Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

Χωρικοί μετασχηματισμοί και παρεμβολή

Γιώργος Σφήκας

sfikas@cs.uoi.gr

Images taken and/or material adapted from, unless otherwise denoted:

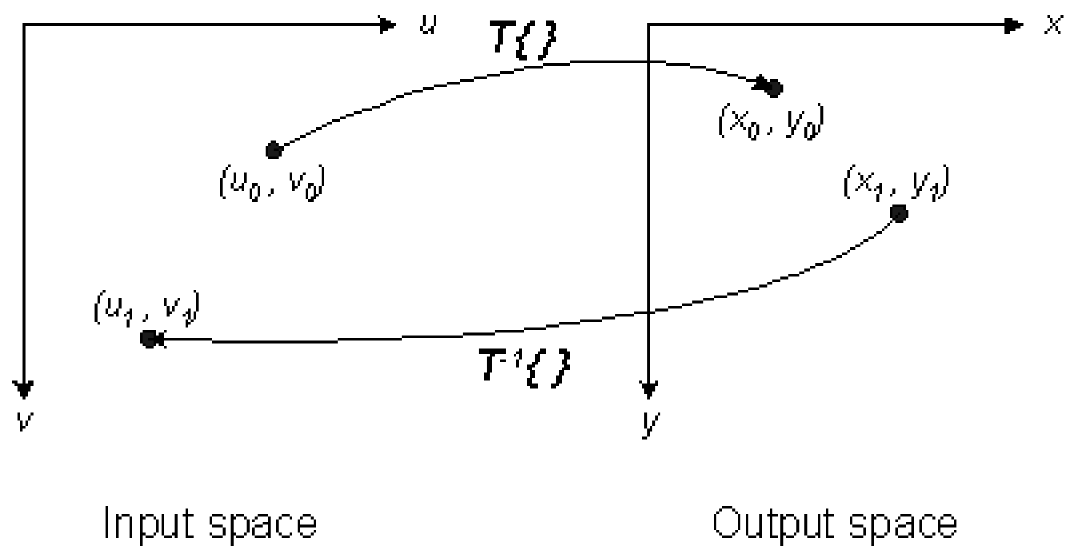
R. Gonzalez and R. Woods. Digital Image Processing, Prentice Hall, 2008;
Digital Image Processing course by Brian Mac Namee, Dublin Institute of Technology;
Publications in http://www.cs.uoi.gr/~sfikas

Εισαγωγή

- Σε αυτό το μάθημα θα μιλήσουμε για
  - γεωμετρικούς χωρικούς μετασχηματισμούς (spatial transformations)
  - την μέθοδο της παρεμβολής (interpolation).

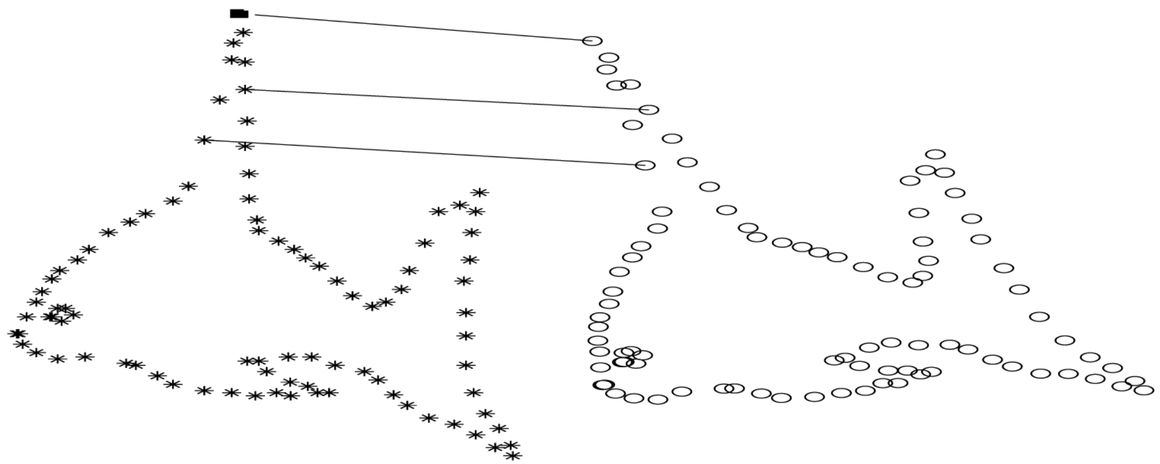
Χωρικοί μετασχηματισμοί

- Χωρικός μετασχηματισμός είναι η απεικόνιση των συντεταγμένων ενός πλήθους σημείων σε νέες συντεταγμένες.



Χωρικοί μετασχηματισμοί

- Χωρικός μετασχηματισμός είναι η απεικόνιση των συντεταγμένων ενός πλήθους σημείων σε νέες συντεταγμένες.



Χωρικοί μετασχηματισμοί

- Κάθε ψηφιακή εικόνα αποτελείται από ένα πλέγμα διατεταγμένων σημείων.
- Επομένως με τους χωρικούς μετασχηματισμούς μπορούμε να αλλάξουμε τον τρόπο που εμφανίζεται μια εικόνα

Χωρικοί μετασχηματισμοί

- Από τις πιο εύχρηστες κατηγορίες χωρικών μετασχηματισμών είναι :
  - Οι άκαμπτοι μετασχηματισμοί (rigid transformations)
  - Οι αφινικοί ή συσχετισμένοι μετασχηματισμοί (affine transformations)
- (Υπάρχουν και άλλοι – προβολικοί μετασχηματισμοί, μη-γραμμικοί μετασχηματισμοί κ.α., που δεν θα εξετάσουμε σε αυτή την διάλεξη)

'Ακαμπτοι μετασχηματισμοί

- Οι άκαμπτοι μετασχηματισμοί (rigid transformations) έχουν χαρακτηριστικό ότι οι αποστάσεις των σημείων εισόδου παραμένουν οι ίδιες και στην έξοδο.
- Άκαμπτοι μετασχηματισμοί είναι
  – Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός
  – Η μετατόπιση
  – Ο κατοπτρισμός
  – Η στροφή

Αφινικοί μετασχηματισμοί

- Οι αφινικοί μετασχηματισμοί (affine transformations) έχουν χαρακτηριστικό ότι οι παράλληλες ευθείες παραμένουν παράλληλες και στην έξοδο.
- Αφινικοί μετασχηματισμοί είναι
  - Όλοι οι άκαμπτοι μετασχηματισμοί
  - Η κλιμάκωση
  - Η στρέβλωση (shearing)

Αναπαράσταση με μορφή πινάκων

- Όλοι οι αφινικοί μετασχηματισμοί μπορούν να αναπαρασταθούν με μορφή πινάκων
- Για παράδειγμα, μια κλιμάκωση στις δύο διαστάσεις αναπαρίσταται σαν ένας πίνακας 2x2

$$\begin{bmatrix} c_x & 0 \\ 0 & c_y \end{bmatrix}$$

..ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με ένα διάνυσμα συντεταγμένων εισόδου $[x\ y]^T$, δίνει το κλιμακωμένο αποτέλεσμα - συντεταγμένες εξόδου $[c_x x\ c_y y]^T$

Αντιστροφή μετασχηματισμών

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός βρίσκεται απλά αντιστρέφοντας τον πίνακα μετασχηματισμού!

- Θυμηθείτε τον τύπο για αντιστροφή πινάκων 2x2:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Σύνθεση μετασχηματισμών

- Μπορούμε να πραγματοποιήσουμε σύνθεση μετασχηματισμών πολλαπλασιάζοντας μεταξύ τους αντίστοιχους πίνακες. Πχ αν

$$Z = ABC$$

Τότε ο Z είναι μετ/μος που εφαρμόζει πρώτα τον C, μετά τον B, τέλος τον A.

Σύνθεση μετασχηματισμών

- Προσοχή - Στην σύνθεση χωρικών μετασχηματισμών, όπως και στον λογισμό πινάκων, *γενικά* δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα !

$$AB \neq BA$$

- Επίσης θυμηθείτε ότι

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

Αναπαράσταση με μορφή πινάκων

- Για να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε τις **μετατοπίσεις** με μορφή πινάκων χρειαζόμαστε ένα 'τρικ' – τις 'ομογενείς συντεταγμένες'

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \rightarrow \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}^T$$

- Όλοι οι αφινικοί μετασχηματισμοί σημείων στις δύο διαστάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν σαν πίνακες 3x3, θεωρώντας ομογενείς συντεταγμένες.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αναπαράσταση με μορφή πινάκων

- Ισχύει πάλι ότι είπαμε για σύνθεση και αντιστροφή και εδώ.
- Σχετικά με την αντιστροφή, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{bmatrix} T_{2x2} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{2x2}^{-1} & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αναπαράσταση με μορφή πινάκων

- Οι κυριότεροι αφινικοί μετασχηματισμοί είναι οι εξής:

- Ταυτοτικός /Κατοπτρισμός $\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Στροφή $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Μετατόπιση $\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Κλιμάκωση $\begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Αναπαράσταση με μορφή πινάκων

- .. Και οι ..

- Στρέβλωση κατά x $\begin{bmatrix} 1 & s_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Στρέβλωση κατά y $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

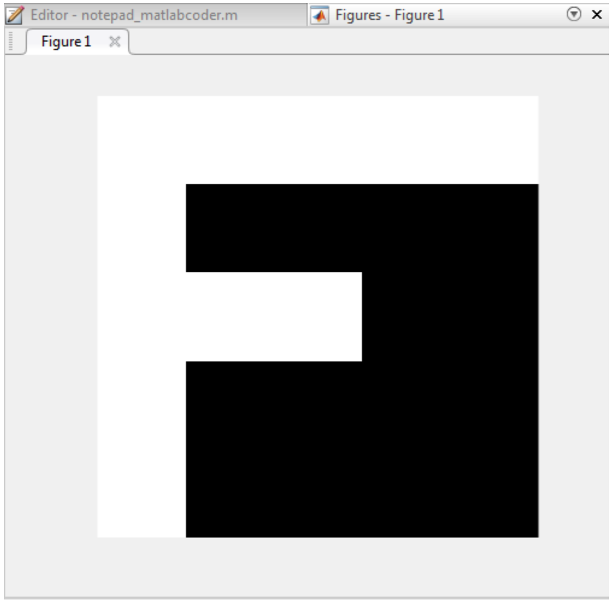
- Η γενική μορφή των αφινικών μετασχηματισμών σε 2Δ, θεωρώντας ομογενείς συντεταγμένες, είναι :

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Περιστροφή εικόνας 5x5

- Έστω η παρακάτω εικόνα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- Θέλουμε να την περιστρέψουμε κατά 90 μοίρες γύρω από την αρχή των αξόνων (εδώ θα θεωρήσουμε την αρχή σαν το κεντρικό σημείο, δηλαδή τα x και τα y παίρνουν τιμές -2,-1,0,1,2)

Παράδειγμα: Περιστροφή εικόνας 5x5

- Υπολογίζουμε πρώτα τον πίνακα μετασχηματισμού

$$\begin{bmatrix} \cos{}^{\pi}\!/_{2} & -\sin{}^{\pi}\!/_{2} & 0 \\ \sin{}^{\pi}\!/_{2} & \cos{}^{\pi}\!/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Μετά θεωρούμε έναν πίνακα 3x25 που περιέχει όλα τα ζεύγη συντεταγμένων των σημείων του αρχικού πλέγματος (ένα σημείο ανά στήλη)

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Περιστροφή εικόνας 5x5

- Αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τους δύο πίνακες για να πάρουμε το αποτέλεσμα μας

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Το οποίο έχει τις συντ/νες εξόδου στις αντίστοιχες θέσεις με τον πίνακα εισόδου των ίδιων διαστάσεων
- Με απλά λόγια η παραπάνω πράξη μας λέει ότι το (-2,-2) πάει στο (2,-2), το (-1,-2) πάει στο (2,-1), το (0,-2) στο (2,0), και ούτω καθ’εξής.

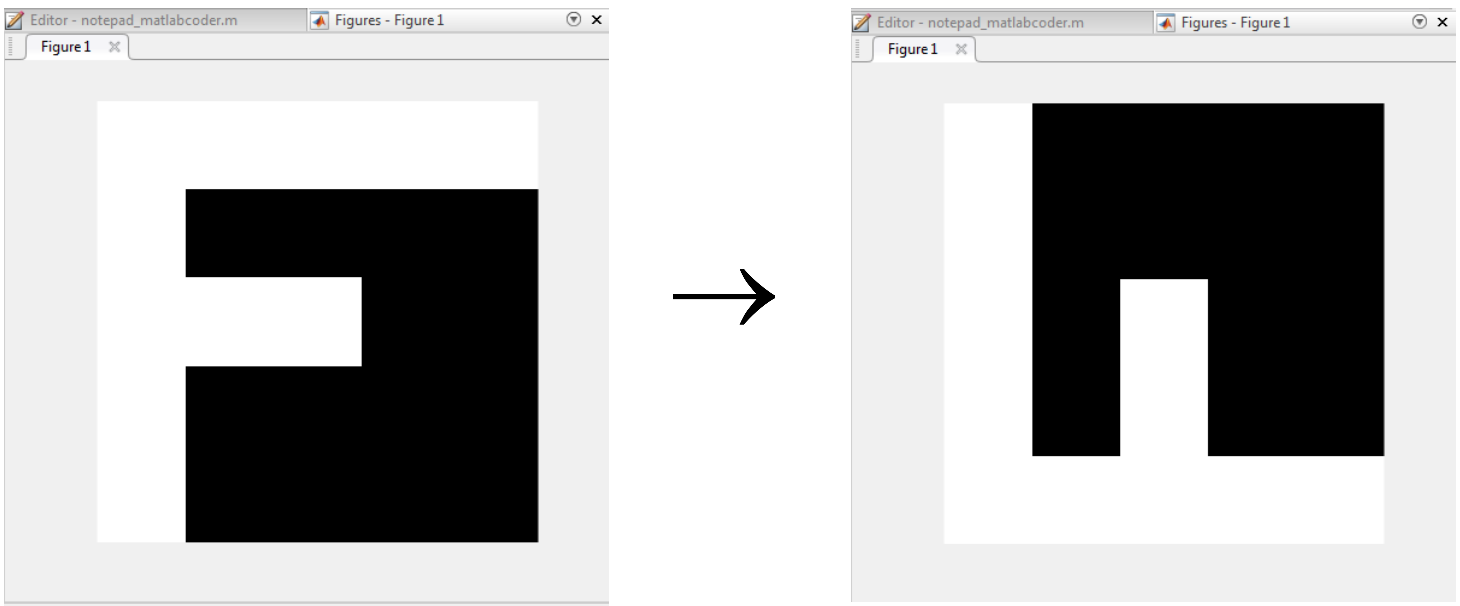
Παράδειγμα: Περιστροφή εικόνας 5x5

- Αντιγράφουμε τιμές φωτεινότητας σύμφωνα με την αντιστοιχία που υπολογίσαμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα: Περιστροφή εικόνας 5x5

- Αντίστοιχα, μια απλή οπτικοποίηση του ‘πριν’ και του ‘μετά’ δείχνει ότι περιστρέψαμε το αντικείμενο κατά 90 μοίρες γύρω από το κεντρικό σημείο, όπως ακριβώς αναμέναμε.



Παρεμβολή

- Το προηγούμενο παράδειγμα περιστροφής ήταν πολύ 'βολικό' – όλα τα σημεία του αρχικού πλέγματος απεικονίστηκαν από το ίδιο σύνολο ακέραιων συντεταγμένων πάλι στο ίδιο ακριβώς σύνολο ακέραιων συντεταγμένων

- Στην γενική περίπτωση δεν θα συμβαίνει αυτό
- Θα χρειαστεί να εκτιμούμε τιμές φωτεινότητας με βάση την πληροφορία για τα γνωστά σημεία
- Αυτή η διαδικασία ονομάζεται παρεμβολή (interpolation)

Παρεμβολή

- Διάφοροι τρόποι παρεμβολής
  - Κοντινότερου γείτονα
  - Γραμμική παρεμβολή (linear)
  - Διγραμμική παρεμβολή (bilinear)
  - Δικυβική παρεμβολή (bicubic)
  - κ.α.

Παρεμβολή: Παράδειγμα

- Παράδειγμα:
  - Έστω ότι κλιμακώνω μια εικόνα κατά τον οριζόντιο άξονα μόνο, κατά 1.5x
  - Έστω ότι η εικόνα μου έχει 5 στήλες, αριθμημένες 0,1,2,3,4
  - ακολουθώντας μια διαδικασία αντίστοιχη της προηγούμενης ενότητας (μόνο που τώρα έχουμε κλιμάκωση κατά x αντί στροφή) μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι
    - Το x=0 απεικονίζεται στο x=0
    - Το x=1 απεικονίζεται στο x=1.5
    - Το x=2 απεικονίζεται στο x=3
    - Το x=3 απεικονίζεται στο x=4.5
    - Το x=4 απεικονίζεται στο x=6
  - Το πρόβλημα είναι ότι τώρα μας λείπουν οι τιμές για κάποιες στήλες !
    - Συγκεκριμένα, οι τιμές για τις στήλες 1, 2, 4 και 5, υποθέτωντας ότι η νέα εικόνα θα έχει 7 στήλες.

Παρεμβολή κοντινότερου γείτονα

- Η απλούστερη λύση είναι για κάθε στήλη που λείπει, να αντιγράψω τις τιμές από την αμέσως κοντινότερη στήλη για την οποία έχουμε πληροφορία.
    - Την στήλη x=0 την έχουμε.
    - Την στήλη x=1 της νέας εικόνας την αντιγράφουμε από την 'στήλη' με x=1.5 .
    - Για την στήλη x=2 από το x=1.5 πάλι.
    - Την στήλη x=3 την έχουμε.
    - Για την στήλη x=4 αντιγράφουμε από x=4.5 .
    - Για την στήλη x=5 αντιγράφουμε από x=5 .
    - Την στήλη x=6 την έχουμε.

Γραμμική παρεμβολή

- Η αμέσως πιο συνθετή τεχνική παρεμβολής, σε σχέση με την παρεμβολή κοντινότερου γείτονα, είναι η γραμμική παρεμβολή (linear interpolation).
- Οι εικόνες είναι 2D σήματα, και εκεί χρησιμοποιείται η διγραμμική παρεμβολή, που θα εξετάσουμε παρακάτω.
- *Θα δούμε πρώτα την γραμμική παρεμβολή ωστόσο, για να καταλάβουμε πιο εύκολα την διγραμμική παρεμβολή* .
- Η γραμμική παρεμβολή χρησιμοποιείται για παρεμβολή σε 1D σήματα – στο παράδειγμα μας μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε γιατί έχουμε επιλέξει κλιμάκωση κατά μία διάσταση επομένως μπορούμε να δούμε κάθε γραμμή της νέας εικόνας σαν ένα 1D σήμα ανεξάρτητο από τα άλλα σήματα-γραμμές .

Γραμμική παρεμβολή

- Σύμφωνα με την γραμμική παρεμβολή, για να εκτιμήσω την τιμή στο x=1
  - Βρίσκω τους 2 κοντινότερους γείτονες: εδώ είναι x=0, x=1.5 .
  - *Θεωρώ το γραμμικό μοντέλο* f = αx + β, επομένως ισοδύναμα γράφουμε

$$\begin{bmatrix} x_0 & 1 \\ x_{1.5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_{1.5} \end{bmatrix}$$

  - Οι άγνωστοι είναι οι α,β .
  - Τα x_0, $x_{1.5}$ τα ξέρουμε : είναι 0, 1.5 αντίστοιχα.
  - Τα f_0, $f_{1.5}$ τα ξέρουμε : είναι οι τιμές έντασης για x=0, x=1.5 .
  - Λύνεται απλά με μία αντιστροφή και ένα πολλαπλασιασμό (πβ. τύπο που είδαμε για αντιστροφή πινάκων 2x2)

Γραμμική παρεμβολή

- Για να βρώ την τιμή στο 1, απλά υπολογίζω

$$f_1 = \alpha x_1 + \beta$$

- Για να βρω την τιμή στο επόμενο σημείο (x=2), το οποίο εν γένει θα έχει άλλους κοντινότερους γείτονες, πρέπει να υπολογίσω άλλο μοντέλο . Δηλαδή για x=2,

$$\begin{bmatrix} x_{1.5} & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1.5} \\ f_3 \end{bmatrix}$$

- Αφού οι κοντινότεροι γείτονες του x=2 είναι τα x=1.5, 3 .
- Βρίσκω καινούρια α, β, κ.ο.κ.

Διγραμμική παρεμβολή

- Η διγραμμική παρεμβολή είναι επίσης γραμμικό μοντέλο που όμως χρησιμοποιεί πληροφορία από 4 γείτονες
- Εκμεταλλεύεται πιο πλήρως δηλαδή το γεγονός ότι είμαστε στις δύο διαστάσεις – παίρνουμε πληροφορία από τους γείτονες και κατά x και κατά y
- Γραμμικό σύστημα : $f = \alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta$

Διγραμμική παρεμβολή

- Σε μορφή πινάκων, αν υποθέσουμε ότι έχουμε κοντινότερους γείτονες τα σημεία (0,0), (0,2), (2,0), (2,2) μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & x_0 y_0 & 1 \\ x_2 & y_0 & x_2 y_0 & 1 \\ x_0 & y_2 & x_0 y_2 & 1 \\ x_2 & y_2 & x_2 y_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{0,0} \\ f_{2,0} \\ f_{0,2} \\ f_{2,2} \end{bmatrix}$$

- Με αντίστοιχη διαδικασία με αυτή της γραμμικής παρεμβολής, βρίσκουμε τους άγνωστους α,β,γ,δ, και υπολογίζουμε τιμές που λείπουν.

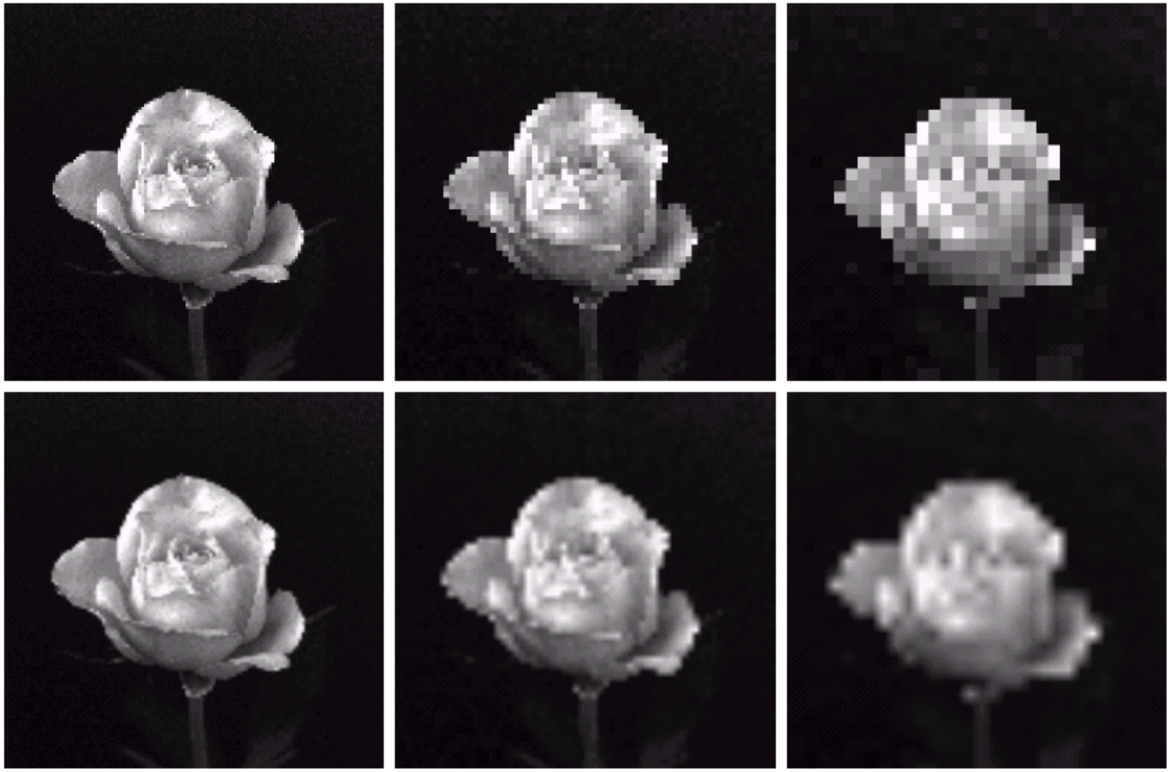
Δικυβική παρεμβολή

- Η δικυβική παρεμβολή χρησιμοποιεί πληροφορία από 16 γείτονες

$$f = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} \alpha_{ij} x^i y^j$$

- Λύνεται επίσης σαν γραμμικό σύστημα
- Τώρα έχουμε να αντιστρέψουμε πίνακες 16x16

Παρεμβολή: Σύγκριση μεθόδων



a b c
d e f

FIGURE 2.25 Top row: images zoomed from 128 × 128, 64 × 64, and 32 × 32 pixels to 1024 × 1024 pixels, using nearest neighbor gray-level interpolation. Bottom row: same sequence, but using bilinear interpolation.

Παρεμβολή: Σύγκριση μεθόδων

FIGURE 2.36 (a) A 300 dpi image of the letter T. (b) Image rotated 21° clockwise using nearest neighbor interpolation to assign intensity values to the spatially transformed pixels. (c) Image rotated 21° using bilinear interpolation. (d) Image rotated 21° using bicubic interpolation. The enlarged sections show edge detail for the three interpolation approaches.

Συνοψίζοντας

- Εξετάσαμε τους χωρικούς μετασχηματισμούς, και την μέθοδο της παρεμβολής
- Είδαμε με περισσότερη λεπτομέρεια τους αφινικούς μετασχηματισμούς
  - (Υπάρχουν πάντως και άλλοι χρήσιμοι μετασχηματισμοί: προβολικοί μετασχηματισμοί, μη-γραμμικοί μετασχηματισμοί κλπ.)
- Είδαμε τι είναι η μέθοδος της παρεμβολής και εξετάσαμε τις πιο εύχρηστες μεθόδους