Project Euler选讲

xudyh

February 5, 2015

Project Euler简介

- Project Euler是一个主要内容关注算法和数学的解题网站。
- PE不等于Online Judge.
- 一分钟原则。
- Project Euler exists to encourage, challenge, and develop the skills and enjoyment of anyone with an interest in the fascinating world of mathematics.
- Real learning is an active process and seeing how it is done is a long way from experiencing that epiphany of discovery. Please do not deny others what you have so richly valued yourself.

Music festival

有$12n$个音乐家参加了一个音乐节，一开始他们组成了$3n$个四元组。
后来组成了$4n$个三元组，要求每个音乐家不和之前的同伴在一起。
令$f(12n)$表示将这$12n$个音乐家组织成三元组的方案数。
求$f(600)$模10^9+7。
Fastest Solver: Anton_Lunyov 15 minutes, 45 seconds
Accepted in 24 hours: 56

Solution

令$dp_{a,b,c}$表示现在有a个三元组还差1个人，b个三元组还差2个人，c个三元组还差3个人等待被放入的方案数。
考虑答案的无序性，那么最终的答案为$dp_{0,0,4n}/(4n)!$。
枚举每个四元组中的四个人加入了i个差1个人，j个差2个人，k个差3个人，那么方案为$\binom{a}{i}\binom{b}{j}\binom{c}{k}$。
时间复杂度$O(n^3)$。

Comfortable distance

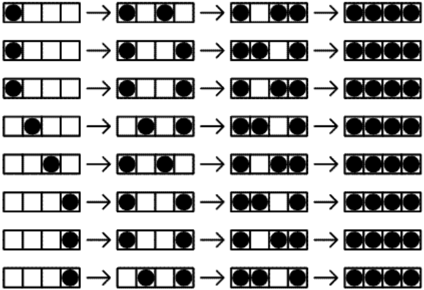
有n把椅子，n个人进入场地，并按下面方式选择椅子。

- 优先选择一个两边都没有人坐的椅子。
- 如果没有，就优先选择只有一边有人坐的椅子。
- 如果还是没有，就选择剩下的空的椅子。

令$T(n)$表示n个人进入场地占据椅子的方案数。
求$T(10^6)$模10^9+7。
Fastest Solver: Peter de Rivaz 34 minutes, 5 seconds
Accepted in 24 hours: 40

Comfortable distance

下图为$n = 4$的情况。



Solution

考虑第一步结束之后的情况，每两个人之间间距为1或2，两端的间距为0或1。
枚举两端的间距和间距为2的段数，计算出间距为1的段数。
第二步每个人只能加入间距为2的地方，并每个都有两种方案。
再乘上每一步的顺序以及第一步1和2的排列方式，加入答案中。
时间复杂度$O(n)$。

A frog's trip

一排有n个格子，有一个青蛙从最左边的格子往右跳，每次跳不超过三格，到达最右边一格，然后往回跳，同样每次不超过三格，进行m个来回。
令$F(n, m)$表示最后至多一个格子没有被青蛙经过的方案数。
求$F(10, 10^{12})$模10^9。
Fastest Solver: uwi 40 minutes, 15 seconds
Accepted in 24 hours: 26

Solution

首先可以想象$2m$个青蛙一起从左往右跳。
令$dp_{i,a,b,c,k}$表示做到第i格，前一格有a个青蛙，往前第二格有b个青蛙，往前第三格有c个青蛙，现在有k个格子没有被访问。
枚举往前一格两格青蛙向前跳的个数，第三格一定要往前跳。
由于$a+b+c=2m$，所以c这维可以省略。
矩阵乘法加速。
时间复杂度$O(m^6\log n)$。

Bounded Sequences

记$t(n)$长度为n的数列$x_1, x_2, \cdots, x_n$个数，满足：

- $x_1 = 2$
- 对所有$1 < i \le n$，有$x_{i-1} < x_i$。
- 对所有$1 \le i, j \le n$，有$x_i^j < (x_j + 1)^i$。

比如$\{2, 5, 11, 25, 55\}, \{2, 6, 14, 36, 88\}, \{2, 8, 22, 64, 181\}$。
求$t(10^{10})$。
Fastest Solver: x22 4 hours, 56 minutes, 53 seconds
Accepted in 24 hours: 16

Solution

条件3等价于$\max(\sqrt[i]{x_i}) < \min(\sqrt[i]{x_i+1})$。
若条件2不成立，那么条件3也不成立。条件2包含于条件3。
证明是简单的不等式放缩。
由条件1得$2 \le \sqrt[i]{x_i} < \sqrt[i]{x_i+1} \le 3$。
枚举区间$[\max(\sqrt[i]{x_i}), \min(\sqrt[i]{x_i+1})]$。
对所有$1 \le i \le n$，$2^i \le t \le 3^i$，将$\sqrt[i]{t}$去重排序，将相邻两个数形成的区间称为小区间。
小区间与数列形成双射。每个小区间对应x_i的唯一取值。如果数列x对应的区间不是小区间，那么假设$\sqrt[p]{q}$在其中，考虑x_q的取值，矛盾。
转化为所有$1 \le i \le n$，$2^i \le t < 3^i$，$\sqrt[i]{t}$不同的取值。

Solution

令dp_i表示加入i新出现的不同的数字的个数。
考虑容斥，$dp_i = 3^i - 2^i - \sum_{d|i,1\le d<i} dp_d$。
记答案$\sum_{i=1}^{n} dp_i$为$f(n)$。
对两边求和的$f(n) = \sum_{i=1}^{n}(3^i - 2^i) - \sum_{ij\le n,i>1} dp_j = \sum_{i=1}^{n}(3^i - 2^i) - \sum_{2\le i\le n} f([n/i])$。
递归计算。
时间复杂度$O(n^{0.75})$。

n-sequences

记一个整数数列$S = \{s_i\}$为n-sequence当且仅当它有n项，且每项在1到n之间。
令$L(S)$表示最长有相同的值的连续子段的长度。
比如$L(\{1, 5, 5, 10, 7, 7, 7, 2, 3, 7\}) = 3$。
令$f(n) = \sum L(S)$，对所有n-sequence求和。
求$f(7500000)$模$10^9 + 9$。
Fastest Solver: ariacas 3 hours, 59 seconds
Accepted in 24 hours: 8

Solution

$dp_{i,j,k}$做到第i个数，当前连续j个，当前最长段为k。
这显然是滚粗了。

Solution

记$P(i)$为最长连续子段不小于i的序列个数。
答案为$\sum_{i=1}^{n} P(i)$。
转化为求每个连续子段都不超过i的序列个数。
令dp_k表示做完前k个数，每段不超过i的序列个数。
$dp_k = n * dp_{k-1} - (n-1) * dp_{k-n}$。
时间复杂度$O(n^2)$。
大概一周的计算量。

Solution

做法1：数学水平比较低的人，比如我，直接找系数的规律，无聊手推了10几项就找出来了。
做法2：GCJ Finals 2014 E。
做法3：数学水平比较高的人，生成函数展开。

Solution

回顾一下做法2。
考虑决策树，令dp_x其中$x < 0$为0，$-k$的权值为$1-n$，-1的权值为n。
只要走到0即可。枚举走了a步k，那么就走了$n-ak$步1，计算贡献。
时间复杂度$O(n \log n)$。

Repeated permutation

令$f(P)$表示大小为n的置换P在对称群S_n中的阶。
比如$f((12)(3)) = 2, f((132)) = 3$。
令$g(n) = (\sum_{P \in S_n} f^2(P))/n!$。
求$g(350)$。
Fastest Solver: ariacas 2 hours, 2 minutes, 15 seconds
Accepted in 24 hours: 12

Solution

阶为每个轮换长度的最小公倍数。
假设有a_i个轮换为i，那么有$\sum_{i=1}^{n} a_i * i = n$。
对应的排列数为$n!/\prod_{i=1}^{n}(a_i! * i^{a_i})$。
记$dp_{i,j,k}$表示当前做到长度i，总长度为j，LCM为k的乘积。

Solution

按每个长度最大的素因子排序，如果一个素数的所有倍数都做完，将这个素因子计入乘积当中。
每个数至多一个超过$\sqrt{n}$的因子。
这样做只要保留$\sqrt{n}$以下的素因子的系数。

Writing n as the product of k distinct positive integers

令$W(n,k)$表示将数字n表示成k个不同正整数的乘积的方案数。
比如$W(144,4)=7$。

- $144 = 1*2*4*18$
- $144 = 1*2*8*9$
- $144 = 1*2*3*24$
- $144 = 1*2*6*12$
- $144 = 1*3*4*12$
- $144 = 1*3*6*8$
- $144 = 2*3*4*6$

求$W(10000!,30)$模10^9+7。
Fastest Solver: grechnik 1 hour, 36 minutes, 23 seconds
Accepted in 24 hours: 9

Solution

令$dp_{i,S}$表示前i个数S为相等关系的方案数，同组之内背包转移。
这显然跑不出来。

Solution

考虑容斥，两两不同的方案数为总方案数减去有一对数相同的方案加上有两对数相同的方案等等。
这些边形成了连通图，每个连通块之间数字都相同。
首先考虑这样的方案数。令$n! = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}$。
每个素因子的分配独立。令f_i表示指数为i分配到各个数字的方案数，那么最后答案为$\prod_{i=1}^{m} f_{e_i}$。
考虑背包，$dp_{i,j}$表示做到第i个连通块，和为j的方案数。
假设第i块的个数为a_i，那么$dp_{i,j} = \sum_{k \geq 0} dp_{i-1,j-a_i*k}$。
使用前缀和优化的$dp_{i,j} = dp_{i-1,j} + dp_{i,j-a_i}$。

Solution

每个相同的划分对应的答案相同。
枚举划分，计算每个划分要被计算的次数。
假设有a_i个i，其中$\sum_{i=1}^{n} a_i * i = n$，那么点对应的方案为$n!/\prod_{i=1}^{n}(i!)^{a_i} * a_i!$。

Solution

然后计算每个划分在容斥中的系数。令S_n表示n个点的连通图集合，$e(G)$表示G的边数。
假设划分为$p_1, p_2, \cdots, p_m$，那么系数为$\sum_{G_1 \in S_{p_1}} \cdots \sum_{G_m \in S_{pm}} (-1)^{\sum_{i=1}^{m} e(G_i)}$。
也就是$\prod_{i=1}^{m} \sum_{G_i \in S_{p_i}} (-1)^{e(G_i)}$。
记$g_i = \sum_{G \in S_i} (-1)^{e(G)}$，那么有$g_i = (-1)^{i-1}(i-1)!$。
证明可以使用数学归纳法。

Smooth divisors of binomial coefficients

一个数被称为B-smooth当且仅当它的所有素因子不超过B。
令$S_B(n)$表示n最大的B-smooth因子，比如$S_4(2100)=12$。
令$F(n)=\sum_{B=1}^{n}\sum_{r=0}^{n}S_B(\binom{n}{r})$。
求$F(11111111)$模1000000993。
Fastest Solver: apia 12 minutes, 44 seconds
Accepted in 24 hours: 29

Solution

考虑求$\sum_{B=1}^{n} S_B(x)$。
记f_a当a为素数时为x中素因子a的乘积，否则为1。
那么$S_B(x) = \prod_{i=1}^{B} f_a$。
从$\binom{n}{r}$变到$\binom{n}{r+1}$就是除掉$r+1$乘上$n-r$。至多$O(\log n)$个f_a发生变化。
线段树维护。
时间复杂度$O(n \log^2 n)$。

The Mouse on the Moon

在一个$500 * 500$的正方形内，有251001个整点，在其中选择一些点构成多边形，要求这些点里中心点的距离不小于250，使得多边形面积与周长比尽量大。

Fastest Solver: Peter de Rivaz 1 hour, 4 minutes, 53 seconds

Accepted in 24 hours: 15

Solution

分数规划二分答案w。每个点对对答案的贡献可以独立计算，从点a到b的权值为$x_a * y_b - x_b * y_a - dis(a, b) * w$。
四个象限对称，只要判断是否存在从点$(250, 0)$到点$(0, 250)$的权值不小于0的路径。
整点个数用面积估计，面积为$\frac{4-\pi}{4} * 250^2 < 15000$。按极角序或横纵坐标进行转移。

Flipping game

有一个$n * n$的矩形，每个格子被染成了黑色或白色。
两个玩家轮流进行游戏，每次可以选择一个子矩形，并将矩形内所有格子翻转。其中要求子矩形满足：

- 子矩形右上角格子为白色。
- 宽度为完全平方数。
- 高度为三角形数。

当一个玩家将所有格子变成黑色时获胜。
记$W(n)$表示$n * n$的棋盘一开始为白色，先手可以采取的使得必胜的策略。
求$W(10^6)$。
Fastest Solver: grechnik 2 hours, 11 minutes, 28 seconds
Accepted in 24 hours: 7

Solution

下面所述的任何结论我都不会证明。

Solution

考虑一维的情况，每次只能翻最后为白色长度为完全平方数或者三角形数一条。
等价于每个白色格子独立存在的SG值异或和。
每个格子可以暴力求，并且SG值范围是$O(\sqrt{n})$的，暴力时间复杂度$O(n^{1.5})$。
两维情况可以认为等价于每个白色格子独立存在的SG值异或和。

Solution

考虑二维翻硬币的经典做法nim积。
所以每个格子的SG值为两维分别做的SG值的nim积。
nim积满足分配律。
分别统计两边SG为k的区间数，然后做nim积判断。
这部分复杂度$O(n)$。

谢谢大家的听讲。
祝大家在新的一年中生活和竞赛顺利。