# Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

## Η συνέλιξη σαν πίνακας: Κυκλοτικοί πίνακες

Γιώργος Σφήκας
sfikas@cs.uoi.gr

# Περιεχόμενα

- Θα μιλήσουμε για κάποιες ειδικές κατηγορίες πινάκων:
  - τους Toeplitz πίνακες
  - τους κυκλοτικούς πίνακες
  - τις ‘block’-εκδοχές των Toeplitz / κυκλοτικών
- Πως βοηθούν στο να εκφράσουμε μια συνέλιξη με πράξεις πινάκων
- Ιδιότητες κυκλοτικών πινάκων

# Πίνακες Toeplitz

- Η κύρια διαγώνιος, όπως και οι άλλες διαγώνιοι, έχουν σταθερές τιμές ανά διαγώνιο.
- Για πίνακα $N$x$N$ ,τα στοιχεία του ορίζονται από μια ακολουθία μήκους ($2N$-$1$): $\{t_n \mid -(N-1) \le n \le N-1\}$

$$\mathbf{T}(m,n) = t_{m-n}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(N-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & \vdots \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{N-1} & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

# Πίνακες Toeplitz

- Κάθε γραμμή (στήλη) παράγεται από μια μετατόπιση της προηγούμενης γραμμής (στήλης).
- Διατρέχοντας τις γραμμές από πάνω προς τα κάτω, ...
  - Το τελευταίο στοιχείο ‘εξαφανίζεται’.
  - Ένα νέο στοιχείο ‘εμφανίζεται’ στην πρώτη στήλη.

$$\mathbf{T}(m,n) = t_{m-n}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(N-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & \vdots \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_{-1} \\ t_{N-1} & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

# Κυκλοτικοί (circulant) πίνακες

- Η κύρια διαγώνιος, όπως και οι άλλες διαγώνιοι, έχουν σταθερές τιμές ανά διαγώνιο.
- Για πίνακα $N$x$N$ ,τα στοιχεία του ορίζονται από μια ακολουθία μήκους $N$ : $\{c_n \mid 0 \le n \le N-1\}$

$$\mathbf{C}(m,n) = c_{(m-n) \bmod N}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ c_{N-2} & \ddots & \ddots & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} & c_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

# Κυκλοτικοί (circulant) πίνακες

- Ειδική περίπτωση πινάκων Toeplitz.
- Κάθε γραμμή (στήλη) παράγεται με **κυκλική μετατόπιση** (modulo $N$) της προηγούμενης γραμμής (στήλης).

$$\mathbf{C}(m,n) = c_{(m-n)\,\mathrm{mod}\,N}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ c_{N-2} & \ddots & \ddots & \ddots & c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{N-1} & c_0 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

# Η συνέλιξη σαν πράξη πινάκων

- Η 1D **γραμμική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **πίνακα Toeplitz,** κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.

# Η συνέλιξη σαν πράξη πινάκων

- Η 1D **γραμμική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **πίνακα Toeplitz,** κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.
- Η 1D **κυκλική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **κυκλοτικού πίνακα** κατασκευασμένου από τα στοιχείου του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.

# Η συνέλιξη σαν πράξη πινάκων

- Η 1D **γραμμική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **πίνακα Toeplitz,** κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.
- Η 1D **κυκλική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **κυκλοτικού πίνακα** κατασκευασμένου από τα στοιχείου του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.
- Τα παραπάνω γενικεύονται για 2D συνελίξεις.

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

- Η γραμμική συνέλιξη $g[n]=f[n]*h[n]$ θα είναι μήκους $N=N_1+N_2-1=3+2-1=4$.

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{\underline{1}, 2, 2\}, \ \ h[n] = \{\underline{1}, -1\}, \ \ N_1 = 3, N_2 = 2$$

- Η γραμμική συνέλιξη $g[n]=f[n]*h[n]$ θα είναι μήκους $N=N_1+N_2-1=3+2-1=4$.
- Κατασκευάζουμε πίνακα Toeplitz $\mathbf{H}$ από τα στοιχεία του $h[n]$ με
  - $N=4$ γραμμές (το μήκος του αποτελέσματος).
  - $N_1=3$ στήλες (το μήκους του $f[n]$).

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

- Η γραμμική συνέλιξη $g[n]=f[n]*h[n]$ θα είναι μήκους $N=N_1+N_2-1=3+2-1=4$.
- Κατασκευάζουμε πίνακα Toeplitz $\mathbf{H}$ από τα στοιχεία του $h[n]$ με
  - $N=4$ γραμμές (το μήκος του αποτελέσματος).
  - $N_1=3$ στήλες (το μήκους του $f[n]$).
  - Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης, τα δύο σήματα μπορούν να πάρουν το ένα την θέση του άλλου (δηλαδή ο H να κατασκευαστεί με στοιχεία του f αντί του h, και να έχει 2 στήλες, όσο το μήκος του h)

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

$$\mathbf{H}=\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} \end{bmatrix}_{4\times 3}}_{\text{Μήκος του } f[n]=3}$$

Μήκος αποτελέσματος = 4

Παρατηρήστε ότι ο $H$ είναι Toeplitz αλλά όχι κυκλοτικός

Μήκος του $f[n] = 3$

Zero-padded $h[n]$ στην πρώτη στήλη

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{\underline{1}, 2, 2\}, \quad h[n] = \{\underline{1}, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

# 1D κυκλική συνέλιξη με κυκλοτικούς πίνακες

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

- Η κυκλική συνέλιξη $g[n]=f[n]\circledast h[n]$ θα είναι μήκους $N=\max\{N_1, N_2\}=3$.
- Κατασκευάζουμε έναν κυκλοτικό πίνακα $\mathbf{H}$ με βάση τα στοιχεία του $h[n]$ (zero-padded αν χρειαστεί), μεγέθους $N$x$N$.
  - Ξανά, ο ρόλος των δύο σημάτων μπορεί να αντιμετατεθεί.

# 1D κυκλική συνέλιξη με κυκλοτικούς πίνακες

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Zero-padded $h[n]$ στην πρώτη στήλη

# 1D κυκλική συνέλιξη με κυκλοτικούς πίνακες

$$f[n]=\{\underline{1},\ 2,\ 2\},\ \ h[n]=\{\underline{1},\ -1\},\ \ N_1=3, N_2=2$$

$$\mathbf{g}=\mathbf{Hf}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g[n]=\{-\underline{1},1,0\}$$

# Block πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix}$$

- Τα ‘στοιχεία’ ($A_{ij}$) του πίνακα είναι πίνακες.

# Block πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix}$$

- Τα ‘στοιχεία’ ($A_{ij}$) του πίνακα είναι πίνακες.
- Οι block πίνακες δεν είναι κάτι ξεχωριστό από τους γνωστούς μας πίνακες – αφορούν απλά μια οργάνωση των (βαθμωτών) στοιχείων του πίνακα σε πίνακες-στοιχεία ($A_{ij}$) του πλήρους πίνακα *A*

# Block πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix}$$

- Αν η δομή του *A*, ως προς τους υποπίνακές του, είναι Toeplitz (κυκλοτικός) τότε ο πίνακας *A* λέγεται **block-Toeplitz** (**block-κυκλοτικός**).

# Block πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{bmatrix}$$

- Αν η δομή του *A*, ως προς τους υποπίνακές του, είναι Toeplitz (κυκλοτικός) τότε ο πίνακας *A* λέγεται **block-Toeplitz** (**block-κυκλοτικός**).
- Αν κάθε $A_{ij}$ είναι επίσης Toeplitz (κυκλοτικός) πίνακας τότε ο $A$ λέγεται **διπλά block-Toeplitz** (**διπλά block-κυκλοτικός**).

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$m \quad \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \quad n$$

$f\,[m,n]$

$$m \quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \quad n$$

$h\,[m,n]$

$M_1=2,\ N_1=3$

$M_2=2,\ N_2=2$

Το αποτέλεσμα θα είναι μεγέθους $(M_1+M_2-1)$ x $(N_1+N_2-1) = 3$ x $4$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$m$

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$n$

$f\,[m,n]$

$m$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$n$

$h\,[m,n]$

- Πρώτα, ο $h[m,n]$ γίνεται zero-padded σε μέγεθος 3 x 4 (το μέγεθος του αποτελέσματος).

$m$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$n$

$h[m,n]$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$m$

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix}$$

$n$

$f\,[m,n]$

$m$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$n$

$h\,[m,n]$

- Πρώτα, ο $h[m,n]$ γίνεται zero-padded σε μέγεθος $3 \times 4$ (το μέγεθος του αποτελέσματος).
- (Προσοχή – αυτό το zero-padding δεν έχει να κάνει με το zero-padding που κάναμε σε προηγούμενη διάλεξη ώστε να ταυτιστεί το αποτέλεσμα κυκλικής και γραμμικής συνέλιξης. Είναι μέρος της τεχνικής που εξετάζουμε)

$m$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$n$

$h[m,n]$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

- Για κάθε γραμμή του $h[m,n]$, κατασκευάζεται ένας Toeplitz πίνακας με 3 στήλες (αριθμός στηλών του $f\,[m,n]$).

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0
\end{array}
$$

$m$, $n$

$h[m,n]$

$$
\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$m \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \qquad n$$

$$f\,[m,n]$$

$$m \qquad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \qquad n$$

$$h\,[m,n]$$

- Χρησιμοποιώντας τους $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ και $\mathbf{H}_3$ σαν ‘δομικά’ στοιχεία, κατασκευάζουμε έναν δπλά block Toeplitz πίνακα $\mathbf{H}$, αποτελούμενο από 2 στήλες (τον αριθμό γραμμών του $f\,[m,n]$).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}_{12\times 6}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array}$$

$$f[m,n] \qquad\qquad h[m,n]$$

- Τώρα κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα f για το σήμα, με βάση το σήμα-πίνακα $f[m,n]$.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ \hline 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \quad 5 \quad 3)^T \\ \hline (1 \quad 4 \quad 1)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$
\begin{array}{c}
m \\
\uparrow \\
\begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow n \\
f[m,n]
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
m \\
\uparrow \\
\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \rightarrow n \\
h[m,n]
\end{array}
$$

$$
\mathbf{g} = \mathbf{Hf} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 3 \\ \hline 1 \\ 4 \\ 1 \end{array}\right]
$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$
\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
2 \\ 5 \\ 3 \\ \hdashline 1 \\ 4 \\ 1
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ \hdashline 3 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ \hdashline 1 \\ 5 \\ 5 \\ 1
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
(2 \quad 3 \quad -2 \quad 3)^T \\ \hdashline
(3 \quad 10 \quad 5 \quad 2)^T \\ \hdashline
(1 \quad 5 \quad 5 \quad 1)^T
\end{array}\right]
$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$f[m,n] = \begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{matrix} \quad * \quad h[m,n] = \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

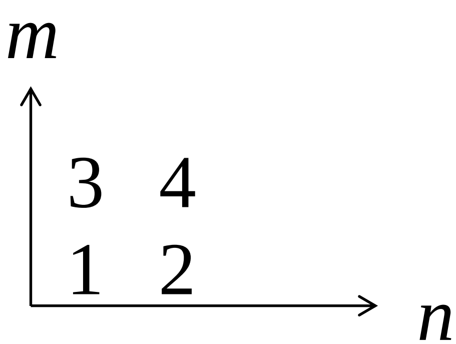
$$= \quad g[m,n] = \begin{matrix} 1 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{matrix}$$

(axes: $m$ vertical, $n$ horizontal)

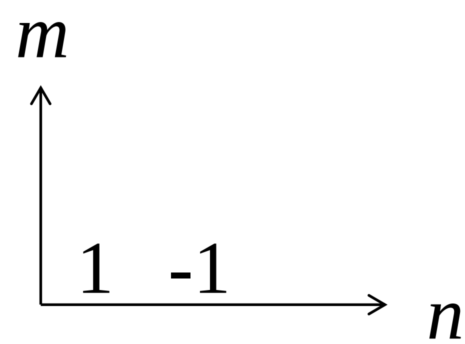
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (2 & 3 & -2 & 3)^T \\ \hdashline (3 & 10 & 5 & 2)^T \\ \hdashline (1 & 5 & 5 & 1)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

Άλλο παράδειγμα.




$f\,[m,n]$



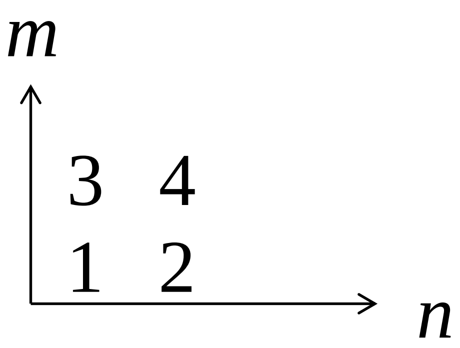

$h\,[m,n]$

$M_1=2,\ N_1=2$

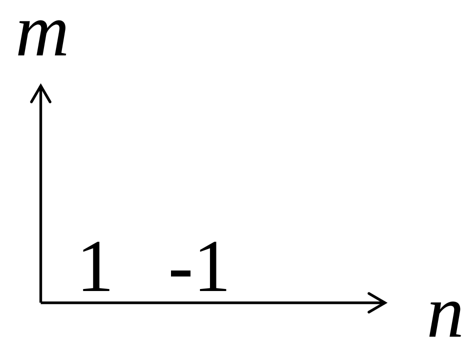
$M_2=1,\ N_2=2$

Μέγεθος αποτελέσματος$(M_1+M_2-1)\ \mathrm{x}\ (N_1+N_2-1) = 2\ \mathrm{x}\ 3$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

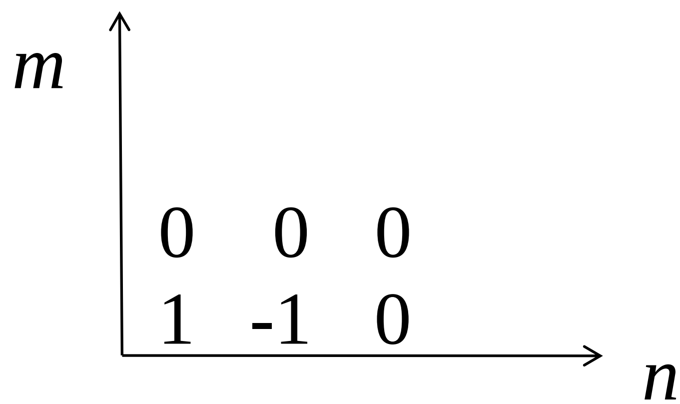



$f\,[m,n]$




$h\,[m,n]$

- Πρώτα ο $h[m,n]$ γίνεται zero-padded μέχρι μέγεθος $2 \text{ x } 3$ (το μέγεθος του αποτελέσματος)




$h[m,n]$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

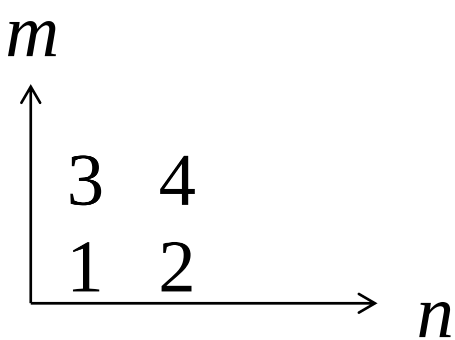
$$m \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \quad n$$

$$h[m,n]$$

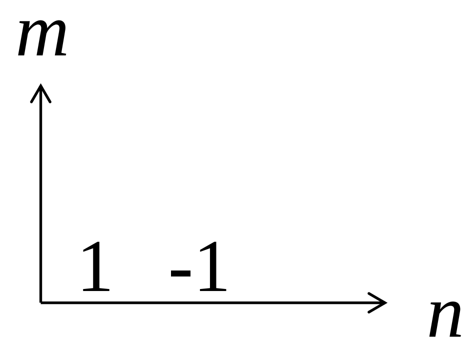
- Για κάθε γραμμή $h[m,n]$, κατασκευάζεται ένας Toeplitz πίνακας με 2 στήλες (αριθμός στηλών του $f\,[m,n]$).

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες




$f[m,n]$

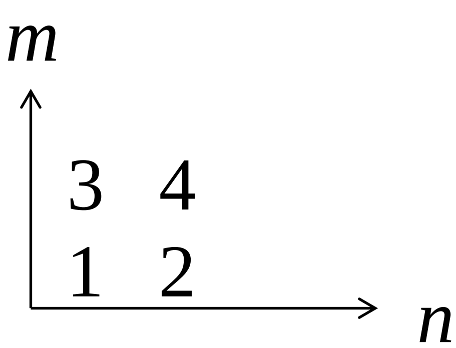



$h[m,n]$

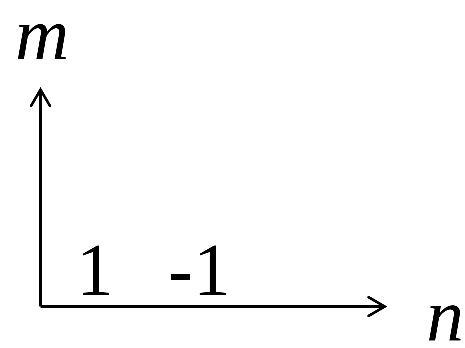
- Χρησιμοποιώντας τους Toeplitz πίνακες $\mathbf{H}_1$ και $\mathbf{H}_2$ σαν ‘δομικά’ στοιχεία, κατασκευάζουμε έναν διπλά block Toeplitz πίνακα $\mathbf{H}$. Έχει 2 στήλες (αριθμός **γραμμών** του $f[m,n]$).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \end{bmatrix}_{6\times 4}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες




$f\,[m,n]$

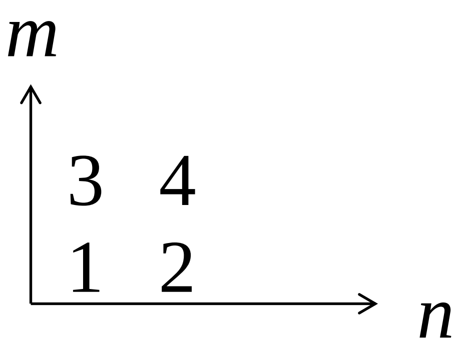



$h\,[m,n]$

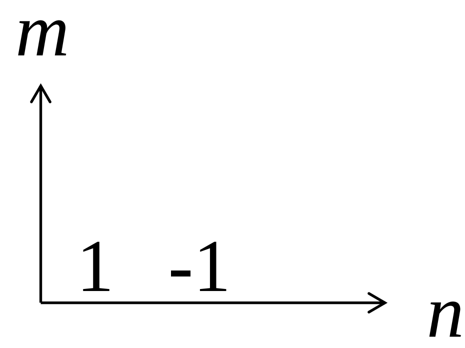
- Μετατρέπουμε σε ένα διάνυσμα το σήμα-πίνακα $f\,[m,n]$.

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \hdashline 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \quad 2)^T \\ \hdashline (3 \quad 4)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες




$f\,[m,n]$




$h\,[m,n]$

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \hdashline 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \hdashline 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -2 \\ \hline 3 \\ 1 \\ -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (1 \quad 1 \quad -2)^T \\ \hdashline (3 \quad 1 \quad -4)^T \end{array}\right]$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$\begin{array}{l|ll} m & & \\ & 3 & 4 \\ & 1 & 2 \\ \hline & & & n \end{array} \quad * \quad \begin{array}{l|ll} m & & \\ & 1 & -1 \\ \hline & & & n \end{array}$$

$$f\,[m,n] \qquad\qquad h\,[m,n]$$

$$= \quad \begin{array}{l|lll} m & & & \\ & 3 & 1 & 4 \\ & 1 & 1 & -2 \\ \hline & & & & n \end{array}$$

$$g\,[m,n]$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (1 \quad 1 \quad -2)^T \\ \hdashline (3 \quad 1 \quad -4)^T \end{bmatrix}$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

Η κυκλική συνέλιξη $g[m,n]=f[m,n]✪h[m,n]$

με $0 \le m \le M-1,\ 0 \le n \le N-1,$

Μπορεί να εκφραστεί σαν πράξη πινάκων ως:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf}$$

όπου $\mathbf{H}$ είναι διπλά block κυκλοτικός πίνακας που παράγεται από το $h[m,n]$ και $\mathbf{f}$ είναι διανυσματοποίηση του $f[m,n]$.

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_{M-1} & \mathbf{H}_{M-2} & \cdots & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_{M-1} & \cdots & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{H}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{M-1} & \mathbf{H}_{M-2} & \mathbf{H}_{M-3} & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}$$

Κάθε $\mathbf{H}_j$, για $j$=1,..$M$, είναι κυκλοτικός πίνακας με $N$ στήλες (ο αριθμός **στηλών** του $f[m,n]$) ο οποίος κατασκευάζεται από τα στοιχεία της $j$-οστής **γραμμής** του $h[m,n]$.

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} h[j,0] & h[j,N-1] & \dots & h[j,1] \\ h[j,1] & h[j,0] & \dots & h[j,2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h[j,N-1] & h[j,N-2] & \dots & h[j,0] \end{bmatrix}_{N\times N}$$

Κάθε $\mathbf{H}_j$, για $j=1,..M$, είναι κυκλοτικός πίνακας με $N$ στήλες (ο αριθμός **στηλών** του $f[m,n]$) ο οποίος κατασκευάζεται από τα στοιχεία της $j$-οστής **γραμμής** του $h[m,n]$.

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$f[m,n] = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \quad \circledast \quad h[m,n] = \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$
\underset{f[m,n]}{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}}
\quad \circledast \quad
\underset{h[m,n]}{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}}
$$

(axes: $m$ vertical, $n$ horizontal)

$$
\mathbf{g} = \mathbf{Hf} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T \\ \hdashline \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^T \\ \hdashline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \end{bmatrix}
$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 3 \\ -1 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -1 \\ \hline 3 \\ 4 \\ -3 \\ \hline 1 \\ 4 \\ -2 \end{array}\right]$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$
\begin{array}{c|ccc}
m & & & \\
 & 0 & 1 & 0 \\
 & 1 & 3 & -1 \\
 & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & & & n
\end{array}
\quad \circledast \quad
\begin{array}{c|ccc}
m & & & \\
 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 \\
 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
 & & & n
\end{array}
$$

$$f[m,n] \qquad\qquad h[m,n]$$

$$
= \quad
\begin{array}{c|ccc}
m & & & \\
 & 1 & 4 & -2 \\
 & 3 & 4 & -3 \\
 & 0 & 2 & -1 \\
\hline
 & & & n
\end{array}
\qquad
\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \\ \hdashline \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}^T \\ \hdashline \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}^T \end{bmatrix}
$$

$$g[m,n]$$

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

Θεώρημα**:** Οι στήλες του αντίστροφου πίνακα DFT είναι ιδιοδιανύσματα *κάθε κυκλοτικού πίνακα*. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι ο DFT του σήματος με βάση το οποίο κατασκευάστηκε ο κυκλοτικός πίνακας.

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

Απόδειξη:

Θυμόμαστε ότι ο DFT εκφράζεται σαν πράξη πινάκων,

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

με

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{\mathrm{N}}} \Leftrightarrow w_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi n}{\mathrm{N}}k}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \dots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \dots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \dots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \left[\, f[0], f[1], \dots, f[N-1] \right]^T, \; \mathbf{F} = \left[ F[0], F[1], \dots, F[N-1] \right]^T$$

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

Και ο αντίστροφος DFT γράφεται σαν

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{N}\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{T} = \frac{1}{N}\left(\begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \cdots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \cdots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \cdots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}^{*}\right)^{T}$$

Το θεώρημα λέει ότι κάθε κυκλοτικός πίνακας έχει σαν ιδιοδιανύσματα, τις στήλες του $\mathbf{A}^{-1}$.

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

Έστω $\mathbf{H}$ ένας $N$x$N$ κυκλοτικός πίνακας που κατασκευάζεται από 1D σήμα $h[n]$ μήκους N:

$$\mathrm{H}(m,n) = h[(m-n)_{\mathrm{mod}\, N}] \equiv h[m-n]_N$$

Έστω $\boldsymbol{\alpha}_k$ η $k$-οστή στήλη του $\mathbf{A}^{-1}$.

<u>Θα αποδείξουμε ότι το $\boldsymbol{\alpha}_k$, για οποιοδήποτε $k$, είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{H}$.</u>

Θα γράψουμε σαν $[\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_k]_m$ το m-οστό στοιχείο του πίνακα $\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_\mathrm{k}$ ...

Αυτός ο πίνακας είναι το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης του σήματος $h[n]$ με την στήλη $\boldsymbol{\alpha}_k$.

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

$$\left[\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_k\right]_m = \sum_{n=0}^{N-1} h[m-n]_N\, \alpha_k[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} h[m-n]_N\, w_N^{-kn}$$

$$\overset{l=m-n}{=} \frac{1}{N}\sum_{l=m}^{m-(N-1)} h[l]_N\, w_N^{-k(m-l)} = \frac{1}{N} w_N^{-km} \sum_{l=m}^{m-(N-1)} h[l]_N\, w_N^{kl}$$

$$= \frac{1}{N} w_N^{-km}\left[\sum_{l=m-(N-1)}^{-1} h[l]_N\, w_N^{kl} + \underbrace{\sum_{l=0}^{m} h[l]_N\, w_N^{kl}}_{\text{Το σπάμε σε δύο όρους}}\right]$$

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

$$=\frac{1}{N}w_N^{-km}\left[\underbrace{\sum_{l=m-(N-1)}^{-1} h[l]_N\, w_N^{kl}}_{\text{Προσθέτουμε μια περίοδο, }+N.} + \sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl} - \sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl}\right]$$

$$=\frac{1}{N}w_N^{-km}\left[\sum_{l=N+m-(N-1)}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl} + \sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl} - \sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl}\right]$$

$$=\frac{1}{N}w_N^{-km}\left[\cancel{\sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl}} + \sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl} - \cancel{\sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N\, w_N^{kl}}\right] \Leftrightarrow$$

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

$$\left[\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_k\right]_m = \frac{1}{N} w_N^{-km} \left[ \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N \, w_N^{kl}}_{\text{DFT του } h[n] \text{ στο } k.} \right] = H[k]\left[\boldsymbol{\alpha}_k\right]_m$$

Το παραπάνω ισχύει για κάθε $m$. Επομένως:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\alpha}_k = H[k]\boldsymbol{\alpha}_k$$

Που σημαίνει ότι το $\boldsymbol{\alpha}_k$, για κάθε $k$, είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{H}$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή το $k$-οστό στοιχείο του $H[k]$ (όπου $H[k]$ ο DFT του σήματος από το οποίο κατασκευάστηκε ο $\mathbf{H}$).

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{\Lambda}=\text{diag}\left\{H[0], H[1], \ldots, H[N-1]\right\}$$

Ή αντίστοιχα: $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}$

Αυτή η σχέση (διαγωνιοποίηση του H) μας οδηγεί σε μία εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος της συνέλιξης:

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{HA}^{-1}\mathbf{Af} \quad \Leftrightarrow \mathbf{Ag} = \mathbf{AHA}^{-1}\mathbf{Af} \quad \Leftrightarrow \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda F}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} G[0] \\ G[1] \\ \ldots \\ G[N-1] \end{bmatrix}}_{\text{DFT of } g[n]} = \underbrace{\begin{bmatrix} H[0] & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H[1] & \ldots & 0 \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & H[N-1] \end{bmatrix}}_{\text{DFT of } h[n]} \underbrace{\begin{bmatrix} F[0] \\ F[1] \\ \ldots \\ F[N-1] \end{bmatrix}}_{\text{DFT of } f[n]}$$

# Διαγωνιοποίηση διπλά block κυκλοτικών πινάκων

- Αυτές οι ιδιότητες γενικεύονται για 2D.
- Χρειαζόμαστε το γινόμενο Kronecker, το οποίο ορίζεται για **A** $\in R^{MxN}$, **B** $\in R^{KxL}$ ως εξής:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1N}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2N}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1}\mathbf{B} & a_{M2}\mathbf{B} & \dots & a_{MN}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{MK \times NL}$$

# Διαγωνιοποίηση διπλά block κυκλοτικών πινάκων

- Το 2Δ σήμα $f[m,n],\ 0 \le m \le M-1,\ 0 \le n \le N-1,$ μπορεί να διανυσματοποιηθεί, στήλη-στήλη, σε ένα διάνυσμα **f** διάστασης MNx1.

- Ο 2Δ DFT του $f[m,n]$, μπορεί να υπολογιστεί τότε σαν:

$$F = \left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}\right)\mathbf{f}$$

# Διαγωνιοποίηση διπλά block κυκλοτικών πινάκων

**Θεώρημα:** Οι στήλες του αντίστροφου 2D DFT πίνακα

$$\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)^{-1}$$

Είναι ιδιοδιανύσματα οποιουδήποτε διπλά block κυκλοτικού πίνακα. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι οι τιμές του 2D DFT του 2D σήματος από το οποίο κατασκευάστηκε ο διπλά block κυκλοτικός πίνακας:

$$\mathbf{\Lambda}=\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)\mathbf{H}\left(\mathbf{A}\otimes\mathbf{A}\right)^{-1}$$

Διαγώνιος, περιέχει τον 2D DFT του $h[m,n]$ από το οποίο κατασκευάστηκε ο $\mathbf{H}$

Διπλά block κυκλοτικός

# Συνοψίζοντας

- Μιλήσαμε για το πως μπορούμε να εκφράσουμε την συνέλιξη σαν πράξη πινάκων, χρησιμοποιώντας κυκλοτικούς πίνακες
- Μιλήσαμε για την ιδιαίτερη ιδιοδομή των κυκλοτικών πινάκων
- Γράψαμε το θεώρημα της συνέλιξης με πράξεις πινάκων