de G.

5. (a) (3 puntos) Construya un subgrafo de (B) que sea conexo y cuyos arcos sean tales que sumen lo mínimo posible.

   (b) (7 puntos) Diseñe un algoritmo que dado un grafo $G = (V, E, w)$ no dirigido y conexo, con función de costo $w : E \to \mathbb{N}$, construya un subgrafo de G que sea conexo y cuyos conjunto de arcos sume lo mínimo posible.

6. Un grafo molecular es un concepto usado en química para representar la estructura de las moléculas. Por ejemplo, el grafo (C) representa la estructura de la molécula $1,3,3$-trimetilciclobutano. El *número de Wiener* de una molécula es usado para estudiar propiedades de los alcalinos. Suponga que $G = (V, E, w)$ es un grafo conexo, con vértices $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y función de peso $w(e) = 1$ para cualquier $e \in E$. El número de Wiener de G, denotado $\rho(G)$, se define como:

$$\rho(G) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} dist(v_i, v_j) = (+i, j \mid 1 \leq i < j \leq n : dist(v_i, v_j)),$$

   en donde $dist(u, v)$ denota la distancia mínima entre los vértices u y v del grafo G.

   (a) (10 puntos) Diseñe un algoritmo que calcule $dist(u, v)$ para cualquier par de vértices u y v del grafo G, y cuya complejidad temporal sea $O(n^3)$.

   (b) (5 puntos) Usando como base la parte (a), diseñe un álgoritmo que determine $\rho(G)$.

   (c) (5 +) Determine el número de Wiener del grafo (C). *Ayuda: es múltiplo de* 6.