Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας (ΜΥΕ037)
Σημειώσεις που θα σας βοηθήσουν για την άσκηση 4 της 2ης σειράς ασκήσεων

Ακαδημαϊκό έτος: 2016-2017
Διδάσκων: Γιώργος Σφήκας

Απλή περίπτωση

Θεωρούμε το γινόμενο

$$x^T A y$$

όπου x είναι διάνυσμα μεγέθους $Mx1$, y είναι διάνυσμα μεγέθους $Nx1$, A είναι πίνακας μεγέθους MxN.

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα αυτής της πράξης είναι μεγέθους $1x1$. Επομένως δεν είναι πίνακας ή διάνυσμα, αλλά απλά ένας βαθμωτός. Αν κάνουμε τις πράξεις, θα πάρουμε

$$x^T A y = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j \tag{1}$$

Μπορούμε να το δούμε αυτό καλύτερα για μια συγκεκριμένη περίπτωση. Στην ειδική περίπτωση που $M = 2, N = 3$, μπορούμε να γράψουμε

$$x^T A y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{13}x_1y_3 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + a_{23}x_2y_3$$

$$= \sum_{i=1..2, j=1..3} a_{ij} x_i y_j$$

Περίπτωση όπου x,y είναι block πίνακες

Το προηγούμενο αποτέλεσμα (σχέση 1) μπορούμε να το εφαρμόσουμε και στην περίπτωση που τα x, y δεν είναι απλά διανύσματα, αλλά block πίνακες. Αντίστοιχα τα στοιχεία των x, y δεν θα είναι βαθμωτοί, όπως θεωρούμε κανονικά δηλαδή, αλλά θα είναι και αυτά διανύσματα. Σε αυτή την περίπτωση μπορουμε να γράψουμε

$$x^T A y = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^T \\ y_2^T \\ y_3^T \end{bmatrix}$$

όπου τώρα προσέξτε ότι τώρα θεωρούμε, αντίθετα με ό,τι θεωρήσαμε προηγούμενα, ότι x_1 και x_2 είναι διανύσματα μεγέθους $2x1$ και y_1, y_2, y_3 είναι διανύσματα μεγέθους $3x1$[1]

Επομένως, τα x, y μπορούμε να τα δουμε τώρα με δύο τρόπους:

- Είτε σαν πίνακες, αντίστοιχα μεγέθους $2x2$ και $3x3$. Κάθε στοιχείο τους είναι βαθμωτό.
- Είτε σαν block πίνακες, αντίστοιχα μεγέθους $1x2$ και $3x1$. Κάθε στοιχείο τους είναι διάνυσμα.

Το πλεονέκτημα που έχουμε στην δεύτερη περίπτωση είναι ότι μπορούμε χρησιμοποιήσουμε τον τύπο 1. Τότε ο τύπος μπορεί να γραφτεί

$$x^T A y = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j^T \tag{2}$$

Παρατηρήστε ότι στον τύπο 2 κάθε όρος του αθροίσματος ειναι γινόμενο ενός βαθμωτού (a_{ij}) και ενός πίνακα ($x_i y_j^T$). Στην περίπτωση που θεωρήσαμε, δηλαδή x_i είναι $2x1$ και y_j είναι $3x1$, ο πίνακας σε κάθε όρο του γινομένου θα είναι μεγέθους $2x3$.

[1] Γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε μέγεθος $lx1$ και $kx1$ αντίστοιχα.