

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

绍兴市第一中学

2014 年 2 月 9 日

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?
- A: 顾名思义，是一条按某种顺序从一侧扫到另一侧的线。在二维平面上，通常是一条假想的从左向右移动的垂直的线。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?
- A: 顾名思义，是一条按某种顺序从一侧扫到另一侧的线。在二维平面上，通常是一条假想的从左向右移动的垂直的线。
- Q: 它有什么性质呢?

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 扫描线是什么呢?
- A: 顾名思义，是一条按某种顺序从一侧扫到另一侧的线。在二维平面上，通常是一条假想的从左向右移动的垂直的线。
- Q: 它有什么性质呢?
- A: 将所扫描的集合分为三个部分：已经扫过的、正在线上的、还未扫过的。正在线上那部分是关键，往往使用数据结构来维护扫描线上的状态。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 怎么维护状态呢?

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 怎么维护状态呢?
- A: 虽然状态看上去会随着线的不断移动而不断变化，但实际上，发生重大改变的次数是有限的，其余时间都是在微调，这些微调是可以通过计算得到的。把发生重大改变的点称为事件点，扫描过程中只会在事件点处停顿。同时，要按扫描的顺序维护事件点序列。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 怎么维护状态呢?
- A: 虽然状态看上去会随着线的不断移动而不断变化, 但实际上, 发生重大改变的次数是有限的, 其余时间都是在微调, 这些微调是可以通过计算得到的。把发生重大改变的点称为事件点, 扫描过程中只会在事件点处停顿。同时, 要按扫描的顺序维护事件点序列。
- Q: 它有什么应用呢?

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- Q: 怎么维护状态呢?
- A: 虽然状态看上去会随着线的不断移动而不断变化, 但实际上, 发生重大改变的次数是有限的, 其余时间都是在微调, 这些微调是可以通过计算得到的。把发生重大改变的点称为事件点, 扫描过程中只会在事件点处停顿。同时, 要按扫描的顺序维护事件点序列。
- Q: 它有什么应用呢?
- A: 接下来你就会看到它在计算几何中的应用了。

二维数点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

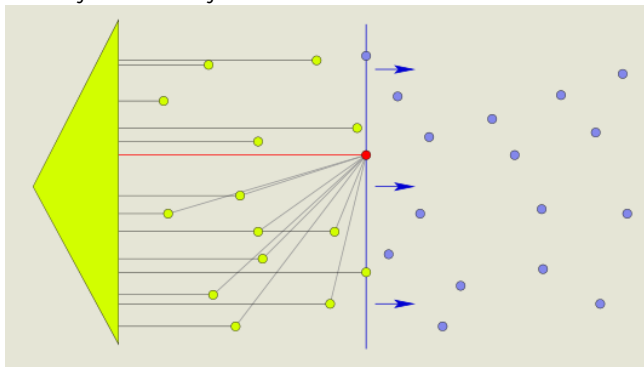
应用

扩展

总结

参考资料

【题意简述】二维平面内，给出 n 个初始点 (x_i, y_i) ， m 次询问，每次询问一个点 (p_j, q_j) 左下方（即满足 $x_i \leq p_j$ 且 $y_i \leq q_j$ ）的点数。



二维数点

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起，按 x 坐标为第一关键字， y 坐标为第二关键字（都相同时询问靠后）从小到大排序，这些点就是事件点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

二维数点

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起，按 x 坐标为第一关键字， y 坐标为第二关键字（都相同时询问靠后）从小到大排序，这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线（也就是刚才那幅图中蓝色的线）从左到右依次扫过去，只会在事件点处停顿。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

二维数点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起，按 x 坐标为第一关键字， y 坐标为第二关键字（都相同时询问靠后）从小到大排序，这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线（也就是刚才那幅图中蓝色的线）从左到右依次扫过去，只会在事件点处停顿。
- 扫到初始点，说明它肯定位于之后询问点的左侧，需要把它放入容器内，便于询问时的计数，容器内保持 y 坐标从小到大的顺序。

二维数点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起，按 x 坐标为第一关键字， y 坐标为第二关键字（都相同时询问靠后）从小到大排序，这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线（也就是刚才那幅图中蓝色的线）从左到右依次扫过去，只会在事件点处停顿。
- 扫到初始点，说明它肯定位于之后询问点的左侧，需要把它放入容器内，便于询问时的计数，容器内保持 y 坐标从小到大的顺序。
- 扫到询问点时，只有容器内的初始点在其左侧，统计容器内位于其下方的点数。

二维数点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 首先将 n 个初始点和 m 个询问点放在一起，按 x 坐标为第一关键字， y 坐标为第二关键字（都相同时询问靠后）从小到大排序，这些点就是事件点。
- 现在假想有一条垂直的线（也就是刚才那幅图中蓝色的线）从左到右依次扫过去，只会在事件点处停顿。
- 扫到初始点，说明它肯定位于之后询问点的左侧，需要把它放入容器内，便于询问时的计数，容器内保持 y 坐标从小到大的顺序。
- 扫到询问点时，只有容器内的初始点在其左侧，统计容器内位于其下方的点数。
- 若用 树状数组/线段树/平衡树 来充当这个容器的话，复杂度为 $O((n + m) \log(n + m))$ 。

矩形面积并

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

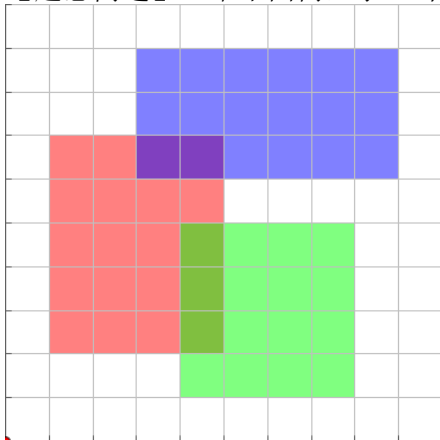
应用

扩展

总结

参考资料

【题意简述】二维平面内，求 n 个矩形的并的面积。



矩形面积并

- 所有矩形的左右边界为事件点，将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间，扫描线被覆盖的长度不变，面积可以表示为总长 \times 宽。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

矩形面积并

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点，将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间，扫描线被覆盖的长度不变，面积可以表示为总长 \times 宽。
- 遇到矩形左边界，则这一区间的覆盖次数 $+1$ 。

矩形面积并

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点，将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间，扫描线被覆盖的长度不变，面积可以表示为总长 \times 宽。
- 遇到矩形左边界，则这一区间的覆盖次数 $+1$ 。
- 遇到矩形右边界，则这一区间的覆盖次数 -1 。

矩形面积并

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点，将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间，扫描线被覆盖的长度不变，面积可以表示为总长 \times 宽。
- 遇到矩形左边界，则这一区间的覆盖次数 $+1$ 。
- 遇到矩形右边界，则这一区间的覆盖次数 -1 。
- 相邻事件点之间，所有覆盖次数非 0 的区间都要计算面积。

矩形面积并

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点，将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间，扫描线被覆盖的长度不变，面积可以表示为总长 \times 宽。
- 遇到矩形左边界，则这一区间的覆盖次数 $+1$ 。
- 遇到矩形右边界，则这一区间的覆盖次数 -1 。
- 相邻事件点之间，所有覆盖次数非 0 的区间都要计算面积。
- 问题转化为区间 $+1, -1$ ，询问非 0 部分长度。由于 -1 总在 $+1$ 之后，不会出现不够减的情况，所以可以直接用线段树维护区间的覆盖次数和覆盖的总长度。

矩形面积并

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 所有矩形的左右边界为事件点，将这些事件点按 x 坐标排序。在相邻事件点之间，扫描线被覆盖的长度不变，面积可以表示为总长 \times 宽。
- 遇到矩形左边界，则这一区间的覆盖次数 $+1$ 。
- 遇到矩形右边界，则这一区间的覆盖次数 -1 。
- 相邻事件点之间，所有覆盖次数非 0 的区间都要计算面积。
- 问题转化为区间 $+1, -1$ ，询问非 0 部分长度。由于 -1 总在 $+1$ 之后，不会出现不够减的情况，所以可以直接用线段树维护区间的覆盖次数和覆盖的总长度。
- 将坐标离散后复杂度为 $O(n \log n)$ 。

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

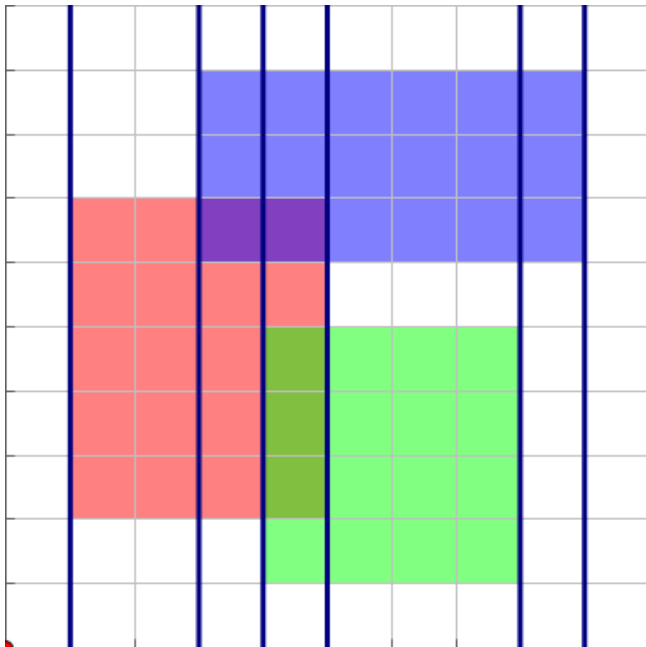
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

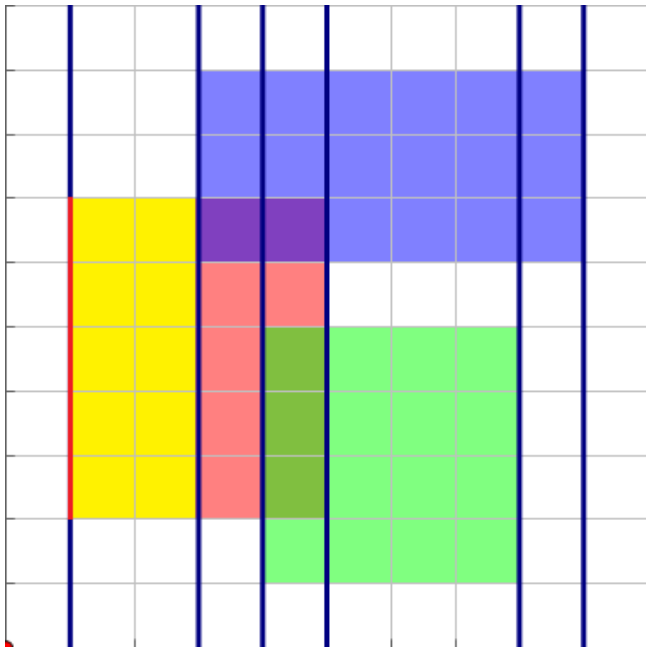
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

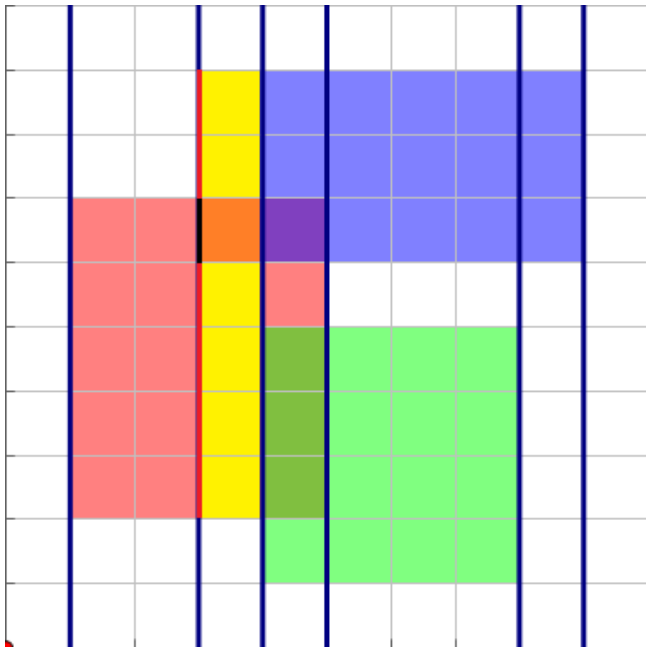
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

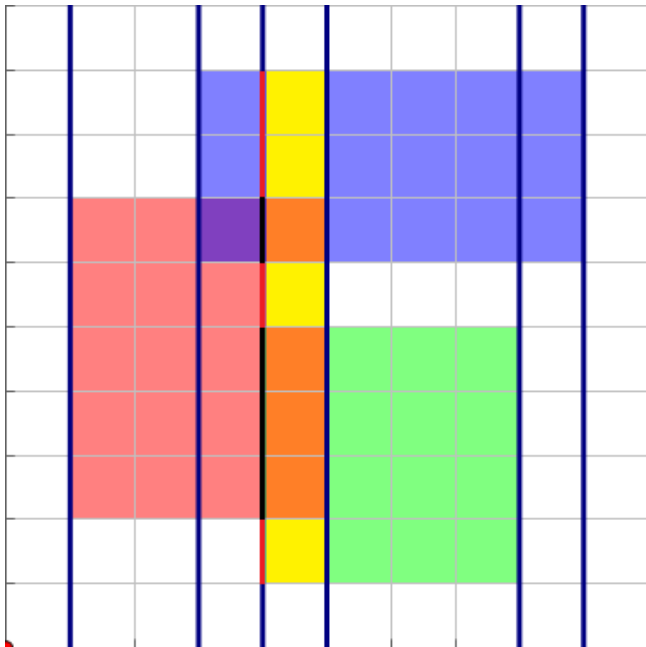
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

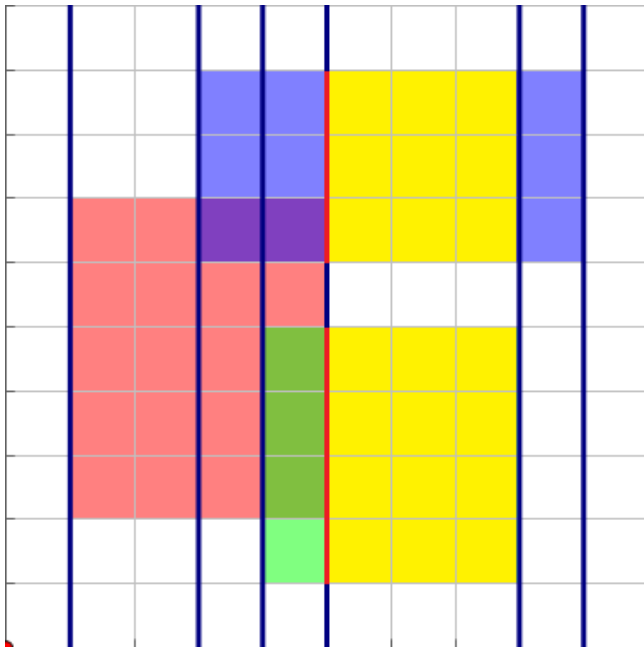
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

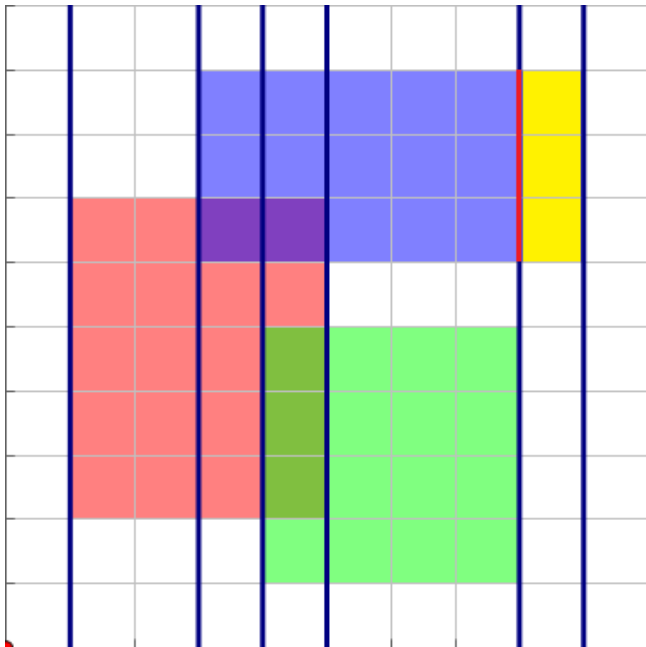
构造

应用

扩展

总结

参考资料



检测线段相交

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

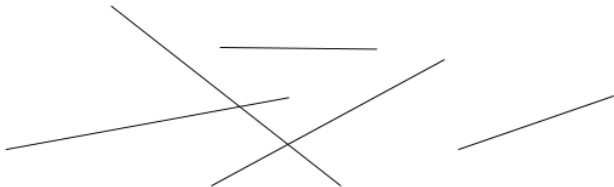
应用

扩展

总结

参考资料

【题意简述】给出平面内 n 条线段，判断是否存在线段相交。



检测线段相交

- 假设没有垂直的线段（可通过整体转角度，或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决）和三点共线。先将线段有向化，左侧点为起点，右侧点为终点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

检测线段相交

- 假设没有垂直的线段（可通过整体转角度，或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决）和三点共线。先将线段有向化，左侧点为起点，右侧点为终点。
- 线段的起点和终点为事件点，将其按 x 坐标排序，然后扫描过去，按扫描线上交点的上下顺序，用平衡树维护还与当前扫描线相交的线段序列。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

检测线段相交

- 假设没有垂直的线段（可通过整体转角度，或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决）和三点共线。先将线段有向化，左侧点为起点，右侧点为终点。
- 线段的起点和终点为事件点，将其按 x 坐标排序，然后扫描过去，按扫描线上交点的上下顺序，用平衡树维护还与当前扫描线相交的线段序列。
- 遇到一个线段的起点，则需要将这个线段插入平衡树，而最有可能和它相交的是他的上下方两条线段，所以在这时判断一下是否产生了相交。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

检测线段相交

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 假设没有垂直的线段（可通过整体转角度，或把 y 坐标作为第二关键字比较来解决）和三点共线。先将线段有向化，左侧点为起点，右侧点为终点。
- 线段的起点和终点为事件点，将其按 x 坐标排序，然后扫描过去，按扫描线上交点的上下顺序，用平衡树维护还与当前扫描线相交的线段序列。
- 遇到一个线段的起点，则需要将这个线段插入平衡树，而最有可能和它相交的是他的上下方两条线段，所以在这时判断一下是否产生了相交。
- 遇到一个线段的终点，则需要将这个线段从平衡树中删除，而这可能导致上下方两条线段变为相邻了，相邻线段都有可能相交，所以在这时需要判断。

正确性证明

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

正确性证明

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。
- 在出现相交之前，扫描线上的线段顺序不会改变。由于是最早相交的一对，所以在这之前线段顺序是正确的。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

正确性证明

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。
- 在出现相交之前，扫描线上的线段顺序不会改变。由于是最早相交的一对，所以在这之前线段顺序是正确的。
- 假设最早相交的两线段在之前任何时刻都不在扫描线上相邻，那么在这两线段相交之前都存在一条线段在它们中间。那么等到他们相交时，中间的线段将“无路可走”，至少和其中一条相交，且一定在这之前。所以假设不成立。

正确性证明

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 上述算法正确性基于最早相交的一对线段在之前某一时刻的扫描线上一定是相邻的。
- 在出现相交之前，扫描线上的线段顺序不会改变。由于是最早相交的一对，所以在这之前线段顺序是正确的。
- 假设最早相交的两线段在之前任何时刻都不在扫描线上相邻，那么在这两线段相交之前都存在一条线段在它们中间。那么等到他们相交时，中间的线段将“无路可走”，至少和其中一条相交，且一定在这之前。所以假设不成立。
- 存在三点共线时，有可能两线段最早相交但之前不相邻，但这个交点可由其他线段检测到。

求所有交点

- 如果要求出所有交点呢？

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

求所有交点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢？
- 改进上述算法，在求到一个交点后，把该交点位置也作为事件点，并用优先队列维护，在遇到该交点时，交换平衡树中这两条线段的位置（删除两个，插入两个，插入后要与相邻线段求交）。

求所有交点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢？
- 改进上述算法，在求到一个交点后，把该交点位置也作为事件点，并用优先队列维护，在遇到该交点时，交换平衡树中这两条线段的位置（删除两个，插入两个，插入后要与相邻线段求交）。
- 那如果出现至少三线共点呢？

求所有交点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢？
- 改进上述算法，在求到一个交点后，把该交点位置也作为事件点，并用优先队列维护，在遇到该交点时，交换平衡树中这两条线段的位置（删除两个，插入两个，插入后要与相邻线段求交）。
- 那如果出现至少三线共点呢？
- 在那一点时，所有涉及到的线段要变为逆序，一起处理（全部删除，全部插入）。

求所有交点

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 如果要求出所有交点呢？
- 改进上述算法，在求到一个交点后，把该交点位置也作为事件点，并用优先队列维护，在遇到该交点时，交换平衡树中这两条线段的位置（删除两个，插入两个，插入后要与相邻线段求交）。
- 那如果出现至少三线共点呢？
- 在那一点时，所有涉及到的线段要变为逆序，一起处理（全部删除，全部插入）。
- 复杂度为 $O((n + k) \log n)$ ，其中 k 为交点个数。

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

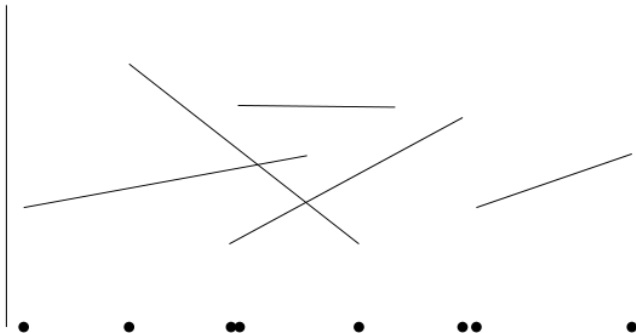
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

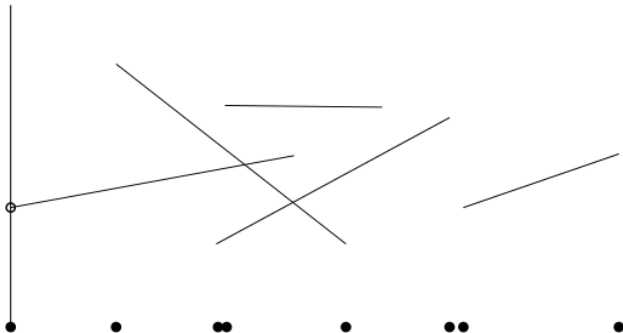
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

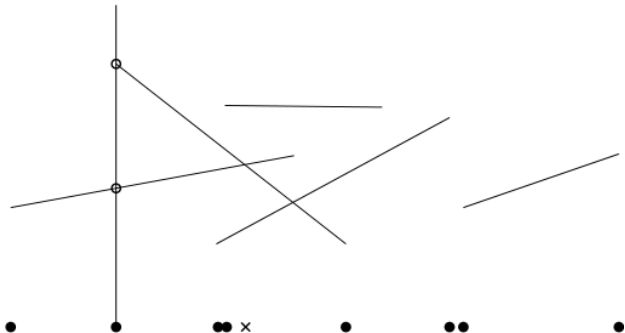
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

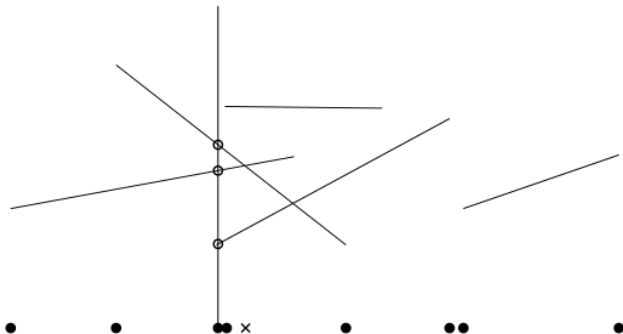
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

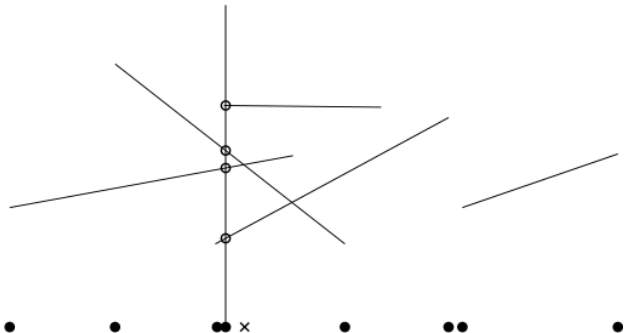
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

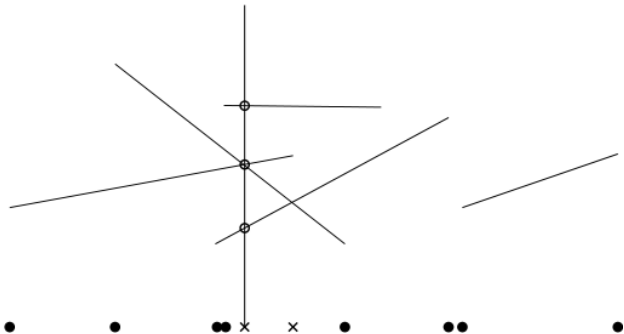
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何
中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

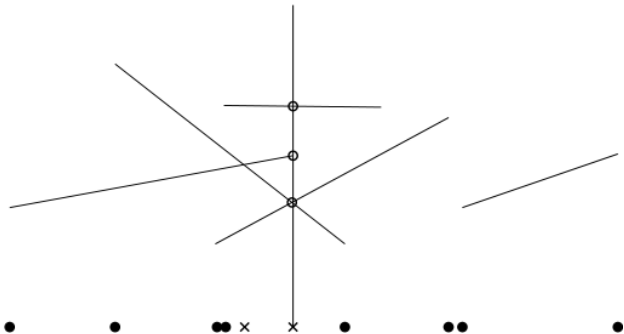
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

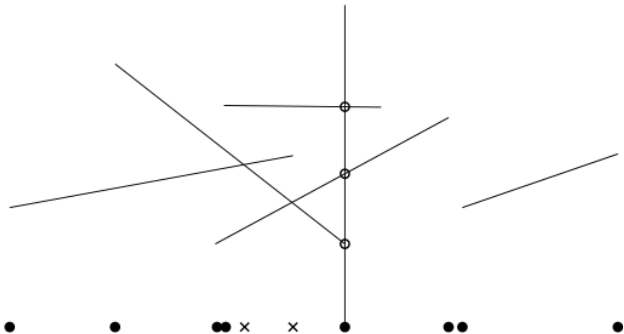
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

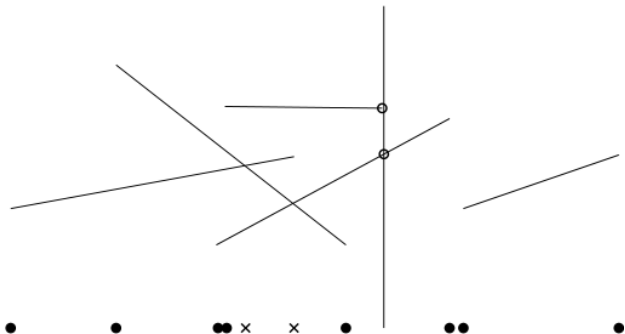
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

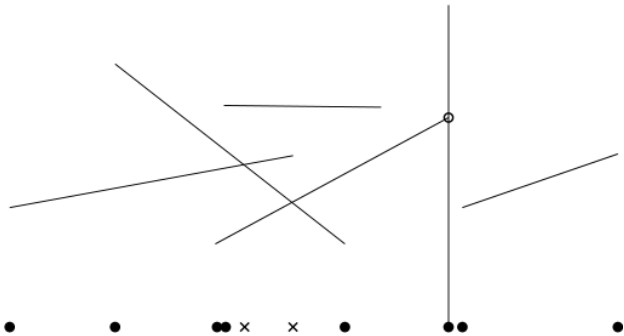
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何
中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

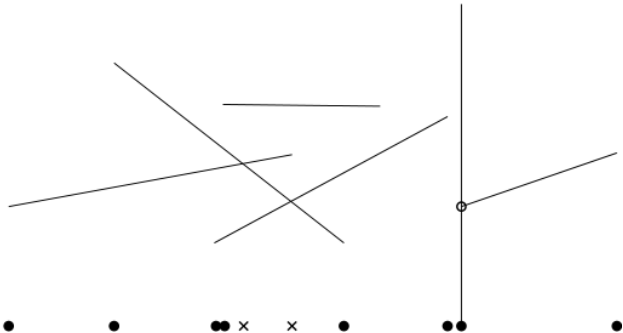
构造

应用

扩展

总结

参考资料



扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

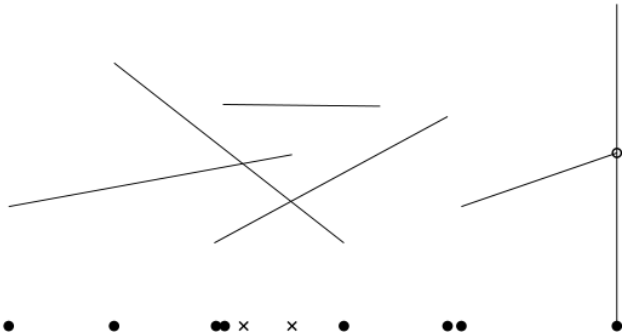
构造

应用

扩展

总结

参考资料



小结

- 在二维数点问题中，扫描线算法利用了已经扫过的点、当前事件点、还未扫过的点的大小关系，简化了题目的条件，并在数据结构的帮助下解决了问题。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 在二维数点问题中，扫描线算法利用了已经扫过的点、当前事件点、还未扫过的点的大小关系，简化了题目的条件，并在数据结构的帮助下解决了问题。
- 在矩形面积并问题中，扫描线算法利用相邻事件点之间扫描线被覆盖长度不变的性质，将总面积化为了多块矩形面积之和。

- 在二维数点问题中，扫描线算法利用了已经扫过的点、当前事件点、还未扫过的点的大小关系，简化了题目的条件，并在数据结构的帮助下解决了问题。
- 在矩形面积并问题中，扫描线算法利用相邻事件点之间扫描线被覆盖长度不变的性质，将总面积化为了多块矩形面积之和。
- 在检测线段相交问题中，扫描线算法利用了相邻事件点之间线段的上下顺序不改变的性质，用平衡树维护了扫描线上的状态。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

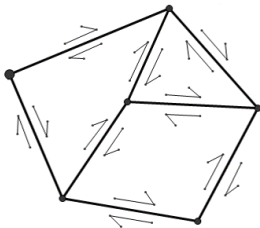
应用

扩展

总结

参考资料

■ 什么是平面图呢？



平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

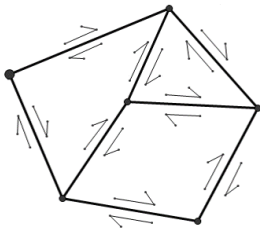
应用

扩展

总结

参考资料

- 什么是平面图呢？
- 若图 G 可画在平面上，使得任意两条边都不会在非端点处相交，则称 G 是平面图。



平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

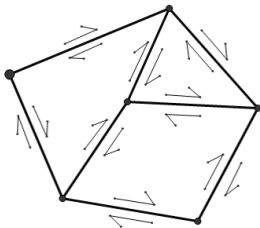
应用

扩展

总结

参考资料

- 什么是平面图呢？
- 若图 G 可画在平面上，使得任意两条边都不会在非端点处相交，则称 G 是平面图。
- 接下来的问题中默认平面图的端点坐标已经给出。



平面图求域

- 先假设平面图是连通的。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

平面图求域

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域，且每个域的有向边刚好绕了一圈。

平面图求域

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域，且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。

平面图求域

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域，且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。
- 从一条未访问的有向边出发，在当前边终点处选择当前边的反向边的顺时针下一条边，重复这个过程，直到返回出发的边为止。

平面图求域

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域，且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。
- 从一条未访问的有向边出发，在当前边终点处选择当前边的反向边的顺时针下一条边，重复这个过程，直到返回出发的边为止。
- 一次循环中经过的边组成一个新的域，这个域位于这些有向边的左侧。

平面图求域

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先假设平面图是连通的。
- 把每条无向边拆成两条有向边。则每条有向边恰好属于一个域，且每个域的有向边刚好绕了一圈。
- 把从每个顶点出发的所有有向边按极角排序。也可所有边按极角排序后依次加入顶点的链表。
- 从一条未访问的有向边出发，在当前边终点处选择当前边的反向边的顺时针下一条边，重复这个过程，直到返回出发的边为止。
- 一次循环中经过的边组成一个新的域，这个域位于这些有向边的左侧。
- 注意无限域，它的边绕行方向和其他域不同，可以通过叉积求得的面积的正负来判断。

点定位

- 点定位，即求询问点在平面图中的哪个域内。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

点定位

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 点定位，即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域，从而得到每条线段下侧对应的域。

点定位

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 点定位，即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域，从而得到每条线段下侧对应的域。
- 由于平面图中除端点外没有其他交点，所以各线段的相对顺序在扫描过程中不会改变。

点定位

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 点定位，即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域，从而得到每条线段下侧对应的域。
- 由于平面图中除端点外没有其他交点，所以各线段的相对顺序在扫描过程中不会改变。
- 那么直接类似检测线段相交时的做法，用平衡树来维护与当前扫描线有交的线段的上下顺序（要注意在端点时线段的上下顺序）。

点定位

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 点定位，即求询问点在平面图中的哪个域内。
- 先求出平面图所有域，从而得到每条线段下侧对应的域。
- 由于平面图中除端点外没有其他交点，所以各线段的相对顺序在扫描过程中不会改变。
- 那么直接类似检测线段相交时的做法，用平衡树来维护与当前扫描线有交的线段的上下顺序（要注意在端点时线段的上下顺序）。
- 扫描到需要定位的点时，求出其上方第一条线段，该线段下侧对应的域就是需要定位的点所在的域。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 上述扫描线算法是离线的，而在应用中一般都需要在线，这怎么办呢？

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 上述扫描线算法是离线的，而在应用中一般都需要在线，这怎么办呢？
- 维护扫描线状态用的是平衡树，而可持久化平衡树（详见参考资料）为该算法转在线提供了可能。

不连通平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 注意，刚才求域时我们假设平面图连通，那如果不连通呢？

不连通平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

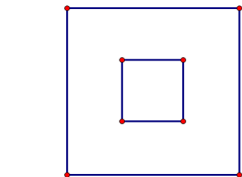
应用

扩展

总结

参考资料

- 注意，刚才求域时我们假设平面图连通，那如果不连通呢？



不连通平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

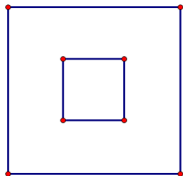
应用

扩展

总结

参考资料

- 注意，刚才求域时我们假设平面图连通，那如果不连通呢？



-
- 通过上述算法，无法得到图中的圆环域，也无法得到这个域与中心方块域相邻的关系。

不连通平面图

- 那如果事先将两部分连起来呢？

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

不连通平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

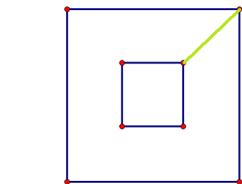
平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

- 那如果事先将两部分连起来呢？



Voronoi 图

定义

构造

应用

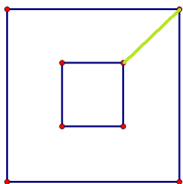
扩展

总结

参考资料

不连通平面图

- 那如果事先将两部分连起来呢？



- 添加这条边之后：平面图中域的数量不变。

不连通平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

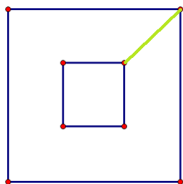
应用

扩展

总结

参考资料

- 那如果事先将两部分连起来呢？



-
- 添加这条边之后：平面图中域的数量不变。
- 而这两部分从不连通变为连通了。

不连通平面图

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

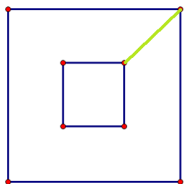
应用

扩展

总结

参考资料

- 那如果事先将两部分连起来呢？



-
- 添加这条边之后：平面图中域的数量不变。
- 而这两部分从不连通变为连通了。
- 如果可以找到这样的一些边把整个图连起来，那就可以继续使用最开始的平面图求域的方法了。

使其连通

- 先遍历整张图，求出每个连通块。对于每个连通块，找到其纵坐标最大的点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

使其连通

- 先遍历整张图，求出每个连通块。对于每个连通块，找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线，那么射线不会和它所在的连通块相交，只会和其他连通块相交。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

使其连通

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先遍历整张图，求出每个连通块。对于每个连通块，找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线，那么射线不会和它所在的连通块相交，只会和其他连通块相交。
- 用扫描线算法可以求出该射线上第一个交点，然后把交点所在边剖成两条，并新增这条垂直的边，维护其平面图性质。

使其连通

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先遍历整张图，求出每个连通块。对于每个连通块，找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线，那么射线不会和它所在的连通块相交，只会和其他连通块相交。
- 用扫描线算法可以求出该射线上第一个交点，然后把交点所在边剖成两条，并新增这条垂直的边，维护其平面图性质。
- 假设最上方有一条无限长的线，所有和原图没有交点的射线都会和这条线相交，这样整张图就连通了。

使其连通

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 先遍历整张图，求出每个连通块。对于每个连通块，找到其纵坐标最大的点。
- 如果从每个连通块中纵坐标最大的点往上作射线，那么射线不会和它所在的连通块相交，只会和其他连通块相交。
- 用扫描线算法可以求出该射线上第一个交点，然后把交点所在边剖成两条，并新增这条垂直的边，维护其平面图性质。
- 假设最上方有一条无限长的线，所有和原图没有交点的射线都会和这条线相交，这样整张图就连通了。
- 有兴趣的可以去尝试下 [Rujia Liu's Present 4](#) 中的 [\[uva12310\]Point Location](#)

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

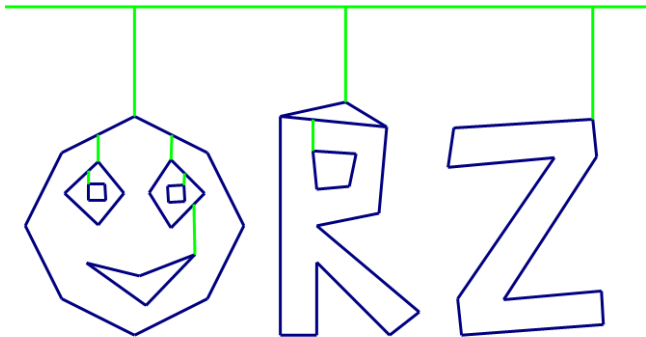
构造

应用

扩展

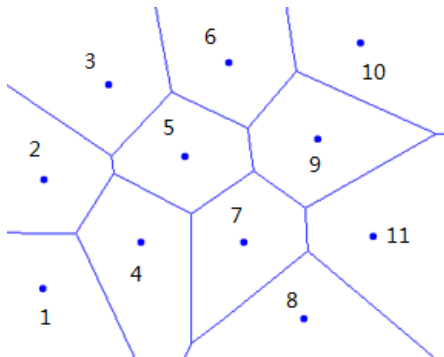
总结

参考资料



Voronoi 图

给出一些基点，将平面上所有点划给距离最近的基点，这样划分产生的图就是 Voronoi 图。



V 图中每个基点构成一个域，且为平面图，所以其点数和边数都是 $O(\text{域数})$ 的。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 扫描线从左到右扫描，平面区域内任何到基点和扫描线的距离相等的点构成一条抛物线，当前仍存在的若干段抛物线组成海滩线 (beach line)，这条线左侧区域的归属已经可以确定。

构造

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 扫描线从左到右扫描，平面区域内任何到基点和扫描线的距离相等的点构成一条抛物线，当前仍存在的若干段抛物线组成海滩线 (beach line)，这条线左侧区域的归属已经可以确定。
- 相邻抛物线之间的交点称为断点 (break point)。因为断点到相邻两个基点的距离一直相等，所以每一时刻每个断点都落在 V 图的某条边上（对应两点的中垂线上），所有断点的轨迹合起来就是待构造的 V 图。

- 扫描线从左到右扫描，平面区域内任何到基点和扫描线的距离相等的点构成一条抛物线，当前仍存在的若干段抛物线组成海滩线 (beach line)，这条线左侧区域的归属已经可以确定。
- 相邻抛物线之间的交点称为断点 (break point)。因为断点到相邻两个基点的距离一直相等，所以每一时刻每个断点都落在 V 图的某条边上（对应两点的中垂线上），所有断点的轨迹合起来就是待构造的 V 图。
- 有两类事件点：基点和 V 图的顶点，其中 V 图顶点需要在扫描过程中求。基点对应产生新的抛物线，而 V 图顶点对应旧的抛物线消失。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线，抛物线经常变动，但维护对应基点序列还是可行的，同时还可以知道所有断点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线，抛物线经常变动，但维护对应基点序列还是可行的，同时还可以知道所有断点。
- 抛物线消失处是 V 图顶点，也就是相邻断点重合，要实时维护相邻断点的重合点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线，抛物线经常变动，但维护对应基点序列还是可行的，同时还可以知道所有断点。
- 抛物线消失处是 V 图顶点，也就是相邻断点重合，要实时维护相邻断点的重合点。
- 但这个点在海滩线到达时才有效，也就是扫描线达到 该点 x 坐标 + 涉及到的基点到它的距离 时。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 现在问题变为如何维护海滩线，抛物线经常变动，但维护对应基点序列还是可行的，同时还可以知道所有断点。
- 抛物线消失处是 V 图顶点，也就是相邻断点重合，要实时维护相邻断点的重合点。
- 但这个点在海滩线到达时才有效，也就是扫描线达到该点 x 坐标 + 涉及到的基点到它的距离 时。
- 用优先队列来维护事件点序列。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到新基点 p 时，找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q ，设其上方为 r ，下方为 s 。利用断点二分，判断断点对应的射线上 y 坐标为 y_p 的点是否在海滩线左侧（即比较到对应基点和扫描线的距离）。

构造

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到新基点 p 时，找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q ，设其上方为 r ，下方为 s 。利用断点二分，判断断点对应的射线上 y 坐标为 y_p 的点是否在海滩线左侧（即比较到对应基点和扫描线的距离）。
- 产生新的抛物线，最开始时为一条水平的线将原抛物线切成两半，并产生两个断点，随后逐渐展开。

构造

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到新基点 p 时，找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q ，设其上方为 r ，下方为 s 。利用断点二分，判断断点对应的射线上 y 坐标为 y_p 的点是否在海滩线左侧（即比较到对应基点和扫描线的距离）。
- 产生新的抛物线，最开始时为一条水平的线将原抛物线切成两半，并产生两个断点，随后逐渐展开。
- 对基点序列的影响是： q 一分为二， p 插入其中。对断点序列的影响是：新增了 (q, p) 和 (p, q) ，注意这是有序对，分别对应了两条方向相反的射线。

构造

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到新基点 p 时，找到海滩线上 y 坐标相同点所属区域的基点 q ，设其上方为 r ，下方为 s 。利用断点二分，判断断点对应的射线上 y 坐标为 y_p 的点是否在海滩线左侧（即比较到对应基点和扫描线的距离）。
- 产生新的抛物线，最开始时为一条水平的线将原抛物线切成两半，并产生两个断点，随后逐渐展开。
- 对基点序列的影响是： q 一分为二， p 插入其中。对断点序列的影响是：新增了 (q, p) 和 (p, q) ，注意这是有序对，分别对应了两条方向相反的射线。
- 修改后相邻断点情况发生变化，要从事件点序列中删去 $\langle (r, q), (q, s) \rangle$ ，并新增 $\langle (r, q), (q, p) \rangle$ 和 $\langle (p, q), (q, s) \rangle$ 。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到 V 图顶点时，得到对应的断点为 $< (q, r), (r, s) >$ ，设 q 上方为 u ， s 下方为 v 。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到 V 图顶点时，得到对应的断点为 $< (q, r), (r, s) >$ ，设 q 上方为 u ， s 下方为 v 。
- 说明 r 对应的抛物线将要消失，将其从基点序列中删除，那么断点 $(q, r), (r, s)$ 变为 (q, s) 。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 遇到 V 图顶点时，得到对应的断点为 $\langle (q, r), (r, s) \rangle$ ，设 q 上方为 u ， s 下方为 v 。
- 说明 r 对应的抛物线将要消失，将其从基点序列中删除，那么断点 $(q, r), (r, s)$ 变为 (q, s) 。
- 从事件点序列中删去 $\langle (u, q), (q, r) \rangle$ 和 $\langle (r, s), (s, v) \rangle$ ，并新增 $\langle (u, q), (q, s) \rangle$ 和 $\langle (q, s), (s, v) \rangle$ 。

- 遇到 V 图顶点时，得到对应的断点为 $\langle (q, r), (r, s) \rangle$ ，设 q 上方为 u ， s 下方为 v 。
- 说明 r 对应的抛物线将要消失，将其从基点序列中删除，那么断点 $(q, r), (r, s)$ 变为 (q, s) 。
- 从事件点序列中删去 $\langle (u, q), (q, r) \rangle$ 和 $\langle (r, s), (s, v) \rangle$ ，并新增 $\langle (u, q), (q, s) \rangle$ 和 $\langle (q, s), (s, v) \rangle$ 。
- 该 V 图顶点为 (q, r) 和 (r, s) 的终点，也是 (q, s) 的起点，或者说是 (s, q) 的终点。最后将所有半边的信息综合起来可以得到整个 V 图。

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料



NULL

[1]

扫描线在计算几何 中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

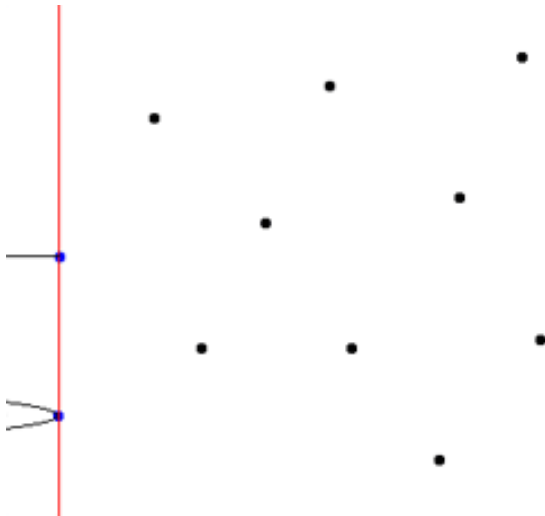
构造

应用

扩展

总结

参考资料



$(1,2)$ $(2,1)$

$[1,2,1]$

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

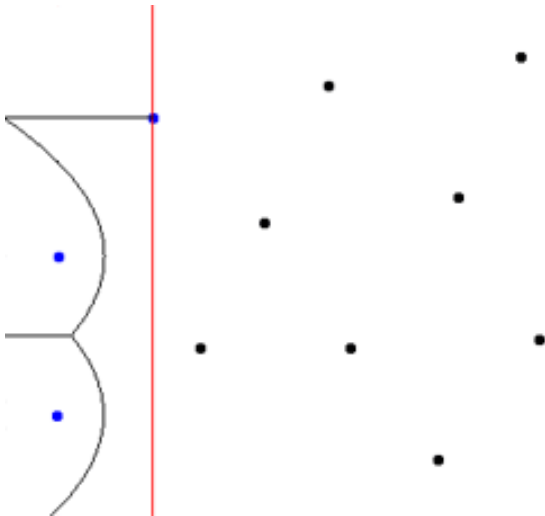
构造

应用

扩展

总结

参考资料



$(1,2)$ $(2,3)$ $(3,2)$ $(2,1)$

$[1,2,3,2,1]$

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

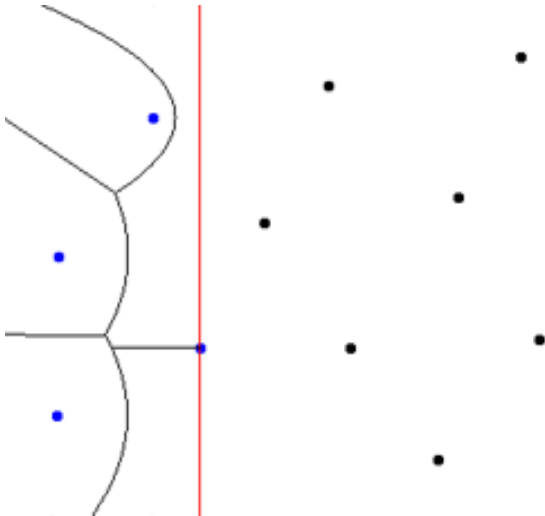
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,2) (2,1) (1,4) (4,1)

[1,2,3,2,1,4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

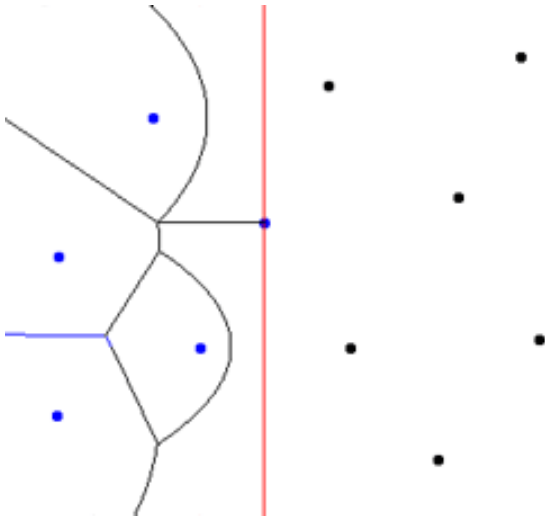
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,2) (2,5) (5,2) (2,4) (4,1)

[1,2,3,2,5,2 , 4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

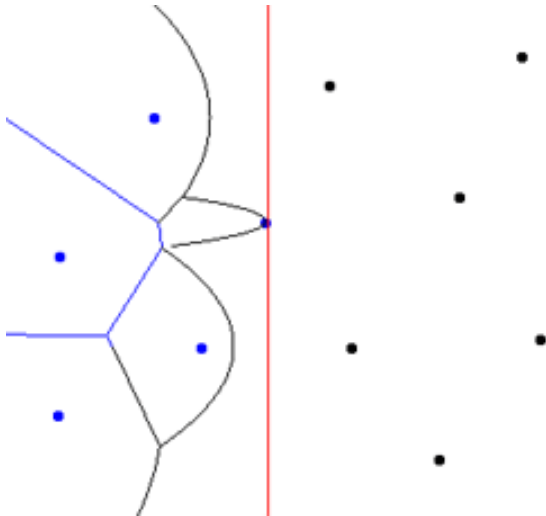
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,5) (5,4) (4,1)

[1,2,3 , 5 , 4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

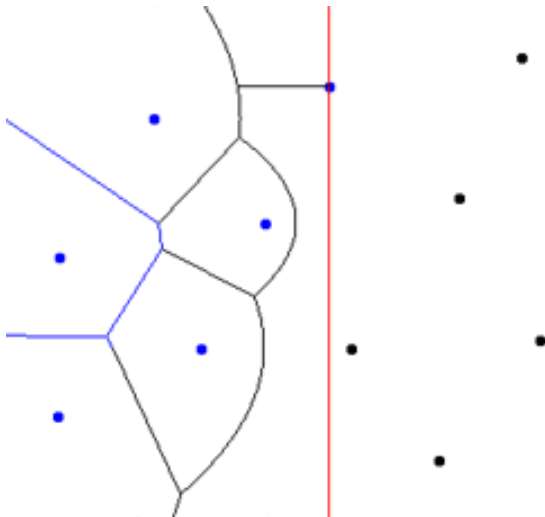
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,3) (3,5) (5,4) (4,1)

[1,2,3,6,3,5,4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

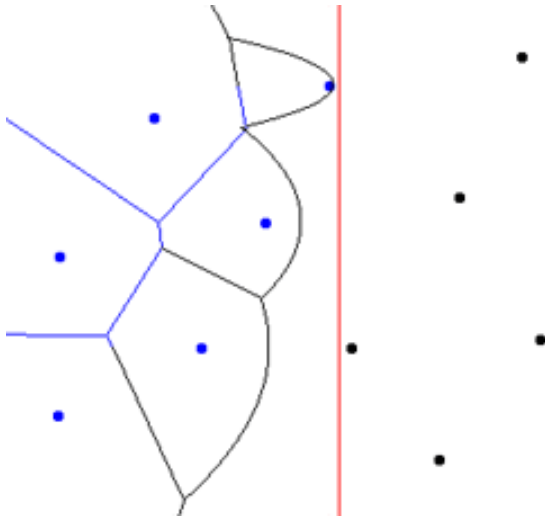
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,4) (4,1)

[1,2,3,6 , 5,4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

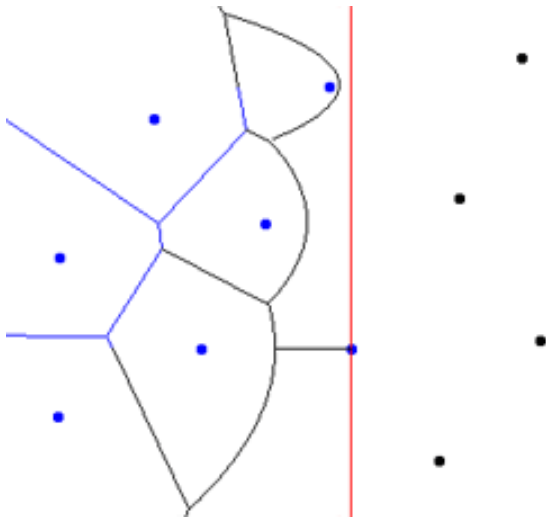
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,4) (4,7) (7,4) (4,1)

[1,2,3,6,5,4,7,4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

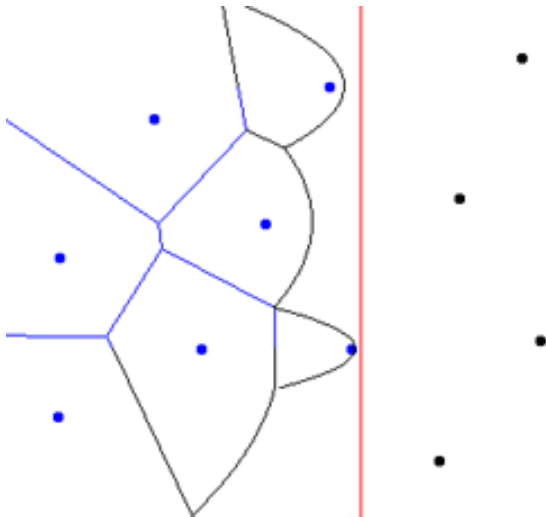
构造

应用

扩展

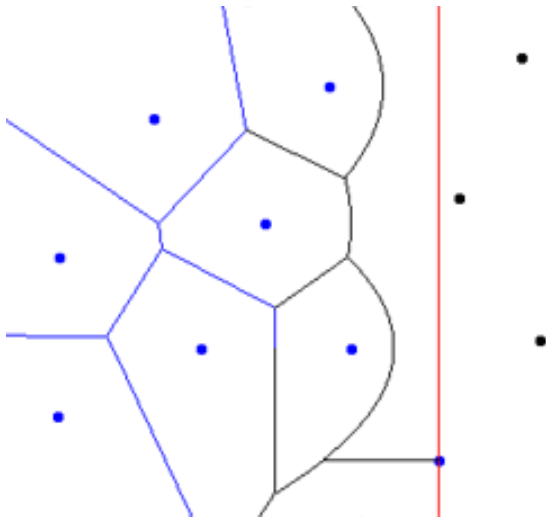
总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,7) (7,4) (4,1)

[1,2,3,6,5 , 7,4,1]



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,7) (7,8) (8,7) (7,4) (4,1)
[1,2,3,6,5,7,8,7,4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

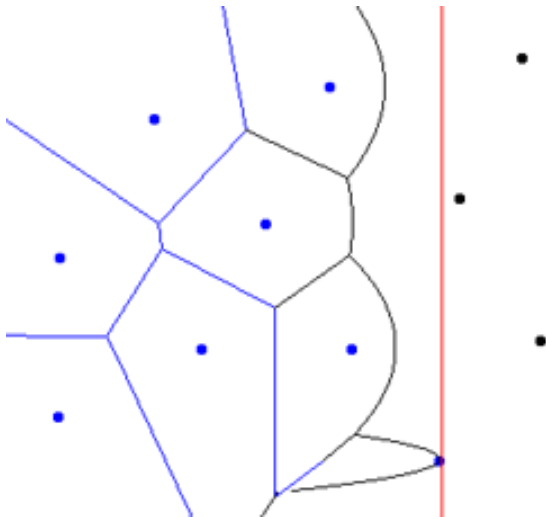
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,7) (7,8) (8,4) (4,1)

[1,2,3,6,5,7,8 , 4,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

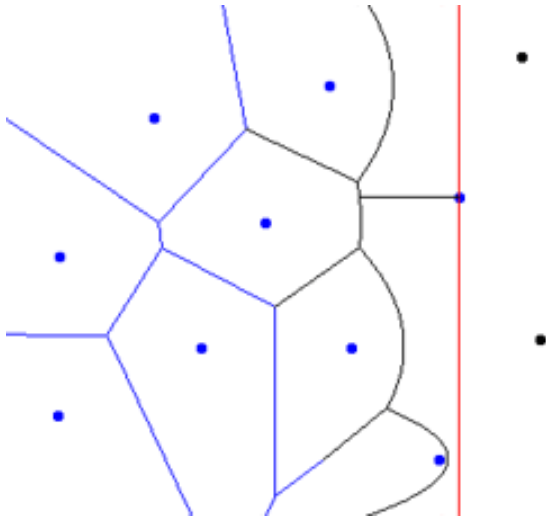
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,5) (5,9) (9,5) (5,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,5,9,5,7,8,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

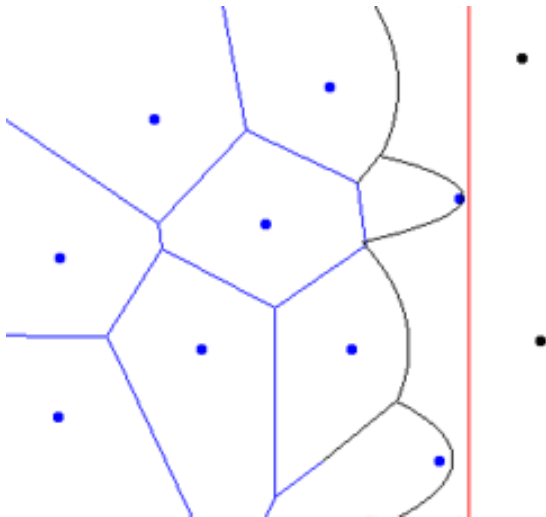
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,9) (9,5) (5,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6 , 9,5,7,8,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

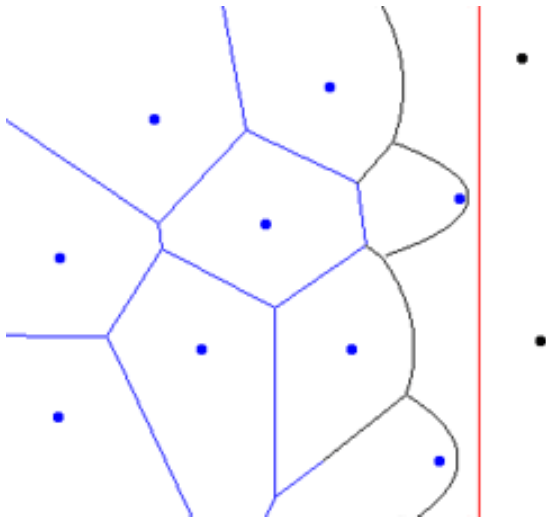
构造

应用

扩展

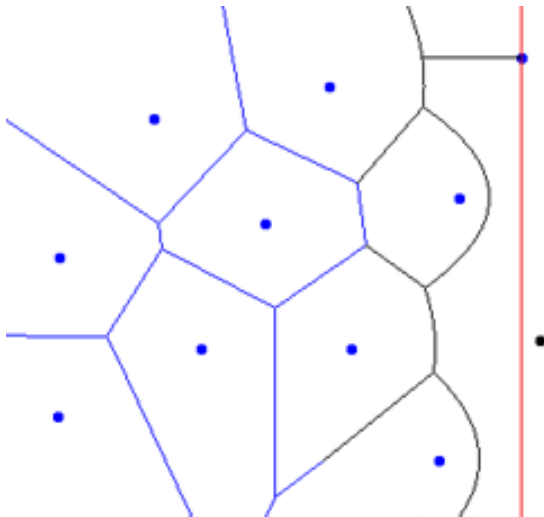
总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,9) (9,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,9 , 7,8,1]



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,6) (6,9) (9,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,10,6,9,7,8,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

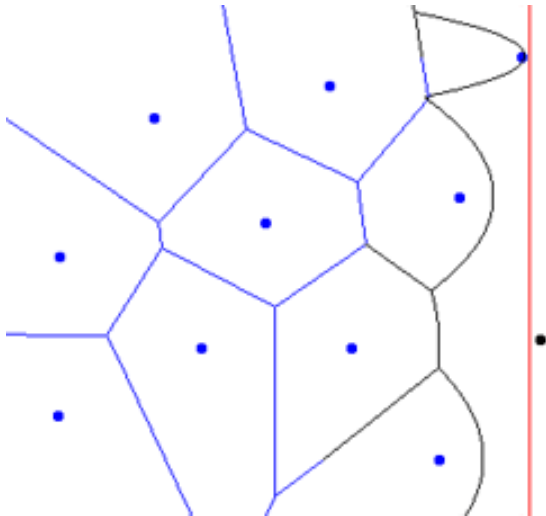
构造

应用

扩展

总结

参考资料



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,10 , 9,7,8,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

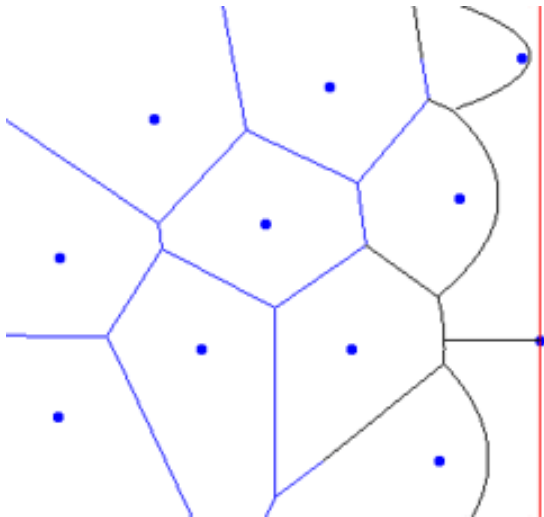
构造

应用

扩展

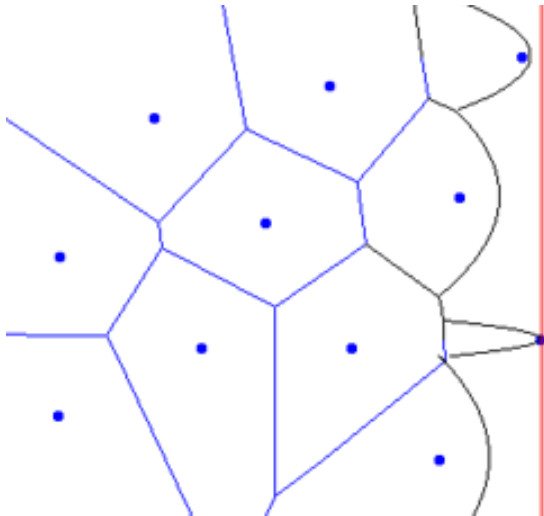
总结

参考资料

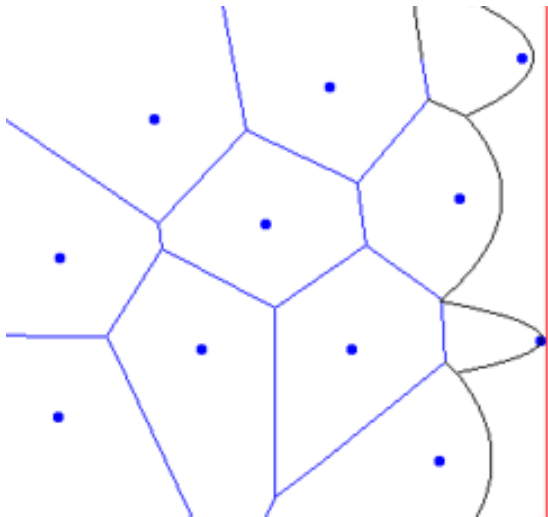


(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,7) (7,11) (11,7) (7,8) (8,1)

[1,2,3,6,10,9,7,11,7,8,1]



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,7) (7,11) (11,8) (8,1)
[1,2,3,6,10,9,7,11 , 8,1]



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,9) (9,11) (11,8) (8,1)

[1,2,3,6,10,9 , 11,8,1]

扫描线在计算几何中的应用

董宏华

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

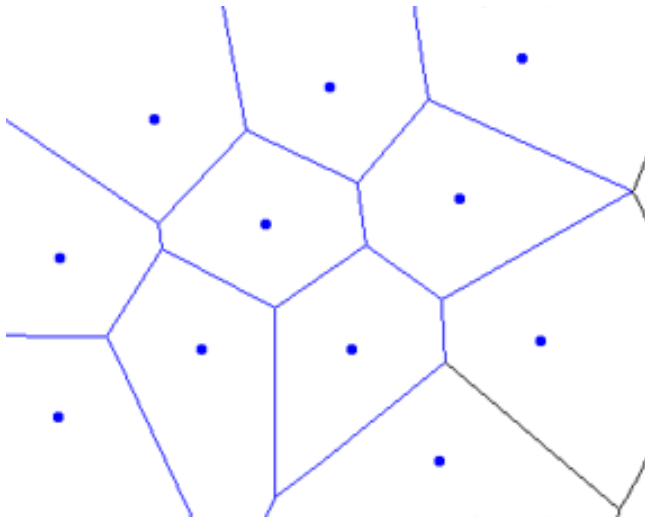
构造

应用

扩展

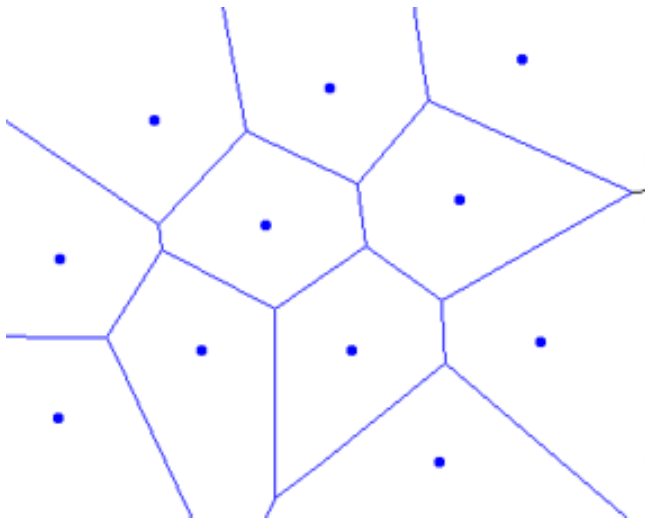
总结

参考资料



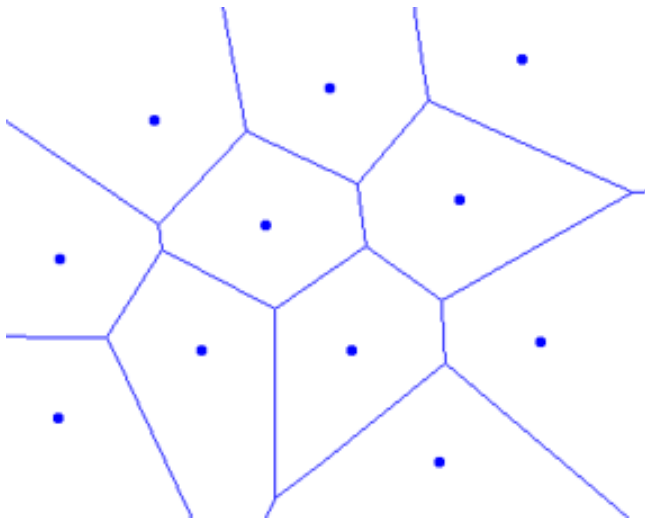
(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,11) (11,8) (8,1)

[1,2,3,6,10 , 11,8,1]



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,11) (11,8) (8,1)

[1,2,3,6,10,11,8,1]



(1,2) (2,3) (3,6) (6,10) (10,11) (11,8) (8,1)

[1,2,3,6,10,11,8,1]

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 最后还留在断点序列中的是无限边（只确定了一个顶点），而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 最后还留在断点序列中的是无限边（只确定了一个顶点），而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。
- 可以只维护断点序列，并记录断点涉及的两个基点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- 最后还留在断点序列中的是无限边（只确定了一个顶点），而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。
- 可以只维护断点序列，并记录断点涉及的两个基点。
- 而维护断点序列就相当于维护若干射线，到达交点时修改射线。这和之前求所有交点的算法很相似。

- 最后还留在断点序列中的是无限边（只确定了一个顶点），而留在基点序列里的是位于点集凸包上的点。
- 可以只维护断点序列，并记录断点涉及的两个基点。
- 而维护断点序列就相当于维护若干射线，到达交点时修改射线。这和之前求所有交点的算法很相似。
- 不同的是这里的优先队列中不能有多余的备选交点，否则会产生误报，任意时刻只保留相邻射线的交点。而求交点那题使用这种方法可以减少额外需要的内存。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- **【最近基点】**：每次询问离一个点最近的基点。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

- **【最近基点】**：每次询问离一个点最近的基点。
- 求出基点的 V 图后转化为点定位问题。若要在构造的同时进行点定位，由于海滩线到达时才能确定区域，所以很难确定询问点的先后顺序。

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

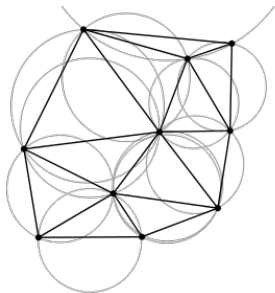
参考资料

- **【最近基点】**：每次询问离一个点最近的基点。
- 求出基点的 V 图后转化为点定位问题。若要在构造的同时进行点定位，由于海滩线到达时才能确定区域，所以很难确定询问点的先后顺序。
- **【最大空圆】**：在有限空间内找一个点，使离它最近的基点最远，即最大的不包含任何基点的圆。

- **【最近基点】**：每次询问离一个点最近的基点。
- 求出基点的 V 图后转化为点定位问题。若要在构造的同时进行点定位，由于海滩线到达时才能确定区域，所以很难确定询问点的先后顺序。
- **【最大空圆】**：在有限空间内找一个点，使离它最近的基点最远，即最大的不包含任何基点的圆。
- 只有 V 图顶点和无限边与边界的交点是候选点。（如果只卡住两点，圆心可以不断沿中垂线移动使半径增大）

Delaunay 三角化

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角剖分，使每个区域都是三角形，且没有一个三角形的外接圆中含有其他点。



介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

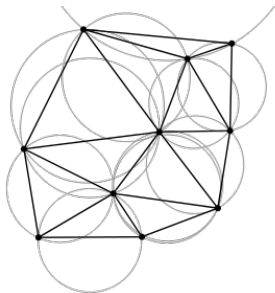
扩展

总结

参考资料

Delaunay 三角化

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角剖分，使每个区域都是三角形，且没有一个三角形的外接圆中含有其他点。
- 它最大化了此三角剖分中三角形的最小角，这可以使剖出来的三角形比较好看。



介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

Delaunay 三角化

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

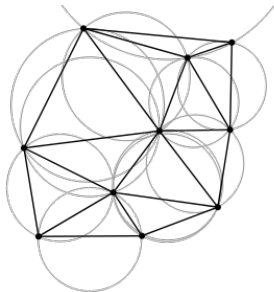
应用

扩展

总结

参考资料

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角剖分，使每个区域都是三角形，且没有一个三角形的外接圆中含有其他点。
- 它最大化了此三角剖分中三角形的最小角，这可以使剖出来的三角形比较好看。
- V 图和它互为对偶图。



Delaunay 三角化

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

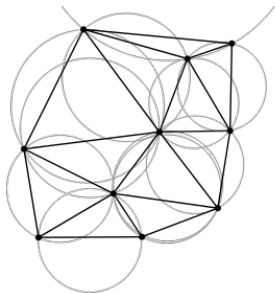
应用

扩展

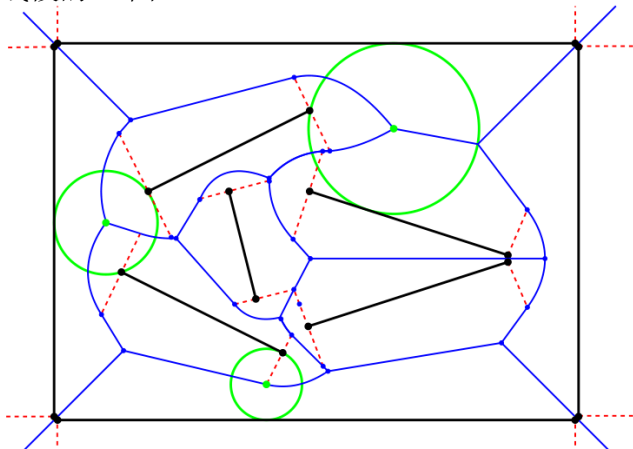
总结

参考资料

- Delaunay 三角化 (Delaunay triangulation) 是一组点的三角剖分，使每个区域都是三角形，且没有一个三角形的外接圆中含有其他点。
- 它最大化了此三角剖分中三角形的最小角，这可以使剖出来的三角形比较好看。
- V 图 and 它互为对偶图。
- 【欧式距离最小生成树】平面欧几里德距离的最小生成树的边是 Delaunay 三角化的一个子集，以此来优化。



线段的 V 图?



介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

扫描线算法在计算几何中是一个比较有用的算法。
但由于要高效地维护扫描线的状态，往往需要高级数据结构（如线段树、平衡树等）。
在 *OI* 中可尽量使用 *STL* 来简化代码。

Thanks for listening!

Email address: dhh1995@163.com

介绍

经典题

二维数点

矩形面积并

检测线段相交

小结

平面图中

平面图求域

点定位

不连通平面图

Voronoi 图

定义

构造

应用

扩展

总结

参考资料

Wiki , Sweep line algorithm

Wiki , Bentley–Ottmann algorithm

Wiki , Fortune's algorithm

Wiki , Voronoi diagram

Wiki , Delaunay triangulation

Thomas H. Cormen/ Charles E. Leiserson/ Ronald L.
Rivest/ Clifford Stein , *Introduction to Algorithms*。

钱桥, 平面图的处理方法, WC 2013 讲课。

刘汝佳, 几何与暴力法专题, WC 2013 讲课。

陈立杰, 可持久化数据结构研究, 国家集训队 2012 作业。

Seiyagoo 的博客中关于 Voronoi diagram 的文章

krevelde more voronoi.pdf