**经**典 過

.... (40, 401, 1

矩形面积并

检测线段相交

小结

1 lm lst

平而图或地

不连通平面图

Voronoi 图

VOIOHOI [33]

....

A160 II

总结

参考资料

## 扫描线在计算几何中的应用

董宏华

绍兴市第一中学

2014年2月9日

经典是

二维数点

包测线权相

小结

1 Imitsi

平面图求域

古宗的

不连通平面图

Voronoi 图

46-16

巡州

总结

参考资料

■ Q: 扫描线是什么呢?

----

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图

平而图或地

to she the

不连通平面图

Voronoi 图

构造

灰州

扩展

总结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?
- A: 顾名思义,是一条按某种顺序从一侧扫到另一侧的 线。在二维平面上,通常是一条假想的从左向右移动 的垂直的线。

-11/1/12

矩形面积护

检测线的相应

. . . .

. . . . . . . .

点定位

不连通平面

Voronoi 3

定り

构语

应用

2 //-

息结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?
- A: 顾名思义,是一条按某种顺序从一侧扫到另一侧的 线。在二维平面上,通常是一条假想的从左向右移动 的垂直的线。
- Q: 它有什么性质呢?

矩形面积并

检测线段相交

小结

一川图

平面图求均

不连通平面

Voronoi 🖪

10101101

#frith

构造

扩展

总结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?
- A: 顾名思义,是一条按某种顺序从一侧扫到另一侧的 线。在二维平面上,通常是一条假想的从左向右移动 的垂直的线。
- Q: 它有什么性质呢?
- A:将所扫描的集合分为三个部分:已经扫过的、正在 线上的、还未扫过的。正在线上的那部分是关键,往 往使用数据结构来维护扫描线上的状态。

经典题

\_\_\_\_ 羽主安以 /

.....

小结

半面图汞域

Jis else Dr

不连通平面图

Voronoi 图

. .

Alle tele

应用

1 股

总结

参考资料

■ Q: 怎么维护状态呢?

矩形面积

检测线段相

小结

平面图

平面图录

占完份

不连通平面

Voronoi B

Voronoi 🖹

±51 00b

应用

首建

参考资料

- Q: 怎么维护状态呢?
- A: 虽然状态看上去会随着线的不断移动而不断变化,但实际上,发生重大改变的次数是有限的,其余时间都是在微调,这些微调是可以通过计算得到的。把发生重大改变的点称为事件点,扫描过程中只会在事件点处停顿。同时,要按扫描的顺序维护事件点序列。

シエ グヤル2

矩形面积并

检测线段相交

小结

半面图

SE THE EE +2 +

Jr etr. (1)

不连通平面

Voronoi 3

构造

301 100

总结

参考资料

- Q: 怎么维护状态呢?
- A: 虽然状态看上去会随着线的不断移动而不断变化,但实际上,发生重大改变的次数是有限的,其余时间都是在微调,这些微调是可以通过计算得到的。把发生重大改变的点称为事件点,扫描过程中只会在事件点处停顿。同时,要按扫描的顺序维护事件点序列。
- Q: 它有什么应用呢?

经典题

矩形面积并

检测线段相交

小结

半面图

At the A

不连通平面

Voronoi 3

chr 십

构造

Alberta .

总结

- Q: 怎么维护状态呢?
- A: 虽然状态看上去会随着线的不断移动而不断变化, 但实际上,发生重大改变的次数是有限的,其余时间 都是在微调,这些微调是可以通过计算得到的。把发 生重大改变的点称为事件点,扫描过程中只会在事件 点处停顿。同时,要按扫描的顺序维护事件点序列。
- Q: 它有什么应用呢?
- A:接下来你就会看到它在计算几何中的应用了。

二维数点

矩形面积并

检测线段相?

小蹈

平面图

to she fi

不连通平面

Voronoi 3

构语

1-9.40

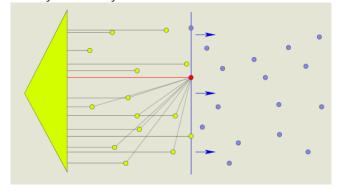
30.00

总结

参考资料

## 二维数点

【题意简述】二维平面内,给出 n 个初始点  $(x_i, y_i)$ ,m 次询问,每次询问一个点  $(p_j, q_j)$  左下方(即满足  $x_i \leq p_i$  且  $y_i \leq q_i$  )的点数。



二维数点

位测线权相

/J\*sn

半面图甲

平面图求均

占完位

不连通平面

Voronoi 图

VOIOIIOI 13

上人

应用

总结

参考资料

#### 二维数点

首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起,按 x 坐标为第一关键字, y 坐标为第二关键字(都相同时询问靠后)从小到大排序,这些点就是事件点。

#### 经典题

一维粉占

检测线段相交

小结

#### 1 1224 1

平面图求均

不连通平面

#### Voronoi 3

ala de

46-106

应用

总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起,按 x 坐标为第一关键字, y 坐标为第二关键字(都相同时询问靠后)从小到大排序,这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线(也就是刚才那幅图中蓝色的线)从左到右依次扫过去,只会在事件点处停顿。

经典题

一维粉占

矩形面积扩

检测线段相3

小结

平面图中

**取需因录** 

不连通平面

#### Voronoi 🖺

. 上入

19 JE

总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起,按 x 坐标为第一关键字, y 坐标为第二关键字(都相同时询问靠后)从小到大排序,这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线(也就是刚才那幅图中蓝色的线)从左到右依次扫过去,只会在事件点处停顿。
- 扫到初始点,说明它肯定位于之后询问点的左侧,需要把它放入容器内,便于询问时的计数,容器内保持y坐标从小到大的顺序。

经典题

一维粉占

矩形面积非

检测线段相当

小结

平面图中

平面图求

占定位

不连通平面

Voronoi 3

. . . . . .

た人

应用

扩展

总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起,按 x 坐标为第一关键字, y 坐标为第二关键字(都相同时询问靠后)从小到大排序,这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线(也就是刚才那幅图中蓝色的线)从左到右依次扫过去,只会在事件点处停顿。
- 扫到初始点,说明它肯定位于之后询问点的左侧,需要把它放入容器内,便于询问时的计数,容器内保持 y 坐标从小到大的顺序。
- 扫到询问点时,只有容器内的初始点在其左侧,统计容器内位于其下方的点数。

检测线段相

小结

半面图印

平面图求

点定位

不连通平面

Voronoi 3

定义

构造

扩展

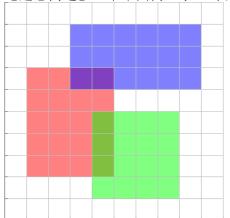
总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起,按 x 坐标为第一关键字, y 坐标为第二关键字(都相同时询问靠后)从小到大排序,这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线(也就是刚才那幅图中蓝色的线)从左到右依次扫过去,只会在事件点处停顿。
- 扫到初始点,说明它肯定位于之后询问点的左侧,需要把它放入容器内,便于询问时的计数,容器内保持 y 坐标从小到大的顺序。
- 扫到询问点时,只有容器内的初始点在其左侧,统计容器内位于其下方的点数。
- 若用 树状数组/线段树/平衡树 来充当这个容器的话,复杂度为  $O((n+m)\log(n+m))$ 。

## 矩形面积并

【题意简述】二维平面内,求n个矩形的并的面积。



经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小站

半面图甲

平面图求均

Jir ster filtr

不连通平面

#### Voronoi 图

46-16

应用

扩展

总结

参考资料

## 矩形面积并

所有矩形的左右边界为事件点,将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间,扫描线被覆盖的长度不变,面积可以表示为总长 x 宽。

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

一川图片

1 1001 2001

点定位

11-XEXE | 1811

Voronoi 🛭

构造

MYHI

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点,将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间,扫描线被覆盖的长度不变,面积可以表示为总长 x 宽。
- 遇到矩形左边界,则这一区间的覆盖次数 +1。

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

半回图水

Jareite Dr

小连 週 半 面 |

#### Voronoi 3

定义

THILE

3550712

当 4±

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点,将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间,扫描线被覆盖的长度不变,面积可以表示为总长 x 宽。
- 遇到矩形左边界,则这一区间的覆盖次数 +1。
- 遇到矩形右边界,则这一区间的覆盖次数 -1。

董宏华

介绍

经典题

矩形面积并

检测线段相多

小结

平面图中

平而图或出

78° 166° 166° 306° 306° 166°

构造

JES: 7+3

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点,将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间,扫描线被覆盖的长度不变,面积可以表示为总长 x 宽。
- 遇到矩形左边界,则这一区间的覆盖次数 +1。
- 遇到矩形右边界,则这一区间的覆盖次数 -1。
- 相邻事件点之间,所有覆盖次数非 0 的区间都要计算面积。

经典题

矩形面积并

检测线段相多

小结

平面图中

平面图求

Jan edus Altr

不连通平面

#### Voronoi 3

定义

构造

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点,将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间,扫描线被覆盖的长度不变,面积可以表示为总长 x 宽。
- 遇到矩形左边界,则这一区间的覆盖次数 +1。
- 遇到矩形右边界,则这一区间的覆盖次数 -1。
- 相邻事件点之间,所有覆盖次数非 0 的区间都要计算面积。
- 问题转化为区间 +1, -1, 询问非 0 部分长度。由于 -1 总在 +1 之后, 不会出现不够减的情况, 所以可以直接用线段树维护区间的覆盖次数和覆盖的总长度。

- 所有矩形的左右边界为事件点,将这些事件点按x坐 标排序。在相邻事件点之间,扫描线被覆盖的长度不 变,面积可以表示为总长 × 宽。
- 遇到矩形左边界,则这一区间的覆盖次数 +1。
- 遇到矩形右边界,则这一区间的覆盖次数 -1。
- 相邻事件点之间,所有覆盖次数非 0 的区间都要计算 面积。
- 问题转化为区间 +1, −1, 询问非 0 部分长度。由 于 -1 总在 +1 之后,不会出现不够减的情况,所以 可以直接用线段树维护区间的覆盖次数和覆盖的总长 度。
- 将坐标离散后复杂度为 *O*(*n* log *n*)。

# 扫描线在计算几何 中的应用 董宏华 矩形面积并

平面图中 平面图求域 点定位 不连通平面图

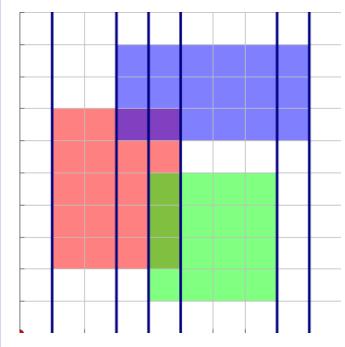
Voronoi 图

定义

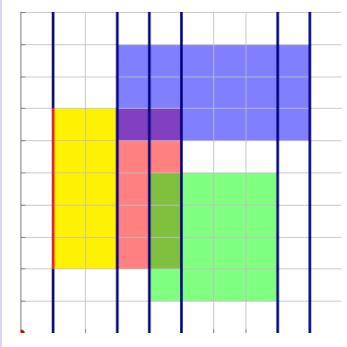
应用

扩展

总组



# 扫描线在计算几何 中的应用 董宏华



## 扫描线在计算几何 中的应用 董宏华

Λ. *Ι*π

经典

-----

矩形面积并

1.66

小结

半囲料

1 18118

不连通平面

voronoi g

chr (V

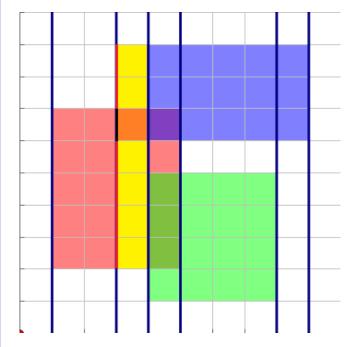
\$6140

应月

扩展

总结

**参**老答案



## 扫描线在计算几何中的应用 董宏华 介绍 经典题 二维数点 矩形酶积井 检测线设相文



点定位不连通平面图

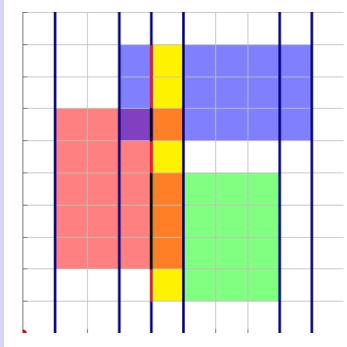
Voronoi 🖺

构道

应用

扩展

心知



#### 扫描线在计算几何 中的应用

#### 董宏华

介绍

经典

\_-HERK.FR

矩形面积并

检测线段相

小结

平面图

平面图求

点定

小브週半田

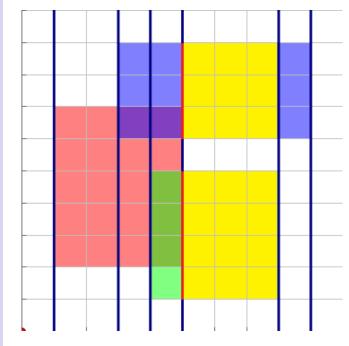
Voronoi 3

~~

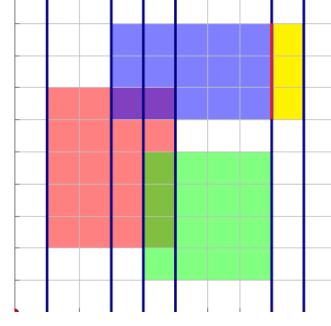
相

扩展

总结



## 扫描线在计算几何 中的应用 董宏华



一维粉:

ACAD BILIDADI

检测线段相交

/J\*sn

一川图目

Ja els Dr

不连通平面

Voronoi 8

voronoi 🗈

chr (V

46-16

11976

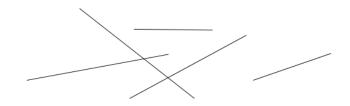
扩展

总结

参考资料

## 检测线段相交

【题意简述】给出平面内n条线段,判断是否存在线段相交。



董宏华

介绍

经典题

- 46: 80; s

7L70 Im D 17

检测线段相交

小结

半面图甲

平面图求均

占完位

不连通平面

Voronoi 图

构造

应用

总结

参考资料

## 检测线段相交

假设没有垂直的线段(可通过整体转角度,或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决)和三点共线。先将线段有向化,左侧点为起点,右侧点为终点。

经典题

10.01.1.

检测线段相交

J. 64-

चर्च चर्च छ

平型 医水

MAC III.

小连週十回:

Voronoi 3

定义

构造

J.155.713

首建

参考资料

## 检测线段相交

- 假设没有垂直的线段(可通过整体转角度,或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决)和三点共线。先将线段有向化,左侧点为起点,右侧点为终点。
- 线段的起点和终点为事件点,将其按 x 坐标排序,然后扫描过去,按扫描线上交点的上下顺序,用平衡树维护还与当前扫描线相交的线段序列。

经典题

- 40-94-3

矩形面积

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求

to also the

不连通平面

Voronoi 8

た人

成田

扩展

总结

参考资料

## 检测线段相交

- 假设没有垂直的线段(可通过整体转角度,或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决)和三点共线。先将线段有向化,左侧点为起点,右侧点为终点。
- 线段的起点和终点为事件点,将其按x坐标排序,然后扫描过去,按扫描线上交点的上下顺序,用平衡树维护还与当前扫描线相交的线段序列。
- 遇到一个线段的起点,则需要将这个线段插入平衡 树,而最有可能和它相交的是他的上下方两条线段, 所以在这时判断一下是否产生了相交。

参考资料

## 检测线段相交

- 假设没有垂直的线段(可通过整体转角度,或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决)和三点共线。先将线段有向化,左侧点为起点,右侧点为终点。
- 线段的起点和终点为事件点,将其按x坐标排序,然后扫描过去,按扫描线上交点的上下顺序,用平衡树维护还与当前扫描线相交的线段序列。
- 遇到一个线段的起点,则需要将这个线段插入平衡 树,而最有可能和它相交的是他的上下方两条线段, 所以在这时判断一下是否产生了相交。
- 遇到一个线段的终点,则需要将这个线段从平衡树中 删除,而这可能导致上下方两条线段变为相邻了,相 邻线段都有可能相交,所以在这时需要判断。

-- 60- 90-

矩形面积并

检测线段相交

小结

半面图甲

平面图求均

占完位

不连通平面

Voronoi 图

----

构定

Alberta .

总结

参考资料

#### 正确性证明

上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一 时刻的扫描线上一定是相邻的。

经典题

- 46: 65: 3

AC/D/III/D/J/

检测线段相交

小结

一川图中

आरं सन्तं हिंदी चीट न

点定位

不连通平面

#### Voronoi 3

V OI OI IOI

定义

构造

当 纽

参考资料

#### 正确性证明

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。
- 在出现相交之前,扫描线上的线段顺序不会改变。由于是最早相交的一对,所以在这之前线段顺序是正确的。

经典题

.....

地形間がた

检测线段相交

小结

I littlist.

平面图求均

不连通平面

Voronoi |

ph. 34

应用

扩展

总结

参考资料

## 正确性证明

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。
- 在出现相交之前,扫描线上的线段顺序不会改变。由于是最早相交的一对,所以在这之前线段顺序是正确的。
- 假设最早相交的两线段在之前任何时刻都不在扫描线上相邻,那么在这两线段相交之前都存在一条线段在它们中间。那么等到他们相交时,中间的线段将"无路可走",至少和其中一条相交,且一定在这之前。所以假设不成立。

经典题

二维数点

地形則松井

检测线段相交

千॥图4

平面图求

点定位

不连通平面

#### Voronoi |

定义

构造

扩展

总结

参考资料

# 正确性证明

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。
- 在出现相交之前,扫描线上的线段顺序不会改变。由于是最早相交的一对,所以在这之前线段顺序是正确的。
- 假设最早相交的两线段在之前任何时刻都不在扫描线上相邻,那么在这两线段相交之前都存在一条线段在它们中间。那么等到他们相交时,中间的线段将"无路可走",至少和其中一条相交,且一定在这之前。所以假设不成立。
- 存在三点共线时,有可能两线段最早相交但之前不相邻,但这个交点可由其他线段检测到。

经典是

二维数.

矩形面积扩

检测线段相交

小姑

平面图中

平面图求城

ANAC ES

小廷地干回日

Voronoi 图

ala de

松松

灰州

总结

参考资料

• 如果要求出所有交点呢?

~L 7 \ //2

矩形面积并

检测线段相交

J. 74-

1 1001 1001

平面图求均

点定位

小连进半面|

#### Voronoi 图

\$61.65

应用

301.00

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢?
- 改进上述算法,在求到一个交点后,把该交点位置也 作为事件点,并用优先队列维护,在遇到该交点时, 交换平衡树中这两条线段的位置(删除两个,插入两 个,插入后要与相邻线段求交)。

经典题

工火炬

矩形面积开

检测线段相交

小结

平面图

平面图求

不连通平面

Voronoi B

Voronoi 🖹

定义

应用

扩展

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢?
- 改进上述算法,在求到一个交点后,把该交点位置也 作为事件点,并用优先队列维护,在遇到该交点时, 交换平衡树中这两条线段的位置(删除两个,插入两 个,插入后要与相邻线段求交)。
- 那如果出现至少三线共点呢?

经典题

矩形凹积升

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求

Links De

不连通平面

#### Voronoi B

定义

构造

Acres 100

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢?
- 改进上述算法,在求到一个交点后,把该交点位置也 作为事件点,并用优先队列维护,在遇到该交点时, 交换平衡树中这两条线段的位置(删除两个,插入两 个,插入后要与相邻线段求交)。
- 那如果出现至少三线共点呢?
- 在那一点时,所有涉及到的线段要变为逆序,一起处理(全部删除,全部插入)。

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢?
- 改进上述算法,在求到一个交点后,把该交点位置也 作为事件点,并用优先队列维护,在遇到该交点时, 交换平衡树中这两条线段的位置(删除两个,插入两 个,插入后要与相邻线段求交)。
- 那如果出现至少三线共点呢?
- 在那一点时,所有涉及到的线段要变为逆序,一起处理(全部删除,全部插入)。
- 复杂度为  $O((n+k)\log n)$ , 其中 k 为交点个数。

### 董宏华

介绍

经曲期

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

1 100 150

अहं सन्तं हिंदी नोट न

Jir ele Dr

不连通平面图

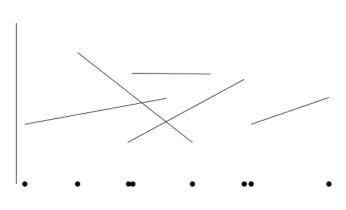
Voronoi 图

定义

构定

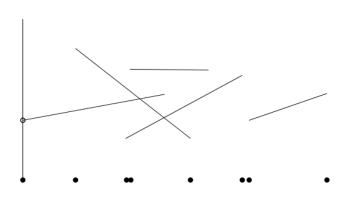
应用

24 /-1-



### 董宏华

检测线段相交



### 董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

1 100 150

305 Hall 1971 old 4

占定位

不连通平面图

Voronoi 图

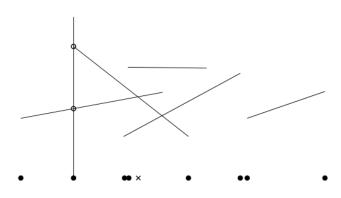
chr V

构

应月

N/ / I

总结



### 董宏华

介绍

经典题

一维數占

矩形面积并

检测线段相交

/L4±

1 Imited

अहं सन्तं हिंदी नोट न

Jareite Dr.

不连通平面图

Voronoi 图

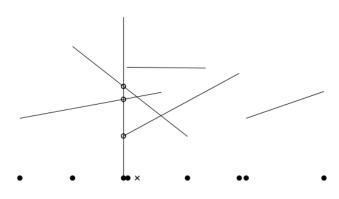
....

成日

\_\_\_\_\_

台 4士

VEV SH



### 董宏华

介绍

经典题

-- 66: 80v J

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图求

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

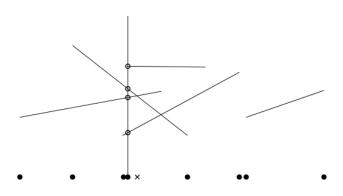
ala de

Adv 10

应用

D /DC

总结



## 董宏华

介绍

经典制

一维粉片

矩形面积扩

检测线段相交

小结

1 1001 1000

अहं तस्त्रं हिंदी और के

占完位

不连通平面的

Voronoi 图

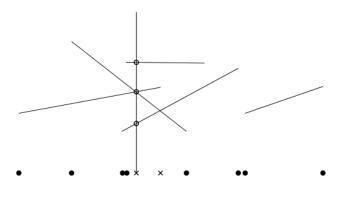
\$51.00

应用

扩展

总结

参老咨判



### 董宏华

介绍

经曲期

-- 46E 857 2

矩形面积并

检测线段相交

小结

. .----

平面图求均

占定位

不连通平面图

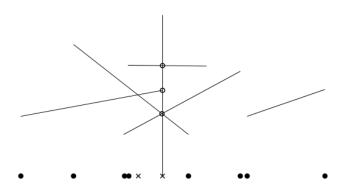
Voronoi 图

ch V

柏

应月

总结



### 董宏华

介绍

经典题

一维粉占

矩形面积并

检测线段相交

小结

1 1....1

半面图或为

占定位

不连通平面图

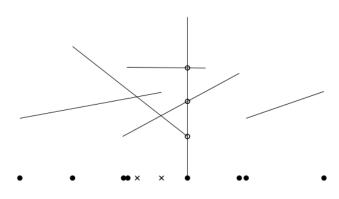
Voronoi 图

chr (V

构

应用

总结



### 董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

1 1001 1000

半面图或为

占定位

不连通平面图

#### Voronoi 图

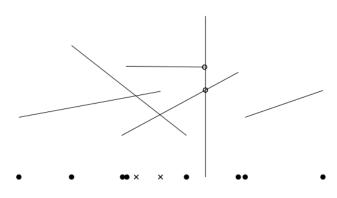
ala de

松中

应用

1) RE

总结



### 董宏华

介绍

经典题

二维数点

地形画松井

检测线段相交

小结

1 1004 1004

平面图求均

点定位

不连通平面图

#### Voronoi 图

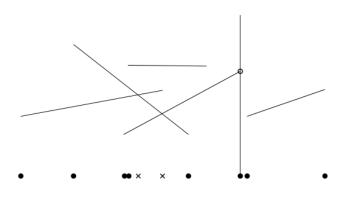
定义

构

应用

扩展

总结



## 董宏华

介绍

经典题

二维数点

起形曲松井

检测线段相交

小结

1 100 150

半面图或为

占定位

不连通平面图

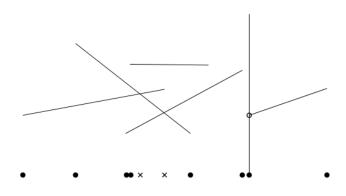
Voronoi 图

chr (V

椒

灰片

总结



### 董宏华

介绍

经典题

-- 66: 30; J

矩形面积扩

检测线段相交

小结

1 lm lst

30, 111 (9) (15)

Janeier Dr.

不连通平面图

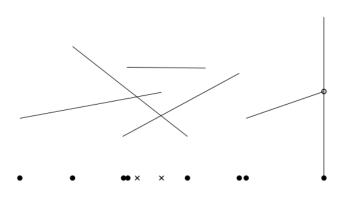
Voronoi 图

....

应用

....

当 纽



×1 - H

经典题

矩形面积并

检测线段相多

小结

半面图甲

平面图求均

点定位

不连通平面

Voronoi 3

构造

XXX/12

扩展

总结

参考资料

在二维数点问题中,扫描线算法利用了已经扫过的 点、当前事件点、还未扫过的点的大小关系,简化了 题目的条件,并在数据结构的帮助下解决了问题。 矩形面积并

检测线段相2

小结

半面图

111 -111 IIII -III I

to also do

不连通平面

Voronoi 3

. .

\$61.00

应用

参考资料

# 小结

- 在二维数点问题中,扫描线算法利用了已经扫过的 点、当前事件点、还未扫过的点的大小关系,简化了 题目的条件,并在数据结构的帮助下解决了问题。
- 在矩形面积并问题中,扫描线算法利用相邻事件点之间扫描线被覆盖长度不变的性质,将总面积化为了多块矩形面积之和。

矩形面积并

检测线段相

小结

平面图印

平面图求均

. . . .

不连通平面

Voronoi P

定义

构造

扩展

总结

参考资料

# 小结

- 在二维数点问题中,扫描线算法利用了已经扫过的 点、当前事件点、还未扫过的点的大小关系,简化了 题目的条件,并在数据结构的帮助下解决了问题。
- 在矩形面积并问题中,扫描线算法利用相邻事件点之间扫描线被覆盖长度不变的性质,将总面积化为了多块矩形面积之和。
- 在检测线段相交问题中,扫描线算法利用了相邻事件 点之间线段的上下顺序不改变的性质,用平衡树维护 了扫描线上的状态。

**经** 典 起

二维数点

7L70 III D 171

1.74

0 ----

平面图求城

不连涌平而

Voronoi 🗵

voronoi 🗈

正义

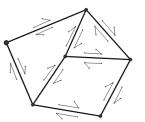
构造

62.00

总结

参考资料

# ■ 什么是平面图呢?



经典题

>L77/12

矩形面积并

检测线段相多

小娃

亚面图:

#### 平面图求域

1 100 100 200

点定位

不连通平面

#### Voronoi 2

. . . . . . ,

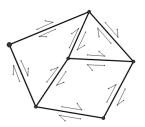
构造

总结

参考资料

# 平面图

- 什么是平面图呢?
- 若图 G 可画在平面上,使得任意两条边都不会在非端点处相交,则称 G 是平面图。



ニ上ツヤル

矩形面积并

检测线段相

小结

平面图

平而图求域

la she the

不连通平面

Voronoi 3

V OI OI IOI

/\_\_\_

构造

Alexandra and

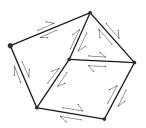
当 纽

20 ab 500

参考资料

# 平面图

- 什么是平面图呢?
- 若图 G 可画在平面上,使得任意两条边都不会在非端点处相交,则称 G 是平面图。
- 接下来的问题中默认平面图的端点坐标已经给出。



A . Cont.

**经**典足

包测线权相:

小结

平面图求域

点定位

不连通平面

Voronoi 图

V 01 011 01 p.s.

应用

总结

参考资料

• 先假设平面图是连通的。

#### 红典起

二维数点

7L70 IIII-0171

检测线段相当

小结

#### 半面图甲

#### 平面图求域

不连通平面

#### Voronoi 图

. . . . . . . . .

- he had

当 纽

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域,且每个域的有向边刚好绕了一圈。

### 经典题

光が囲かり

检测线段相

小结

一川国

#### 平面图求域

点定位

不连通平面

#### Voronoi 3

定义

构造

26 /-1-

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域,且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。

经典题

矩形面积并

检测线段相:

小结

半面图甲

平而图求域

不连通平面

Voronoi P

....

AC.A

应月

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域,且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。
- 从一条未访问的有向边出发,在当前边终点处选择当前边的反向边的顺时针下一条边,重复这个过程,直到返回出发的边为止。

经典题

二雅奴点

7L70 III D171

III. DO - ALEATH.

#### 丁川图4

平面图求域

点足位

不连通平面

#### Voronoi |

定义

构造

护展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域,且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。
- 从一条未访问的有向边出发,在当前边终点处选择当前边的反向边的顺时针下一条边,重复这个过程,直到返回出发的边为止。
- 一次循环中经过的边组成一个新的域,这个域位于这些有向边的左侧。

定义

应用

扩展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域,且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。
- 从一条未访问的有向边出发,在当前边终点处选择当前边的反向边的顺时针下一条边,重复这个过程,直到返回出发的边为止。
- 一次循环中经过的边组成一个新的域,这个域位于这些有向边的左侧。
- 注意无限域,它的边绕行方向和其他域不同,可以通过叉积求得的面积的正负来判断。

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相当

1.66

平面图中

平面图求城

点定位

从足匹

ALVENO LIMINI

Voronoi 图

VOIOIIOI JS.

----

101 101

.....

首建

参考资料

■ 点定位,即求询问点在平面图中的哪个域内。

----

检测线段相交

Alian

十四图件

平面图求均

占定位

不连诵平而

Voronoi 🗵

VOIOIIOI 13

た人

构造

心知

参考资料

- 点定位,即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域,从而得到每条线段下侧对应的域。

足が肌が刃

检测线段相交

工用料料

占定位

不连通平面

Voronoi 3

. .

25125

DY.H:

参老资料

- 点定位,即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域,从而得到每条线段下侧对应的域。
- 由于平面图中除端点外没有其他交点,所以各线段的 相对顺序在扫描过程中不会改变。

扩展

总结

参考资料

- 点定位,即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域,从而得到每条线段下侧对应的域。
- 由于平面图中除端点外没有其他交点,所以各线段的 相对顺序在扫描过程中不会改变。
- 那么直接类似检测线段相交时的做法,用平衡树来维护与当前扫描线有交的线段的上下顺序(要注意在端点时线段的上下顺序)。

平面图求均

不连通平面

Voronoi B

Prov

构造

扩展

总结

参考资料

- 点定位,即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域,从而得到每条线段下侧对应的域。
- 由于平面图中除端点外没有其他交点,所以各线段的 相对顺序在扫描过程中不会改变。
- 那么直接类似检测线段相交时的做法,用平衡树来维护与当前扫描线有交的线段的上下顺序(要注意在端点时线段的上下顺序)。
- 扫描到需要定位的点时,求出其上方第一条线段,该 线段下侧对应的域就是需要定位的点所在的域。

经典题

AC/D INI/DAYI

检测线段相交

小结

平面图求

占定位

AN AC LL

小廷地干围除

Voronoi 图

定义

松松

应用

D 114

总结

参考资料

上述扫描线算法是离线的,而在应用中一般都需要在 线,这怎么办呢? 1.0 100 1.0 1.0 1.0 1.0

/J\*sm

平田图》

占定位

个**进**进半国际

Voronoi 2

定义

1-246

.....

总结

参考资料

# 转在线

- 上述扫描线算法是离线的,而在应用中一般都需要在 线,这怎么办呢?
- 维护扫描线状态用的是平衡树,而可持久化平衡树 (详见参考资料)为该算法转在线提供了可能。

×1.77/12

矩形面积并

ACHINAR DE ARE

小结

平面图中

平面图求场

Japan Da

不连通平面图

Voronoi 🗵

Voronoi 🛭

chr V

构造

XXX/12

息结

参考资料

# 不连通平面图

注意,刚才求域时我们假设平面图连通,那如果不连通呢?

~L 7 7 1/2

矩形面积开

检测线段相交

小结

平面图中

不连通平面图

Voronoi 图

VOIOIIOI JS

11.00

应用

.....

总结

参考资料

# 不连通平面图

注意,刚才求域时我们假设平面图连通,那如果不连通呢?



二维数点

矩形囲积升

检测线段相交

小结

平面图中

....

不连通平面图

Voronoi 图

护服

总结

参考资料

### 不连通平面图

注意,刚才求域时我们假设平面图连通,那如果不连通呢?



 通过上述算法,无法得到图中的圆环域,也无法得到 这个域与中心方块域相邻的关系。 矩形面积并

检测线段相?

小结

半面图甲

平面图求均

Jir sir Air

不连通平面图

Voronoi 图

ala de

....

应用

2 //-

总结

参考资料

# 不连通平面图

■ 那如果事先将两部分连起来呢?

介绍

经典题

\_\_\_ FIE 900 J.

THE RESIDENCE AT HE

小站

上間周日

平面图求

点定位

不连通平面图

Voronoi 3

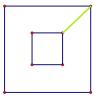
ele tat

Alba min

总结

参考资料

• 那如果事先将两部分连起来呢?



检测线段相交

小结

平田園水平

不连通平面图

Voronoi 🖹

. . . . .

应用

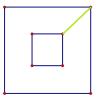
Alexandra and

总结

参考资料

# 不连通平面图

• 那如果事先将两部分连起来呢?



■ 添加这条边之后: 平面图中域的数量不变。

矩形面积差

检测线段相交

小结

-T-1011501361

不连通平面图

Voronoi 🖹

ch V

46-10

应用

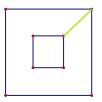
扩展

息结

参考资料

# 不连通平面图

• 那如果事先将两部分连起来呢?



- 添加这条边之后: 平面图中域的数量不变。
- 而这两部分从不连通变为连通了。

矩形面积 升

检测线段相交

小蹈

1 1001 1000

平面图求

不连通平面图

Voronoi 图

pl., 39

Alle tele

应用

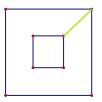
扩展

总结

参考资料

# 不连通平面图

• 那如果事先将两部分连起来呢?



- 添加这条边之后: 平面图中域的数量不变。
- 而这两部分从不连通变为连通了。
- 如果可以找到这样的一些边把整个图连起来,那就可以继续使用最开始的平面图求域的方法了。

矩形面积扩

检测线段相?

小结

半面图甲

平面图求均

古宗的

不连通平面图

Voronoi 图

. .

. . . . .

总结

参考资料

# 使其连通

先遍历整张图,求出每个连通块。对于每个连通块, 找到其纵坐标最大的点。 董宏华

介绍

经典题

二维数)

检测线胶相3

小结

1 101121

305 Hell (991 -45 Au)

Janeter Dr.

不连通平面图

Voronoi 图

VOIOHOI E

定り

构造

A160 II

总结

参考资料

- 先遍历整张图,求出每个连通块。对于每个连通块, 找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线,那 么射线不会和它所在的连通块相交,只会和其他连通 块相交。

董宏华

介绍

**经**典超

二维粉占

检测线段相3

7J 1283

半面图

平而图或地

不连通平面图

Voronoi 图

. . . . . . . . .

Alle tele

应用

心知

参考资料

- 先遍历整张图,求出每个连通块。对于每个连通块, 找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线,那 么射线不会和它所在的连通块相交,只会和其他连通 块相交。
- 用扫描线算法可以求出该射线上第一个交点,然后把 交点所在边剖成两条,并新增这条垂直的边,维护其 平面图性质。

### 介绍

经典题

-- 66: 80: J

矩形面积并

检测线段相多

小站

半面图甲

平面图求均

Links De

不连通平面图

#### Voronoi 3

定义

构造

尽结

参考资料

- 先遍历整张图,求出每个连通块。对于每个连通块, 找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线,那 么射线不会和它所在的连通块相交,只会和其他连通 块相交。
- 用扫描线算法可以求出该射线上第一个交点,然后把 交点所在边剖成两条,并新增这条垂直的边,维护其 平面图性质。
- 假设最上方有一条无限长的线,所有和原图没有交点的射线都会和这条线相交,这样整张图就连通了。

检测线段相多

小结

平面图中

平面图求均

点定位

不连通平面图

Voronoi 3

定义

构造

扩展

总结

参考资料

- 先遍历整张图,求出每个连通块。对于每个连通块, 找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线,那 么射线不会和它所在的连通块相交,只会和其他连通 块相交。
- 用扫描线算法可以求出该射线上第一个交点,然后把 交点所在边剖成两条,并新增这条垂直的边,维护其 平面图性质。
- 假设最上方有一条无限长的线,所有和原图没有交点的射线都会和这条线相交,这样整张图就连通了。
- 有兴趣的可以去尝试下 Rujia Liu's Present 4 中的 [uva12310]Point Location

### 扫描线在计算几何 中的应用

### 董宏华

开细

经典题

.....

矩形面积并

45-381-61: 63: 40

小结

अंद्र तस्त्र स्थित

अहं सन्त हिंदी और क

不连通平面图

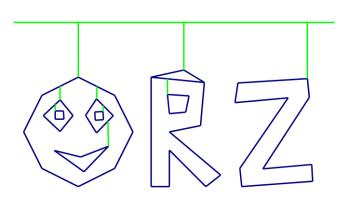
Voronoi 🛚

....

构定

息结

参考资料



董宏华

介绍

经典是

二维数

矩形面积扩

检测线段相:

/Union

工田図.

SE THE EE +2 +

点定位

不连通平面

Voronoi 图

定义

构道

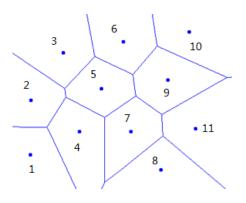
30.00

总结

参考货料

# Voronoi 图

给出一些基点,将平面上所有点划给距离最近的基点,这样划分产生的图就是 Voronoi 图。



V 图中每个基点构成一个域,且为平面图,所以其点数和 边数都是 O(域数) 的。

矩形面积并

检测线段相2

小结

半面图中

平面图求

点定位

不连通平面

Voronoi 🖹

. .

构造

应用

息结

参考资料

### 构造

■ 扫描线从左到右扫描,平面区域内任何到基点和扫描 线的距离相等的点构成一条抛物线,当前仍存在的若 干段抛物线组成海滩线 (beach line),这条线左侧区域 的归属已经可以确定。

### 介绍

经典题

ミエグやルム

矩形面积并

检测线段相多

小结

半面图明

ver - e-1 (161 - do. 1

1 1001000-2

70 16 18 19 19

Voronoi B

会り

构造

J.152.713

V / L

参考资料

- 扫描线从左到右扫描,平面区域内任何到基点和扫描 线的距离相等的点构成一条抛物线,当前仍存在的若 干段抛物线组成海滩线 (beach line),这条线左侧区域 的归属已经可以确定。
- 相邻抛物线之间的交点称为断点 (break point)。因为 断点到相邻两个基点的距离一直相等,所以每一时刻 每个断点都落在 V 图的某条边上 (对应两点的中垂线 上),所有断点的轨迹合起来就是待构造的 V 图。

### 构造

 扫描线从左到右扫描,平面区域内任何到基点和扫描 线的距离相等的点构成一条抛物线,当前仍存在的若 干段抛物线组成海滩线 (beach line),这条线左侧区域 的归属已经可以确定。

 相邻抛物线之间的交点称为断点 (break point)。因为 断点到相邻两个基点的距离一直相等,所以每一时刻 每个断点都落在 V 图的某条边上(对应两点的中垂线 上),所有断点的轨迹合起来就是待构造的 V 图。

■ 有两类事件点:基点和 V 图的顶点,其中 V 图顶点 需要在扫描过程中求。基点对应产生新的抛物线,而 V 图顶点对应旧的抛物线消失。

### 介绍

经典题

--- (4)-104- 1--

矩形面积护

检测线段相多

小结

平面图中

平面图求

占完份

不连通平面

Voronoi |

定义

构造

首廷

心知

参考资

矩形凹积升

检测线段相多

小结

一川図

and and DOS DOS

点定位

不连通平面

Voronoi 图

构造

应用

息结

参考资料

# 构造

现在问题变为如何维护海滩线,抛物线经常变动,但 维护对应基点序列还是可行的,同时还可以知道所有 断点。 シエッペル2

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图印

. .----

不连通平面

Voronoi 图

VOIOHOI JS

构造

应用

息结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线,抛物线经常变动,但 维护对应基点序列还是可行的,同时还可以知道所有 断点。
- 抛物线消失处是 V 图顶点,也就是相邻断点重合,要 实时维护相邻断点的重合点。

### /-Z -H- HE

**经典**趣

矩形面积并

检测线段相交

小结

#### 一川图

平而图或地

Jr etr. (1)

不连通平面

#### Voronoi 图

VOIOHOI E

构造

应用

30° 100

总结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线,抛物线经常变动,但 维护对应基点序列还是可行的,同时还可以知道所有 断点。
- 抛物线消失处是 V 图顶点,也就是相邻断点重合,要 实时维护相邻断点的重合点。
- 但这个点在海滩线到达时才有效,也就是扫描线达到 该点 x 坐标 + 涉及到的基点到它的距离 时。

小结

半面图

平面图录制

点定位

不连通平面

Voronoi 🛭

VOIOHOI E

构造

DY HI

扩展

总结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线,抛物线经常变动,但 维护对应基点序列还是可行的,同时还可以知道所有 断点。
- 抛物线消失处是 V 图顶点,也就是相邻断点重合,要 实时维护相邻断点的重合点。
- 但这个点在海滩线到达时才有效,也就是扫描线达到 该点 x 坐标 + 涉及到的基点到它的距离 时。
- 用优先队列来维护事件点序列。

检测线段相多

1.66

亚诺图片

1 JAN Just 1

点定位

**小连**週半面

Voronoi 🛭

构造

应用

息结

参考资料

# 构造

• 遇到新基点 p 时,找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q,设其上方为 r,下方为 s。利用断点二分,判断断点对应的射线上 y 坐标为  $y_p$  的点是否在海滩线左侧(即比较到对应基点和扫描线的距离)。

### 介绍

经典题

矩形面积并

检测线段相多

小结

平面图中

平面图求均

不连通平面

. . . . . . . .

#### Voronoi 🖺

足义

构造

11.6712

参考资料

- 遇到新基点 p 时,找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q,设其上方为 r,下方为 s。利用断点二分,判断断点对应的射线上 y 坐标为  $y_p$  的点是否在海滩线左侧(即比较到对应基点和扫描线的距离)。
- 产生新的抛物线,最开始时为一条水平的线将原抛物 线切成两半,并产生两个断点,随后逐渐展开。

检测线段相

小结

半面图中

平面图求

71117-2-111

- 1 ALAS 1 IIII

Voronoi 🛭

定义

构造

62-10

总结

参考资料

- 遇到新基点 p 时,找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q,设其上方为 r,下方为 s。利用断点二分,判断断点对应的射线上 y 坐标为  $y_p$  的点是否在海滩线左侧(即比较到对应基点和扫描线的距离)。
- 产生新的抛物线,最开始时为一条水平的线将原抛物 线切成两半,并产生两个断点,随后逐渐展开。
- 对基点序列的影响是: q一分为二, p插入其中。对断点序列的影响是: 新增了(q,p)和(p,q),注意这是有序对,分别对应了两条方向相反的射线。

参考资料

• 遇到新基点 p 时,找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q,设其上方为 r,下方为 s。利用断点二分,判断断点对应的射线上 y 坐标为  $y_p$  的点是否在海滩线左侧(即比较到对应基点和扫描线的距离)。

- 产生新的抛物线,最开始时为一条水平的线将原抛物 线切成两半,并产生两个断点,随后逐渐展开。
- 对基点序列的影响是: q一分为二, p插入其中。对断点序列的影响是: 新增了(q,p)和(p,q),注意这是有序对,分别对应了两条方向相反的射线。
- 修改后相邻断点情况发生变化,要从事件点序列中删去 < (r,q), (q,s) >,并新增 < (r,q), (q,p) > 和 < (p,q), (q,s) >。

介绍

经典题

二维数

7L70 III D17

12.0035848411

小结

平面图中

平面图求域

Links De

不连通平面

Voronoi 图

构造

应用

总结

参考资料

遇到 V 图顶点时,得到对应的断点为< (q, r), (r, s) >,设 q 上方为 u, s 下方为 v。

### 介绍

**空**典 渺

二维数

恒测线权相

(J. sm

#### 1 HH 1331.

平而图或地

不连通平面

#### Voronoi 8

V OI OI IOI

构造

uho tres

J.115.7111

24 74

参考资料

- 遇到 V 图顶点时,得到对应的断点为
  < (q, r), (r, s) >,设 q 上方为 u, s 下方为 v。
- 说明 r 对应的抛物线将要消失,将其从基点序列中删除,那么断点 (q,r),(r,s) 变为 (q,s)。

. . .

平面图中

平面因金属

不连通平面

Managari P

VOIOHOI E

构造

str to

扩展

总结

参考资料

- 遇到 V 图顶点时,得到对应的断点为 < (*q*, *r*), (*r*, *s*) > , 设 *q* 上方为 *u*, *s* 下方为 *v*。
- 说明 r 对应的抛物线将要消失,将其从基点序列中删除,那么断点 (q,r),(r,s) 变为 (q,s)。
- 从事件点序列中删去 < (u,q), (q,r) > 和< (r,s), (s,v) >,并新增 < (u,q), (q,s) > 和< (q,s), (s,v) >。

### 介绍

二维数点

矩形面积非

检测线段相?

小结

#### 半面图明

平面图求划

Li ala Da

不连通平面

### Voronoi B

.

构造

应用

总结

参考资料

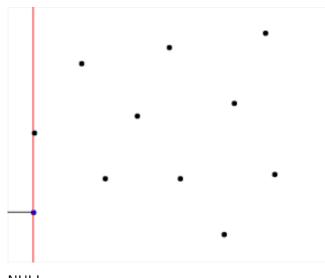
- 遇到 V 图顶点时,得到对应的断点为 < (*q*, *r*), (*r*, *s*) > , 设 *q* 上方为 *u*, *s* 下方为 *v*。
- 说明 r 对应的抛物线将要消失,将其从基点序列中删除,那么断点 (q,r),(r,s) 变为 (q,s)。
- 从事件点序列中删去 < (u,q), (q,r) > 和< (r,s), (s,v) >,并新增 < (u,q), (q,s) > 和< (q,s), (s,v) >。
- 该 V 图顶点为 (q, r) 和 (r, s) 的终点,也是 (q, s) 的起点,或者说是 (s, q) 的终点。最后将所有半边的信息综合起来可以的得到整个 V 图。

### 扫描线在计算几何 中的应用

### 董宏华

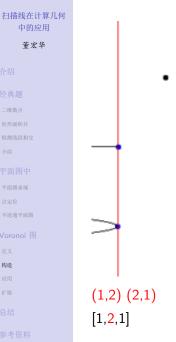
构造





### **NULL**

[1]



### 扫描线在计算几何 中的应用

### 董宏华

介绍

经典是

二维数

恒测线权相义

小结

平面图

平面图录

点定位

不连通平面

Voronoi 🛚

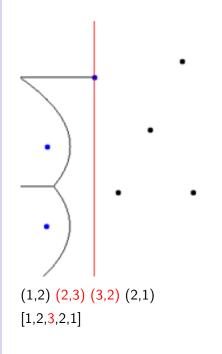
构造

13571

扩展

总结

参考资料



### 扫描线在计算几何 中的应用

### 董宏华

介绍

经典是

- 46.85

矩形面积

检测线段相多

小结

平面图

平面图录

Jr 42 R

不连通平面

Voronoi 3

ala da

构造

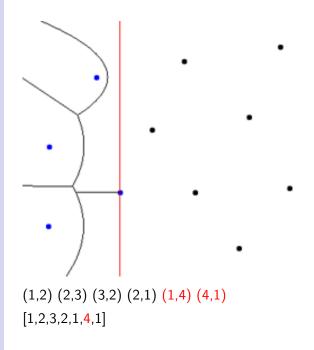
nth F

扩展

总结

心结

参考资料



-- 60- 90

矩形面积

检测线段相交

小猫

平面图

az iii [2] 北

14 (2.15)

不连通平面

Voronoi 图

VOIOIIOI E

正义

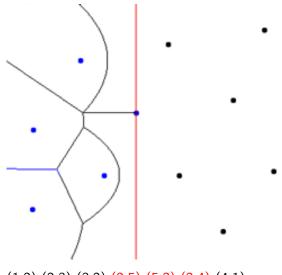
构造

Alberta.

24.4

尽结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,2) (2,5) (5,2) (2,4) (4,1)

[1,2,3,2,5,2,4,1]

二维数

227岁周初:

III. DO - ALEATH A

-U-201

半面图

平面图求

点定位

不连通平面

Voronoi 🛭

VOIOIIOI IS

~~

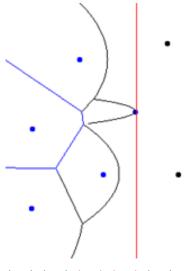
构造

扩展

总结

心知

参考资料



(1,2) (2,3) (3,5) (5,4) (4,1)

[1,2,3,5,4,1]

1.66

一川図

平面图求

点定化

不连通平面

Voronoi 🛭

VOIOIIOI E

*元人* 

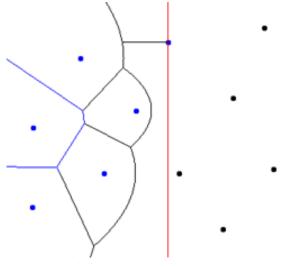
构造

扩展

首套

尽结

参考資料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,3) (3,5) (5,4) (4,1)

[1,2,3,6,3,5,4,1]

矩形面积

检测线段相交

小石田

一里图

305 mai (97) ole 4

占定位

不连通平面

Voronoi 图

V 01 01101 p.s.

定义

构造

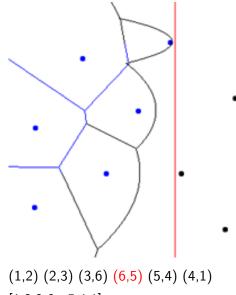
应月

扩展

总结

100 214

参考资料



[1,2,3,6,5,4,1]

经典是

一维粉片

矩形面积

检测线段相交

小结

上田図,

平面 医北

14 (2.15)

不连通平面

Voronoi 图

V 01 011 01 p.s

正义

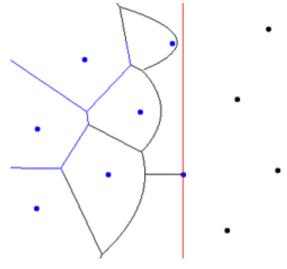
构造

......

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,4) (4,7) (7,4) (4,1)

[1,2,3,6,5,4,7,4,1]

矩形面积

担例线权相关

.7 .=14

半回图

平面图录

点定位

不连通平面

Voronoi 3

10101101

构造

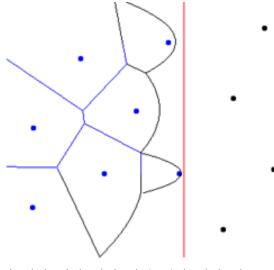
构珀

扩展

总结

157.51

**参**考 负 和



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,7) (7,4) (4,1)

[1,2,3,6,5,7,4,1]

经典思

二维数点

矩形面积

恒测线权相义

小语

平面图

**取品图** &

点定位

不连通平面

Voronoi 🛭

V 01 01101 p.s.

~~

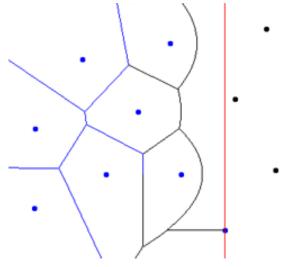
构造

40-1

...

息结

参考資料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,7) (7,8) (8,7) (7,4) (4,1)

[1,2,3,6,5,7,8,7,4,1]

二维数点

......

小结

平面图

**取品图** &

点定位

不连通平面

Voronoi 图

VOIOIIOI E

定义

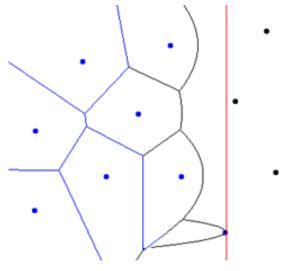
构造

40-10

24.4

尽结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,7) (7,8) (8,4) (4,1) [1,2,3,6,5,7,8,4,1]

ンエフマル

矩形面积

检测线段相

小结

平面图

平元 医 中

点定位

不连通平面

Voronoi 图

10101101

正义

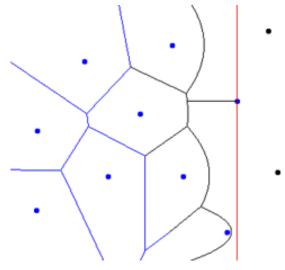
构造

应月

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,9) (9,5) (5,7) (7,8) (8,1) [1,2,3,6,5,9,5,7,8,1]

开细

经典是

毎形而积

检测线段相

小结

一里图

平而图录

古宝的

不连通平面

Voronoi 3

10101101

正义

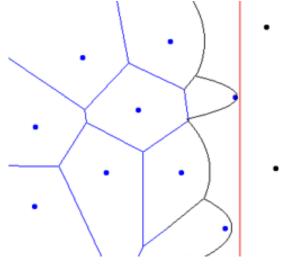
构造

40-10

24.4

思结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,9) (9,5) (5,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,9,5,7,8,1]

经典是

Aug met opplyfers

74.70 100 10 17

als dete

. 3 . - 64

1 [H] [33]

平而图或

Jan ethe Att

不连通平面

Voronoi 🛭

10101101

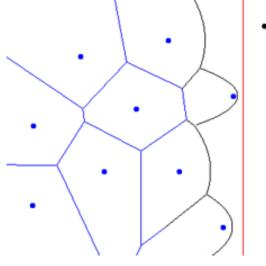
上人

构造

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,9) (9,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,9,7,8,1]

als dela

小石

一田 図,

平面图求均

点定位

不连通平面

Voronoi 3

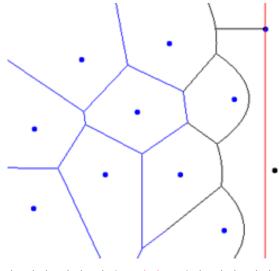
构造

Physics Physics

扩展

总结

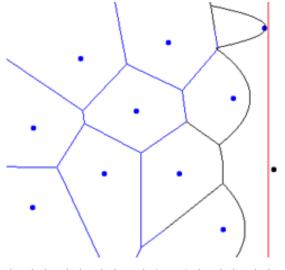
参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,6) (6,9) (9,7) (7,8) (8,1) [1,2,3,6,10,6,9,7,8,1]

构造





(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,7) (7,8) (8,1)[1,2,3,6,10,9,7,8,1]

经典题

Acc me contains a

检测线段相

小结

平面图

平面图录

点定位

不连通平面

Voronoi ⅓

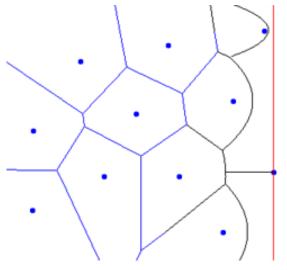
构造

nh i

扩展

首奏

参考负科



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,7) (7,11) (11,7) (7,8) (8,1) [1,2,3,6,10,9,7,11,7,8,1]

经典是

ニ上ツやル

矩形面积

检测线段相交

小结

平面图

平面图求

Jr 400 A

不连通平面

Voronoi 🛭

VOIOIIOI E

定义

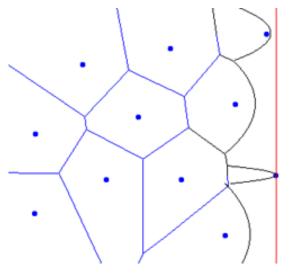
构造

62.0

首奏

AEV SH

**参**考資料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,7) (7,11) (11,8) (8,1) [1,2,3,6,10,9,7,11,8,1]

AAMAD OLI

小结

一川图

平面图求均

点定位

Voronoi ⅓

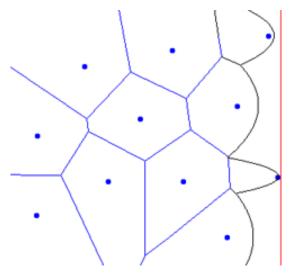
构造

成日

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,11) (11,8) (8,1) [1,2,3,6,10,9,11,8,1]

矩形面积

检测线段相交

小结

平面图明

Li she Di

不连通平面

Voronoi 图

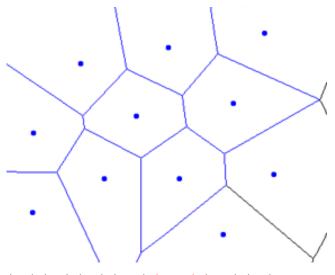
10101101

构造

17 714

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,11) (11,8) (8,1)

矩形面积

检测线段相交

小结

半面图

to she fi

不连通平面

Voronoi 3

. . . . . . . . .

正义

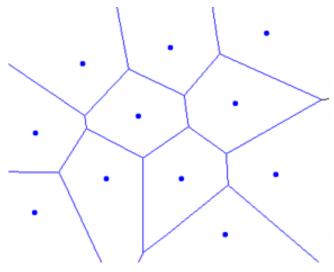
构造

应月

扩展

总结

参考货料



 $(1,2)\ (2,3)\ (3,6)\ (6,10)\ (10,11)\ (11,8)\ (8,1)$ 

[1,2,3,6,10,11,8,1]

\_\_\_ 羽主双方

矩形面积非

TELOGRAFIA THIS

小猫

半面图片

点定化

不连通平面

Voronoi 🛭

10101101

~~~

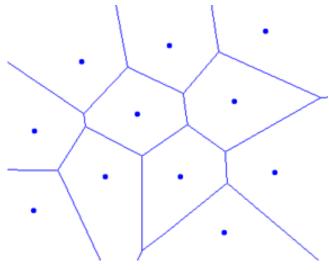
构造

40-10

24.40

息结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,11) (11,8) (8,1)

[1,2,3,6,10,11,8,1]

**经**典趣

矩形面积并

检测线段相

小结

半面图甲

平面图求域

点定位

不连通平面!

Voronoi 3

构造

应用

总结

参考资料

■ 最后还留在断点序列中的是无限边(只确定了一个顶点),而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。

董宏华

介绍

经典题

ニエッベルン

矩形面积并

检测线段相多

小结

平面图中

Jir ele Pr

不连通平面

Voronoi 3

构造

应用

息结

参考资料

### 构造

- 最后还留在断点序列中的是无限边(只确定了一个顶点),而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。
- 可以只维护断点序列,并记录断点涉及的两个基点。

矩形面积并

检测线段相

小结

半面图

and and STT. In I

Voronoi 🖺

构造

who trees

40.00

总结

参考资料

### 构造

- 最后还留在断点序列中的是无限边(只确定了一个顶点),而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。
- 可以只维护断点序列,并记录断点涉及的两个基点。
- 而维护断点序列就相当于维护若干射线,到达交点时 修改射线。这和之前求所有交点的算法很相似。

经典题

矩形面积护

检测线段相容

小结

平面图中

平面图求:

不连通平面

Voronoi 3

voronoi 🖹

构造

应用

总结

参考资料

- 最后还留在断点序列中的是无限边(只确定了一个顶点),而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。
- 可以只维护断点序列,并记录断点涉及的两个基点。
- 而维护断点序列就相当于维护若干射线,到达交点时 修改射线。这和之前求所有交点的算法很相似。
- 不同的是这里的优先队列中不能有多余的备选交点, 否则会产生误报,任意时刻只保留相邻射线的交点。
   而求交点那题使用这种方法可以减少额外需要的内存。

经典题

矩形面积并

检测线的相图

als delt

半面图中

平面图求域

. . . .

78, 196 199 205 405 B

Voronoi 图

voronoi 🖄

chr V

构造

应用

台 纽

参考资料

【最近基点】:每次询问离一个点最近的基点。

经典题

矩形面积并

检测线段相交

TE DO-NEATH A

小结

半面图件

ver --- 1001 -- 85

点定位

不连通平面[

Voronoi 图

. . . . . . ,

定义

成田

62-102

总结

参考资料

### 应用

- 【最近基点】:每次询问离一个点最近的基点。
- 求出基点的 V 图后转化为点定位问题。若要在构造的 同时进行点定位,由于海滩线到达时才能确定区域, 所以很难确定询问点的先后顺序。

矩形面积并

检测线段相交

小结

1 100 150

平面图求均

70° 160 180 500 700

Voronoi P

V OI OI IOI

----

应用

Alexandra (

总结

参考资料

### 应用

- 【最近基点】:每次询问离一个点最近的基点。
- 求出基点的 V 图后转化为点定位问题。若要在构造的 同时进行点定位,由于海滩线到达时才能确定区域, 所以很难确定询问点的先后顺序。
- 【最大空圆】:在有限空间内找一个点,使离它最近的基点最远,即最大的不包含任何基点的圆。

从 曲 晒

经典题

矩形面积护

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求

. ..........

点定位

不连通平面

Voronoi B

.....

\$51.00b

应用

扩展

总结

参考资料

- 【最近基点】: 每次询问离一个点最近的基点。
- 求出基点的 V 图后转化为点定位问题。若要在构造的 同时进行点定位,由于海滩线到达时才能确定区域, 所以很难确定询问点的先后顺序。
- 【最大空圆】:在有限空间内找一个点,使离它最近的基点最远,即最大的不包含任何基点的圆。
- 只有 V 图顶点 和 无限边与边界的交点 是候选点。(如果只卡住两点,圆心可以不断沿中垂线移动使半径增大)

经典题

矩形面积差

检测线段相

小结

半面图明

अहं तस हिं।

占定位

不连通平面

### Voronoi B

. . . . . ,

应用

Alberton.

总结

参考资料

### Delaunay 三角化

 Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角 剖分,使每个区域都是三角形, 且没有一个三角形的外接圆中 含有其他点。



董宏华

丌组

经典题

小结

平面图

अर्थ सन्ते हिंदी चीर

不连通平面

Voronoi B

V OI OI IOI

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

### Delaunay 三角化

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角 剖分,使每个区域都是三角形, 且没有一个三角形的外接圆中 含有其他点。
- 它最大化了此三角剖分中三角 形的最小角,这可以使剖出来 的三角形比较好看。



董宏华

丌组

经典题

- 46:36:31

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图号

平而图或

Links De

不连通平面

Voronoi 8

VOIOHOI E

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

## Delaunay 三角化

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角 剖分,使每个区域都是三角形, 且没有一个三角形的外接圆中 含有其他点。
- 它最大化了此三角剖分中三角 形的最小角,这可以使剖出来 的三角形比较好看。
- V 图和它互为对偶图。



小结

平面图

平面图求均

占完位

不连通平面

Voronoi 3

\$61.05

构造

护服

总结

参考资料

## Delaunay 三角化

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角 剖分,使每个区域都是三角形, 且没有一个三角形的外接圆中 含有其他点。
- 它最大化了此三角剖分中三角 形的最小角,这可以使剖出来 的三角形比较好看。



- V 图和它互为对偶图。
- 【欧式距离最小生成树】平面欧几里德距离的最小生成树的边是 Delaunay 三角化的一个子集,以此可以来优化。

经典是

46 FK mi #0

检测线段相对

小结

平面图

W 22 (6) -1-

Josepha Do

不连通平面

Voronoi 图

V OI OI IOI

定义

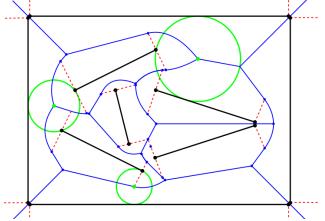
构造

扩展

总结

参考资料

线段的 V 图?



红典型

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求

不连通平面

Voronoi 🛚

定义

构造

301.00

总结

参考资料

扫描线算法在计算几何中是一个比较有用的算法。 但由于要高效地维护扫描线的状态,往往需要高级数据结

在 OI 中可尽量使用 STL 来简化代码。

构(如线段树、平衡树等)。

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

T 140 100 100 100 100

Voronoi 图

11.00

应用

扩展

总结

参考资料

# Thanks for listening!

Email address: dhh1995@163.com

**红**典越

矩形面积并

1E03584X1E

小结

半面图

平面图求

不连诵平而

Voronoi 🛭

定义

构造

扩展

总结

参考资料

Wiki , Sweep line algorithm

Wiki , Bentley–Ottmann algorithm

Wiki , Fortune's algorithm

Wiki , Voronoi diagram

Wiki , Delaunay triangulation

Thomas H. Cormen/ Charles E. Leiserson/ Ronald L.

Rivest/ Clifford Stein , Introduction to Algorithms  $_{\circ}$ 

钱桥,平面图的处理方法, WC 2013 讲课。

刘汝佳,几何与暴力法专题, WC 2013 讲课。

陈立杰,可持久化数据结构研究,国家集训队 2012 作业。

Seiyagoo 的博客中关于 Voronoi diagram 的文章

kreveld more voronoi.pdf