

# Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

Η συνέλιξη σαν πίνακας: Κυκλοτικοί  
πίνακες

Γιώργος Σφήκας  
[sfikas@cs.uoi.gr](mailto:sfikas@cs.uoi.gr)

- Θα μιλήσουμε για κάποιες ειδικές κατηγορίες πινάκων:
  - τους Toeplitz πίνακες
  - τους κυκλοτικούς πίνακες
  - τις 'block'-εκδοχές των Toeplitz / κυκλοτικών
- Πως βοηθούν στο να εκφράσουμε μια συνέλιξη με πράξεις πινάκων
- Ιδιότητες κυκλοτικών πινάκων

- Η κύρια διαγώνιος, όπως και οι άλλες διαγώνιοι, έχουν σταθερές τιμές ανά διαγώνιο.
- Για πίνακα  $N \times N$ , τα στοιχεία του ορίζονται από μια ακολουθία μήκους  $(2N-1)$ :  $\{t_n \mid -(N-1) \leq n \leq N-1\}$

$$\mathbf{T}(m, n) = t_{m-n}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \dots & \dots & \vdots \\ t_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{N-1} & \dots & \dots & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

- Κάθε γραμμή (στήλη) παράγεται από μια μετατόπιση της προηγούμενης γραμμής (στήλης).
- Διατρέχοντας τις γραμμές από πάνω προς τα κάτω, ...
  - Το τελευταίο στοιχείο ‘εξαφανίζεται’.
  - Ένα νέο στοιχείο ‘εμφανίζεται’ στην πρώτη στήλη.

$$\mathbf{T}(m, n) = t_{m-n}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & \dots & \dots \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_{N-1} & \dots & \dots & t_1 & t_0 & \dots \end{bmatrix}_{N \times N}$$

# Κυκλοτικοί (circulant) πίνακες

- Η κύρια διαγώνιος, όπως και οι άλλες διαγώνιοι, έχουν σταθερές τιμές ανά διαγώνιο.
- Για πίνακα  $N \times N$ , τα στοιχεία του ορίζονται από μια ακολουθία μήκους  $N$ :  $\{c_n \mid 0 \leq n \leq N-1\}$

$$\mathbf{C}(m, n) = c_{(m-n) \bmod N}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & \dots & \dots \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & \dots & \vdots \\ c_{N-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & \dots & \dots & c_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

# Κυκλοτικοί (circulant) πίνακες

- Ειδική περίπτωση πινάκων Toeplitz.
- Κάθε γραμμή (στήλη) παράγεται με **κυκλική μετατόπιση** (modulo  $N$ ) της προηγούμενης γραμμής (στήλης).

$$\mathbf{C}(m, n) = c_{(m-n) \bmod N}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & \dots & \dots \\ c_{N-1} & c_0 & c_1 & \dots & \dots & \vdots \\ c_{N-2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & \dots & \dots & c_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

# Η συνέλιξη σαν πράξη πινάκων

- Η 1D γραμμική συνέλιξη μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **πίνακα Toeplitz**, κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.

# Η συνέλιξη σαν πράξη πινάκων

- Η 1D **γραμμική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **πίνακα Toeplitz**, κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.
- Η 1D **κυκλική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **κυκλοτικού πίνακα** κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.



# Η συνέλιξη σαν πράξη πινάκων

- Η 1D **γραμμική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **πίνακα Toeplitz**, κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.
- Η 1D **κυκλική συνέλιξη** μεταξύ δύο διακριτών σημάτων μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο ενός **κυκλοτικού πίνακα** κατασκευασμένου από τα στοιχεία του ενός σήματος, και ενός διανύσματος κατασκευασμένου από τα στοιχεία του άλλου σήματος.
- Τα παραπάνω γενικεύονται για 2D συνελίξεις.

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

- Η γραμμική συνέλιξη  $g[n] = f[n] * h[n]$  θα είναι μήκους  $N = N_1 + N_2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$ .

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

- Η γραμμική συνέλιξη  $g[n] = f[n] * h[n]$  θα είναι μήκους  $N = N_1 + N_2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$ .
- Κατασκευάζουμε πίνακα Toeplitz  $\mathbf{H}$  από τα στοιχεία του  $h[n]$  με
  - $N=4$  γραμμές (το μήκος του αποτελέσματος).
  - $N_1=3$  στήλες (το μήκος του  $f[n]$ ).

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

- Η γραμμική συνέλιξη  $g[n] = f[n] * h[n]$  θα είναι μήκους  $N = N_1 + N_2 - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$ .
- Κατασκευάζουμε πίνακα Toeplitz **H** από τα στοιχεία του  $h[n]$  με
  - $N=4$  γραμμές (το μήκος του αποτελέσματος).
  - $N_1=3$  στήλες (το μήκος του  $f[n]$ ).
  - Λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας της συνέλιξης, τα δύο σήματα μπορούν να πάρουν το ένα την θέση του άλλου (δηλαδή ο **H** να κατασκευαστεί με στοιχεία του  $f$  αντί του  $h$ , και να έχει 2 στήλες, όσο το μήκος του  $h$ )

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

Μήκος αποτελέσματος = 4

Παρατηρήστε ότι ο  $H$  είναι  
Toeplitz αλλά όχι  
κυκλοτικός

Μήκος του  $f[n] = 3$

Zero-padded  $h[n]$  στην πρώτη στήλη

# 1D Γραμμική συνέλιξη με πίνακες Toeplitz

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

# 1D κυκλική συνέλιξη με κυκλοτικούς πίνακες

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

- Η κυκλική συνέλιξη  $g[n] = f[n] \star h[n]$  θα είναι μήκους  $N = \max\{N_1, N_2\} = 3$ .
- Κατασκευάζουμε έναν κυκλοτικό πίνακα  $\mathbf{H}$  με βάση τα στοιχεία του  $h[n]$  (zero-padded αν χρειαστεί), μεγέθους  $N \times N$ .
  - Ξανά, ο ρόλος των δύο σημάτων μπορεί να αντιμετωπιστεί.

# 1D κυκλική συνέλιξη με κυκλοτικούς πίνακες

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Zero-padded  $h[n]$  στην  
πρώτη στήλη



# 1D κυκλική συνέλιξη με κυκλοτικούς πίνακες

$$f[n] = \{1, 2, 2\}, \quad h[n] = \{1, -1\}, \quad N_1 = 3, N_2 = 2$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$g[n] = \{-1, 1, 0\}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

- Τα ‘στοιχεία’ ( $A_{ij}$ ) του πίνακα είναι πίνακες.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

- Τα ‘στοιχεία’ ( $A_{ij}$ ) του πίνακα είναι πίνακες.
- Οι block πίνακες δεν είναι κάτι ξεχωριστό από τους γνωστούς μας πίνακες – αφορούν απλά μια οργάνωση των (βαθμωτών) στοιχείων του πίνακα σε πίνακες-στοιχεία ( $A_{ij}$ ) του πλήρους πίνακα  $A$

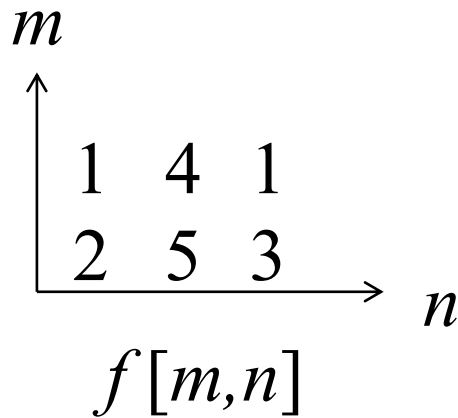
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

- Αν η δομή του  $A$ , ως προς τους υποπίνακές του, είναι Toeplitz (κυκλοτικός) τότε ο πίνακας  $A$  λέγεται **block-Toeplitz (block-κυκλοτικός)**.

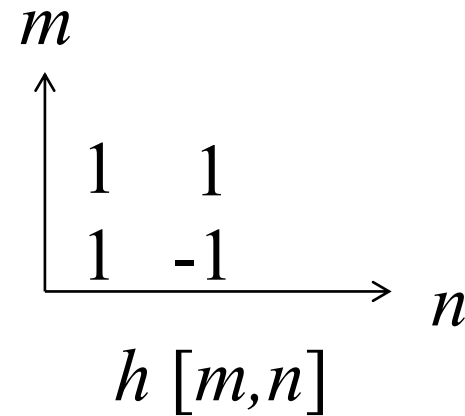
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

- Αν η δομή του  $A$ , ως προς τους υποπίνακές του, είναι Toeplitz (κυκλοτικός) τότε ο πίνακας  $A$  λέγεται **block-Toeplitz (block-κυκλοτικός)**.
- Αν κάθε  $A_{ij}$  είναι επίσης Toeplitz (κυκλοτικός) πίνακας τότε ο  $A$  λέγεται **διπλά block-Toeplitz (διπλά block-κυκλοτικός)**.

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



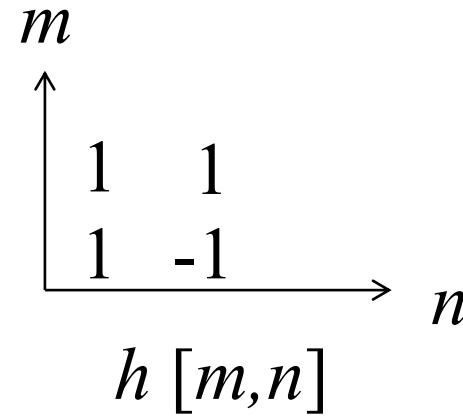
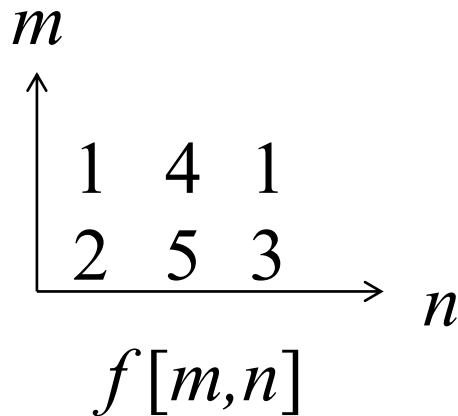
$$M_1=2, N_1=3$$



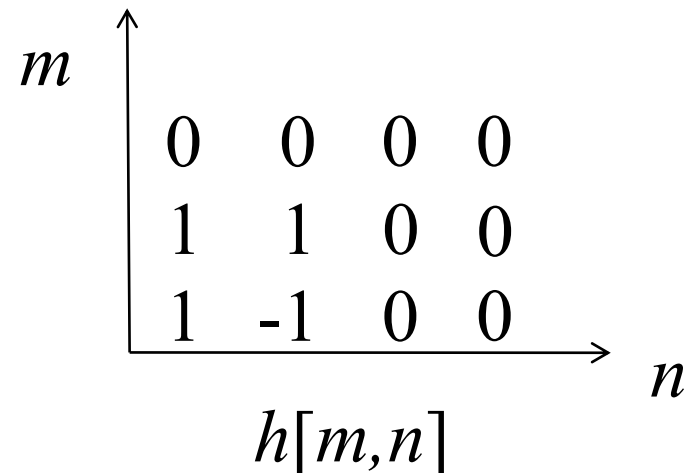
$$M_2=2, N_2=2$$

Το αποτέλεσμα θα είναι μεγέθους  $(M_1+M_2-1) \times (N_1+N_2-1) = 3 \times 4$

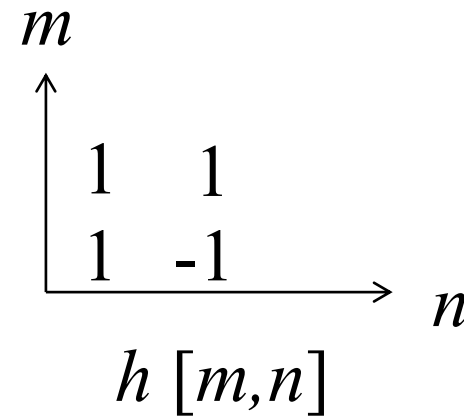
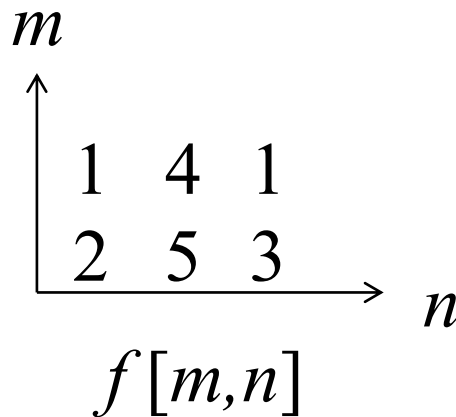
# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



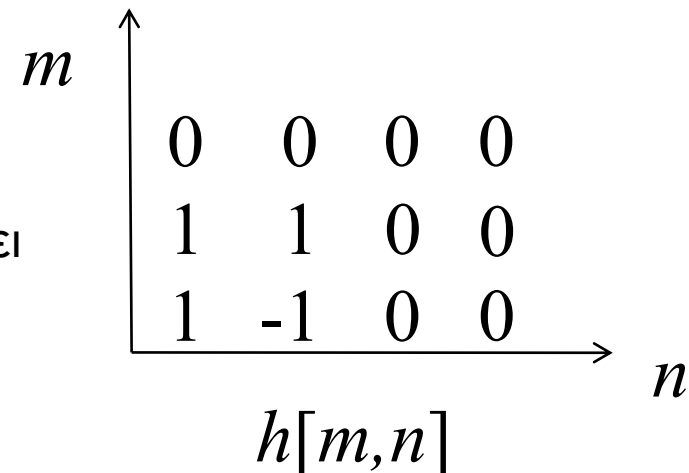
- Πρώτα, ο  $h[m,n]$  γίνεται zero-padded σε μέγεθος 3 x 4 (το μέγεθος του αποτελέσματος).



# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



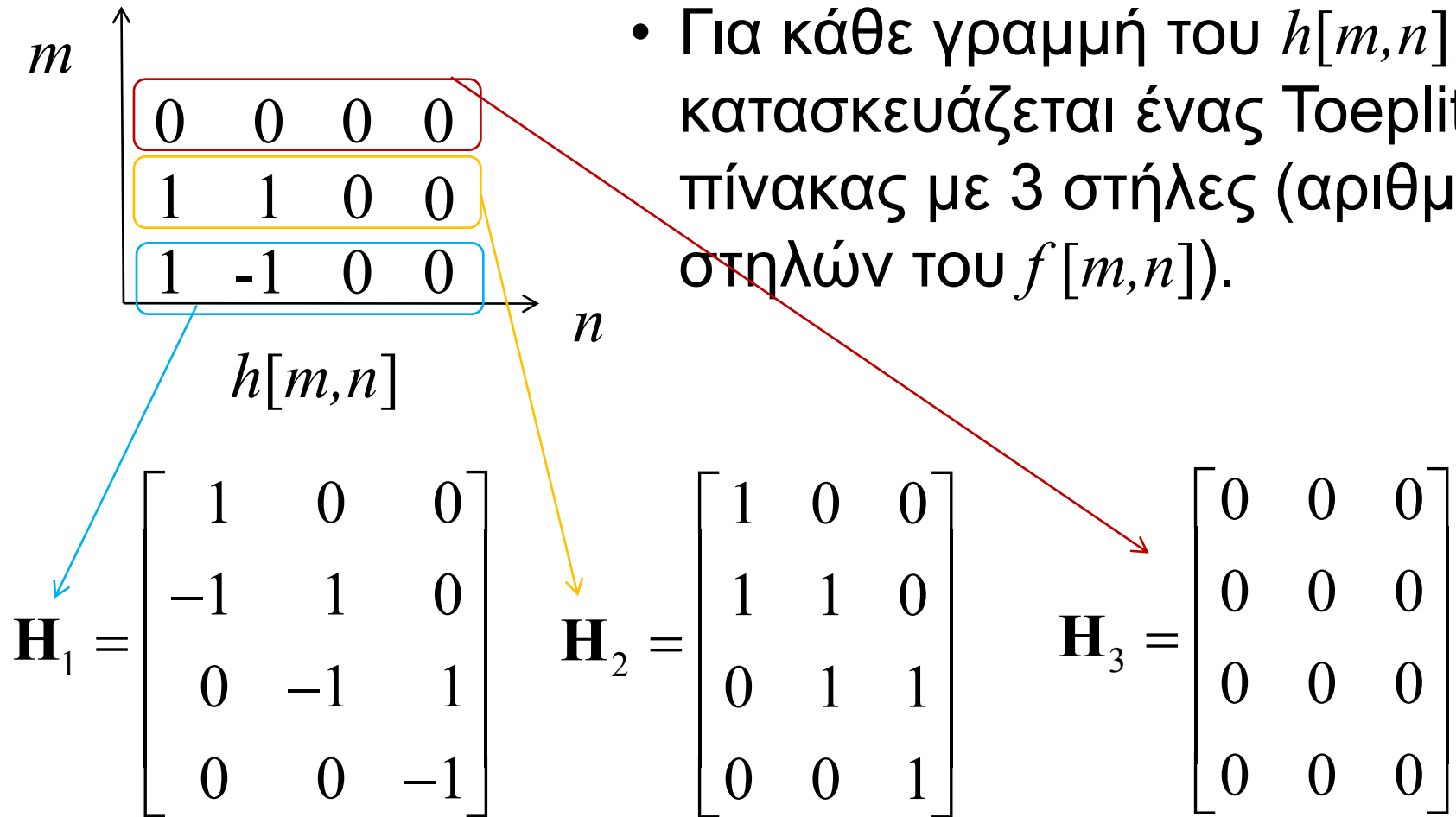
- Πρώτα, ο  $h[m,n]$  γίνεται zero-padded σε μέγεθος 3 x 4 (το μέγεθος του αποτελέσματος).
- (Προσοχή – αυτό το zero-padding δεν έχει να κάνει με το zero-padding που κάναμε σε προηγούμενη διάλεξη ώστε να ταυτιστεί το αποτέλεσμα κυκλικής και γραμμικής συνέλιξης. Είναι μέρος της τεχνικής που εξετάζουμε)



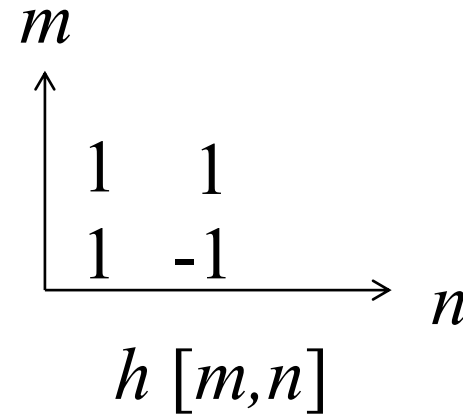
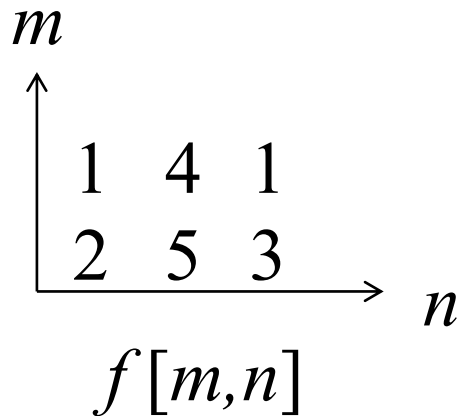


# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

- Για κάθε γραμμή του  $h[m,n]$ , κατασκευάζεται ένας Toeplitz πίνακας με 3 στήλες (αριθμός στηλών του  $f[m,n]$ ).



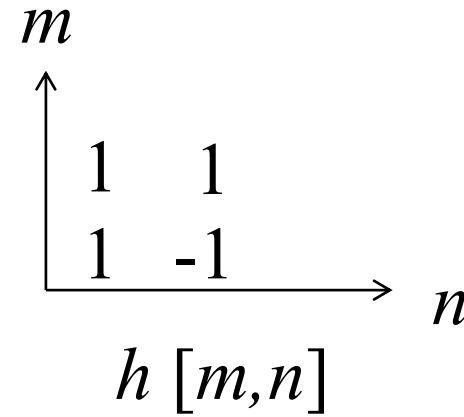
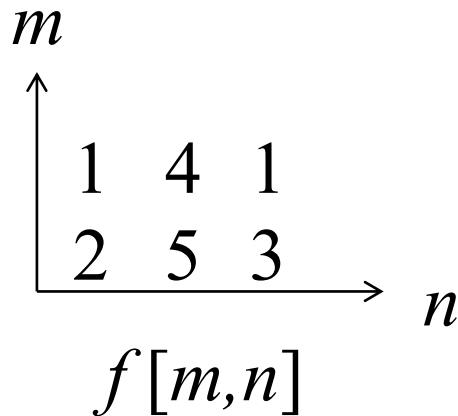
# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



- Χρησιμοποιώντας τους  $\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{H}_2$  και  $\mathbf{H}_3$  σαν ‘δομικά’ στοιχεία, κατασκευάζουμε έναν διπλά block Toeplitz πίνακα  $\mathbf{H}$ , αποτελούμενο από 2 στήλες (τον αριθμό γραμμών του  $f[m,n]$ ).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix}_{12 \times 6}$$

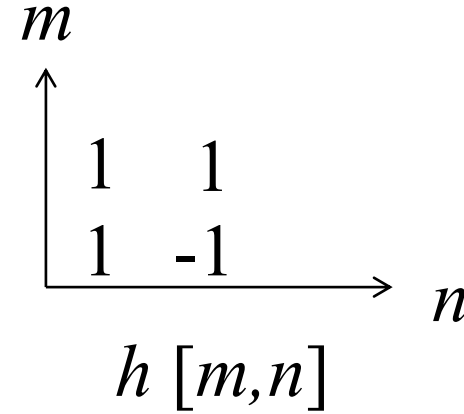
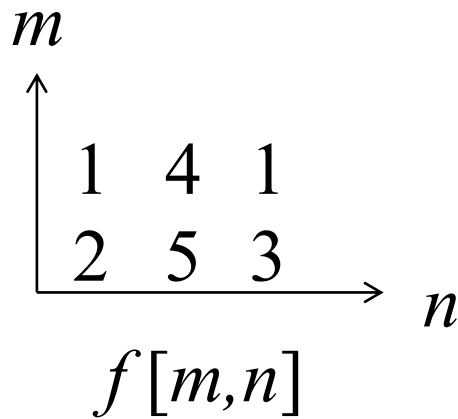
# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



- Τώρα κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{f}$  για το σήμα, με βάση το σήμα-πίνακα  $f[m,n]$ .

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \ 5 \ 3)^T \\ \hline (1 \ 4 \ 1)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_3 & \mathbf{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \\ 3 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 & 3 & -2 & 3)^T \\ (3 & 10 & 5 & 2)^T \\ (1 & 5 & 5 & 1)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$\begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \\ \rightarrow n \end{array} \quad * \quad \begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \\ \rightarrow n \end{array}$$

$f[m,n]$   $h[m,n]$

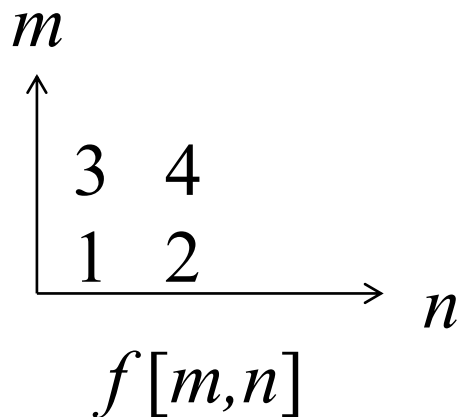
$$= \begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \begin{array}{cccc} 1 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \end{array} \\ \rightarrow n \end{array}$$

$g[m,n]$

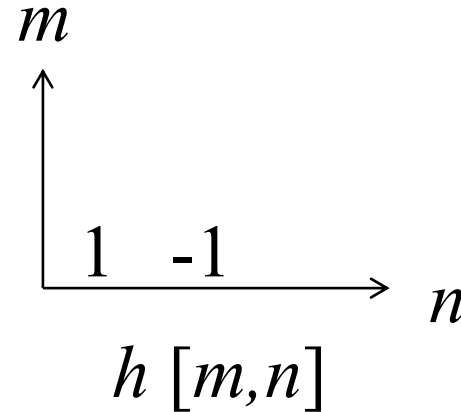
$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (2 \ 3 \ -2 \ 3)^T \\ \hline (3 \ 10 \ 5 \ 2)^T \\ \hline (1 \ 5 \ 5 \ 1)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

Άλλο παράδειγμα.



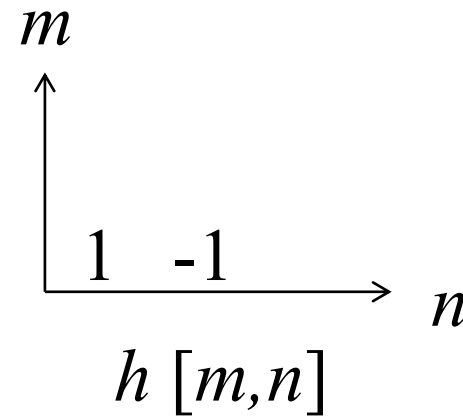
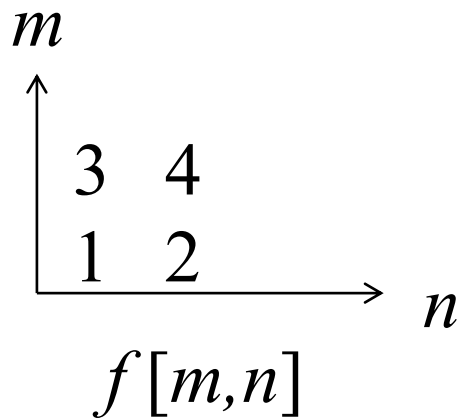
$$M_1=2, N_1=2$$



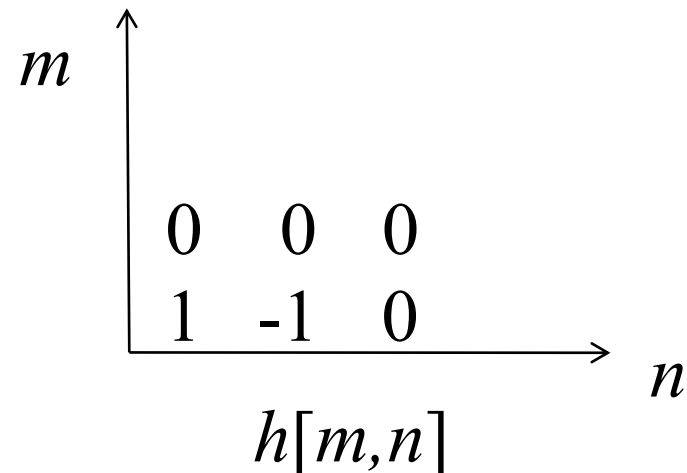
$$M_2=1, N_2=2$$

Μέγεθος αποτελέσματος  $(M_1+M_2-1) \times (N_1+N_2-1) = 2 \times 3$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

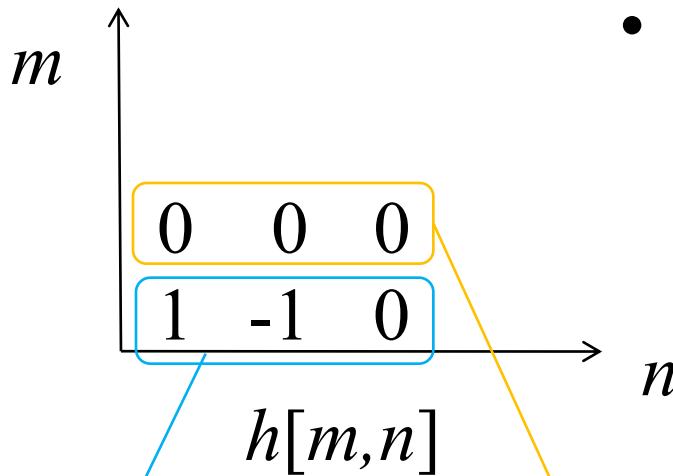


- Πρώτα ο  $h[m,n]$  γίνεται zero-padded μέχρι μέγεθος  $2 \times 3$  (το μέγεθος του αποτελέσματος)





# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

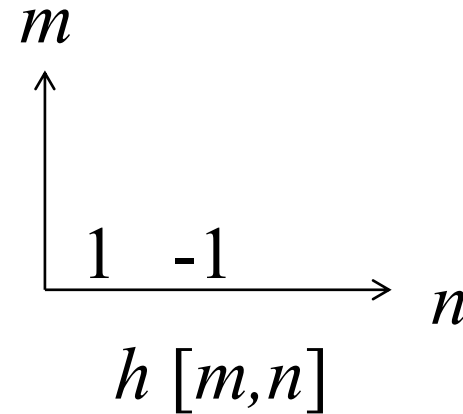
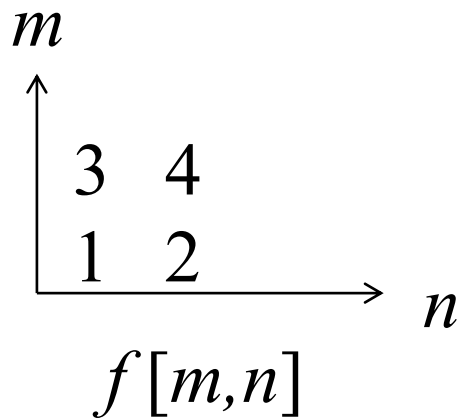


$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Για κάθε γραμμή  $h[m,n]$ , κατασκευάζεται ένας Toeplitz πίνακας με 2 στήλες (αριθμός στηλών του  $f[m,n]$ ).

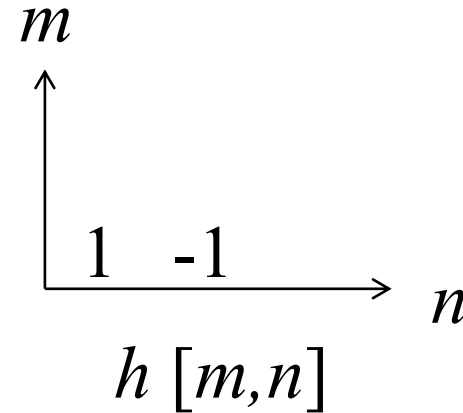
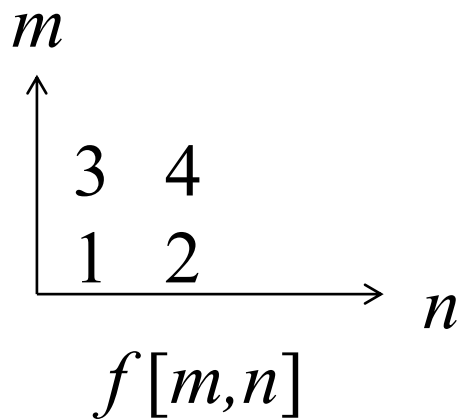
# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



- Χρησιμοποιώντας τους Toeplitz πίνακες  $\mathbf{H}_1$  και  $\mathbf{H}_2$  σαν ‘δομικά’ στοιχεία, κατασκευάζουμε έναν διπλά block Toeplitz πίνακα  $\mathbf{H}$ . Έχει 2 στήλες (αριθμός **γραμμών** του  $f[m,n]$ ).

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \end{bmatrix}_{6 \times 4}$$

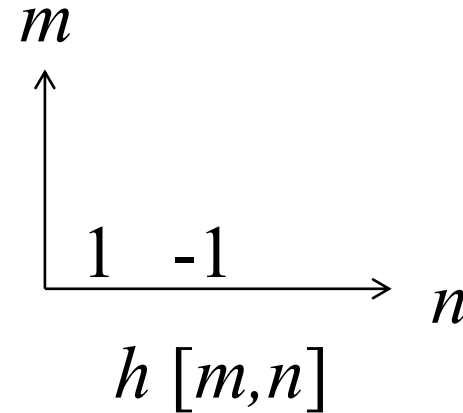
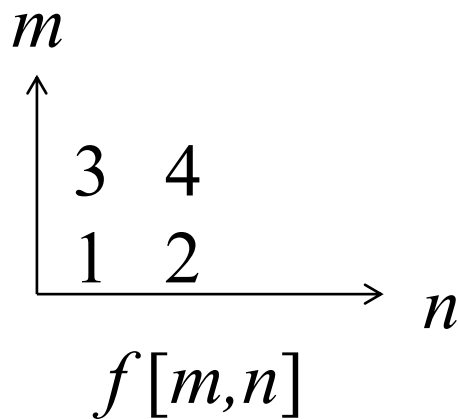
# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



- Μετατρέπουμε σε ένα διάνυσμα το σήμα-πίνακα  $f[m,n]$ .

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \quad 2)^T \\ (3 \quad 4)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

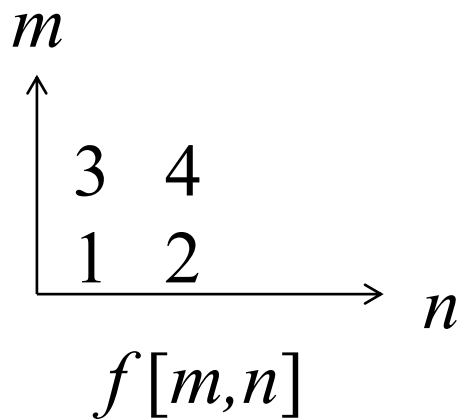


$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

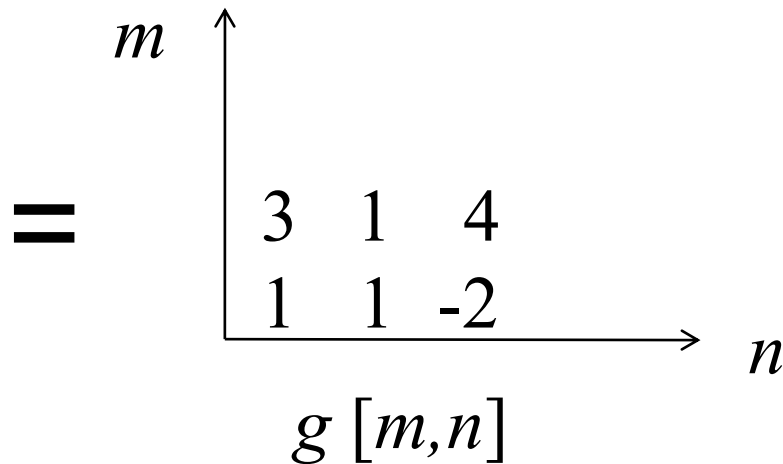
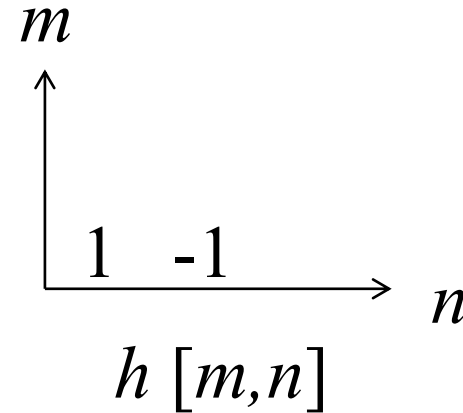
# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 & 1 & -2)^T \\ \hline (3 & 1 & -4)^T \end{bmatrix}$$

# 2D γραμμική συνέλιξη με διπλά block Toeplitz πίνακες



$*$



$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} (1 & 1 & -2)^T \\ \hline (3 & 1 & -4)^T \end{bmatrix}$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

Η κυκλική συνέλιξη  $g[m,n]=f[m,n] \star h[m,n]$

με  $0 \leq m \leq M-1, 0 \leq n \leq N-1,$

Μπορεί να εκφραστεί σαν πράξη πινάκων ως:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$

όπου  $\mathbf{H}$  είναι διπλά block κυκλοτικός πίνακας που παράγεται από το  $h[m,n]$  και  $\mathbf{f}$  είναι διανυσματοποίηση του  $f[m,n]$ .

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_{M-1} & \mathbf{H}_{M-2} & \cdots & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_{M-1} & \cdots & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \cdots & \mathbf{H}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{H}_{M-1} & \mathbf{H}_{M-2} & \mathbf{H}_{M-3} & \cdots & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix}$$

Κάθε  $\mathbf{H}_j$ , για  $j=1,..M$ , είναι κυκλοτικός πίνακας με  $N$  στήλες (ο αριθμός **στηλών** του  $f[m,n]$ ) ο οποίος κατασκευάζεται από τα στοιχεία της  $j$ -οστής **γραμμής** του  $h[m,n]$ .

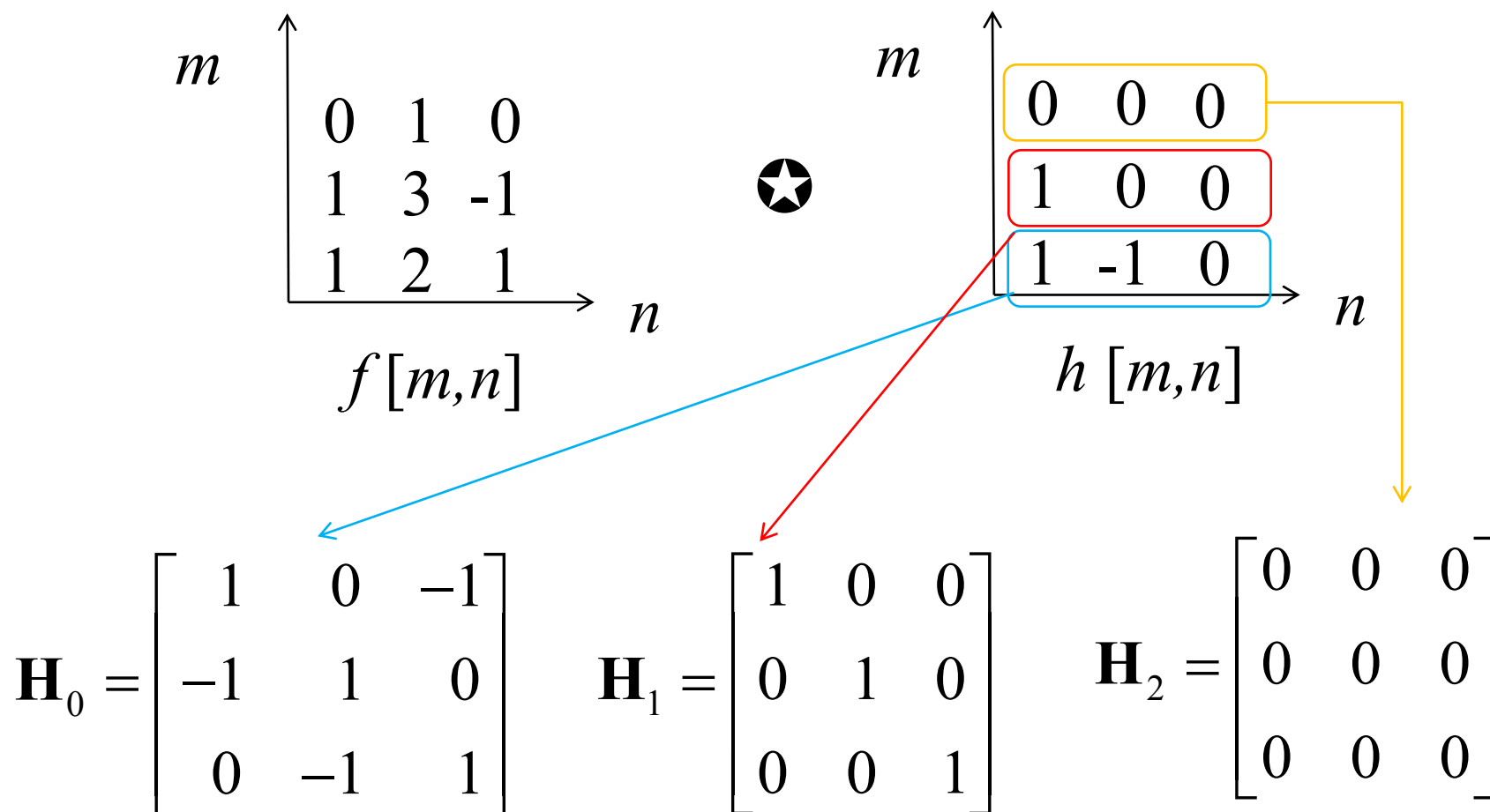


# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

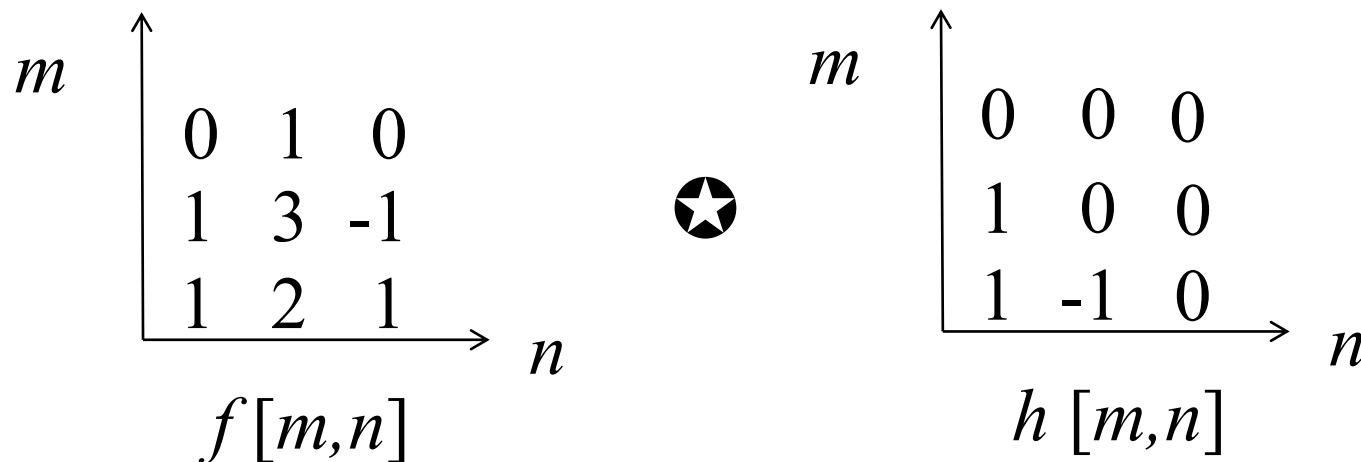
$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} h[j,0] & h[j,N-1] & \dots & \\ h[j,1] & h[j,0] & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h[j,N-1] & h[j,N-2] & \dots & \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Κάθε  $\mathbf{H}_j$ , για  $j=1,..M$ , είναι κυκλοτικός πίνακας με  $N$  στήλες (ο αριθμός **στηλών** του  $f[m,n]$ ) ο οποίος κατασκευάζεται από τα στοιχεία της  $j$ -οστής **γραμμής** του  $h[m,n]$ .

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες



# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες



$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 & \mathbf{H}_2 \\ \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 \ 2 \ 1)^T \\ \hline (1 \ 3 \ -1)^T \\ \hline (0 \ 1 \ 0)^T \end{bmatrix}$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ \hline 1 \\ 3 \\ -1 \\ \hline 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -1 \\ \hline 3 \\ 4 \\ -3 \\ \hline 1 \\ 4 \\ -2 \end{array} \right]$$

# 2D κυκλική συνέλιξη με διπλά block κυκλοτικούς πίνακες

$$\begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \\ \downarrow \\ n \end{array} \quad \star \quad \begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \\ \downarrow \\ n \end{array}$$

$f[m,n]$                        $h[m,n]$

$$= \begin{array}{c} m \\ \uparrow \\ \begin{array}{ccc} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \\ \downarrow \\ n \end{array} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} (0 \ 2 \ -1)^T \\ \hline (3 \ 4 \ -3)^T \\ \hline (1 \ 4 \ -2)^T \end{bmatrix}$$

$g[m,n]$

Θεώρημα: Οι στήλες του αντίστροφου πίνακα DFT είναι ιδιοδιανύσματα *κάθε κυκλοτικού πίνακα*. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι ο DFT του σήματος με βάση το οποίο κατασκευάστηκε ο κυκλοτικός πίνακας.

Απόδειξη:

Θυμόμαστε ότι ο DFT εκφράζεται σαν πράξη πινάκων,

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

με

$$w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \Leftrightarrow w_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \dots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \dots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \dots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [f[0], f[1], \dots, f[N-1]]^T, \quad \mathbf{F} = [F[0], F[1], \dots, F[N-1]]^T$$

Και ο αντίστροφος DFT γράφεται σαν

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{N}(\mathbf{A}^*)^T = \frac{1}{N} \left( \begin{bmatrix} (w_N^0)^0 & (w_N^0)^1 & (w_N^0)^2 & \dots & (w_N^0)^{N-1} \\ (w_N^1)^0 & (w_N^1)^1 & (w_N^1)^2 & \dots & (w_N^1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (w_N^{N-1})^0 & (w_N^{N-1})^1 & (w_N^{N-1})^2 & \dots & (w_N^{N-1})^{N-1} \end{bmatrix}^* \right)^T$$

Το θεώρημα λέει ότι κάθε κυκλοτικός πίνακας έχει σαν ιδιοδιανύσματα, τις στήλες του  $\mathbf{A}^{-1}$ .



Έστω  $\mathbf{H}$  ένας  $N \times N$  κυκλοτικός πίνακας που κατασκευάζεται από 1D σήμα  $h[n]$  μήκους  $N$ :

$$H(m, n) = h[(m - n)_{\text{mod } N}] \equiv h[m - n]_N$$

Έστω  $\mathbf{a}_k$  η  $k$ -οστή στήλη του  $\mathbf{A}^{-1}$ .

Θα αποδείξουμε ότι το  $\mathbf{a}_k$ , για οποιοδήποτε  $k$ , είναι ιδιοδιάνυσμα του  $\mathbf{H}$ .

Θα γράψουμε σαν  $[\mathbf{H}\mathbf{a}_k]_m$  το  $m$ -οστό στοιχείο του πίνακα  $\mathbf{H}\mathbf{a}_k \dots$

Αυτός ο πίνακας είναι το αποτέλεσμα της κυκλικής συνέλιξης του σήματος  $h[n]$  με την στήλη  $\mathbf{a}_k$ .

$$[\mathbf{H}\mathbf{a}_k]_m = \sum_{n=0}^{N-1} h[m-n]_N \alpha_k[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h[m-n]_N w_N^{-kn}$$

$$\stackrel{l=m-n}{=} \frac{1}{N} \sum_{l=m}^{m-(N-1)} h[l]_N w_N^{-k(m-l)} = \frac{1}{N} w_N^{-km} \sum_{l=m}^{m-(N-1)} h[l]_N w_N^{kl}$$

$$= \frac{1}{N} w_N^{-km} \left[ \sum_{l=m-(N-1)}^{-1} h[l]_N w_N^{kl} + \underbrace{\sum_{l=0}^m h[l]_N w_N^{kl}} \right]$$

Το σπάμε σε δύο όρους

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

$$= \frac{1}{N} w_N^{-km} \left[ \underbrace{\sum_{l=m-(N-1)}^{-1} h[l]_N w_N^{kl}}_{\text{red bracket}} + \sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl} - \sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl} \right]$$

Προσθέτουμε μια περίοδο,  $+N$ .

$$= \frac{1}{N} w_N^{-km} \left[ \sum_{l=\underbrace{N+m-(N-1)}_{\text{red circle}}}^{\underbrace{N-1}_{\text{red circle}}} h[l]_N w_N^{kl} + \sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl} - \sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl} \right]$$

$$= \frac{1}{N} w_N^{-km} \left[ \cancel{\sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl}} + \sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl} - \cancel{\sum_{l=m+1}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl}} \right] \Leftrightarrow$$

$$[\mathbf{H}\mathbf{a}_k]_m = \frac{1}{N} w_N^{-km} \left[ \underbrace{\sum_{l=0}^{N-1} h[l]_N w_N^{kl}}_{\text{DFT του } h[n] \text{ στο } k} \right] = H[k] [\mathbf{a}_k]_m$$

Το παραπάνω ισχύει για κάθε  $m$ . Επομένως:

$$\mathbf{H}\mathbf{a}_k = H[k]\mathbf{a}_k$$

Που σημαίνει ότι το  $\mathbf{a}_k$ , για κάθε  $k$ , είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του  $\mathbf{H}$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή το  $k$ -οστό στοιχείο του  $H[k]$  (όπου  $H[k]$  ο DFT του σήματος από το οποίο κατασκευάστηκε ο  $\mathbf{H}$ ).

Αυτή η σχέση μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{H[0], H[1], \dots, H[N-1]\}$$


Ή αντίστοιχα:  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}$

Αυτή η σχέση (διαγωνιοποίηση του  $\mathbf{H}$ ) μας οδηγεί σε μία εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος της συνέλιξης:

# Διαγωνιοποίηση κυκλοτικών πινάκων

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{F}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} G[0] \\ G[0] \\ \vdots \\ G[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H[0] & 0 & \dots \\ 0 & H[1] & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F[0] \\ F[0] \\ \vdots \\ F[N-1] \end{bmatrix}$$



DFT of  $g[n]$                       DFT of  $h[n]$                       DFT of  $f[n]$

# Διαγωνιοποίηση διπλά block κυκλοτικών πινάκων

- Αυτές οι ιδιότητες γενικεύονται για 2D.
- Χρειαζόμαστε το γινόμενο Kronecker, το οποίο ορίζεται για  $\mathbf{A} \in R^{M \times N}$ ,  $\mathbf{B} \in R^{K \times L}$  ως εξής:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & \dots \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M1}\mathbf{B} & a_{M2}\mathbf{B} & \dots & \dots \end{bmatrix}_{MK \times NL}$$

# Διαγωνιοποίηση διπλά block κυκλοτικών πινάκων

- Το 2Δ σήμα  $f[m,n]$ ,  $0 \leq m \leq M-1$ ,  $0 \leq n \leq N-1$ , μπορεί να διανυσματοποιηθεί, στήλη-στήλη, σε ένα διάνυσμα  $\mathbf{f}$  διάστασης  $MN \times 1$ .
- Ο 2Δ DFT του  $f[m,n]$ , μπορεί να υπολογιστεί τότε σαν:

$$F = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{f}$$



# Διαγωνιοποίηση διπλά block κυκλοτικών πινάκων

**Θεώρημα:** Οι στήλες του αντίστροφου 2D DFT πίνακα

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1}$$

Είναι ιδιοδιανύσματα οποιουδήποτε διπλά block κυκλοτικού πίνακα. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές είναι οι τιμές του 2D DFT του 2D σήματος από το οποίο κατασκευάστηκε ο διπλά block κυκλοτικός πίνακας:

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{H} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1}$$

Διαγώνιος, περιέχει τον 2D DFT του  $h[m,n]$   
από το οποίο κατασκευάστηκε ο  $\mathbf{H}$

Διπλά block κυκλοτικός

- Μιλήσαμε για το πως μπορούμε να εκφράσουμε την συνέλιξη σαν πράξη πινάκων, χρησιμοποιώντας κυκλοτικούς πίνακες
- Μιλήσαμε για την ιδιαίτερη ιδιοδομή των κυκλοτικών πινάκων
- Γράψαμε το θεώρημα της συνέλιξης με πράξεις πινάκων