Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

Η εικόνα στο πεδίο των συχνοτήτων

Γιώργος Σφήκας
sfikas@cs.uoi.gr

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διάλεξη θα δούμε πως μπορούμε να αναλύσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο της εικόνας

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διάλεξη θα δούμε πως μπορούμε να αναλύσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο της εικόνας

Συγκεκριμένα θα μιλήσουμε πρώτα τις 1Δ εκδοχές για τον:

- Συνεχή Μετασχηματισμό Fourier
- Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DFT)

Εισαγωγή

Σε αυτή τη διάλεξη θα δούμε πως μπορούμε να αναλύσουμε το συχνοτικό περιεχόμενο της εικόνας

Συγκεκριμένα θα μιλήσουμε πρώτα τις 1Δ εκδοχές για τον:

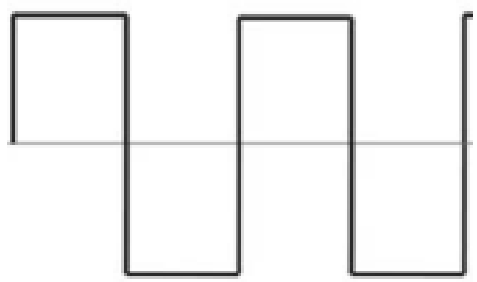
- Συνεχή Μετασχηματισμό Fourier
- Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier (DFT)

..και θα δούμε πως γενικεύονται για 2Δ διακριτά σήματα – τις ψηφιακές εικόνες

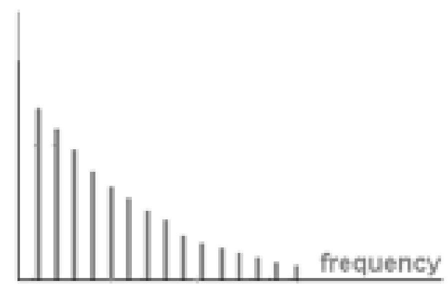
Η σειρά Fourier

Κάθε περιοδική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί σαν άθροισμα ημιτόνων και συνημιτόνων διαφορετικών συχνοτήτων, με το καθένα πολλαπλασιαμένο με διαφορετικό συντελεστή

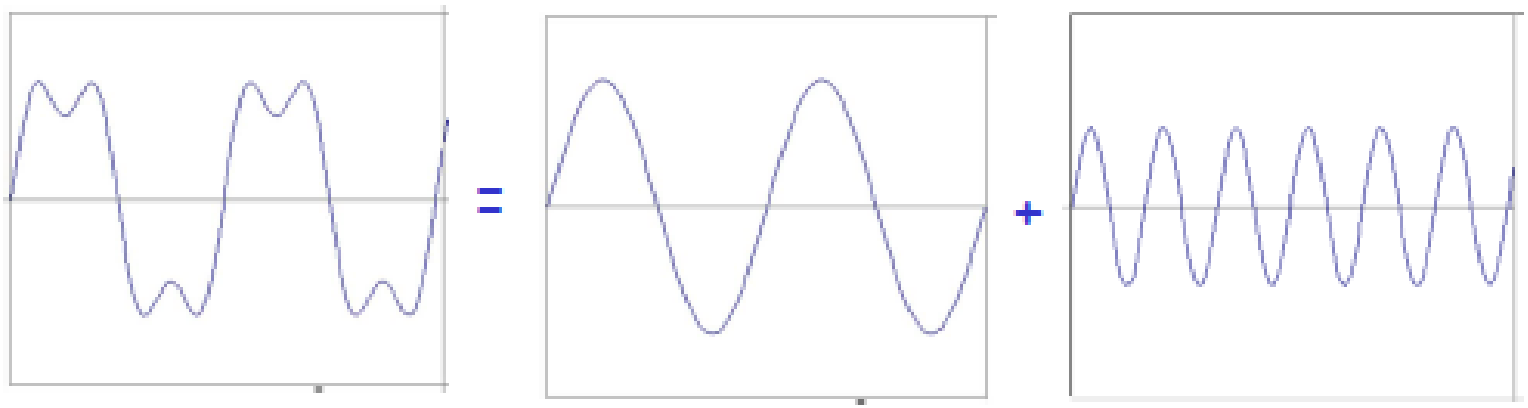
Η σειρά Fourier



$$= \quad f(x) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} \sin nx$$

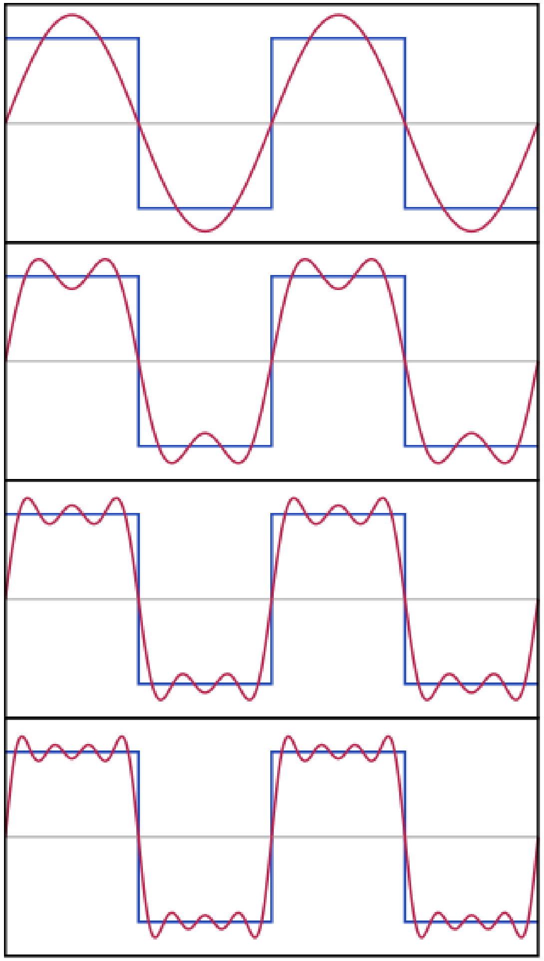


Η σειρά Fourier



$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots$$

Η σειρά Fourier



Η σειρά Fourier

Η έκφραση της σειράς Fourier με κλειστό τύπο

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Η σειρά Fourier – Παρένθεση: Ο τύπος του Euler

Ο τύπος του Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Η σειρά Fourier – Παρένθεση: Ο τύπος του Euler

Σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor: $f(x) = \sum_{n}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

..μπορούμε να γράψουμε:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Η σειρά Fourier – Παρένθεση: Ο τύπος του Euler

Σύμφωνα με το ανάπτυγμα Taylor: $f(x)=\sum_{n}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

..μπορούμε να γράψουμε:

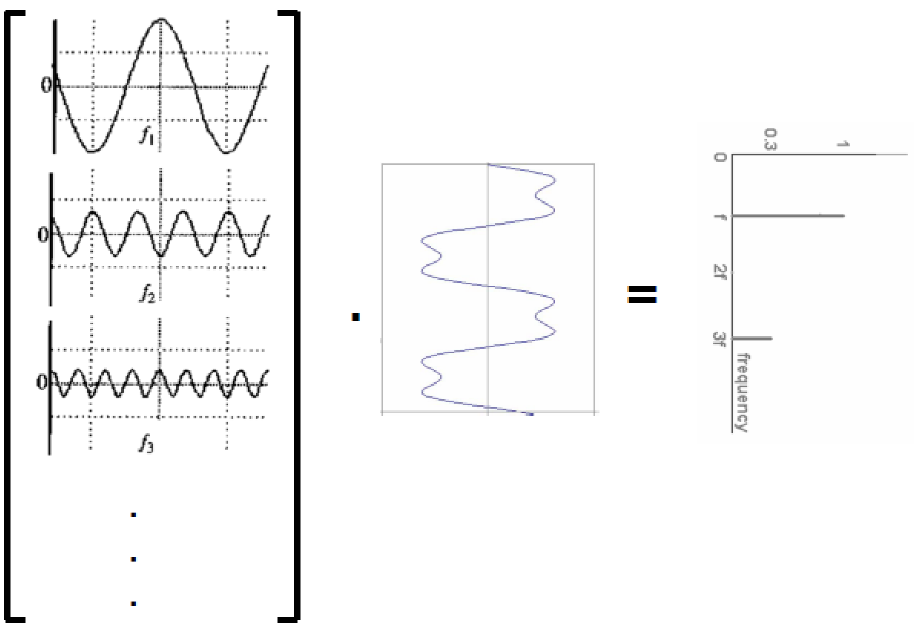
$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$e^{jx}=1+jx-\frac{x^2}{2!}-j\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+j\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{6!}-j\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

και προκύπτει ο τύπος του Euler αν συνδυάσουμε τις σχέσεις.

Η σειρά Fourier

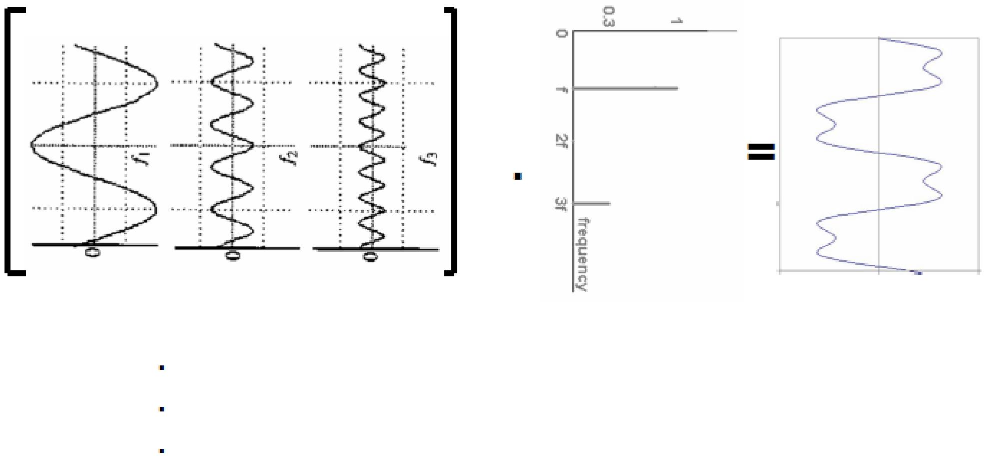
Μια αλλαγή αναπαράστασης ή αλλαγή βάσης..



$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt$$

Η σειρά Fourier

..παρομοίως και για την αντίστροφη διαδικασία



$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Ο (συνεχής) μετασχηματισμός Fourier

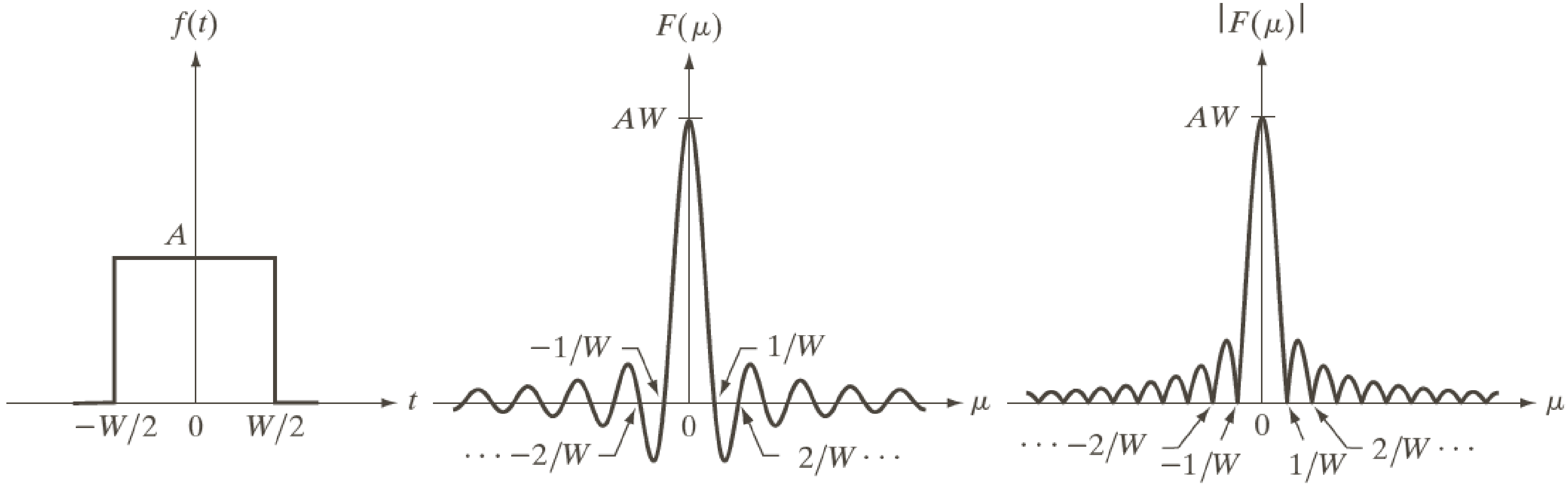
- Ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform) ενός συνεχούς σήματος $f(t)$.

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\mu t} dt$$

- Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu) e^{j2\pi\mu t} d\mu$$

Μετασχηματισμός Fourier: Παράδειγμα



a b c

FIGURE 4.4 (a) A simple function; (b) its Fourier transform; and (c) the spectrum. All functions extend to infinity in both directions.

$$f(t) = AP_{W/2}(t) \leftrightarrow F(\mu) = AW\frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)}$$

Συνέλιξη και Μετασχηματισμός Fourier

- Το θεώρημα της συνέλιξης για τον FT

$$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$f(t)*h(t) \leftrightarrow F(\mu)H(\mu)$$

$$f(t)h(t) \leftrightarrow F(\mu)*H(\mu)$$

Από το συνεχές στο διακριτό σήμα: Δειγματοληψία

- Η συνάρτηση δέλτα του Dirac ή κρουστικός παλμός, ή απλά ‘δέλτα’

$$\delta(x - x_0) = 0, \text{αν } x \neq x_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$$

Από το συνεχές στο διακριτό σήμα: Δειγματοληψία

- Η συνάρτηση δέλτα του Dirac ή κρουστικός παλμός, ή απλά ‘δέλτα’

$$\delta(x - x_0) = 0, \text{ αν } x \neq x_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) = 1$$

- Μας χρησιμεύει για να περάσουμε από το συνεχές στο διακριτό πεδίο
- Ιδιότητα της ‘επιλογής’

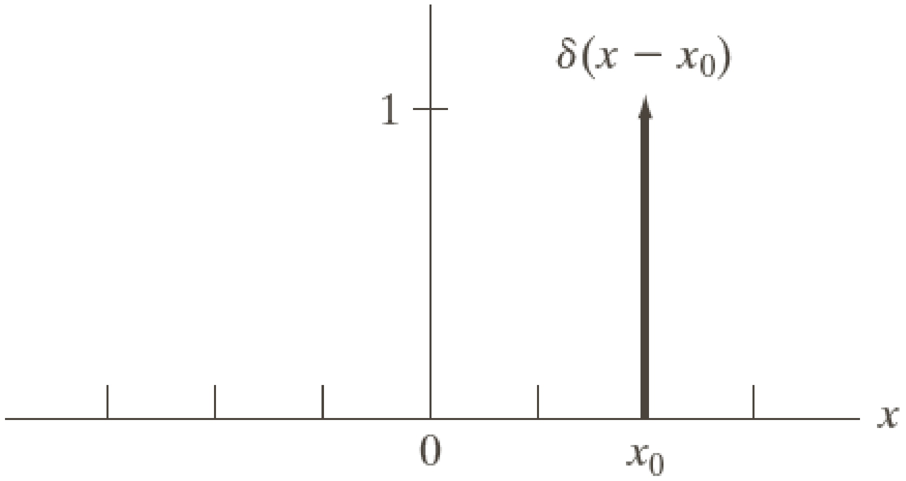
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

Από το συνεχές στο διακριτό σήμα: Δειγματοληψία

- Η διακριτή εκδοχή της ‘δέλτα’

$$\delta(x - x_0) = 0, \text{αν } x \neq x_0$$

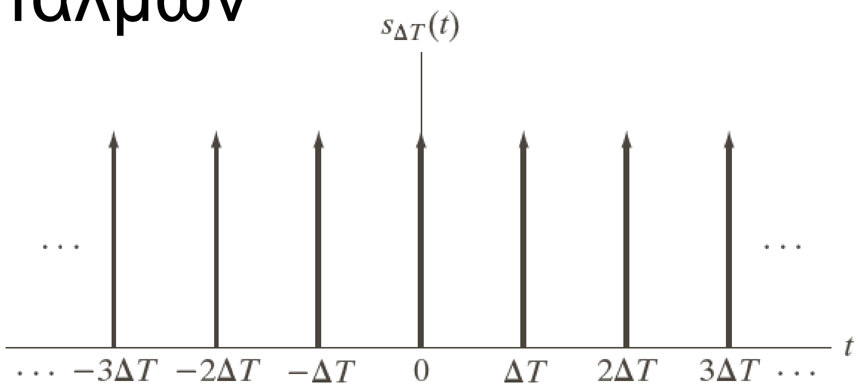
$$\delta(x - x_0) = 1, \text{αν } x = x_0$$



Από το συνεχές στο διακριτό σήμα: Δειγματοληψία

Συρμός κρουστικών παλμών

$$S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta T)$$



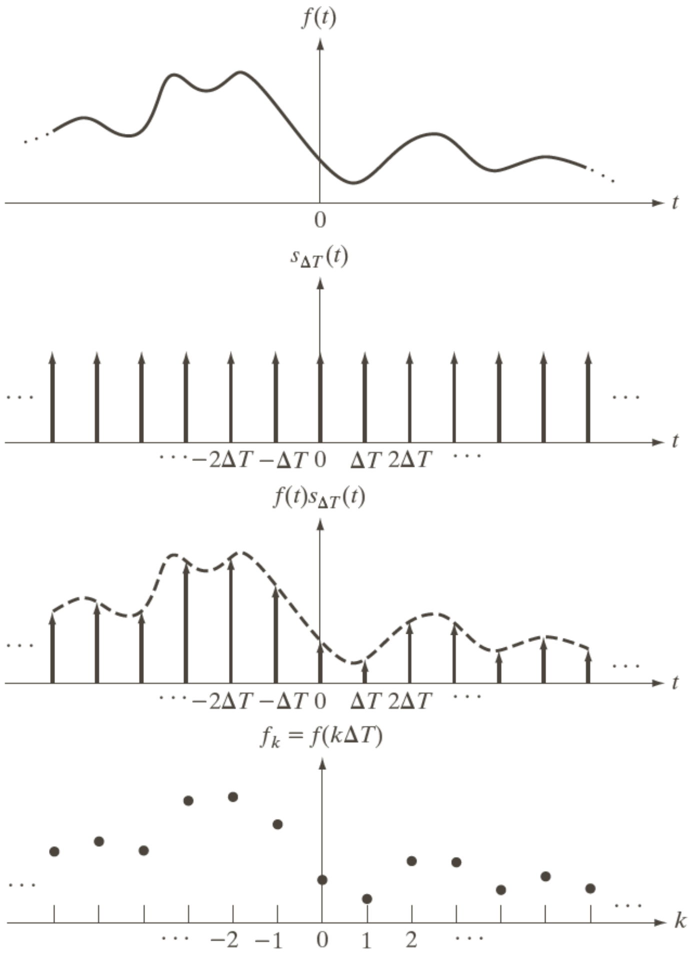
$$x[n] = x(t)S_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - n\Delta T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T)\delta(t - n\Delta T)$$

Από το συνεχές στο διακριτό σήμα: Δειγματοληψία

$$x[n] = x(t)S_{\Delta T}(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - n\Delta T)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta T)\delta(t - n\Delta T)$$



Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

- Αφού εκφράσουμε την δειγματοληψία σαν

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t)$$

Υπολογίζουμε τον FT του διακριτού σήματος:

$$\tilde{F}(\mu) = F(\mu) * S(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau)S(\mu - \tau)d\tau =$$

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

Υπολογίζουμε τον FT του διακριτού σήματος:

$$\tilde{F}(\mu) = F(\mu) * S(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau) d\tau =$$

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

Υπολογίζουμε τον FT του διακριτού σήματος:

$$\tilde{F}(\mu) = F(\mu) * S(\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\mu - \frac{n}{\Delta T})$$

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

- Όπου χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα:

$$S(\mu) = F\{s_{\Delta T}(t)\} =$$

$$F\{\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(j\frac{2\pi n}{\Delta T}t)\} =$$

$$\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F\{\exp(j\frac{2\pi n}{\Delta T}t)\} =$$

$$\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - \frac{n}{\Delta T})$$

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

- Δειγματοληψία => διακριτό σήμα
  - Το φάσμα του διακριτού σήματος αποτελείται από κλιμακωμένες επαναλήψεις του φάσματος τους συνεχούς σήματος. Οι επαναλήψεις έχουν περίοδο $1/\Delta T$.

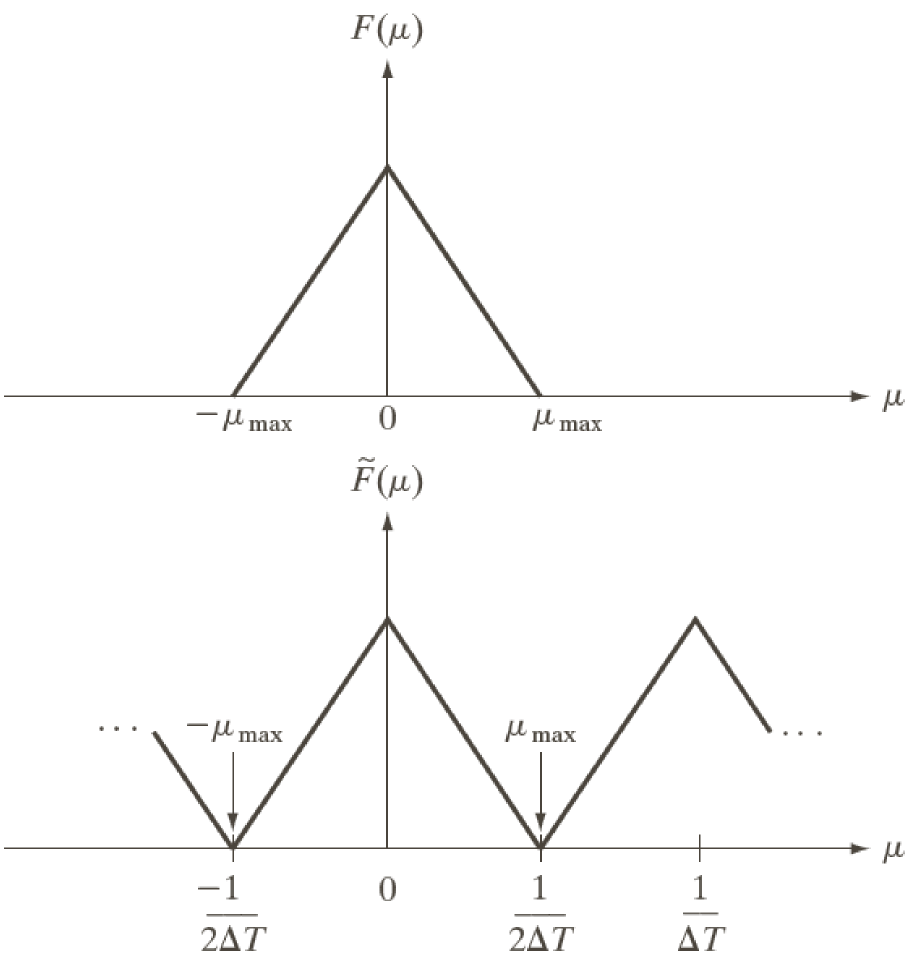
$$f(t) \leftrightarrow F(\mu)$$

$$\tilde{f}(n\Delta T) = f[n] \leftrightarrow \tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

Κριτήριο Nyquist

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{max}$$



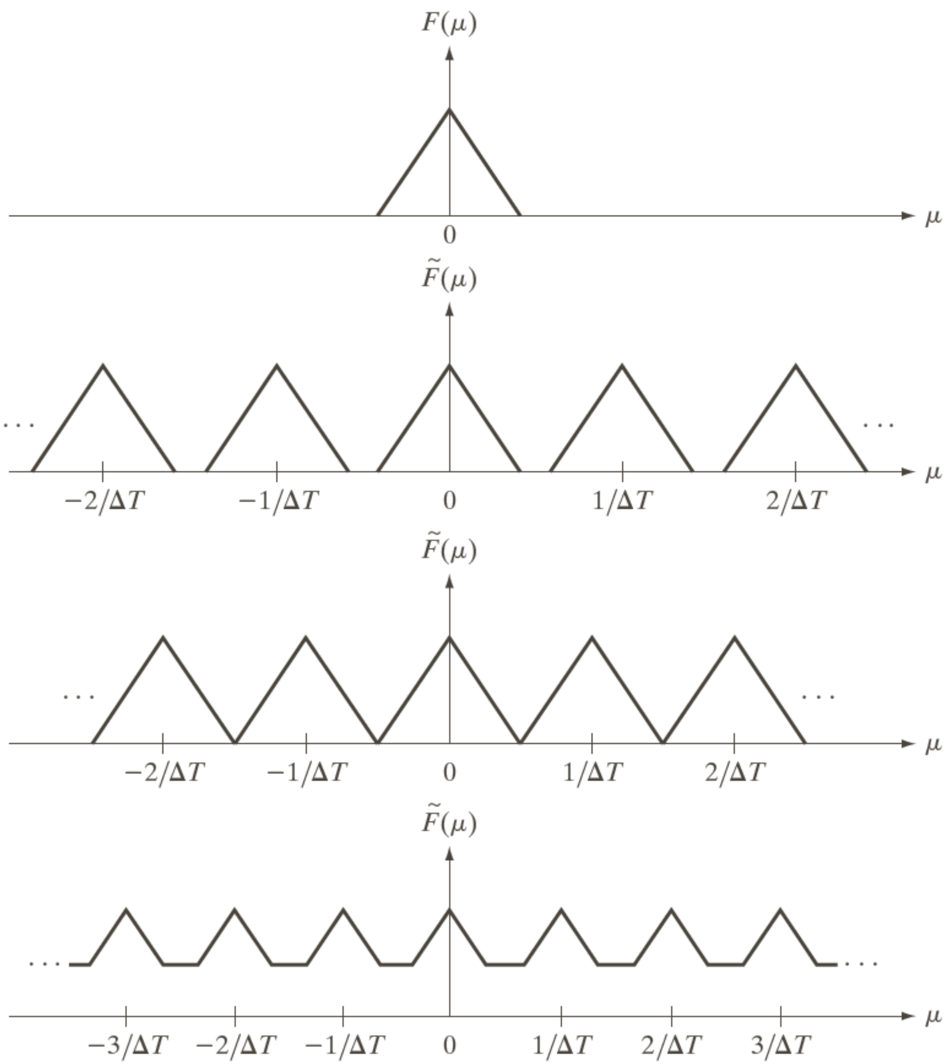
Συνεχής μετασχηματισμός Fourier διακριτού σήματος

FT συνεχούς σήματος

Καλή δειγματοληψία

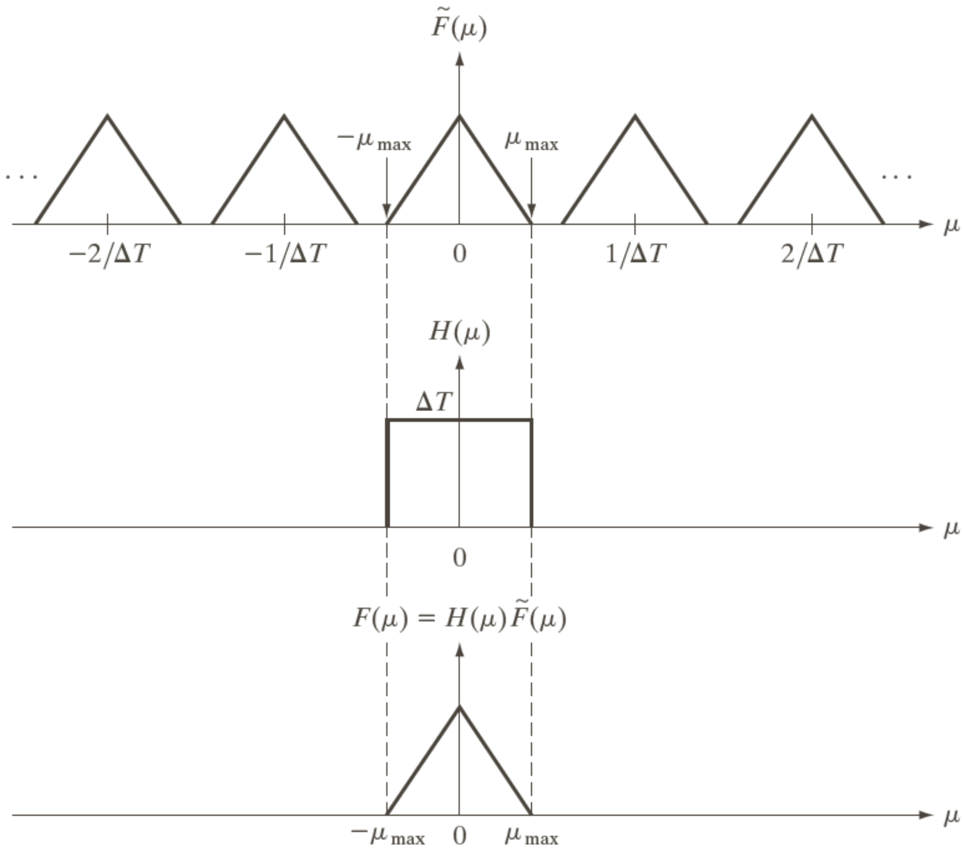
Δειγματοληψία οριακά στην συχνότητα Nyquist

Υποδειγματοληψία – Εμφανίζεται Aliasing



Ανακατασκευή του σήματος

$$F(\mu) = \tilde{F}(\mu)H(\mu)$$



Ανακατασκευή του σήματος

- Ανακατασκευή
  - Αν έχουμε καλή (κατά Nyquist) δειγματοληψία, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε ακριβώς το αρχικό σήμα

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n\Delta T)\,\mathrm{sinc}\left[\frac{(t - n\Delta T)}{n\Delta T}\right]$$

Ανακατασκευή του σήματος

- Aliasing: Η ανακατασκευή σε αυτή την περίπτωση δεν είναι σωστή.

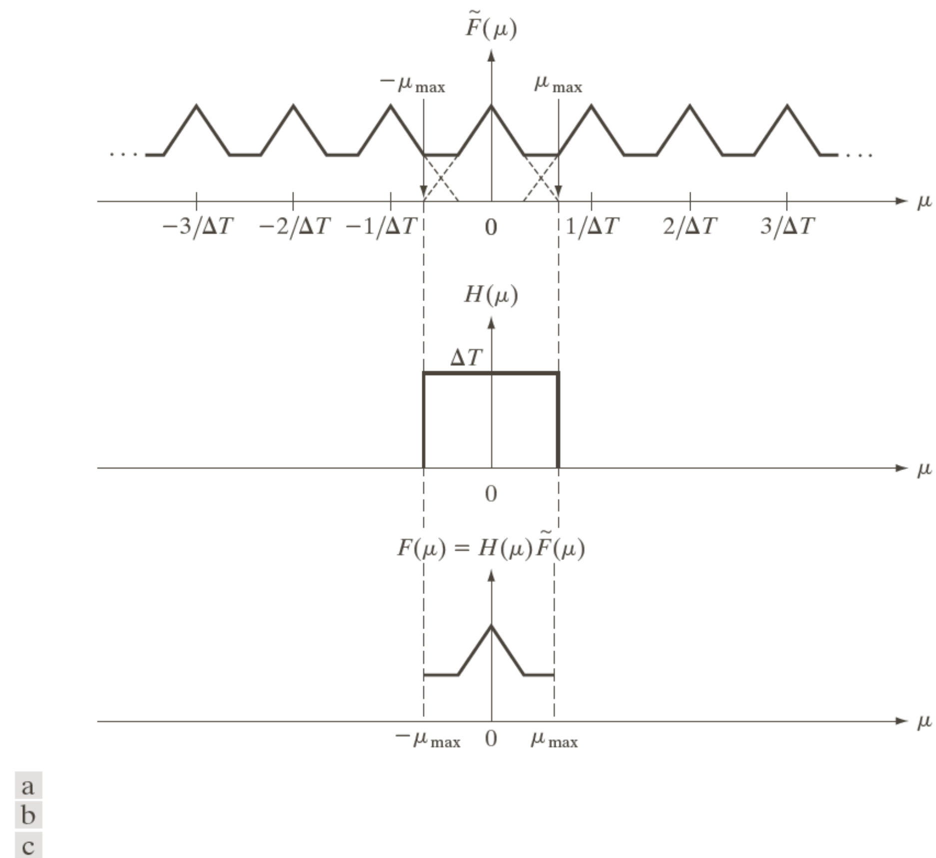


FIGURE 4.9 (a) Fourier transform of an under-sampled, band-limited function. (Interference from adjacent periods is shown dashed in this figure). (b) The same ideal lowpass filter used in Fig. 4.8(b). (c) The product of (a) and (b). The interference from adjacent periods results in aliasing that prevents perfect recovery of $F(\mu)$ and, therefore, of the original, band-limited continuous function. Compare with Fig. 4.8.

Ανακατασκευή του σήματος

Aliased signal

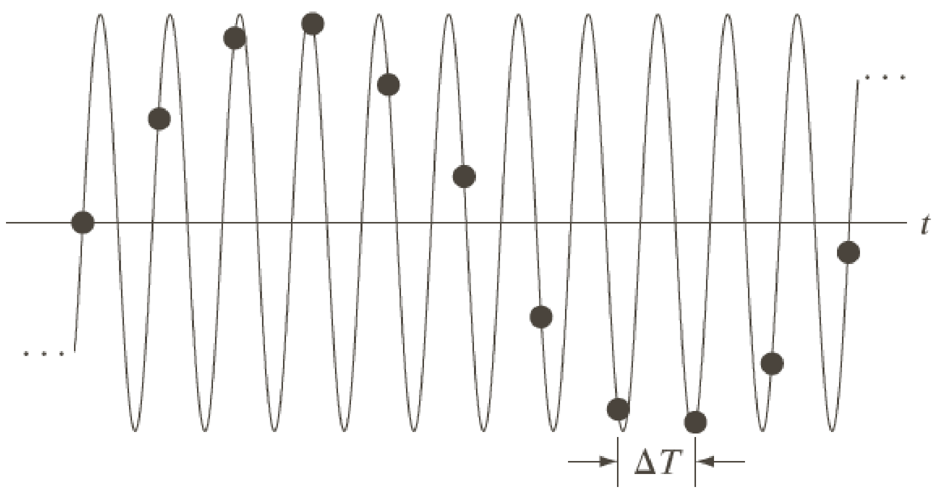


FIGURE 4.10 Illustration of aliasing. The under-sampled function (black dots) looks like a sine wave having a frequency much lower than the frequency of the continuous signal. The period of the sine wave is 2 s, so the zero crossings of the horizontal axis occur every second. ΔT is the separation between samples.

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Ο Fourier transform ενός διακριτού σήματος είναι μια συνεχής συνάρτηση της συχνότητας

$$\tilde{F}(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta\mathrm{T}) e^{-j2\pi\mu t} dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta\mathrm{T}) e^{-j2\pi\mu t} dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta\mathrm{T}}$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}$$

- Στην πραγματικότητα, για μήκος N του διακριτού σήματος, *μας αρκούν* N δείγματα του FT
- Αντικαθιστούμε..

$$\mu = \frac{k}{N\Delta T}, k = 0,1,2,\ldots N-1$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Το αποτέλεσμα ονομάζεται Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (Discrete Fourier Transform, DFT) του σήματος.

- DFT και αντίστροφος DFT σήματος $f[n]$ μήκους N:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}, \qquad 0 \leq k \leq N-1$$

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[k] e^{j\frac{2\pi nk}{N}}, \qquad 0 \leq n \leq N-1$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Περιοδικότητα
  - Ο DFT ενός σήματος $f[n]$ μήκους N είναι περιοδικός, με περίοδο N.

$$F[k+N] = F[k]$$

  - Αυτό φαίνεται και από την περιοδικότητα των συντελεστών:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

$$e^{-j\frac{2\pi n(k+N)}{N}} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N} - j2\pi n} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} e^{-j2\pi n} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Μπορούμε να γράψουμε

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- Επομένως πιο απλά έχουμε

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] w_N^{nk}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[k] w_N^{-nk}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Ο DFT σαν πολλαπλασιασμός πινάκων

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \cdots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \cdots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \cdots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \left[\, f[0], f[1], \ldots, f[N-1] \right]^T, \ \mathbf{F} = \left[F[0], F[1], \ldots, F[N-1] \right]^T$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Παράδειγμα πίνακα Fourier για N=4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Ο αντίστροφος DFT γράφεται σαν:

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{N}\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{T} = \frac{1}{N}\left(\begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \cdots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \cdots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \cdots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}^{*}\right)^{T}$$

Συνέλιξη και DFT: Παράδειγμα

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

$$g[n]=f[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]h[n-m]$$

Το αποτέλεσμα έχει μήκος N=N_1+N_2-1=4

Συνέλιξη και DFT: Παράδειγμα

$$f[n] = \{\underline{1},\ 2,\ 2\},\quad h[n] = \{\underline{1},\ -1\},\quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

$$g[n] = f[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]h[n-m]$$

	$f[m]$		1	2	2			$g[n]$
$n=0$	$h[0-m]$	-1	1				$\rightarrow$	1
$n=1$	$h[1-m]$		-1	1			$\rightarrow$	1
$n=2$	$h[2-m]$			-1	1		$\rightarrow$	0
$n=3$	$h[3-m]$				-1	1	$\rightarrow$	-2

$$g[n] = \{\underline{1},\ 1,\ 0,\ -2\}$$

Συνέλιξη και DFT

- Στην ανάλυση μας θεωρήσαμε ότι το σήμα, και επομένως και ο Fourier είναι εκτός από διακριτά και περιοδικά.
- Το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει πάλι, αλλά θεωρώντας πάντα τα σήματα περιοδικά.

Συνέλιξη και DFT

- Στην ανάλυση μας θεωρήσαμε ότι το σήμα, και επομένως και ο Fourier είναι εκτός από διακριτά και περιοδικά.
- Το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει πάλι, αλλά θεωρώντας πάντα τα σήματα περιοδικά.
- Θα ορίσουμε για δική μας ευκολία, πριν προχωρήσουμε: $x[(n-m)_N] = x[(n-m) \bmod N]$
- πχ: $x[n]$ is of length N=8.

$$x[(-2)_N] = x[(-2)_8] = x[6]$$

$$x[(10)_N] = x[(10)_8] = x[2]$$

Κυκλική συνέλιξη

- Ισοδύναμα, το θεώρημα της συνέλιξης ισχύει για την *κυκλική συνέλιξη*:

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

$$g[n]=f[n]✪h[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]h[(n-m)_N]$$

Το αποτέλεσμα είναι μήκους $N=\max\{N_1, N_2\}=3$

Κυκλική συνέλιξη

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

$$g[n]=f[n] \circledast h[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f[m]h[(n-m)_N]$$

	$f[m]$		1	2	2	$g[n]$
$n=0$	$h[(0-m)_N]$	-1	1		-1	-1
$n=1$	$h[(1-m)_N]$		-1	1		1
$n=2$	$h[(2-m)_N]$			-1	1	0

$$g[n]=\{-\underline{1},\ 1,\ 0,\}$$

Συνέλιξη και DFT

$$g[n]=f[n]\circledast h[n] \leftrightarrow G[k]=F[k]H[k]$$

- Η ιδιότητα ισχύει για την κυκλική συνέλιξη..

Συνέλιξη και DFT

$$g[n]=f[n]\circledast h[n] \leftrightarrow G[k]=F[k]H[k]$$

- Η ιδιότητα ισχύει για την κυκλική συνέλιξη..
- Όμως στις πρακτικές εφαρμογές της ΨΕΕ εμείς ενδιαφερόμαστε για την «κανονική» γραμμική συνέλιξη.

Συνέλιξη και DFT

$$g[n]=f[n]\star h[n] \leftrightarrow G[k]=F[k]H[k]$$

- Η ιδιότητα ισχύει για την κυκλική συνέλιξη..
- Όμως στις πρακτικές εφαρμογές της ΨΕΕ εμείς ενδιαφερόμαστε για την «κανονική» γραμμική συνέλιξη.
- Το ερώτημα είναι αν υπάρχει κάποια αντίστοιχη ιδιότητα για την γραμμική συνέλιξη.

Συνέλιξη και DFT

$$g[n]=f[n]✪h[n] \leftrightarrow G[k]=F[k]H[k]$$

Η λύση στο πρόβλημα είναι να κάνουμε **zero-padding**:

- Έστω $f[n]$ μήκους N_1 και $h[n]$ μήκους N_2.
- Τότε $g[n]=f[n]*h[n]$ είναι μήκους N_1+N_2-1.
- Αν κάνουμε zero-padding στο σήμα και τον πυρήνα της συνέλιξης ώστε να έχουν το καθένα μήκος $N=N_1+N_2-1$ τότε η κυκλική συνέλιξη θα ταυτίζεται με την γραμμική συνέλιξη:

$$\tilde{g}[n]=\tilde{f}[n]*\tilde{h}[n] \leftrightarrow \tilde{G}[k]=\tilde{F}[k]\tilde{H}[k]$$

Zero-padded σήματα

Συνέλιξη και DFT

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

Zero-padding ώστε μήκος N=N_1+N_2-1 =4

$$\tilde{f}[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2,\ 0\},\ \ \tilde{h}[n]=\{\underline{1},\ -1, 0, 0\}$$

$f[m]$				1	2	2	0	$g[n]$
$h[(n-0)_4]$	0	0	−1	1	0	0	−1	1
$h[(n-1)_4]$		0	0	−1	1	0	0	1
$h[(n-2)_4]$			0	0	−1	1	0	0
$h[(n-3)_4]$				0	0	−1	1	−2

Επομένως η κυκλική και η γραμμική συνέλιξη τώρα ταυτίζονται σαν πράξεις.

Συνέλιξη και DFT

Θα πραγματοποιήσουμε συνέλιξη « μέσω » DFT

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1-j2 \\ 1 \\ -1+j2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1+j \\ 2 \\ 1-j \end{bmatrix}$$

Συνέλιξη και DFT

$$\tilde{G}[k] = \tilde{F}[k]\tilde{H}[k]$$

Πολλαπλασιάζουμε όρο-όρο

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{F}} \times \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 5\times 0 \\ (-1-j2)\times(1+j) \\ 1\times 2 \\ (-1+j2)\times(1-j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-j3 \\ 2 \\ 1+j3 \end{bmatrix}$$

Συνέλιξη και DFT

Και τέλος παίρνουμε τον αντίστροφο DFT:

$$\tilde{g} = A^{-1}\tilde{G} = \frac{1}{4}\left(A^{*}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1-3j \\ 2 \\ 1+3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

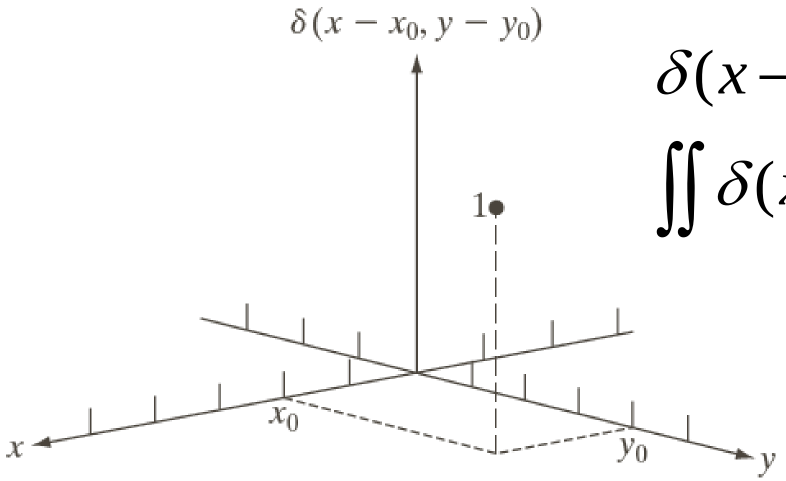
Συνέλιξη και DFT

Και τέλος παίρνουμε τον αντίστροφο DFT:

$$\tilde{g} = A^{-1}\tilde{G} = \frac{1}{4}\left(A^{*}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1-3j \\ 2 \\ 1+3j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό της γραμμικής συνέλιξης

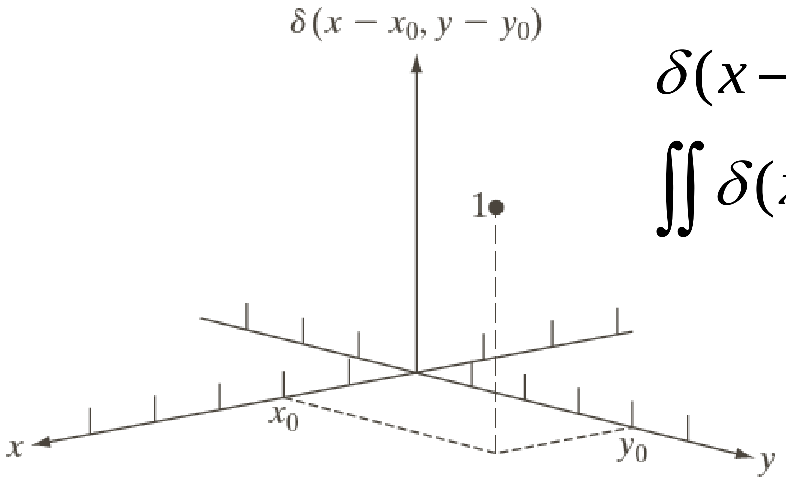
Η γενίκευση για 2Δ συνεχή σήματα



$$\delta(x - x_0, y - y_0) = 0 \quad \gamma\iota\alpha \ \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0 \ \text{ή} \ \mathrm{y} \neq \mathrm{y}_0$$

$$\iint \delta(x - x_0, y - y_0) = 1$$

Η γενίκευση για 2Δ συνεχή σήματα



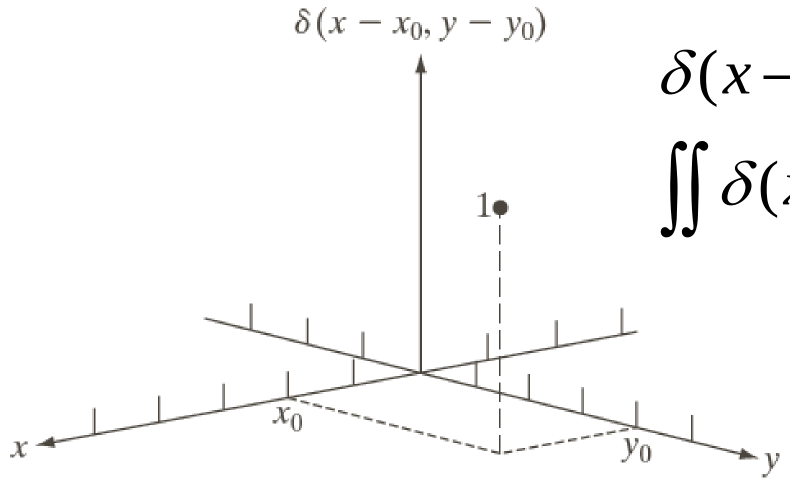
$$\delta(x - x_0, y - y_0) = 0 \quad \gamma\iota\alpha \ \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0 \ \text{ή} \ \mathrm{y} \neq \mathrm{y}_0$$

$$\iint \delta(x - x_0, y - y_0) = 1$$

Ιδιότητα της επιλογής για το 2Δ δ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x - x_0, y - y_0)dydx = f(x_0, y_0)$$

Η γενίκευση για 2Δ συνεχή σήματα



$$\delta(x-x_0, y-y_0)=0 \quad \gamma\iota\alpha \ \mathrm{x} \neq \mathrm{x}_0 \ \acute{\eta} \ \mathrm{y} \neq \mathrm{y}_0$$

$$\iint \delta(x-x_0, y-y_0)=1$$

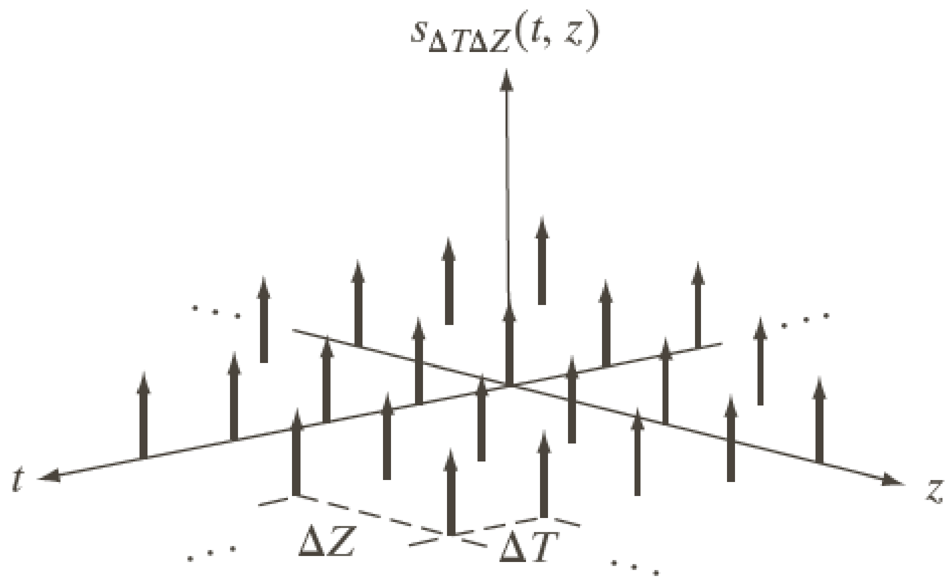
Ιδιότητα της επιλογής για το 2Δ δ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x-x_0, y-y_0)dydx = f(x_0, y_0)$$

Διαχωρισιμότητα του 2Δ δ:

$$\delta(x-x_0, y-y_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$$

Η γενίκευση για 2Δ συνεχή σήματα



Ο 2Δ κρουστικός συρμός είναι επίσης διαχωρίσιμος:

$$S_{\Delta X \Delta Y}(x, y) = S_{\Delta X}(x) S_{\Delta Y}(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta X, y - n\Delta Y)$$

2D Fourier Transform

- Ο συνεχής μετασχηματισμός Fourier transform ενός συνεχούς 2Δ σήματος $f(x,y)$.

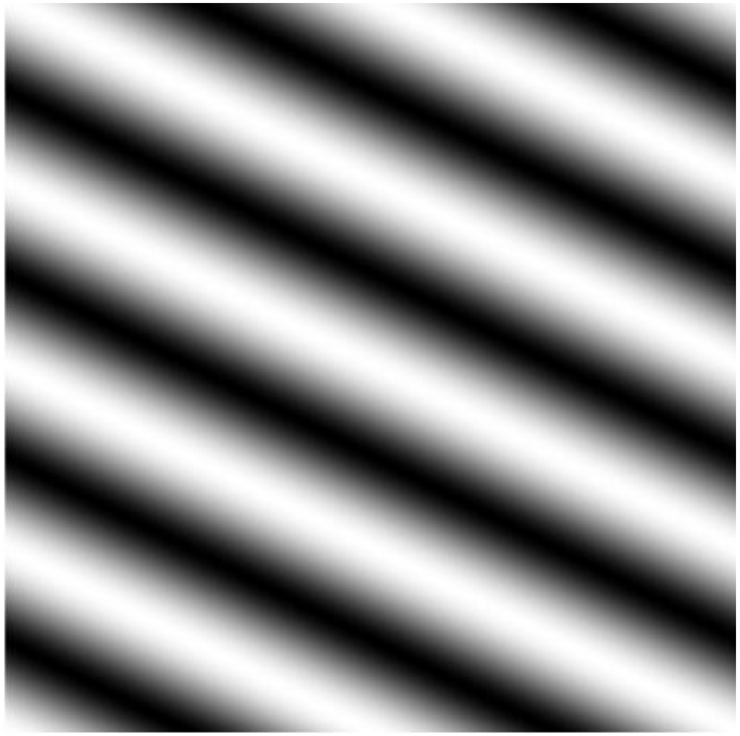
$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(\mu x+\nu y)}dydx$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu,\nu)e^{j2\pi(\mu x+\nu y)}d\nu d\mu$$

2D Fourier Transform

- Παράδειγμα συναρτήσεων βάσης του 2D Μετασχηματισμού (πραγματικό μέρος):

$$e^{-j2\pi(\mu x+vy)}$$



2D Fourier Transform

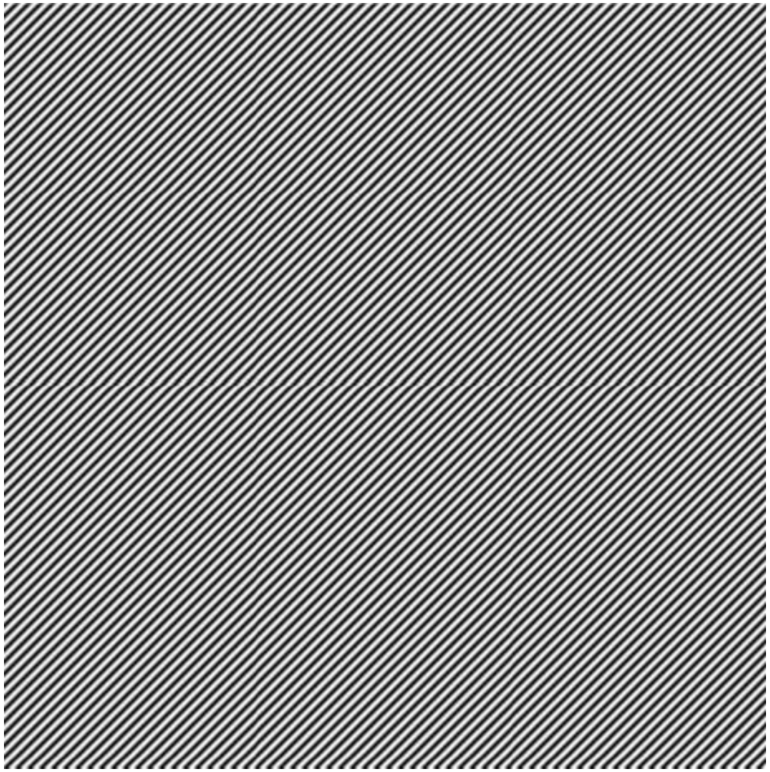
- Παράδειγμα συναρτήσεων βάσης του 2D Μετασχηματισμού (πραγματικό μέρος):

$$e^{-j2\pi(\mu x+vy)}$$

2D Fourier Transform

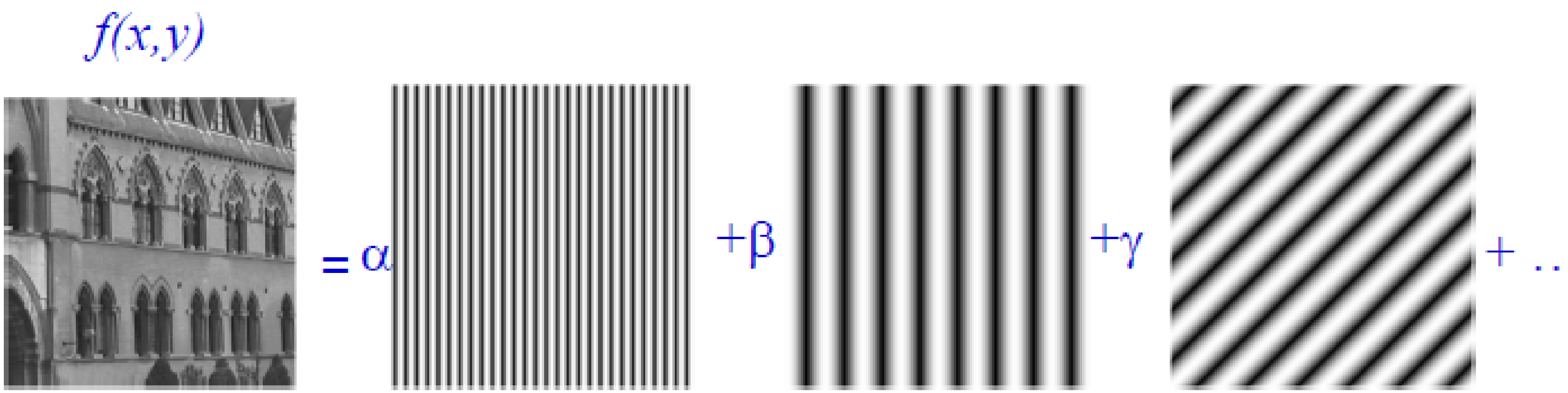
- Παράδειγμα συναρτήσεων βάσης του 2D Μετασχηματισμού (πραγματικό μέρος):

$$e^{-j2\pi(\mu x+\nu y)}$$



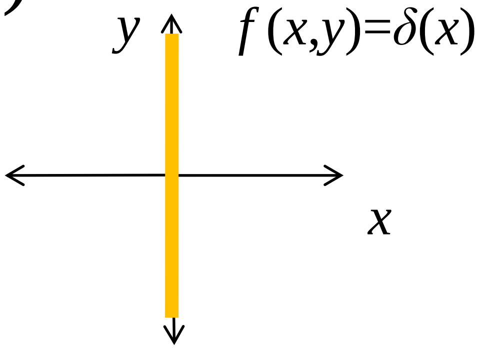
2D Fourier Transform

- Παράδειγμα:



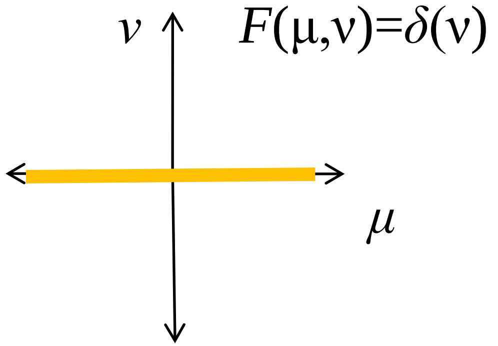
2D Fourier Transform

- Παράδειγμα: FT του $f(x,y)=\delta(x)$



$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-j2\pi(\mu x+\nu y)}dydx$$

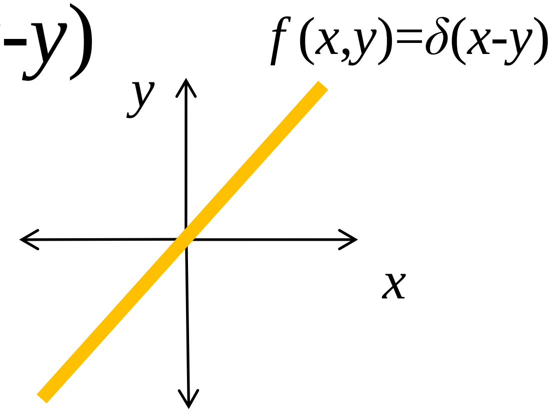
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)e^{-j2\pi\mu x}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi\nu y}dy$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi\nu y}dy \quad =\delta(\nu)$$

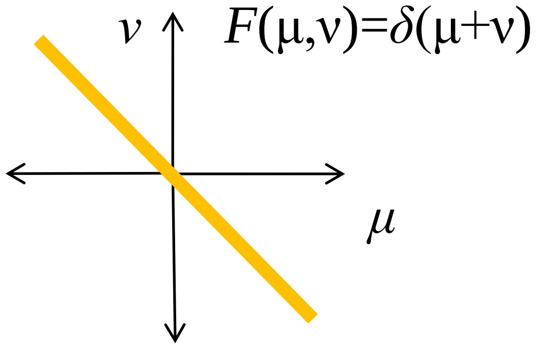
2D Fourier Transform

- Παράδειγμα: FT για $f(x,y)=\delta(x-y)$



$$F(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-y)e^{-j2\pi(\mu x+\nu y)}dydx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-y)e^{-j2\pi\mu x}dx\right]e^{-j2\pi\nu y}dy$$



$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi\mu y}e^{-j2\pi\nu y}dy=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi(\mu+\nu)y}dy$$

$$=\delta(\mu+\nu)$$

2D Fourier Transform

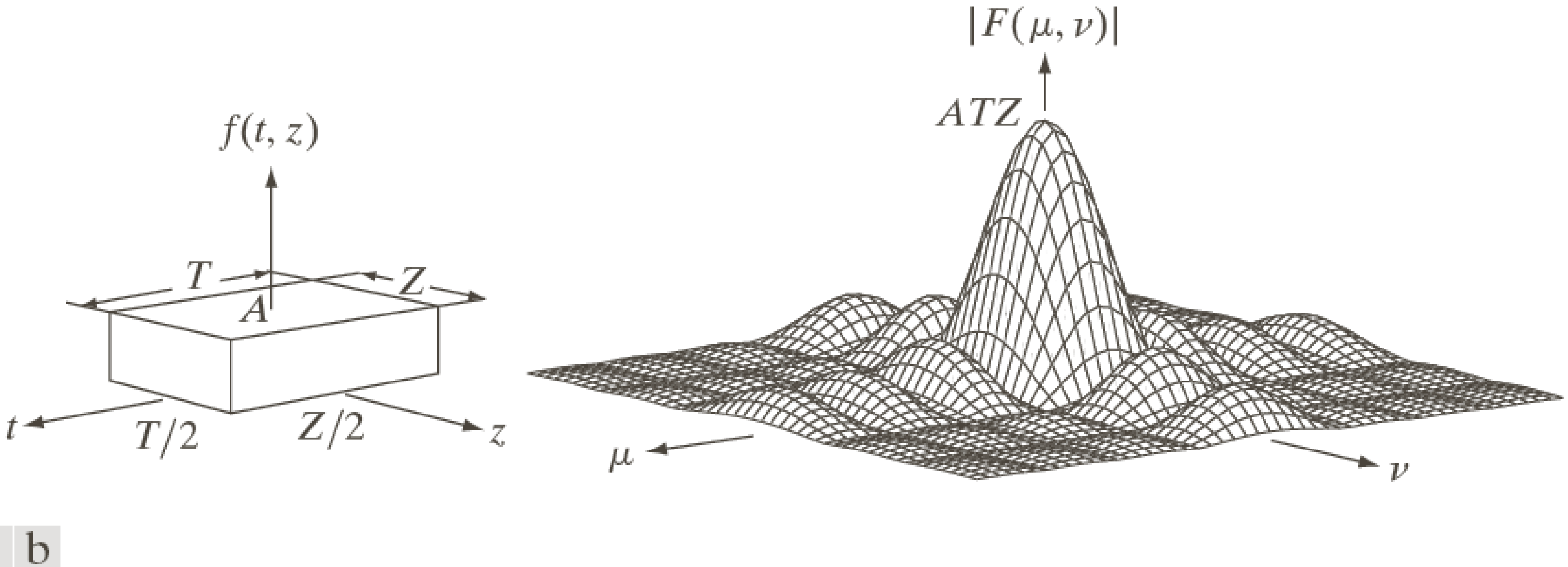


FIGURE 4.13 (a) A 2-D function, and (b) a section of its spectrum (not to scale). The block is longer along the t-axis, so the spectrum is more "contracted" along the μ-axis. Compare with Fig. 4.4.

$$f(x,y) = \mathrm{A}\,P_{W/2,W/2}(x,y) \leftrightarrow F(\mu,\nu) = \mathrm{A}W^2 \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \frac{\sin(\pi\nu W)}{(\pi\nu W)}$$

2D Fourier Transform

- 2D συνέλιξη συνεχών σημάτων

$$f(x,y)*h(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\alpha,y-\beta)h(\alpha,\beta)d\alpha d\beta$$

- Ισχύει αντίστοιχα με την 1Δ περίπτωση, η ιδιότητα

$$f(x,y)*h(x,y) \leftrightarrow F(\mu,\nu)H(\mu,\nu)$$

2D Fourier Transform

- 2Δ δειγματοληψία με τον κρουστικό συρμό

$$S_{\Delta X \Delta Y}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(x - n\Delta X, y - n\Delta Y)$$

2D Fourier Transform

- 2Δ δειγματοληψία με τον κρουστικό συρμό

$$S_{\Delta X \Delta Y}(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(x-n\Delta X\,,y-n\Delta Y)$$

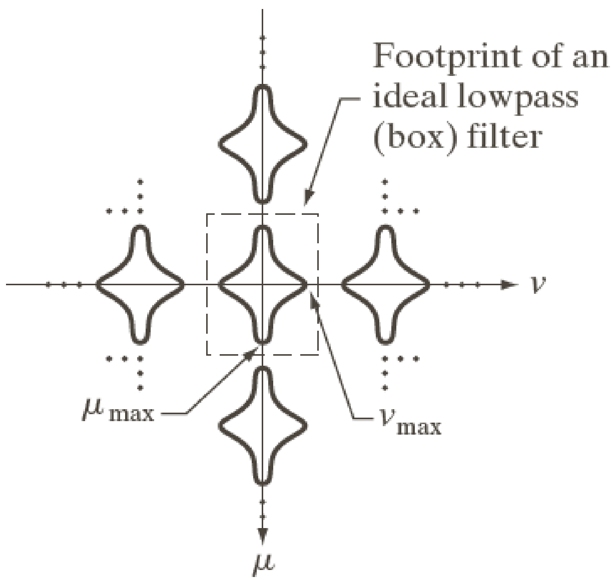
- Αντίστοιχα, ο FT του σήματος μετά την δειγματοληψία αποτελείται από επαναλήψεις του φάσματος του συνεχούς σήματος.

$$\tilde{F}(\mu,\nu)=\frac{1}{\Delta X}\frac{1}{\Delta Y}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F\left(\mu-\frac{m}{\Delta X},\nu-\frac{n}{\Delta Y}\right)$$

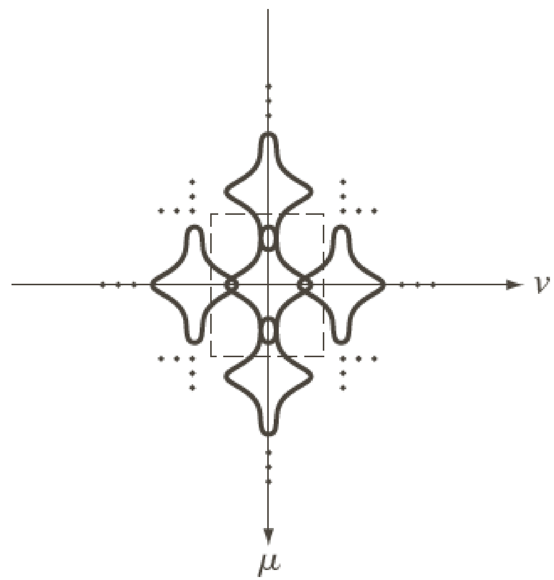
2D Fourier Transform

- Το θεώρημα Nyquist αφορά τώρα τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες συχνότητες

$$\frac{1}{\Delta X} > 2\mu_{\max}, \frac{1}{\Delta Y} > 2\nu_{\max}$$

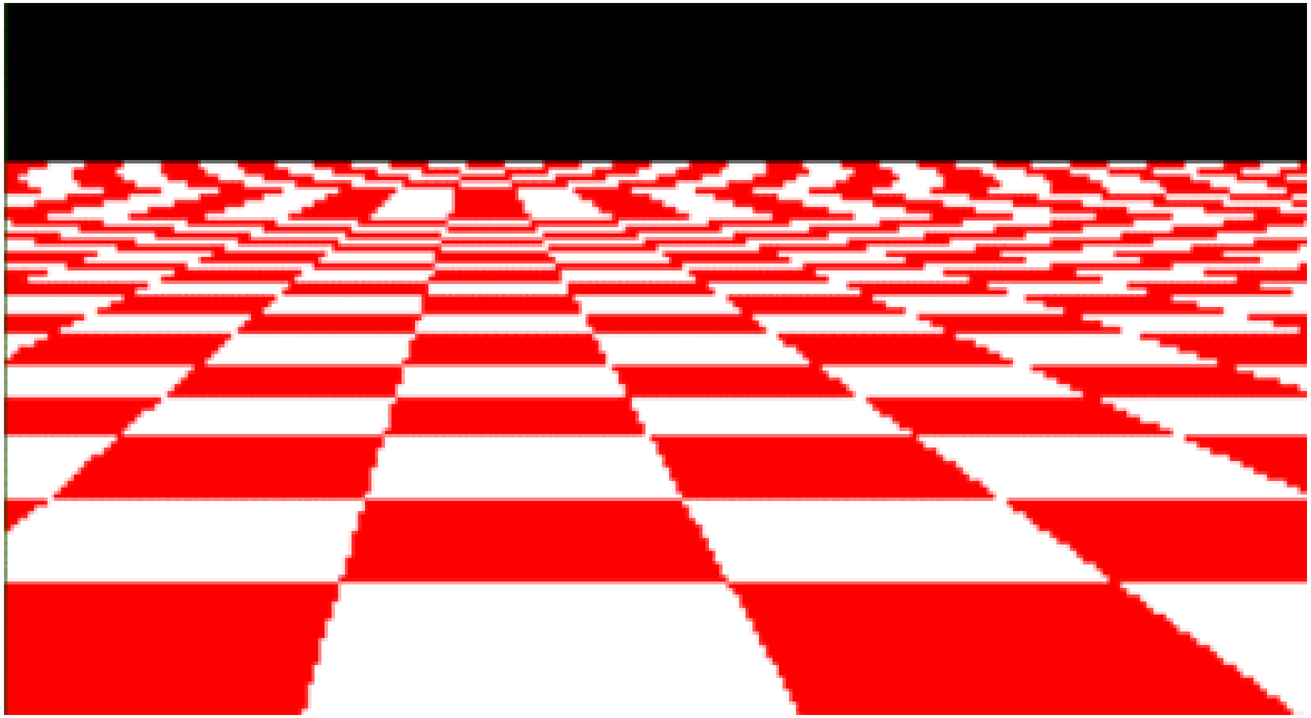


Over-sampled

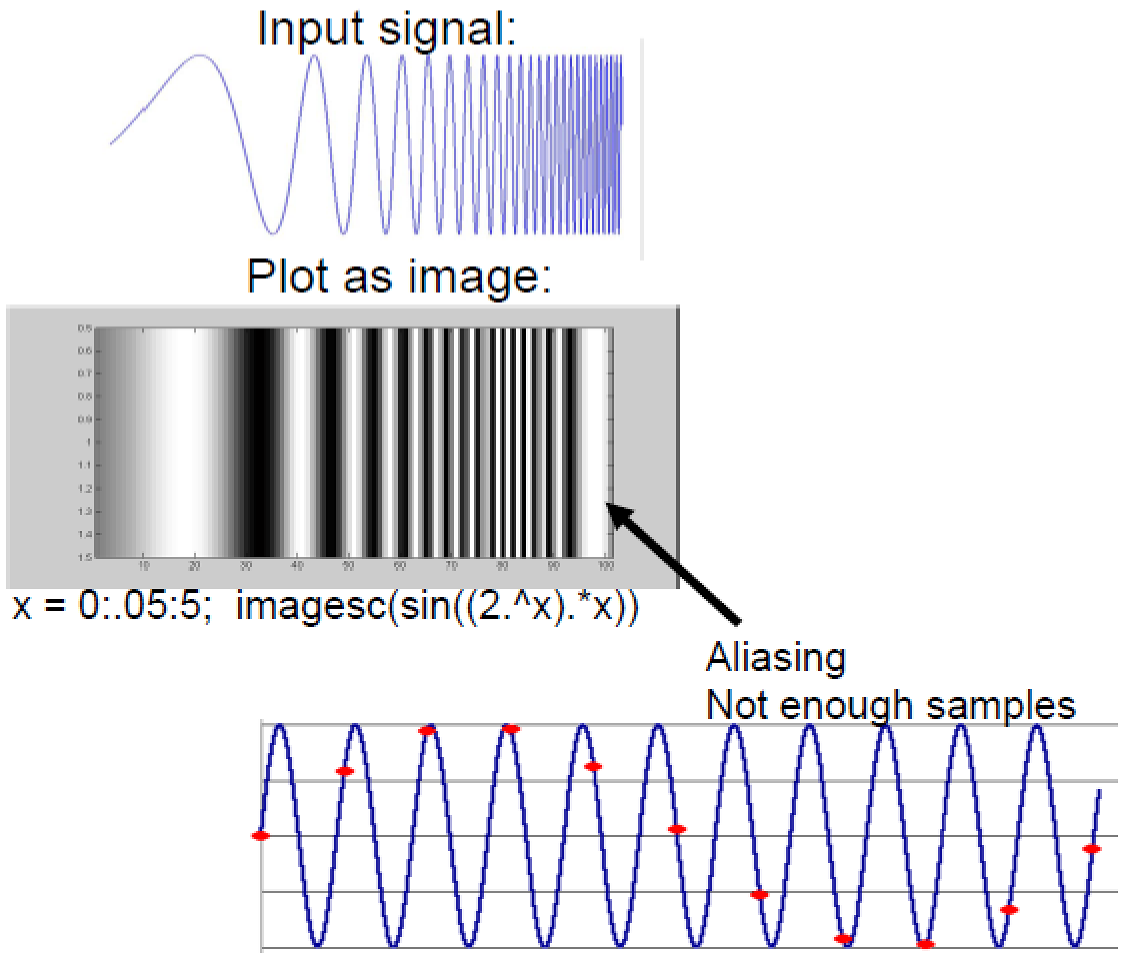


Under-sampled

Aliasing



Aliasing

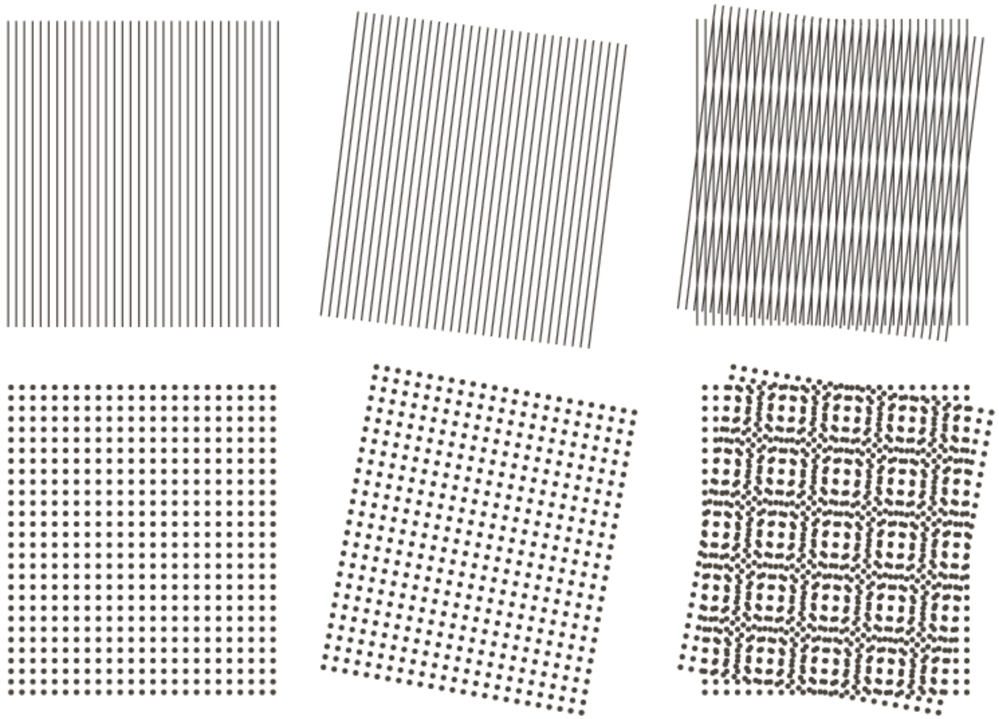

Input signal:
Plot as image:
x = 0:.05:5; imagesc(sin((2.^x).*x))
Aliasing
Not enough samples

Aliasing – Μοτίβα Moiré

- Υπάρχουν σαν αποτέλεσμα δειγματοληψίας μιας σκηνής που περιέχει περιοδικά ή σχεδόν περιοδικά στοιχεία (π.χ. Υπερτεθιμένα πλέγματα).
- Το πρόβλημα φαίνεται έντονα όταν έχουμε να κάνουμε ψηφιοποίηση τυπωμένου υλικού (π.χ. Εφημερίδες, περιοδικά)

Aliasing – Μοτίβα Moiré

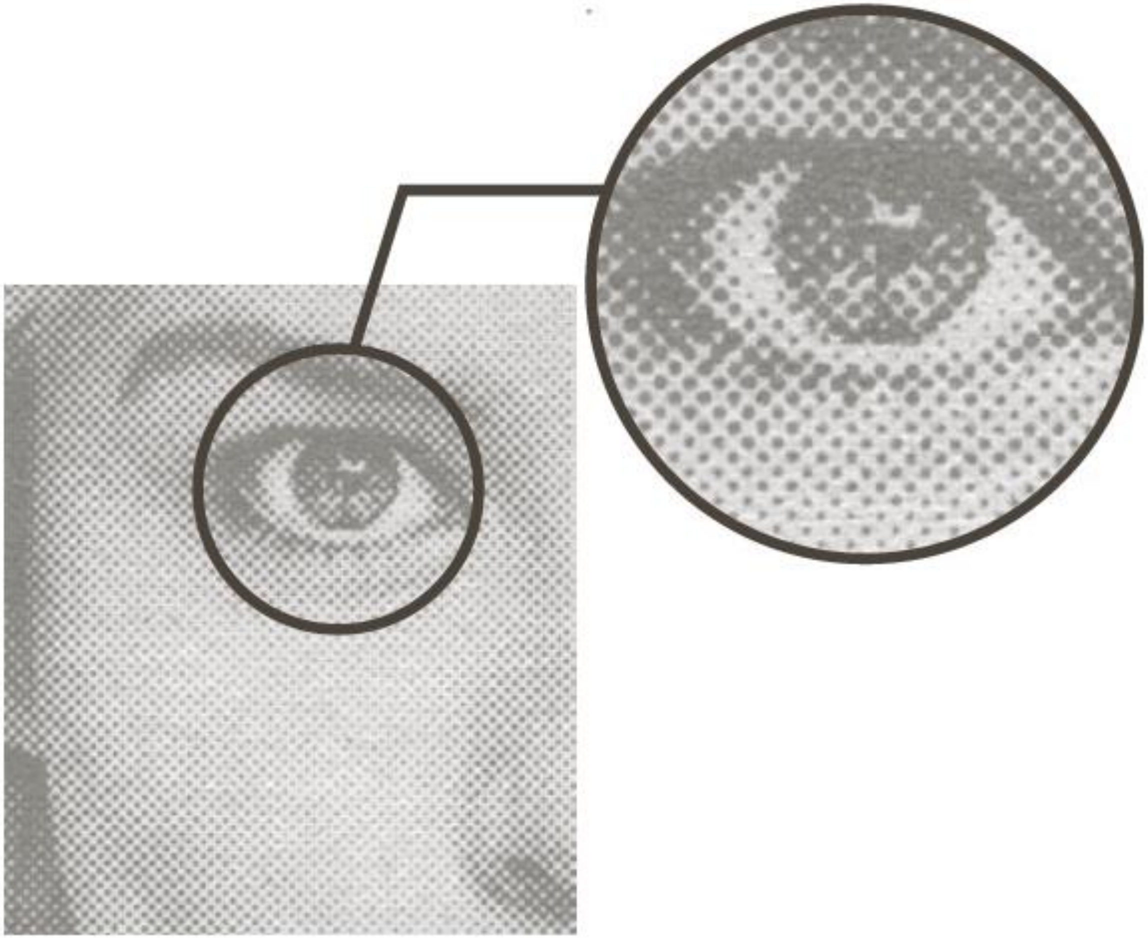
- Παράδειγμα: Η υπέρθεση πλεγμάτων προκαλεί την εμφάνιση νέων συχνοτήτων που δεν υπήρχαν στα αρχικά συστατικά πλέγματα.



Aliasing – Μοτίβα Moiré

FIGURE 4.21 A newspaper image of size 246 × 168 pixels sampled at 75 dpi showing a moiré pattern. The moiré pattern in this image is the interference pattern created between the ±45° orientation of the halftone dots and the north–south orientation of the sampling grid used to digitize the image.

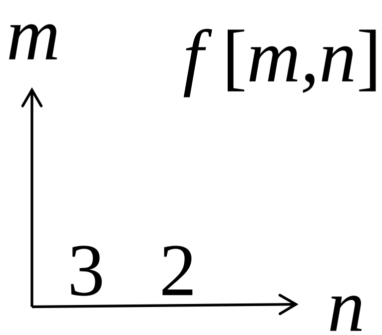
Aliasing – Μοτίβα Moiré

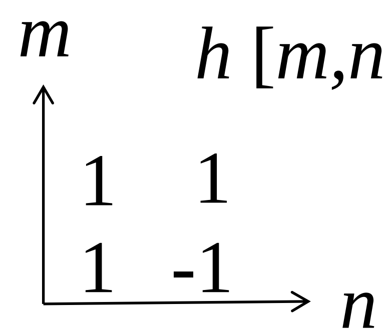


Anti-aliasing

- Πως αντιμετωπίζουμε το aliasing ;
  - Είτε αυξάνοντας την συχνότητα της δειγματοληψίας
  - Είτε αποκόπτωντας τις υψηλότερες συχνότητες, ώστε να ‘πέσουμε’ κάτω από το όριο Nyquist

2Δ διακριτή συνέλιξη

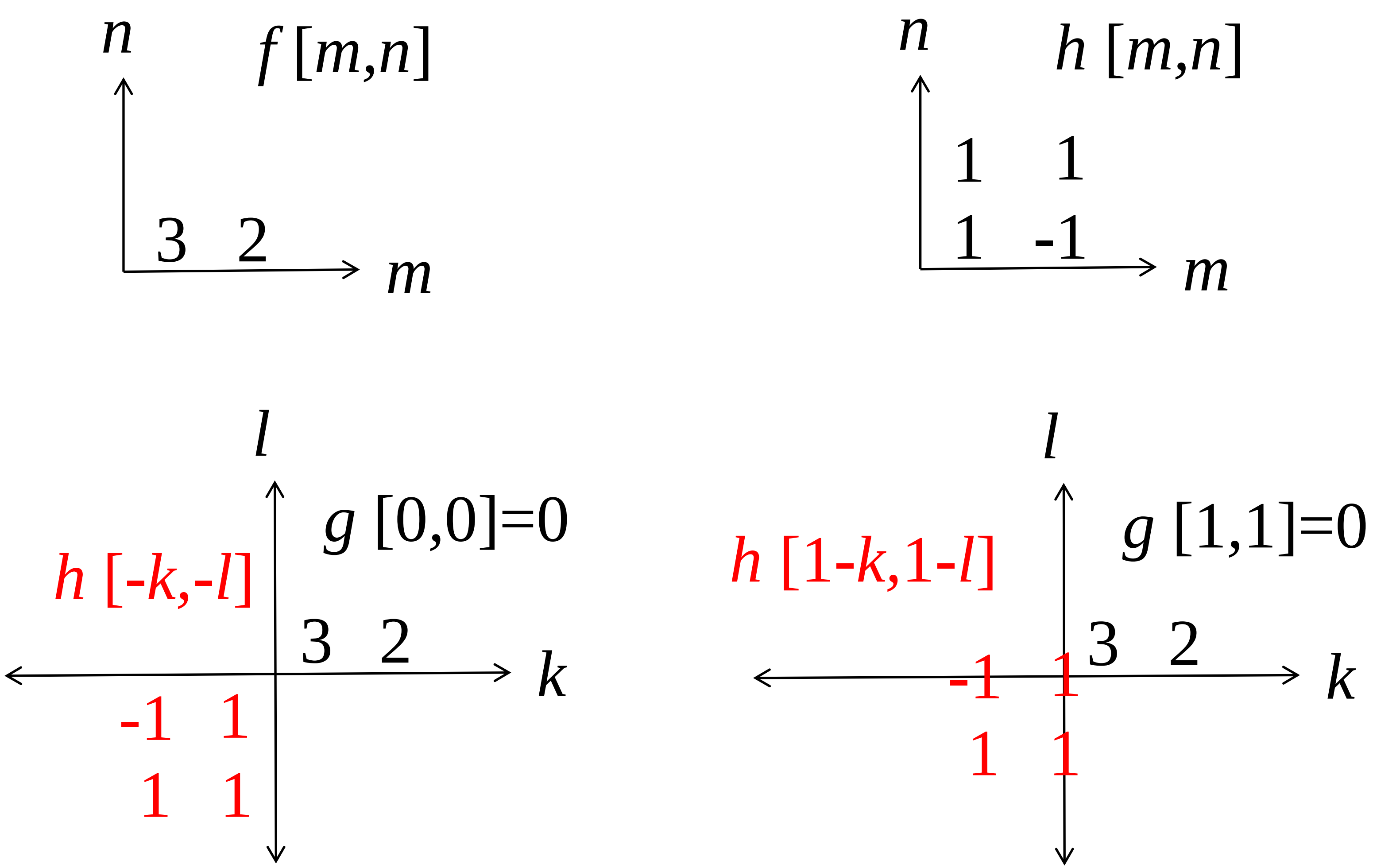




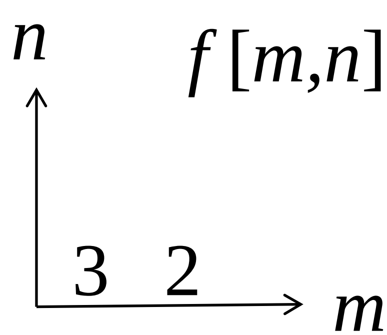
$$g[m,n] = f[m,n] * h[m,n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f[k,l] h[m-k,n-l]$$

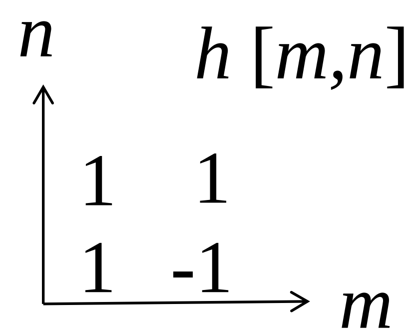
- Παίρνουμε το συμμετρικό του ενός σήματος.
- Το μετακινούμε και υπολογίζουμε το άθροισμα σε κάθε θέση $[m,n]$.

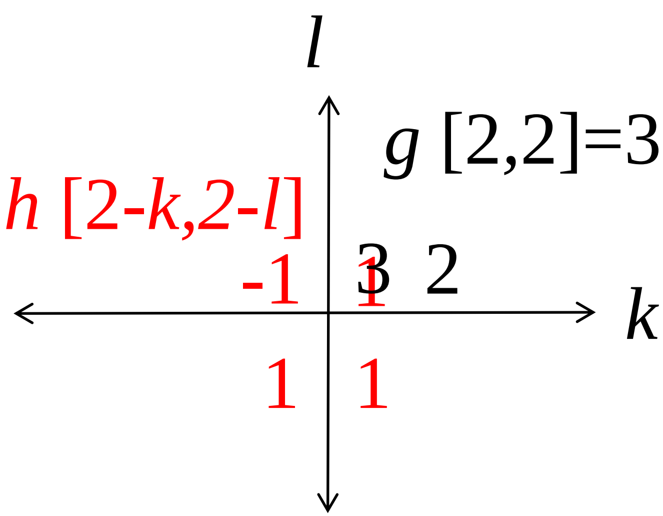
2Δ διακριτή συνέλιξη

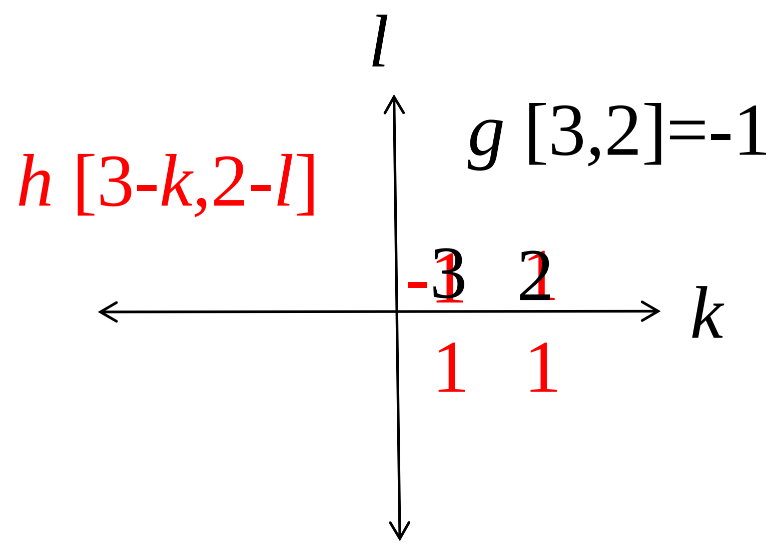


2Δ διακριτή συνέλιξη









2Δ διακριτή συνέλιξη

$f[m,n]$

$$\begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array}$$

$h[m,n]$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}$$

$g[m,n]$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{array}$$

$M_1+M_2-1=3$

$N_1+N_2-1=2$

Ο 2Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2D DFT)

- 2Δ DFT και αντίστροφος DFT (Inverse DFT, IDFT) ψηφ.εικόνας $f[m,n]$ μεγέθους MxN.

$$F[k,l]=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f[m,n]e^{-j2\pi\left(\frac{km}{M}+\frac{ln}{N}\right)}$$

$$f[m,n]=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} F[k,l]e^{j2\pi\left(\frac{km}{M}+\frac{ln}{N}\right)}$$

$$\begin{cases} 0\le k\le M-1 \\ 0\le l\le N-1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 0\le m\le M-1 \\ 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

Ο 2Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2D DFT)

- Διαχωρισιμότητα του 2Δ DFT
  - Μπορούμε να εκφράσουμε τον 2Δ DFT σαν δύο 1Δ DFT:
  - 1Δ DFT πρώτα κατά στήλες και μετά κατά γραμμές (ή πρώτα κατά γραμμές και μετά κατά στήλες)

Ο 2Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2D DFT)

- Ο 2Δ DFT αναπαρίσταται σαν πολλαπλασιασμός πινάκων

Ο 2Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2D DFT)

- Ο 2Δ DFT αναπαρίσταται σαν πολλαπλασιασμός πινάκων
- Θυμηθείτε ότι για τον 1Δ DFT ισχύει:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \cdots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \cdots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \cdots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}$$

Ο 2Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2D DFT)

- Ο 2Δ DFT αναπαρίσταται σαν πολλαπλασιασμός πινάκων
- Αντίστοιχα για 2Δ DFT, χρησιμοποιούμε τον *ίδιο* πίνακα A και γράφουμε:

$$F = \mathrm{A} f \mathrm{A}$$

- Όπου τώρα F, f είναι NxN πίνακες

Ο 2Δ Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (2D DFT)

- Οι ιδιότητες του 1Δ DFT ισχύουν και για τον 2Δ DFT
- Για παράδειγμα:
  - Έστω $f[m,n]$ μεγέθους $M_1 \mathrm{x} N_1$ και $h[m,n]$ μήκους $M_2 \mathrm{x} N_2$.
  - Αν κάνουμε zero-padding ώστε το μέγεθος του σήματος να γίνει $(M_1+M_2\text{-}1)\mathrm{x}(N_1+N_2\text{-}1)$ η κυκλική συνέλιξη ταυτίζεται με την γραμμική:

$$\tilde{g}[m,n] = \tilde{f}[m,n] * \tilde{h}[m,n] \leftrightarrow \tilde{G}[k,l] = \tilde{F}[k,l]\tilde{H}[k,l]$$

Συνοψίζοντας

- Τα *πιο* σημαντικά σημεία αυτής της διάλεξης ήταν:
  - Ο μετασχηματισμός Fourier είναι μια αλλαγή βάσης
  - Η γενίκευση για 2Δ σήματα
  - Το θεώρημα της συνέλιξης
  - Το θεώρημα-κριτήριο του Nyquist
  - Ο DFT και ο αντίστροφος DFT
  - Η αναπαράσταση του DFT σαν πολλαπλασιασμός πινάκων