

Sizing of an Intervention Center Timed Petri Nets with Preselection and Multiple Setting Priorities

Soufiane FAFE
Mohamed Yahya SOALI

17 December 2020



Contents

1	Abstract	3
2	Introduction	4
3	Modélisation par réseau de Petri : 1 activité	5
3.1	Système d'équations du modèle:	6
3.2	Régime Stationnaire :	6
3.3	Régime Stationnaire Affine:	6
3.5	Critère d'Optimisation :	7
4	Premiers Résultats	8
4.1	Premières inégalités:	8
4.2	Cas intéressants:	8
4.2.1	Débit de réception des appels ρ_0 :	8
4.2.2	Régime fluide : $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}}$	9
4.2.3	Cas où $\rho_{2N_T}^\sigma \neq 0$	9
4.2.4	Cas $\sigma(1) = N_T$:	10
4.2.5	case $\sigma(1) \neq N_T$:	10
4.3	Optimalité de l'ensemble $S_{N_T+1}^{0,1}$	11
5	Conclusion :	12

1 Abstract

The sizing of intervention call centers is a major problem in Operations research theory. One has to optimize the the dynamics ruling the different activities and decide for the best dimensioning under resources and feasibility constraints. In this project, we model discrete event systems using timed Petri nets, which we augment by considering pre-selection and priority routing policies. After characterizing the equations verified by counter variables, we investigate the affine stationary regimes and derive the related lexicographic system. We, then, focus on finding the optimal priority policy that minimize congestions. Our motivation remain practical, we confirm our results by empirical simulation and conclusions are drawn with the aim of providing EDF with useful insights for better management.

2 Introduction

Un centre (C_{As}) (Asgard qui est une sous filiale d'EDF) est responsable du bon déroulement des activités d'intervention électrique sur l'ensemble des lignes d'EDF dans une zone bien définie. Il reçoit les réclamations et notification des clients et communiquent avec les techniciens pour intervenir et résoudre ces problèmes.

On décrira ci-dessous la dynamique du système dans sa globalité et en toute généralité avant de focaliser pour la 1^{ère} partie de ce projet sur un premier modèle réduit.

Modèle général :

Le centre étudié dispose d'un nombre N_S de superviseurs (ayant même expertise et efficacité). Les appels reçus de la part des clients concernent chacun un problème dont la résolution fait appel à une activité d'intervention. On note S_A l'ensemble de ces activités et N_A son cardinal; le nombre de ces activités. Ainsi, pour chaque appel reçu, il existe une activité dans S_A qui résout le problème de l'appel.

L'accomplissement de chaque activité $a \in S_A$ nécessite la réalisation de N_{Ta} tâches élémentaires dans un ordre spécifié. Le traitement de chaque tâche élémentaire $t \in N_{Ta}$ hormis la dernière tâche se fait en 2 étapes :

- Une discussion entre un superviseur et un technicien : Dans une durée de $\tau_{2t} > 0$, le superviseur explique au technicien ce qu'il a à faire et/ou reçoit des retours du technicien (notamment à la fin de l'activité).

- Un travail du technicien : Dans une durée de $\tau_{2t+1} > 0$, le superviseur explique au technicien ce qu'il a à faire et/ou reçoit des retours du technicien (notamment à la fin de l'activité).

En voyant l'appel client comme une tâche d'indice 0, ($\tau_0 > 0$ le temps d'échange avec le client et $\tau_1 > 0$ le temps de classification du problème en une activité).

- Les paramètres de notre système, donc, sont :

N_S : le nombre de superviseurs.

N_A : le nombre d'activités différentes.

$(\forall a \in N_A), N_{Ta}$: le nombre de tâches de l'activité a compté de 1 à N_{Ta} .

$(\forall a \in N_A), (\underbrace{\tau_0, \tau_1}_{\text{task 0}}, \underbrace{\tau_2, \tau_3, \dots, \tau_{2N_a}}_{\text{task 1}})$

Objectif Global : Notre objectif final est celui de trouver un ordre de priorité optimal entre les différents tâches des activités, sous contraintes imposées par le centre, garantissant fluidité du travail du centre.

- On se limitera, dans un premier temps, au cas d'une seule activité et caractériserons les solutions du système et l'optimalité cherchée.

3 Modélisation par réseau de Petri : 1 activité

Nous s'aiderons du formalisme des réseaux de Petri pour modéliser notre système. Rappelons que l'on ne considère pour l'instant qu'un seul type d'appels entrants (appels donnant lieu à un seul type d'activité pour être plus précis) donnant lieu à N_T tâches. La représentation

correspondante à notre cas est donné dans le figure.

On supposera que les appels arrivent depuis le haut à un débit $\lambda \geq 0$, ce qui est représentée par la fonction de comptage cumulé (counter-variables) : $z_{-1}(t) = \lambda t$. L'ensemble des superviseurs est représentée par un

pool contenant un marquage N_S . Chaque place (noeud) représente un travail à effectuer au sein d'une tâche et dispose d'un temps de traitement que l'on a noté comme décrit en introduction τ_i ; l'union de deux places consécutifs associée à des indices (paire, impair) dans ce sens forme une tâche. Toujours, la deuxième place d'une tâche est un travail effectué par le technicien et la première correspond à un dialogue entre ce dernier et un superviseur. Le passage d'un noeud à un autre passe par l'exécution d'une transition marquéé par une fonction de comptage $z_i(t) = \text{nombre de fois où la transition est exécutée}$. Certaines transitions nécessitent la rencontre de plus d'un acteur (flèche) pour leur exécution (à savoir les transitions pairs). Finalement, on fixe un ordre de priorité pour le choix des transitions à libérer (tâches à prendre) par le superviseur par une permutation $\sigma \in S_{N_T+1}^0$ définie comme suit : (avec " \leq_T " le nouveau ordre sur les tâches)

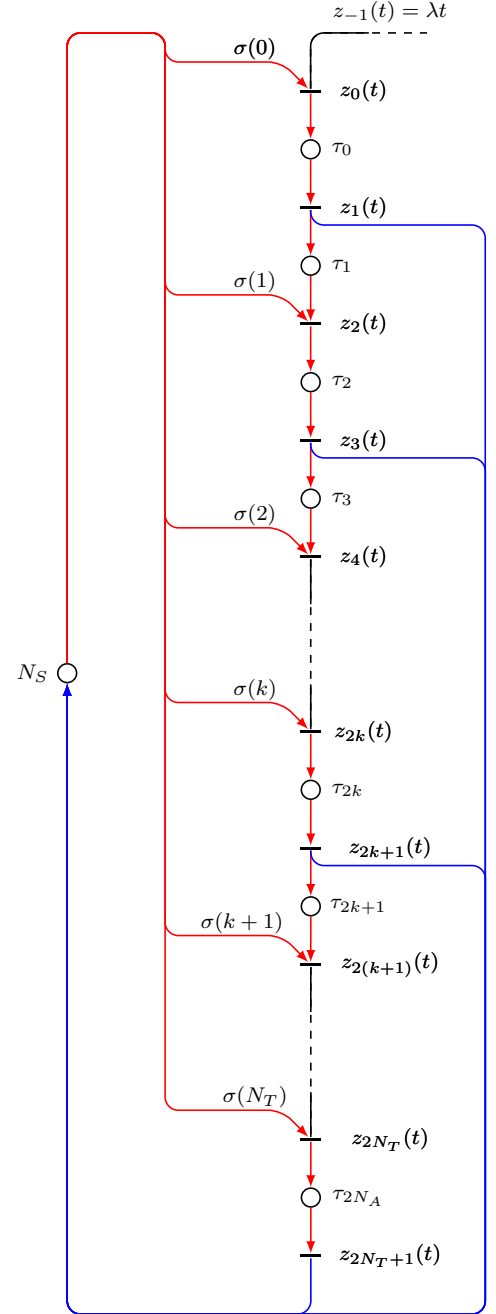


Figure 1: Priority routing

$$(\forall (i, j) \in \{0, \dots, N_T\})^2 \sigma(i) < \sigma(j) \iff \text{t\^ache "i" est prioritaire \^a la t\^ache "j"} \iff i \leq_T j$$

Ainsi, la réponse aux appels entrants (tâche "0") est toujours prioritaire.

3.1 Système d'équations du modèle:

On se donne un ordre de priorité sur les tâches et donc une permutation σ dans $S_{N_T+1}^0$. Pour les paramètres du modèle décrit précédemment et selon l'article "Citer" de XX, XX et XX, les fonctions de comptage du système S_E vérifient les équations suivantes :

$$\begin{cases} z_{-1}(t) = \lambda t \\ z_{2k+1}(t) = z_{2k}(t - \tau_{2k}), (\forall k \in \llbracket 0, N_T \rrbracket) & *_k \\ z_{2k}(t) = \min[z_{2k-1}(t - \tau_{2k-1}), N_{SD} + \sum_{i=0}^{N_A} z_{2i+1}(t) - \sum_{\sigma(i) < \sigma(k)} z_{2i}(t) - \sum_{\sigma(i) > \sigma(k)} z_{2i}(t^-)], (\forall k \in \llbracket 0, N_T \rrbracket) & **_k \end{cases}$$

où $(*_k)$ représente une équation de translation (retard) et $(**_k)$ représente une équation de priorité pour la tâche "k".

3.2 Régime Stationnaire :

On s'intéresse à la dynamique indépendante du temps, donc au régime stationnaire du système. Pour les réseaux de Petri sans contraintes de priorité, l'article "Cite" fournit des conditions nécessaires suffisantes pour l'existence d'un régime stationnaire et garantit la convergence vers cet état. De plus, on pourra trouver un régime stationnaire affine (voir ci-dessous la définition) limite.

Malheureusement, on n'a pas de résultat semblable pour les réseaux de Petri avec contraintes de priorité et le comportement peut devenir chaotique dans certains cas. Toutefois, les simulations empiriques de notre système à 1 activité fournissent toujours un régime stationnaire affine, chose qui nous a poussé à étudier ces régimes et à les caractériser.

On rappelle qu'aucune garantie du régime stationnaire affine n'est démontrée. Mais si un régime stationnaire affine existe, il sera nécessairement donné par la résolution exacte défini ce-dessous. Un résultat d'optimalité sur l'ensemble des priorités possibles en découle.

3.3 Régime Stationnaire Affine:

Pour une famille de fonctions $(f_i \in \mathbb{R}^R)_{i \in I}$ où I est un ensemble (fini ou infini) vérifiant un système d'équations (contraintes) entre elles $S(f_{i \in I})(t) = 0$, on dira que RSA_f est un régime stationnaire affine relié à cette famille s'il existe des suites $(\rho_i \in \mathbb{R})_{i \in I}$ et $(u_i \in \mathbb{R})_{i \in I}$ tels que : $(\forall i \in I), f_i(t) =_{+\infty} \rho_i t + u_i$. Dans ce cas, le couple (ρ_i, u_i) est appelé germe de f_i à l'infini, et l'équation du système devient une équation aux germes $S((\rho_i, u_i)_{i \in I})(t) = 0$.

Ainsi, si un régime stationnaire affine existe, il s'écrit :

de sorte que le système $(*, **)$ deviendra un système d'équation (S_G) sur une algèbre $(min, +)$ tropicale des germes :

$(\forall k \in \llbracket 0, N_T \rrbracket)$

$$\begin{cases} (\rho_{2k+1}, u_{2k+1}) = (\rho_{2k}, u_{2k} - \rho_{2k}\tau_{2k}) \\ (\rho_{2k}, u_{2k}) = \min_{\sum_{i=0, \sigma(i) > \sigma(k)}^{N_T} \rho_{2i}=0}^{LEX} [(\rho_{2k-1}, u_{2k-1} - \rho_{2k-1}\tau_{2k-1}), (0, N_S) + \sum_{i=0}^{N_T} (\rho_{2i+1}, u_{2i+1}) - \sum_{i=0, i \neq k}^{N_T} (\rho_{2i}, u_{2i})] \end{cases}$$

où le "min" en \mathbb{R} est devenu un " \min^{LEX} " sur les couples tels que :

$$(\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2) \quad \min^{LEX}[(a, b), (c, d)] = (a, b) \iff (a < b) \text{ ou } (a = b \text{ et } c < d)$$

Soulignons la positivité des coefficients directeurs $((\rho_i \in \mathbb{R}^+)_{i \in I})$ dû à la croissance des fonction de comptage.

Bien évidemment, les fonctions de comptage et les germes dépendent de $\sigma \in S_{N_T+1}^0$ et qu'il est plus judicieux d'écrire ρ_i^σ ,

Une autre écriture du système (S_G) est donnée par : (en explicitant le minimum lexicographique et oubliant les constantes $(u_i$ pour l'instant) :

$(\forall k \in \llbracket 0, N_T \rrbracket)$

$$\begin{aligned} \rho_{2k+1} &= \rho_{2k} \\ \rho_{2k} &= \begin{cases} \rho_{2k-1} & \text{si } (\sum_{\sigma(i) > \sigma(k)} \rho_{2i} \neq 0) \text{ ou } (\sum_{\sigma(i) > \sigma(k)} \rho_{2i} = 0 \text{ et } \rho_{2k-1} \leq \frac{N_s - \sum_{\sigma(i) < \sigma(k)} \rho_{2i} \tau_{2i}}{\tau_{2k}}) \\ \frac{N_s - \sum_{\sigma(i) < \sigma(k)} \rho_{2i} \tau_{2i}}{\tau_{2k}} & \text{si } (\sum_{\sigma(i) > \sigma(k)} \rho_{2i} = 0 \text{ et } \rho_{2k-1} > \frac{N_s - \sum_{\sigma(i) < \sigma(k)} \rho_{2i} \tau_{2i}}{\tau_{2k}}) \end{cases} \end{aligned}$$

3.5 Critère d'Optimisation :

On cherchera l'ordre de priorité optimale qui garantira le plus de fluidité pour la dernière tâche (c'est équivalent à maximiser le flux global des tâches en commençant de la dernière tâche à la première) et donc le débit de la dernière tâche qui est ρ_{2N_T} . La formulation mathématique en découle :

$$\max_{\sigma \in S_{N_T+1}^0} [\rho_{2N_T}^\sigma] \quad (P1)$$

4 Premiers Résultats

4.1 Premières inégalités:

A partir de la structure des équations du système (P1), on a :

$$\rho_{2k} \leq \rho_{2k-1} = \rho_{2k-2}$$

$$0 \leq \rho_{2N_T} \leq \rho_{2N_T-1} = \rho_{2N_T-2} \leq \dots \leq \rho_1 = \rho_0 \leq \lambda$$

4.2 Cas intéressants:

4.2.1 Débit de réception des appels ρ_0 :

Proposition : 1 :

$$\text{Pour tout } \sigma \text{ dans } S_{N_T+1}^0 \text{ we have : } \rho_0 = \begin{cases} \lambda & \text{if } \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0} \\ \frac{N_s}{\tau_0} & \text{if } \lambda > \frac{N_s}{\tau_0} \end{cases}, \text{ et quand } \lambda > \frac{N_s}{\tau_0} \text{ on a } \rho_2 = 0$$

On déduit que $\lambda > \frac{N_s}{\tau_0}$ correspond à un régime saturé du centre considéré ($\rho_2 = \rho_4 = \dots = \rho_{2N_T}$).

Preuve de la proposition 1 :

Par définition : (comme $\sum_{i=1}^{N_T} \rho_{2i} \neq 0 \iff \rho_2 \neq 0$)

$$\rho_0 = \begin{cases} \lambda & \text{si : } (\sum_{i=1}^{N_T} \rho_{2i} \neq 0) \text{ ou } (\sum_{i=1}^{N_T} \rho_{2i} = 0 \text{ et } \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0}) \\ \frac{N_s}{\tau_0} & \text{si : } \sum_{i=1}^{N_T} \rho_{2i} = 0 \text{ et } \lambda > \frac{N_s}{\tau_0} \end{cases}$$

$$\iff \rho_0 = \begin{cases} \lambda & \text{si : } (\rho_2 \neq 0) \text{ ou } (\rho_2 = 0 \text{ et } \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0}) \\ \frac{N_s}{\tau_0} & \text{si : } \rho_2 = 0 \text{ et } \lambda > \frac{N_s}{\tau_0} \end{cases}$$

d'où si : $\lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0}$: $\rho_0 = \lambda$, et si $\lambda > \frac{N_s}{\tau_0}$: $\rho_0 = \frac{N_s}{\tau_0}$ if $\rho_2 = 0$.

Passons maintenant à la démonstration de la deuxième partie; à savoir ρ_2 nul quand $\lambda > \frac{N_s}{\tau_0}$.

On suppose par absurde que ρ_2 strictement positif. On pose $j = \underset{i \geq 1}{\operatorname{argmax}}[\sigma(i)]$ tel que $\rho_{2i} \neq 0$.

$j \geq 1$ est bien défini car ρ_2 est strictement positif (ensemble non vide).

D'autre part, on a par définition : j , we have : $\rho_{2j} = \begin{cases} \rho_{2j-1} & \text{si } \sum_{\sigma(i) > \sigma(j)} \rho_{2i} \neq 0 \\ \frac{N_s - \lambda \tau_0}{\tau_{2j}} = 0 & \text{si } \sum_{\sigma(i) > \sigma(j)} \rho_{2i} = 0 \end{cases}$, car $\lambda > \frac{N_s}{\tau_0}$.

Par définition de j : si i est tel que $\sigma(i) > \sigma(j)$ alors $\rho_{2i} = 0$, d'où on n'est dans le second cas de notre égalité et $\rho_{2j} = 0$ ce qui contredit la définition de j ($\rho_{2j} \neq 0$). La proposition en découle.

4.2.2 Régime fluide : $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}}$

Proposition : 2 :

Pour toute σ dans $S_{N_T+1}^0$, $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \implies \rho_0 = \rho_2 = \dots = \rho_{N_T} = \lambda$

Preuve de la proposition 2 :

Supposons $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}}$:

Dans chaque équation $k \leq 1$ du système, on a : $\rho_{2k} = \rho_{2k-1}$. Sinon, on aura que $\exists k \in \llbracket 1, N_T \rrbracket, \rho_{2k-1} > \frac{N_s - \sum_{\sigma(i) < \sigma(k)} \tau_{2i} \rho_{2i}}{\tau_{2k}}$ ce qui impliquera (sachant $\rho_{2i} \geq \lambda$) $\lambda > \frac{N_s - \sum_{\sigma(i) < \sigma(k)} \tau_{2i} \lambda}{\tau_{2k}}$ et donc $\lambda > \frac{N_s}{\sum_{\sigma(i) \leq \sigma(k)} \tau_{2i}}$.

Par conséquent : $(\forall k \in \llbracket 1, N_T \rrbracket), \rho_{2k} = \rho_{2k-1} = \rho_{2k-2}$ et comme $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \frac{N_s}{\tau_0}$, on a :

$$\rho_{2N_T} = \dots = \rho_2 = \rho_0 = \lambda$$

4.2.3 Cas où $\rho_{2N_T}^\sigma \neq 0$

Proposition : 3 :

Soit $\sigma \in S_{N_T+1}^0$ tel que $\rho_{2N_T}^\sigma \neq 0$. Soit $j = \sigma^{-1}(N_T)$, on a :

$$(\forall k \neq j), \rho_{2k}^\sigma = \rho_{2k-1}^\sigma = \rho_{2k-2}^\sigma \text{ et } \rho_{2j}^\sigma = \begin{cases} \frac{N_s - \lambda(\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i})}{\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i}} \text{ si } \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda \\ \lambda \text{ sinon} \end{cases}$$

Preuve de la proposition 3 :

Soit $\sigma \in S_{N_T+1}^0$. Supposons $\rho_{2N_T}^\sigma \neq 0$. On a alors : $(\forall i \in \llbracket 1, N_T \rrbracket) \rho_{2i}^\sigma > 0$ et donc :

$$(\forall k \neq j = \sigma^{-1}(N_T)), \sum_{\sigma(i) > \sigma(k)} \rho_{2i}^\sigma \neq 0$$

d'où $\rho_{2k}^\sigma = \rho_{2k-1}^\sigma = \rho_{2k-2}^\sigma$

Pour j , on a : $\sum_{\sigma(i) > \sigma(j)} \rho_{2i}^\sigma = \sum_{\sigma(i) > N_T} \rho_{2i}^\sigma = 0$. Alors :

$$\rho_{2j}^\sigma = \begin{cases} \rho_{2j-1}^\sigma \text{ si } \rho_{2j-1}^\sigma \leq \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_{2j}} \\ \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_{2j}} \text{ si } \rho_{2j-1}^\sigma > \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_{2j}} \end{cases}$$

$$\iff \rho_{2j}^\sigma = \begin{cases} \lambda \text{ si } \lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \\ \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_{2j}} \text{ si } \lambda > \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \end{cases}$$

Après simplification et calculs :

$$\rho_{2j}^\sigma = \begin{cases} \frac{N_s - \lambda(\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i})}{\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i}} & \text{si } \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$

4.2.4 Cas $\sigma(1) = N_T$:

Proposition : 4 :

$$\text{Pour } \sigma \text{ dans } S_{N_T+1}^{0,1} \text{ et quand } \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda < \frac{N_s}{\tau_0}, \text{ on a } \begin{cases} \rho_0^\sigma = \lambda \\ \rho_2^\sigma = \dots = \rho_{2N_T}^\sigma = \frac{N_s - \lambda\tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}} \end{cases}$$

Preuve de la proposition 4 :

Soit $\sigma \in S_{N_T+1}^{0,1}$, on a : $\sum_{\sigma(i) > \sigma(1)=N_T} \rho_{2i}^\sigma = \sum_{\sigma(i) > N_T} \rho_{2i}^\sigma = 0$, donc :

$$\rho_2^\sigma = \begin{cases} \lambda & \text{si } \lambda \leq \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_2} \\ \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_2} & \text{si } \lambda > \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_2} \end{cases}$$

Comme $\lambda < \frac{N_s}{\tau_0}$, $\rho_2^\sigma \neq 0$.

Dans le cas contraire $\rho_2^\sigma = 0 = \frac{N_s - \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} \rho_{2i}^\sigma}{\tau_2} = \frac{N_s - \lambda\tau_0}{\tau_2} > 0$ (car $\rho_2^\sigma = 0 \implies \rho_2 = \dots = \rho_{N_T} = 0$).

Donc $(\forall k \geq 2) \sum_{\sigma(i) > \sigma(k)} \rho_{2i}^\sigma = \rho_2^\sigma + \sum_{i \neq 1} \rho_{2i}^\sigma \neq 0$

Il s'ensuit que : $(\forall k \geq 2) \rho_{2k}^\sigma = \rho_{2k-1}^\sigma = \rho_{2k-2}^\sigma$.

D'où : $\rho_{2N_T}^\sigma = \dots = \rho_2^\sigma$.

. et en injectant dans l'équation de ρ_2^σ

$$\rho_2^\sigma = \begin{cases} \lambda & \text{if } \lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \\ \frac{N_s - \lambda\tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}} & \text{if } \lambda > \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \end{cases} \text{ en appliquant le cas } \rho_{2N_T}^\sigma \neq 0 \text{ et } \sigma^{-1}(N_T) = 1 \text{ vu avant.}$$

et comme $\frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda$, $\rho_2^\sigma = \frac{N_s - \lambda\tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}}$. Ceci conclut la preuve.

4.2.5 case $\sigma(1) \neq N_T$:

Proposition : 5 :

$$\text{Pour } \sigma \text{ dans } S_{N_T+1}^0 \text{ tel que } \sigma(1) \neq N_T, \text{ On note } j = \sigma^{-1}(N_T), \text{ si } \lambda \geq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i}} \text{ alors } \rho_{2N_T} = 0$$

Preuve de la proposition 5 :

Quand $\lambda \geq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i}}$,

Si on suppose que : $\rho_{2N_T}^\sigma \neq 0$, selon la proposition 4.2.3 $\rho_{2N_T}^\sigma = \frac{N_s - \lambda(\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i})}{\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i}}$ qui n'est pas stricte-

ment positif car $\lambda \geq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i}}$.

Corrolaire :5: Si $\frac{N_s}{\tau_0 + \tau_2} \leq \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0}$, alors pour toute σ dans $S_{N_T+1}^0$ tel que $\sigma(1) \neq N_T$, on a $\rho_{2N_T} = 0$

4.3 Optimalité de l'ensemble $S_{N_T+1}^{0,1}$

Lemme :1:

Soient $\sigma_a, \sigma_* \in S_{N_T+1}^0$ avec $j = \sigma_a^{-1}(N_T), 1 = \sigma_*^{-1}(N_T)$.
On a $\rho_{2N_T}^{\sigma_*} > \rho_{2N_T}^{\sigma_a}$

Preuve du lemme :

Avec les mêmes notations :

On sait que $\rho_{2N_T}^{\sigma_*} \neq 0$ selon la proposition 4.

- Si $\rho_{2N_T}^j = 0$ on a $\rho_{2N_T}^{\sigma_*} > \rho_{2N_T}^{\sigma_a}$.
- Si $\rho_{2N_T}^{\sigma_a} \neq 0$ alors on dispose d'une écriture explicite : $\rho_{2N_T}^{\sigma_a}$ and $\rho_{2N_T}^{\sigma_*}$, on distingue 2 cas :

Premier cas : $\lambda > \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}}$

$$\rho_{2N_T}^{\sigma_*} - \rho_{2N_T}^{\sigma_a} = \frac{N_s - \lambda\tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}} - \frac{N_s - \lambda(\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i})}{\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i}}$$

$$\rho_{2N_T}^{\sigma_*} - \rho_{2N_T}^{\sigma_a} = \frac{[N_s - \lambda\tau_0](\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i}) - [N_s - \lambda(\sum_{i=0}^{j-1} \tau_{2i})](\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i})}{(\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i})(\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i})}$$

$$\rho_{2N_T}^{\sigma_*} - \rho_{2N_T}^{\sigma_a} = \frac{(\sum_{i=1}^{j-1} \tau_{2i})(\lambda \sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i} - N_s)}{(\sum_{i=j}^{N_T} \tau_{2i})(\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i})} > 0$$

Deuxième cas : $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}}$:

Comme on a déjà montré : $\rho_{2N_T}^{\sigma_*} = \rho_{2N_T}^{\sigma_a} = \lambda$.

Théorème :1:

La valeur optimale du problème d'optimisation combinatoire (P1) est atteinte pour toute permutation dans $S_{N_T+1}^{0,1}$ auquel cas on a :

$$\max_{\sigma \in S_n^0} (\rho_{2N_T}^\sigma) = (\rho_{2N_T}^\pi)_{\pi \in S_{N_T+1}^{0,1}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda > \frac{N_s}{\tau_0} \\ \frac{N_s - \lambda \tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}} & \text{if } \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0} \\ \lambda & \text{if } \lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \end{cases}$$

Preuve du théorème 1

Pour $\lambda > \frac{N_s}{\tau_0}$ ou $\lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}}$ (régime saturé ou fluide), $\rho_{2N_T}^\sigma$ sont tous égaux pour tout $\sigma \in S_{N_T+1}^0$ et leurs expressions est déjà donnée en Proposition 1 et 2.

Si maintenant $\frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0}$:

On a ($\forall \pi \in S_{N_T+1}^{0,1}$) $\rho_{2N_T}^\pi \neq 0$, ils sont même tous égaux de valeur $\frac{N_s - \lambda \tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}}$ (proposition 4).

Selon le lemme 1 dans ce régime, on a en outre :

$$(\forall \sigma \in S_{N_T+1}^0) \quad \rho_{2N_T}^\pi > \rho_{2N_T}^\sigma \quad (\pi \in S_{N_T+1}^{0,1}).$$

En conclusion $\max_{\sigma \in S_{N_T+1}^0} (\rho_{2N_T}^\sigma) = \rho_{2N_T}^\pi (\forall \pi \in S_{N_T+1}^{0,1})$ et la valeur explicite comme détaillé ci-dessous :

$$\max_{\sigma \in S_{N_T+1}^0} (\rho_{2N_T}^\sigma) = \rho_{2N_T}^\pi = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda > \frac{N_s}{\tau_0} \\ \frac{N_s - \lambda \tau_0}{\sum_{i=1}^{N_T} \tau_{2i}} & \text{if } \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} < \lambda \leq \frac{N_s}{\tau_0} \\ \lambda & \text{if } \lambda \leq \frac{N_s}{\sum_{i=0}^{N_T} \tau_{2i}} \end{cases}$$

5 Conclusion :

Pour un système à une seule activité, on a caractérisé les solutions du système et montré que l'optimalité et donc la fluidité en régime stationnaire affine est atteinte pour l'ensemble des permutations attribuant la dernière priorité à la première tâche. Cette démonstration a été illustrée par des validations empiriques, notamment la simulation des équations de Petri et par un calcul explicite des solutions pour le cas de (2 + 1) et (3 + 1) tâches ($N_T = 2$ et $N_T = 3$). Nous renvoyons à la présentation de notre soutenance pour une méthode récursive de calcul explicite de toutes les solutions (pour un lecteur attentif voulant s'amuser à résoudre et étendre pour ($N_T > 3$) nos calculs).

La prochaine étape serait de considérer le cas de 2 activités avant de passer au cas général d'un nombre quelconque d'activités.