Partie I : $\mathbb{D} = [0,1]^2$

$$\begin{cases} \forall\, x,y \in \mathring{\mathbb{D}} & \Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f = 0 \\ \forall\, x,y \in \partial D & f(x,y) = \varphi(x,y) \end{cases}$$

ici, j'ai pris $\varphi = \begin{cases} \cancel{x} 1 & \text{si } x=0 \text{ ou } x=1 \\ 0 & \text{si } y=0 \text{ ou } y=1 \end{cases}$

D'après le poly, on a $F(x) = \sum_{y \sim x} \mathbb{E}_x \left[\varphi[X_{T\partial D_L}] \mathbb{1}_{X_1 = y} \right]$

on calcule $\mathbb{E}_x \left[\varphi[X_{T\partial D_L}] \right] = \lim_{K \to +\infty} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \varphi(X^{(i)}_{T\partial D_L})$

il faut prendre un temps proportionnel à $K\, \mathbb{E}_x [T_{\partial D_L}]$ pour la simulation.

j'ai pris dans la simulation $L = 100$ (L le temps de simulation) et je l'ai testé sur deux cas : $K = 5$ et $K = 10$

Partie II : $\mathbb{D} = [0,1]^2$

$$\begin{cases} \forall\, x,y \in \mathring{\mathbb{D}} & \partial_x^2 f(x,y) + \partial_y^2 f(x,y) - \gamma f(x,y) = 0 \quad \gamma > 0 \\ \forall\, x,y \in \partial D & f(x,y) = \varphi(x,y) \quad \varphi > 0 \end{cases}$$

Dans la simulation, j'ai pris comme dans la première partie

$\varphi = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \text{ ou } x=1 \\ 0 & \text{si } y=0 \text{ ou } y=1 \end{cases}$

On discrétise le problème (on discrétise au le domaine $\mathbb{D}$) soit $1/L$ le pas de discrétisation tq $\mathbb{D}_L = \left\{ \left(\frac{i}{L}, \frac{j}{L}\right) \in D \text{ avec } i,j \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

on a alors : $\partial_x^2 f(x,y) = L^2 \left[f\left(\frac{i+1}{L}, \frac{j}{L}\right) + f\left(\frac{i-1}{L}, \frac{j}{L}\right) - 2 f\left(\frac{i}{L}, \frac{j}{L}\right) \right]$

donc $\partial_x^2 f + \partial_y^2 f - \gamma f = 0 \iff L^2 \left[f\left(\frac{i+1}{L}, \frac{j}{L}\right) + f\left(\frac{i-1}{L}, \frac{j}{L}\right) - 2 f\left(\frac{i}{L}, \frac{j}{L}\right) \right]$

$$+ L^2 \left[f\left(\frac{i}{L}, \frac{j+1}{L}\right) + f\left(\frac{i}{L}, \frac{j-1}{L}\right) - 2 f\left(\frac{i}{L}, \frac{j}{L}\right) \right]$$

$$- \gamma f\left(\frac{i}{L}, \frac{j}{L}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad f\left(\frac{i+1}{L},\frac{j}{L}\right)+f\left(\frac{i-1}{L},\frac{j}{L}\right)+f\left(\frac{i}{L},\frac{j+1}{L}\right)+f\left(\frac{i}{L},\frac{j-1}{L}\right)=\left(4+\frac{\gamma}{L^2}\right)f\left(\frac{i}{L},\frac{j}{L}\right)$

donc $\forall x \in D_L$

$$\sum_{y\sim x} f(y) = \left[4+\frac{\gamma}{L^2}\right] f(x) \quad (*)$$

on ajoute un point $\dagger$ tq $f(\dagger)=0$, on alors

$$(*) \Leftrightarrow \frac{\gamma/L^2}{4+\gamma/L^2} f(\dagger) + \frac{1}{4+\frac{\gamma}{L^2}} \sum_{y\sim x} f(y) = f(x)$$

on définit alors une marche aléatoire tq :

$$P(x,y) = \frac{1}{4+\gamma/L^2} \quad \text{si } x\sim y$$

$$P(x,\dagger) = \frac{\gamma/L^2}{4+\gamma/L^2}$$

Soit $T_{\partial D_L}$ = le premier temps d'atteindre le bord ou $\dagger$.

on a alors $\forall x \in D_L$ $F(x) = \mathbb{E}_x\left[\varphi\left(X_{T_{\partial D_L}}\right)\right]$

qui est par construction une solution.

j'ai tracé la solution pour :

$\gamma = 1$ [met beaucoup de temps]

$\gamma = \sqrt{L}$ [met beaucoup de temps]

$\gamma = L$ [met un peu du temps]

$\gamma = L^2$ [converge rapidement]