

# Oppgavesett 1

naturlig deduksjon av setningslogikk

Severin Gartland og OpenAI o3-mini

28.02.2025

# Innhold

<b>1</b>	<b>Oppgavesett 1</b>	<b>3</b>
1.1	Oppvarmingsoppgaver . . . . .	3
1.1.1	Øvelse . . . . .	3
1.1.2	Øvelse . . . . .	3
1.1.3	Øvelse . . . . .	3
1.1.4	Øvelse . . . . .	4
1.1.5	Øvelse . . . . .	4
1.1.6	Løsningsforslag . . . . .	5
	Øvelse 1.1.1 . . . . .	5
	Øvelse 1.1.2 . . . . .	5
	Øvelse 1.1.3 . . . . .	5
	Øvelse 1.1.4 . . . . .	6
	Øvelse 1.1.5 . . . . .	6
1.2	Nivå 1 . . . . .	7
1.2.1	Øvelse . . . . .	7
1.2.2	Øvelse . . . . .	7
1.2.3	Øvelse . . . . .	7
1.2.4	Øvelse . . . . .	7
1.2.5	Øvelse . . . . .	7
1.2.6	Løsningsforslag . . . . .	8
	Øvelse 1.2.1 . . . . .	8
	Øvelse 1.2.2 . . . . .	8
	Øvelse 1.2.4 . . . . .	9
	Øvelse 1.2.5 . . . . .	9
1.3	Nivå 2 . . . . .	11
1.3.1	Øvelse . . . . .	11
1.3.2	Øvelse . . . . .	11
1.3.3	Øvelse . . . . .	11

1.3.4	Øvelse . . . . .	11
1.3.5	Løsningsforslag . . . . .	12
	Øvelse 1.3.1 . . . . .	12
	Øvelse 1.3.2 . . . . .	12
	Øvelse 1.3.3 . . . . .	13
	Øvelse 1.3.4 . . . . .	13
1.4	Nivå 3 . . . . .	14
1.4.1	Øvelse . . . . .	14
1.4.2	Øvelse . . . . .	14
1.4.3	Øvelse . . . . .	14
1.4.4	Løsningsforslag . . . . .	15
	Øvelse 1.4.1 . . . . .	15
	Øvelse 1.4.2 . . . . .	15
	Øvelse 1.4.3 . . . . .	16
1.5	Uintuitive deduksjoner . . . . .	17
1.5.1	Øvelse . . . . .	17
1.5.2	Øvelse . . . . .	17
1.5.3	Løsningsforslag . . . . .	18
	Øvelse 1.5.1 . . . . .	18
	Øvelse 1.5.2 . . . . .	18

# Oppgavesett 1

Hei, her er ett sett med oppgaver for naturlig deduksjon for setningslogikk. Dette er jo noe som ofte behøver mye mengdetrening for å mestres, så jeg håper at dette settet kunne muliggjøre det.

Oppgavesettet er delt inn i seksjoner basert på vanskelighetsgrad. Men inndelingen er ganske løs, så noen oppgaver kan være vanskeligere eller lettere enn nivået tilsier.

*OBS!* En generativ AI modell (o3-mini fra OpenAI) ble brukt for å generere utkast til oppgaver, som da har blitt bearbeidet til de du finner i dette settet. Jeg har prøvd å gå over alle oppgavene og løsningsforslagene for å sikre at de er korrekte og forståelige, men jeg kan ikke garantere at oppgavene ikke inneholder feil eller er upresise. Håper likevel at det kommer til nytte.

## 1.1 Oppvarmingsoppgaver

### Øvelse 1.1.1

Vis at fra  $p$  og  $q$  kan man konkludere  $p \wedge q$ .

### Øvelse 1.1.2

Vis at fra  $p \wedge q$  kan man konkludere  $p$ .

### Øvelse 1.1.3

Vis at fra  $p$  kan man konkludere  $p \vee q$ .

**Øvelse 1.1.4**

Vis at  $p \rightarrow p$ .

**Øvelse 1.1.5**

Vis at fra  $p$  og  $p \rightarrow q$  kan man konkludere  $q$ .

## Løsningsforslag 1.1.6

### Øvelse 1.1.1

Vis at fra  $p$  og  $q$  kan man konkludere  $p \wedge q$ .

**Bevis:**

1	$p$	
2	$q$	
3	$p$	1 Reit
4	$q$	2 Reit
5	$p \wedge q$	3, 4 $\wedge$ Intro

### Øvelse 1.1.2

Vis at fra  $p \wedge q$  kan man konkludere  $p$ .

**Bevis:**

1	$p \wedge q$	
2	$p$	1 $\wedge$ Elim

### Øvelse 1.1.3

Vis at fra  $p$  kan man konkludere  $p \vee q$ .

**Bevis:**

1	$p$	
2	$p \vee q$	1 $\vee$ Intro

**Øvelse 1.1.4**

Vis at  $p \rightarrow p$ .

**Bevis:**

1			$p$	
2			$p$	1 Reit
3		$p \rightarrow p$		1-2 $\rightarrow$ Intro

**Øvelse 1.1.5**

Vis at fra  $p$  og  $p \rightarrow q$  kan man konkludere  $q$ .

**Bevis:**

1		$p$	
2		$p \rightarrow q$	
3		$q$	1, 2 $\rightarrow$ Elim

## 1.2 Nivå 1

### Øvelse 1.2.1

Vis at  $p \rightarrow (p \vee q)$ .

### Øvelse 1.2.2

Vis at fra  $p \rightarrow q$  og  $\neg q$  kan man konkludere  $\neg p$ .

### Øvelse 1.2.3

Vis at fra  $p \rightarrow q$ , kan man konkludere  $\neg q \rightarrow \neg p$ .

### Øvelse 1.2.4

Bevis at fra  $p \rightarrow q$  og  $q \rightarrow r$ , kan man konkludere  $p \rightarrow r$ .

### Øvelse 1.2.5

Vis at fra  $p \vee q$ ,  $p \rightarrow r$  og  $q \rightarrow r$  kan man konkludere  $r$ .



## Løsningsforslag 1.2.6

### Øvelse 1.2.1

Vis at  $p \rightarrow (p \vee q)$ .

**Bevis**

1			$p$	
2			$p \vee q$	1 $\vee$ Intro
3			$p \rightarrow (p \vee q)$	1-3 $\rightarrow$ Intro

### Øvelse 1.2.2

Vis at fra  $p \rightarrow q$  og  $\neg q$  kan man konkludere  $\neg p$ .

**Bevis**

1		$p \rightarrow q$		
2		$\neg q$		
3			$p$	
4			$q$	3, 1 $\rightarrow$ Elim
5			$\neg q$	2 Reit
6			$\neg p$	3-5 $\neg$ Intro

### Øvelse 1.2.3

Vis at fra  $p \rightarrow q$ , kan man konkludere  $\neg q \rightarrow \neg p$ .

**Bevis**

1		$p \rightarrow q$		
2			$\neg q$	
3				
4			$p$	
5			$q$	1, 3 $\rightarrow$ Elim
6			$\neg q$	2 Reit
7			$\neg p$	3-5 $\neg$ Intro
8		$\neg q \rightarrow \neg p$	2-7 $\rightarrow$ Intro	

**Øvelse 1.2.4**

Bevis at fra  $p \rightarrow q$  og  $q \rightarrow r$ , kan man konkludere  $p \rightarrow r$ .

**Bevis**

1		$p \rightarrow q$	
2		$q \rightarrow r$	
3			$p$
4			$q$ 3, 1 $\rightarrow$ Elim
5			$r$ 4, 2 $\rightarrow$ Elim
6		$p \rightarrow r$	3-5 $\rightarrow$ Intro

**Øvelse 1.2.5**

Vis at fra  $p \vee q$ ,  $p \rightarrow r$  og  $q \rightarrow r$  kan man konkludere  $r$ .

**Bevis**

1		$p \vee q$	
2		$p \rightarrow r$	
3		$q \rightarrow r$	
<hr/>			
4			$p$
5			$r$
			4, 2 $\rightarrow$ Elim
6			$q$
7			$r$
			6, 3 $\rightarrow$ Elim
8		$r$	1, 4–5, 6–7 $\vee$ Elim

## 1.3 Nivå 2

### Øvelse 1.3.1

Bevis at fra  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  kan man konkludere  $(p \wedge q) \rightarrow r$ .

### Øvelse 1.3.2

Bevis at fra  $p \vee q$ ,  $p \rightarrow r$  og  $q \rightarrow r$  kan man konkludere  $r$ .

### Øvelse 1.3.3

Bevis at fra  $p \rightarrow q$  og  $\neg q$  kan man konkludere  $\neg p$ .

### Øvelse 1.3.4

Vis at  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ .

## Løsningsforslag 1.3.5

### Øvelse 1.3.1

Bevis at fra  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  kan man konkludere  $(p \wedge q) \rightarrow r$ .

**Bevis**

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2	$p \wedge q$	
3	$p$	2 $\wedge$ Elim
4	$q$	2 $\wedge$ Elim
5	$q \rightarrow r$	3, 1 $\rightarrow$ Elim
6	$r$	4, 5 $\rightarrow$ Elim
7	$(p \wedge q) \rightarrow r$	2–6 $\rightarrow$ Intro

### Øvelse 1.3.2

Bevis at fra  $p \vee q$ ,  $p \rightarrow r$  og  $q \rightarrow r$  kan man konkludere  $r$ .

**Bevis**

1	$p \vee q$	
2	$p \rightarrow r$	
3	$q \rightarrow r$	
4	$p$	
5	$r$	4, 2 $\rightarrow$ Elim
6	$q$	
7	$r$	6, 3 $\rightarrow$ Elim
8	$r$	1, 4–5, 6–7 $\vee$ Elim

**Øvelse 1.3.3**

Bevis at fra  $p \rightarrow q$  og  $\neg q$  kan man konkludere  $\neg p$ .

**Bevis**

1		$p \rightarrow q$	
2		$\neg q$	
3			
4			
5			
6		$\neg p$	

3, 1  $\rightarrow$ Elim

2 Reit

3–5  $\neg$ Intro

**Øvelse 1.3.4**

Vis at  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$ .

**Bevis**

1			$\neg(p \wedge q)$	
2				
3				
4				
5			$\neg p$	
6			$\neg p \vee \neg q$	
7		$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$		

1, 2  $\wedge$ Intro

1 Reit

2–4  $\neg$ Intro

5  $\vee$ Intro

1–6  $\rightarrow$ Intro

## 1.4 Nivå 3

### Øvelse 1.4.1

Bevis at fra  $p \wedge (q \vee r)$  kan man konkludere  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .

### Øvelse 1.4.2

Bevis at fra  $(p \wedge q) \rightarrow r$  kan man konkludere  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ .

### Øvelse 1.4.3

Vis at  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ .

Her kan vi vise at dette er en logisk sannhet.

## Løsningsforslag 1.4.4

### Øvelse 1.4.1

Bevis at fra  $p \wedge (q \vee r)$  kan man konkludere  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .

### Bevis

1	$p \wedge (q \vee r)$	
2	$p$	1 $\wedge$ Elim
3	$q \vee r$	1 $\wedge$ Elim
4	$q$	
5	$p \wedge q$	2, 4 $\wedge$ Intro
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	5 $\vee$ Intro
7	$r$	
8	$p \wedge r$	2, 7 $\wedge$ Intro
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	8 $\vee$ Intro
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	3, 4–6, 7–9 $\vee$ Elim

### Øvelse 1.4.2

Bevis at fra  $(p \wedge q) \rightarrow r$  kan man konkludere  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ .



**Bevis**

1		$(p \wedge q) \rightarrow r$	
2		$p$	
3		$q$	
4		$p \wedge q$	2, 3 $\wedge$ Intro
5		$r$	4, 1 $\rightarrow$ Elim
6		$q \rightarrow r$	3–5 $\rightarrow$ Intro
7		$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	2–6 $\rightarrow$ Intro

**Øvelse 1.4.3**

Vis at  $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$ .

Her kan vi vise at dette er en logisk sannhet.

**Bevis**

1		$\neg(p \rightarrow q)$	
2		$\neg p$	
3		$p$	
4		$\neg q$	
5		$p$	3 Reit
6		$\neg p$	2 Reit
7		$q$	4–6 $\neg$ E
8		$p \rightarrow q$	3–7 $\rightarrow$ Intro
9		$\neg(p \rightarrow q)$	1 Reit
10		$p$	2–9 $\neg$ E
11		$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$	1–10 $\rightarrow$ Intro

## 1.5 Uintuitive deduksjoner

### Øvelse 1.5.1

Bevis at fra  $p$  kan man konkludere  $q \rightarrow p$ .

### Øvelse 1.5.2

Bevis at fra  $\neg p$  kan man konkludere  $p \rightarrow q$ .

## Løsningsforslag 1.5.3

### Øvelse 1.5.1

Bevis at fra  $p$  kan man konkludere  $q \rightarrow p$ .

**Bevis:**

1	$p$	
2	$p$	1 Reit
3	$q$	
4	$p$	2 Reit
5	$q \rightarrow p$	3-4 $\rightarrow$ Intro

### Øvelse 1.5.2

Bevis at fra  $\neg p$  kan man konkludere  $p \rightarrow q$ .

**Bevis:**

1	$\neg p$	
2	$p$	
3	$\neg q$	
4	$\neg p$	1 Reit
5	$p$	2 Reit
6	$q$	3-5 $\neg$ Intro
7	$p \rightarrow q$	2-6 $\rightarrow$ Intro