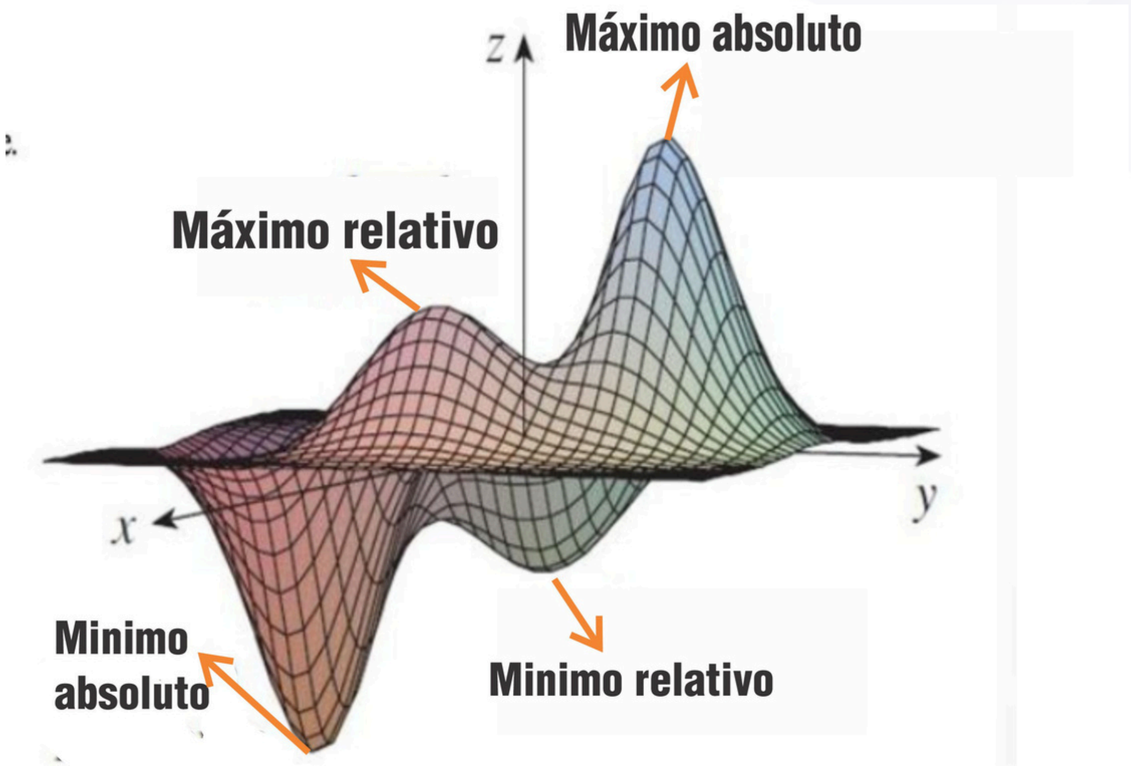
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TUCUMÁN

MATEMATICA III

MATERIAL TEÓRICO



Facultad de Ciencias Económicas
Universidad Nacional de Tucumán

NOTAS TEÓRICAS PARA

MATEMÁTICA III

AÑO 2025

Serie Cuadernos

Notas téoricas para Matemática III-FACE-UNT.

Prólogo

A LOS ESTUDIANTES QUE INICIAN EL CURSADO DE MATEMÁTICA III

Los Docentes de la Cátedra Matemática III de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNT, elaboraron este Cuaderno que contiene una selección de ejercicios y problemas para el cursado del espacio curricular en el primer cuatrimestre del año 2026. En cada unidad se incluyen los conceptos teóricos básicos necesarios para lograr la dinámica adecuada en el desarrollo de los ejercicios propuestos en las clases prácticas.

Recuerda que, para lograr un mejor rendimiento académico, deben realizar, en lo posible para cada clase, lo siguiente

1. Lectura individual y/o grupal del material bibliográfico y de los apuntes de clases.
2. Análisis y discusión de las dificultades presentadas con su grupo de compañeros.
3. Análisis por parte del docente a cargo de las situaciones presentadas por los alumnos

Deben tener en cuenta que un texto de matemáticas es muy diferente a una novela, un periódico o hasta otro libro. Y al momento de comenzar a leerlo, deberán releer un párrafo varias veces antes de entenderlo. Lo que no debe desalentarlos.

Pongan especial atención a los ejemplos y resuélvanlos con lápiz y papel a medida que los lean y a continuación, hagan los ejercicios relacionados. El plantearse resolver muchos problemas ayuda a entender el “mecanismo” de cada uno de ellos. Esto les facilita “ver” de un grupo de problemas, cuáles son los similares o intuir por donde deben comenzar para resolverlos.

Hay muchas formas de resolver un problema, y muchas más de entenderlo. Por lo que les pedimos que no se desalienten cuando comienzan las dificultades.

INTEGRANTES DE LA CÁTEDRA

MA. Santiago FOGUET	Profesor Asociado a/c de Cátedra
Esp. Marta Lía MOLINA	Profesora Adjunta
Lic. Sandra Noemí FRANCO	Jefa de Trabajos Prácticos
Sr. Mateo Sebastián MOLINA	Ayudante estudiantil

Capítulo 1

Funciones Reales de Varias Variables

Contenidos

- Definición del conjunto $\mathbb{R}^n$.Representación gráfica de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Dominio y rango. Gráfica de funciones de 2 variables independientes y de sus dominios. Definición de curvas de nivel. Propiedades. Límite y continuidad de funciones de dos variables.
- Entornos de un punto. Puntos frontera y Puntos interiores de un conjunto. Conjuntos: acotados, abiertos, cerrados, convexos.
- Definición de Funciones reales de varias variables independientes. Dominio y rango. Gráfica de funciones de 2 variables independientes y de sus dominios.
- Definición de curvas de nivel. Propiedades.
- Límite de Funciones de dos Variables: Definición intuitiva y rigurosa de límite o límite doble. Límites sucesivos o iterados. Límite Radial.
- Continuidad de una función de dos variables. Continuidad en un punto. Propiedades.

Objetivos

Al finalizar el estudio de esta unidad temática serás capaz de:

- Identificar y analizar funciones de varias variables.
- Graficar curvas de nivel como método para representar geométricamente funciones de dos variables
- Interpretar geométricamente los conceptos de límite y calcular limites.
- Determinar la continuidad y clasificar las discontinuidades de una función.
- Analizar la continuidad de funciones en situaciones problemáticas.

Conocimientos Previos

Para los objetivos propuestos necesitarás revisar los siguientes contenidos:

- Funciones reales de una variable real. Definición. Dominio y rango.
- Funciones algebraicas simples: función lineal, cuadrática y racional.
- Funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas.
- Límite y continuidad de funciones de una variable real

1.1 Conjuntos de $\mathbb{R}^n$. Representación gráfica de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$

Para desarrollar los conceptos de esta unidad definiremos algunos conceptos importantes y necesarios para el desarrollo de los contenidos de esta unidad, entre ellos: distancia entre dos puntos, vecindario, punto interior y punto frontera ya utilizados en matemática pero que ahora los definiremos para puntos de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1 Distancia entre dos puntos

Sean los puntos $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. La distancia entre P y Q está dada por:

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Observación: si $P\, y\, Q\ \in \mathbb{R}^2$ la definición de distancia entre dos puntos quedaría: Si P es un punto fijo de coordenadas (a, b) y Q un punto variable de coordenadas (x, y), $d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, entonces Q es un punto que pertenece a la circunferencia con centro en $P(a, b)$ y radio d como se muestrea en la figura 1.1.

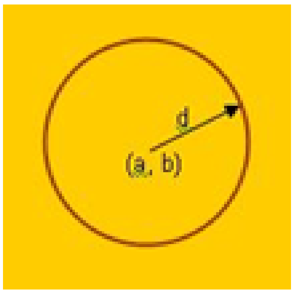


Figura 1.1: Distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^2$

Entornos de un punto de $\mathbb{R}^n$

Definición 1.2 Vecindario abierto de centro P_1 y radio r

Sea $P_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ entonces el vecindario de centro P_1 y radio r es el conjunto de todos los puntos P de $\mathbb{R}^n$ tales que su distancia al punto P_1 sea menor que r.
Simbólicamente:

$$\begin{aligned} V(P_1, r) &= \{P \in \mathbb{R}^n \,/\, d(P, P_1) < r\} \\ &= \left\{P \in \mathbb{R}^n \,/\, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 < r}\right\} \end{aligned}$$

Observaciones

- En el caso de $n = 2$ tenemos que el vecindario de centro $P(a, b)$ y radio h es

$$V(P, h) = V((a, b), h) = \left\{(x, y)/d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < h\right\}$$

O sea:

$$(x, y) \,/\, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < h \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 < h^2$$

Geométricamente el vecindario $V(P, h)$ es el conjunto de los puntos del plano interiores al círculo con centro en $P(a, b)$ y radio h que se muestra en la figura 1.2

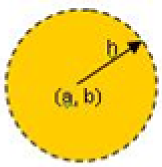


Figura 1.2: Vecindario en $\mathbb{R}^n$

- En el caso de $n = 3$ tenemos que, el vecindario de centro $P(a, b, c)$ y radio h es:

$$V(P, h) = V((a, b, c), h) = \left\{(x, y, z)/d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < h\right\}$$

o sea,

$$(x, y, z) \,/\, \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < h \Rightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < h^2$$

Geométricamente el vecindario $V(P, h)$ es el conjunto de los puntos del espacio interiores a una esfera con centro en $P(a, b, c)$ y radio h como se muestra en la figura 1.3

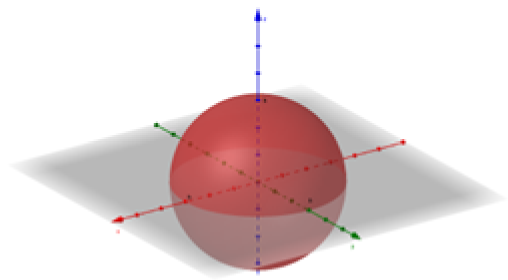


Figura 1.3: Vecindario en $\mathbb{R}^3$

Definición 1.3 Vecindario reducido del punto P_1 y radio h

Sea $P_1 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ entonces el vecindario reducido de centro P_1 y radio r es el vecindario que resulta de excluir su centro.
Simbólicamente:

$$\begin{aligned} V^*(P_1, r) &= V(P_1, r) - \{P_1\} = \{P \in \mathbb{R}^n \,/\, 0 < d(P, P_1) < r\} \\ &= \left\{P \in \mathbb{R}^n \,/\, 0 < \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} < r\right\} \end{aligned}$$

Observación:
En el caso de $n = 2$ tenemos que el vecindario reducido de centro $P(a, b)$ y radio h es

$$V^*(P, h) = V^*((a, b), h) = \left\{(x, y) \,/\, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < h\right\}$$

o sea

$$(x, y) \,/\, 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < h \Rightarrow 0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < h^2$$

Geométricamente el vecindario reducido de centro $P(a, b)$ y radio h es el conjunto de los puntos del plano interiores al círculo con centro en $P(a, b)$ y radio h, excluido el centro $P(a, b)$ como se muestra en la figura 1.4.

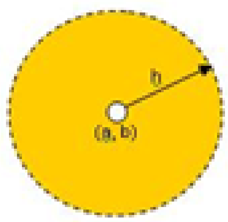


Figura 1.4: Vecindario reducido de un punto de $\mathbb{R}^2$

Definición 1.4 Punto interior

Un punto P perteneciente a un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, se dice que es **interior** a D si existe un $V(P,h)$ totalmente incluido en D.
O sea:

$$P \text{ es interior a } D \text{ si existe } V(P,h) \subset D$$

En la Figura 1.5 se muestra un conjunto D en el cual el punto P es interior a D, mientras que el punto H no es interior a D.

Los puntos interiores de una región conforman (como conjunto) el **interior de la región**.

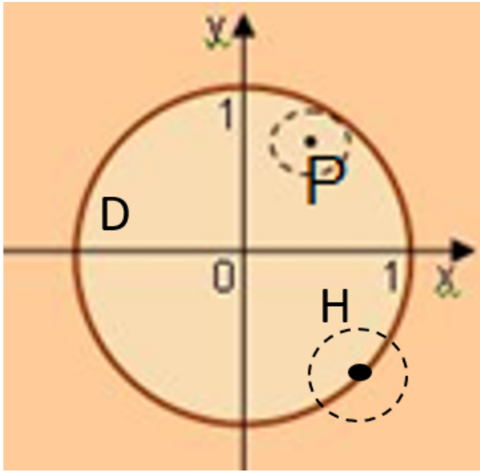


Figura 1.5: Punto interior

Definición 1.5 Punto frontera

Un punto P se dice punto frontera del conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, el cual puede o no pertenecer, si cualquier $V(P,h)$ contiene algún punto de D y algún punto de fuera de D.

Si $n = 2$, o sea $D \subset \mathbb{R}^2$ en la figura 1.6 se muestra un punto frontera

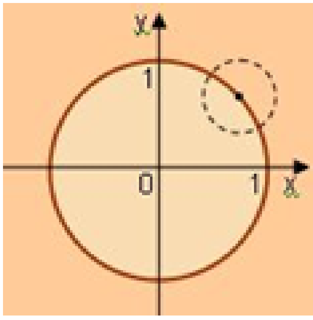


Figura 1.6: Punto frontera

Al conjunto de todos los puntos frontera del conjunto D se lo denomina **la frontera de** D.

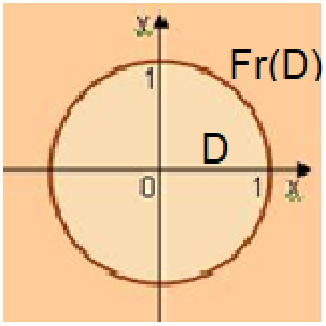


Figura 1.7: Gráfica de la frontera de D

Definición 1.6 Conjunto abierto

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si, para cada punto P de A se puede encontrar un vecindario $V(P,h)$ incluido en A. O sea, si todos los puntos de A son interiores.

Definición 1.7 Conjunto cerrado

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado si todos los puntos frontera de A pertenecen al conjunto A.

Definición 1.8 Conjunto acotado

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado si existe algún número real $h > 0$ y un punto $P \in \mathbb{R}^n \,/\, A \subset V(P,h)$.

A continuación mostramos algunos ejemplos de los conjuntos definidos anteriormente.

La gráfica de la figura 1.8 muestra un conjunto abierto y acotado.

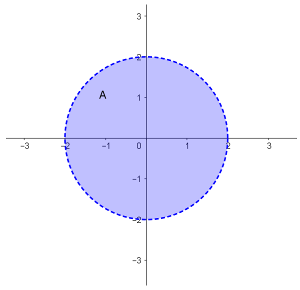


Figura 1.8: Conjunto abierto y acotado

La gráfica de la figura 1.9 muestra un conjunto cerrado y acotado.

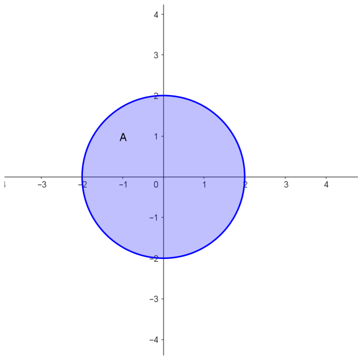


Figura 1.9: Conjunto cerrado y acotado

La gráfica de la figura 1.10 muestra un conjunto cerrado y no acotado.

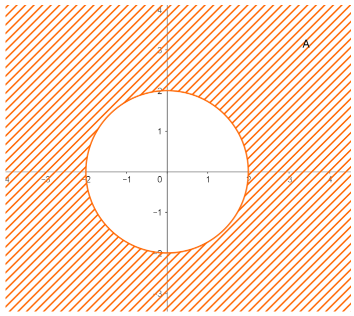


Figura 1.10: Conjunto cerrado y no acotado

Definición 1.9 Conjunto convexo

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si: dados dos puntos cualesquiera X e Y de A el segmento que los une está incluido en conjunto A. Simbólicamente,

$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ es un conjunto convexo si } \overline{XY} \subset A; \;\; \forall X \in A \text{ y } \forall Y \in A$$

Esta condición se la podría expresar también de la siguiente manera:
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo si $\lambda X + (1-\lambda)Y \in A$, $\forall X \in A$; $\forall Y \in A$; $\lambda \in [0,1]$.

N $\overline{XY} = \{Z \,/\, \exists\, \lambda \in [0,1] : Z = \lambda X + (1-\lambda)Y\}$

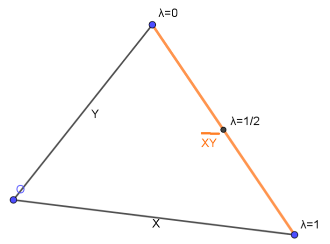


Figura 1.11: Gráfica del segmento $\overline{XY}$

1.2 Introducción al concepto de funciones

Función Real de n variables independientes

Función Real de 2 variables independientes

Gráfica de una función de 2 variables

Curvas de nivel de una función de dos variables

Límites de funciones de dos variables

Continuidad de funciones de dos variables