Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

Αποκατάσταση εικόνας: Γραμμικές μέθοδοι

Γιώργος Σφήκας
sfikas@cs.uoi.gr

Περίληψη

Θα δούμε τεχνικές γραμμικής αποκατάστασης εικόνας

- Παράρτημα: Παραγώγιση πινάκων και διανυσμάτων
- Γραμμική υποβάθμιση, ανεξάρτητη θέσης
- Αποκατάσταση απουσία θορύβου
    - Αντίστροφο φίλτρο
    - Ψευδοαντίστροφο φίλτρο
- Αποκατάσταση παρουσία θορύβου
    - Αντίστροφο φίλτρο
    - Φίλτρο Wiener
    - Φίλτρο ελαχίστων τετραγώνων υπο περιορισμούς

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Σύμβαση:

$\mathbf{A}$: $M\mathrm{x}N$ πίνακας με στοιχεία a_{ij}.

$\mathbf{x}$: $N\mathrm{x}1$ διάνυσμα με στοιχεία x_i.

$\mathrm{f}(\mathbf{x})$: συνάρτηση του διανύσματος $\mathbf{x}$, παίρνει βαθμωτές τιμές ($f : R^N \to R$)

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$: συνάρτηση του διανύσματος $\mathbf{x}$, οι τιμές της είναι διανύσματα μεγέθους $M\mathrm{x}1$ ($g : R^N \to R^M$)

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Βαθμωτή παράγωγος πίνακα.

$\mathbf{A}$ είναι διάστασης MxN , με στοιχεία a_{ij}.

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_{11}}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial a_{1N}}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{M1}}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial a_{MN}}{\partial t} \end{pmatrix}$$

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Παράγωγος scalar-valued συνάρτησης (βαθμωτές τιμές) ως προς διάνυσμα (gradient).

$\mathbf{x}$: Nx1 διάνυσμα με στοιχεία x_i.

f($\mathbf{x}$) : βαθμωτή συνάρτηση διανύσματος $\mathbf{x}$.

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)^T$$

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Παράγωγος vector-valued συνάρτησης (τιμές διανύσματα) ως προς διάνυσμα (Jacobian, Ιακωβιανή):

$\mathbf{x}$: Nx1 διάνυσμα, με στοιχεία x_i.

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$: Mx1 συνάρτηση διανύσματος $\mathbf{x}$, με τιμές διανύσματα.

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_M}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_M}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα:

$\mathbf{x}$ είναι Nx1 διάνυσμα με στοιχεία x_i.

$\mathbf{b}$ είναι Nx1 διάνυσμα με στοιχεία b_i.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{b}^T \mathbf{x}\right) = \mathbf{b}$$

Είναι παράγωγος scalar valued συνάρτησης $\mathbf{b}^T\mathbf{x}$ ως προς διάνυσμα $\mathbf{x}$

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα:

$\mathbf{x}$: Nx1 διάνυσμα με στοιχεία x_i.

$\mathbf{A}$: NxN πίνακας με στοιχεία a_{ij}.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}\right) = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)\mathbf{x}$$

Αν A είναι συμμετρικός:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}\right) = 2\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Παράγωγοι πινάκων και διανυσμάτων

Κάποια χρήσιμα αποτελέσματα:

x : Nx1 διάνυσμα με στοιχεία x_i.

b : Mx1 διάνυσμα με στοιχεία b_i.

A : MxN πίνακας με στοιχεία a_{ij}.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\| \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \right\|^2 = 2\mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \right)$$

Μπορεί να αποδειχθεί σύμφωνα με τα προηγούμενα.

Γραμμική υποβάθμιση

Τώρα θα θεωρήσουμε το παρακάτω μοντέλο για την διαδικασία υποβάθμισης της εικόνας:

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + \eta(x,y)$$

όπου $h(x,y)$ είναι η κρουστική απόκριση της συνάρτησης υποβάθμισης (δηλ. *point spread function* που θολώνει την εικόνα).

Γραμμική υποβάθμιση

Τώρα θα θεωρήσουμε το παρακάτω μοντέλο για την διαδικασία υποβάθμισης της εικόνας:

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + \eta(x,y)$$

όπου $h(x,y)$ είναι η κρουστική απόκριση της συνάρτησης υποβάθμισης (δηλ. *point spread function* που θολώνει την εικόνα).

Η συνέλιξη υποδηλώνει ότι η διαδικασία υποβάθμισης είναι *γραμμική και ανεξάρτητη της κάθε θέσης* – (εξαρτάται επομένως μόνο από τιμές έντασης και όχι από θέση).

Γραμμική υποβάθμιση

Στο πεδίο Fourier:

$$G(k,l) = H(k,l)F(k,l) \ + N(k,l)$$

Όπου H,F πολλαπλασιάζονται σημείο-σημείο (θεώρημα της συνέλιξης).

Με μορφή πινάκων:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} + \boldsymbol{\eta}$$

όπου $\mathbf{H}$ είναι διπλά block κυκλοτικός πίνακας και $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\eta}$ διανύσματα

Γραμμική υποβάθμιση, ανεξάρτητη θέσης

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) \ + \eta(x,y)$$

$$G(k,l) = H(k,l)F(k,l) \ + N(k,l)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} + \boldsymbol{\eta}$$

Αν η συνάρτηση υποβάθμισης είναι άγνωστη, το πρόβλημα της εκτίμησης $f(x,y)$ και $h(x,y)$ ταυτόχρονα, λέγεται *blind deconvolution*

Εκτιμώντας την point spread function

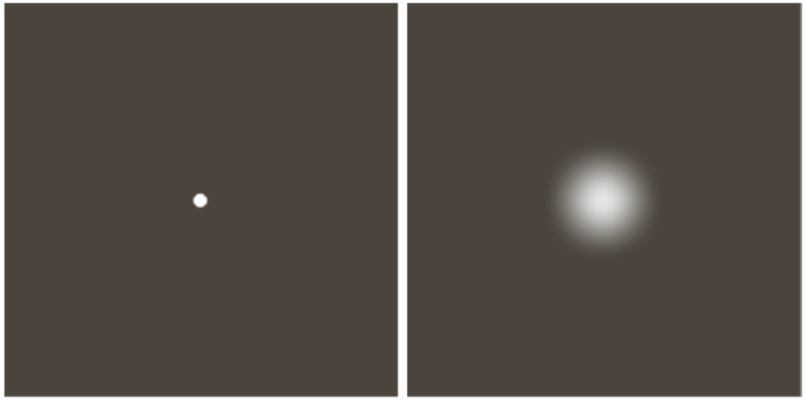
- Αν η psf δεν είναι γνωστή, κάποιες βασικές μέθοδοι εκτίμησής της είναι:
  - Μέσω παρατήρησης
    - Βελτιώνουμε υποεικόνα $g_s(m,n)$ όπου το σήμα είναι ισχυρό (με φίλτρα ή με το χέρι) ώστε να πάρουμε ένα οπτικά καλό αποτέλεσμα $f_s(m,n)$ που θα είναι η εκτίμηση μας για την αρχική εικόνα. Η psf για την υποεικόνα μπορεί να προσεγγιστεί σαν $H_s(k,l) = G_s(k,l)/ F_s(k,l)$.
    - Κατασκευάζουμε H για την πλήρη εικόνα, βασισμένοι στο 'γενικό σχήμα' της H_s
    - Ad hoc, κοπιαστική διαδικασία

Εκτιμώντας την point spread function

- Αν η psf δεν είναι γνωστή, κάποιες βασικές μέθοδοι εκτίμησής της είναι:
  - Μέσω πειραματισμού
    - Αν η συσκευή λήψης ή κάποια παρόμοια είναι διαθέσιμη, μπορούμε να λάβουμε την εικόνα μια κρουστικής απόκρισης (κουκκίδα φωτός) χρησιμοποιώντας τις ίδιες συνθήκες λήψης.
    - Εκτιμούμε $H(k,l) = G(k,l) / A$, όπου A σταθερά (Fourier της κρουστικής απόκρισης)

a b

FIGURE 5.24 Degradation estimation by impulse characterization. (a) An impulse of light (shown magnified). (b) Imaged (degraded) impulse.



Εκτιμώντας την point spread function

- Αν η psf δεν είναι γνωστή, κάποιες βασικές μέθοδοι εκτίμησής της είναι:
  - Μέσω μοντελοποίησης: π.χ. (α) μοντέλο ‘ατμοσφαιρικής διαταραχής’ (atmospheric turbulence):

$$H(u,v) = \exp\left(-k\left(u^2+v^2\right)^{5/6}\right)$$

a b
c d

FIGURE 5.25 Illustration of the atmospheric turbulence model. (a) Negligible turbulence. (b) Severe turbulence, $k = 0.0025$. (c) Mild turbulence, $k = 0.001$. (d) Low turbulence, $k = 0.00025$. (Original image courtesy of NASA.)

Εκτιμώντας την point spread function

- Μέσω μοντελοποίησης: π.χ. (β) κίνηση στο επίπεδο
  - $x_0(t)$ είναι $y_0(t)$ περιγράφουν την κίνηση, ως προς χρόνο t, για κάθε pixel.
  - Η συνολική έκθεση κάθε pixel υπολογίζεται ολοκληρώνοντας την στιγμιαία έκθεση ως προς τον χρόνο που το κλείστρο είναι ανοιχτό.
  - Υποθέτουμε ότι χρειάζεται αμελητέος χρόνος για να ανοίξει ή να κλείσει το κλείστρο.
  - Αν T είναι η διάρκεια της έκθεσης, η εικόνα που καταγράφεται είναι:

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)]dt$$

Εκτιμώντας την point spread function

$$
\begin{aligned}
G(u,v) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{T}\left[\, f[x-x_0(t),y-y_0(t)]dt \,\right]e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy \\
&= \int_{0}^{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f[x-x_0(t),y-y_0(t)]e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy\right]dt \\
&= \int_{0}^{T} F(u,v)e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt \\
&= F(u,v)\int_{0}^{T} e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt \Leftrightarrow \\
H(u,v) &= \int_{0}^{T} e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt
\end{aligned}
$$

Εκτιμώντας την point spread function

- Θεωρώντας ομοιόμορφη και γραμμική κίνηση:

$$x_0(t) = a\frac{t}{T},\ y_0(t) = b\frac{t}{T}$$

- Η psf υπολογίζεται ως:

$$\begin{aligned} H(u,v) &= \int_0^T e^{-j2\pi(uat+vbt)/T}dt \\ &= \frac{T}{\pi(ua+vb)}\sin\left[\pi(ua+vb)\right]e^{-j\pi(ua+vb)} \end{aligned}$$

Εκτιμώντας την point spread function

- Αποτέλεσμα θόλωσης με:

$$x_0(t) = a\frac{t}{T},\ y_0(t) = b\frac{t}{T},\ a = b = 0.1, T = 1$$

Γραμμική αποκατάσταση

Θεωρούμε το μοντέλο παρατήρησης

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}$$

Και θέλουμε να εκτιμήσουμε την πραγματική εικόνα δεδομένης της (υποβαθμισμένης) παρατήρησης και **γνωστής** υποβάθμισης $\mathbf{H}$.

Μία γραμμική μέθοδος εφαρμόζει μια γραμμική πράξη – κοινώς πολλ/ζει έναν πίνακα- $\mathbf{P}$ στην παρατήρηση $\mathbf{g}$ στοχεύοντας να εκτιμηθεί η πραγματική, χωρίς θόρυβο, $\mathbf{f}$:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{P}\mathbf{g}$$

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, αντίστροφο φίλτρο

Όταν δεν υπάρχει θόρυβος:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f}$$

Μία προφανής λύση είναι ο αντίστροφος:

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}^{-1}$$

επομένως

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{P}\mathbf{g} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{f} = \mathbf{f}$$

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, αντίστροφο φίλτρο

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$$

Για NxN εικόνα, ο $\mathbf{H}$ είναι N^2xN^2 πίνακας!

Για να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα, το μεταφέρουμε στο πεδίο των συχνοτήτων / Fourier.

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, αντίστροφο φίλτρο

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$$

Ο **H** είναι διπλά block κυκλοτικός, και επομένως μπορεί να διαγωνιοποιηθεί χρησιμοποιώντας τον 2Δ πίνακα DFT **W**:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}$$

(θυμηθείτε πως είχαμε ορίσει τον W σε προηγούμενη διάλεξη σαν γινόμενο Kronecker 1Δ πινάκων DFT)

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, αντίστροφο φίλτρο

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}$$

όπου

$$\mathbf{\Lambda} = diag\{H(1,1),\ldots,H(N,1),H(1,2),\ldots H(N,N)\}$$

Επομένως:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{P}\mathbf{g} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{f}} = (\mathbf{W}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{g}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{g} \Leftrightarrow \mathbf{W}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{W}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{g}$$

$$\Leftrightarrow \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{G}$$

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, αντίστροφο φίλτρο

Αυτή είναι η διανυσματοποιημένη μορφή του DFT της εικόνας:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{G} \Leftrightarrow \hat{F}(k,l) = \frac{G(k,l)}{H(k,l)}$$

Και αρκεί να υπολογίσουμε αντίστροφο DFT για να πάρουμε το $f(m,n)$.

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, αντίστροφο φίλτρο

Αυτή είναι η διανυσματοποιημένη μορφή του DFT της εικόνας:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{G} \Leftrightarrow \hat{F}(k,l) = \frac{G(k,l)}{H(k,l)}$$

Και αρκεί να υπολογίσουμε αντίστροφο DFT για να πάρουμε το $f(m,n)$.

Πρόβλημα όταν ο $H(k,l)$ έχει μηδενικές τιμές!

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, ψευδοαντίστροφο φίλτρο

Μια λύση είναι:

$$\hat{F}(k,l) = \begin{cases} \dfrac{G(k,l)}{H(k,l)} & , \quad H(k,l) \neq 0 \\ 0 & , \quad H(k,l) = 0 \end{cases}$$

Που είναι μια μορφή *ψευδοαντιστροφής*.

Παρατηρήστε ότι το σήμα δεν μπορεί να εκτιμηθεί όπου $H(k,l)$=0.

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, ψευδοαντίστροφο φίλτρο

Ψευδοαντίστροφο φίλτρο έχουμε σαν λύση όταν θέτουμε το πρόβλημα σαν πρόβλημα ‘ελαχίστων τετραγώνων’:

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, ψευδοαντίστροφο φίλτρο

Ψευδοαντίστροφο φίλτρο έχουμε σαν λύση όταν θέτουμε το πρόβλημα σαν πρόβλημα ‘ελαχίστων τετραγώνων’:

Βρες την εικόνα **f**, η οποία όταν πολλ/στεί με **H**, θα δώσει αποτέλεσμα όσο το δυνατόν πιο κοντά στο **g**.

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, ψευδοαντίστροφο φίλτρο

Ψευδοαντίστροφο φίλτρο έχουμε σαν λύση όταν θέτουμε το πρόβλημα σαν πρόβλημα ‘ελαχίστων τετραγώνων’:

Βρες την εικόνα $\mathbf{f}$, η οποία όταν πολλ/στεί με $\mathbf{H}$, θα δώσει αποτέλεσμα όσο το δυνατόν πιο κοντά στο $\mathbf{g}$.

Με άλλα λόγια: Ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε την απόσταση μεταξύ $\mathbf{Hf}$ και $\mathbf{g}$.

Γραμμική αποκατάσταση: Χωρίς θόρυβο, ψευδοαντίστροφο φίλτρο

Αυτή η απόσταση εκφράζεται από τη νόρμα:

$$J(\mathbf{f}) = \left\| \mathbf{Hf} - \mathbf{g} \right\|^2$$

$$\min_{\mathbf{f}} \left\{ J(\mathbf{f}) \right\} \Leftrightarrow \frac{\partial J}{\partial \mathbf{f}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \left(\left\| \mathbf{Hf} - \mathbf{g} \right\|^2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\mathbf{H}^T \left(\mathbf{Hf} - \mathbf{g} \right) = 0 \Leftrightarrow 2\mathbf{H}^T \mathbf{Hf} = 2\mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{f} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{g}$$

Γραμμική αποκατάσταση: Παρουσία θορύβου. Αντίστροφο φίλτρο

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) \ + \eta(x,y)$$

$$G(k,l) = H(k,l)F(k,l) \ + N(k,l)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{Hf} + \boldsymbol{\eta}$$

Γραμμική αποκατάσταση: Παρουσία θορύβου. Αντίστροφο φίλτρο

Εφαρμογή του αντίστροφου φίλτρου στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$G(k,l) = H(k,l)F(k,l) + N(k,l)$$

$$\Leftrightarrow \hat{F}(k,l) = F(k,l) + \frac{N(k,l)}{H(k,l)}$$

Ακόμα και αν γνωρίζουμε το $H(k,l)$ δεν μπορούμε να ανακτήσουμε το $F(k,l)$ λόγω του δεύτερου όρου.

Αν το $H(k,l)$ έχει μικρές τιμές ο δεύτερος όρος θα 'κυριαρχεί' (πάει στο άπειρο για $H(k,l)$=0!).

Γραμμική αποκατάσταση: Παρουσία θορύβου. Αντίστροφο φίλτρο

- Μια λύση είναι να υπολογίσουμε $G(k,l)$ / $H(k,l)$ μόνο για πολύ χαμηλές συχνότητες.
- Ξέρουμε ‘εμπειρικά’ ότι η $H(0,0)$ είναι συνήθως ο όρος με το μεγαλύτερο μέτρο – μεγάλο μέτρο έχουν και οι υπόλοιπες χαμηλές συχνότητες
- Επομένως εκεί είναι πιο απίθανο να κυριαρχεί ο όρος N(k,l) / H(k,l) , αφού F(k,l) σπάνια θα μηδενίζεται

Γραμμική αποκατάσταση: Παρουσία θορύβου. Αντίστροφο φίλτρο

Blurring degradation

a b
c d

FIGURE 5.25 Illustration of the atmospheric turbulence model. (a) Negligible turbulence. (b) Severe turbulence, $k = 0.0025$. (c) Mild turbulence, $k = 0.001$. (d) Low turbulence, $k = 0.00025$. (Original image courtesy of NASA.)

Γραμμική αποκατάσταση: Παρουσία θορύβου. Αντίστροφο φίλτρο

Inverse filter with cut-off

a b
c d

FIGURE 5.27 Restoring Fig. 5.25(b) with Eq. (5.7-1). (a) Result of using the full filter. (b) Result with *H* cut off outside a radius of 40; (c) outside a radius of 70; and (d) outside a radius of 85.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Ως τώρα δεν έχουμε κάνει καμμία υπόθεση για τις στατιστικές ιδιότητες είτε του σήματος είτε του θορύβου.
- Θεωρούμε πλέον την εικόνα και τον θόρυβο σαν τυχαίες μεταβλητές και το ζητούμενο είναι να βρούμε εκτίμηση της αρχικής $\mathbf{f}$ τέτοια ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (*mean square error*) μεταξύ εκτίμησης και εικόνας να ελαχιστοποιείται:

$$\min_{\hat{\mathbf{f}}} \left\{ E\left[(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}})^2 \right] \right\}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Πίνακας συσχέτισης μεταξύ τυχαίων διανυσμάτων x και y:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xy}} = E\left[\mathbf{x}\mathbf{y}^T\right] = \begin{bmatrix} E\left[x_1 y_1\right] & E\left[x_1 y_2\right] & \dots & E\left[x_1 y_N\right] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \dots \\ E\left[x_N y_1\right] & E\left[x_N y_2\right] & \dots & E\left[x_N y_N\right] \end{bmatrix}$$

- Θεωρούμε ότι θόρυβος και εικόνα είναι μη συσχετισμένα:

$$\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}\mathbf{f}} = \mathbf{R}_{\mathbf{f}\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{0}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Θέλουμε *βέλτιστο* εκτιμητή, με την έννοια ότι ελαχιστοποιεί:

$$\min_{\hat{\mathbf{f}}} \left\{ E\left[(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}})^2 \right] \right\}$$

- Θα υποθέσουμε ότι ο βέλτιστος εκτιμητής μπορεί να γραφτεί σαν:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{P}\mathbf{g}$$

επομένως το πρόβλημα μετατίθεται τώρα στο να βρούμε το βέλτιστο $\mathbf{P}$.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

$$J(\hat{\mathbf{f}}) = E\left[(\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}})^2\right] = E\left[\left\|\mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}\right\|^2\right] = E\left[\left\|\mathbf{f} - \mathbf{P}\mathbf{g}\right\|^2\right]$$

Γράφοντας $\mathbf{p}_n^T$ την n-οστή γραμμή του $\mathbf{P}$:

$$J(\hat{\mathbf{f}}) = E\left[\sum_n \left(\mathbf{f}_n - \mathbf{p}_n^T \mathbf{g}\right)^2\right] = \sum_n E\left[\left(\mathbf{f}_n - \mathbf{p}_n^T \mathbf{g}\right)^2\right]$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

$$J(\hat{\mathbf{f}}) = \sum_n E\left[\left(\mathbf{f}_n - \mathbf{p}_n^T \mathbf{g}\right)\left(\mathbf{f}_n - \mathbf{p}_n^T \mathbf{g}\right)^T \right]$$

$$= \sum_n E\left[\mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T - \mathbf{p}_n^T \mathbf{g} \mathbf{f}_n^T - \mathbf{f}_n \mathbf{g}^T \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n^T \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{p}_n \right]$$

$$= \sum_n E\left[\mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T \right] - \mathbf{p}_n^T E\left[\mathbf{g} \mathbf{f}_n^T \right] - E\left[\mathbf{f}_n \mathbf{g}^T \right] \mathbf{p}_n + \mathbf{p}_n^T E\left[\mathbf{g} \mathbf{g}^T \right] \mathbf{p}_n$$

$$= \sum_n \mathbf{R}_{\mathbf{f}_n \mathbf{f}_n} - 2\mathbf{p}_n^T \mathbf{R}_{\mathbf{g}\mathbf{f}_n} + \mathbf{p}_n^T \mathbf{R}_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \mathbf{p}_n$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε το άθροισμα ως προς κάθε όρο:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_n}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{f}_n\mathbf{f}_n} - 2\mathbf{p}_n^T\mathbf{R}_{\mathbf{g}\mathbf{f}_n} + \mathbf{p}_n^T\mathbf{R}_{\mathbf{gg}}\mathbf{p}_n\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\mathbf{R}_{\mathbf{g}\mathbf{f}_n} + 2\mathbf{R}_{\mathbf{gg}}\mathbf{p}_n = 0 \;\Leftrightarrow \mathbf{p}_n = \mathbf{R}_{\mathbf{gg}}^{-1}\mathbf{R}_{\mathbf{g}\mathbf{f}_n}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{p}_n^T = \mathbf{R}_{\mathbf{f}_n\mathbf{g}}\mathbf{R}_{\mathbf{gg}}^{-1}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Ισοδύναμα:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R_{fg}} \mathbf{R_{gg}}^{-1}$$

- Μένει να υπολογίσουμε τους δύο πίνακες – όρους του γινομένου:

$$\mathbf{R_{gg}} = E\left[\mathbf{g}\mathbf{g}^T\right] = E\left[(\mathbf{Hf} + \boldsymbol{\eta})(\mathbf{Hf} + \boldsymbol{\eta})^T\right]$$

$$= E\left[\mathbf{H}\mathbf{f}\mathbf{f}^T\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{f}\boldsymbol{\eta}^T + \boldsymbol{\eta}\mathbf{f}^T\mathbf{H}^T + \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{\eta}\right]$$

$$= \mathbf{H}\mathbf{R_{ff}}\mathbf{H}^T + \mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{f}\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}\mathbf{f}}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Από υπόθεση μη συσχέτισης θορύβου - εικόνας:

$$\mathbf{R_{gg}} = \mathbf{H}\mathbf{R_{ff}}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}}$$

- Επίσης,

$$\mathbf{R_{fg}} = E\left[\mathbf{f}\mathbf{g}^T\right] = E\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{H}\mathbf{f} + \boldsymbol{\eta}\right)^T\right] = \ldots = \mathbf{R_{ff}}\mathbf{H}^T$$

- Και τελικά ο πίνακας που αναζητούμε είναι

$$\mathbf{P} = \mathbf{R_{fg}}\mathbf{R_{gg}}^{-1} = \mathbf{R_{ff}}\mathbf{H}^T\left(\mathbf{H}\mathbf{R_{ff}}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}}\right)^{-1}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Η εκτιμώμενη αρχική εικόνα είναι

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{Pg} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{R_{ff}} \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \mathbf{R_{ff}} \mathbf{H}^T + \mathbf{R_{\eta\eta}} \right)^{-1} \mathbf{g}$$

Το παραπάνω επίσης μπορεί να γραφτεί ως

$$\hat{\mathbf{f}} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{R}_{\eta\eta}^{-1} \mathbf{H} + \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}_{\eta\eta}^{-1} \mathbf{g}$$

- Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Wiener filter ή Wiener-Kolmogorov filter ή minimum mean square error (MMSE) filter.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Ειδικές περιπτώσεις:
  - –No blur ($\mathbf{H}=\mathbf{I}$, $\mathbf{g}=\mathbf{f}+\boldsymbol{\eta}$): $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\left(\mathbf{R}_{\mathbf{ff}} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta\eta}}\right)^{-1}\mathbf{g}$
  - –No noise ($\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta\eta}}=\mathbf{0}$, $\mathbf{g}=\mathbf{Hf}$): $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$
    - Είναι το αντίστροφο φίλτρο.
  - –No blur, no noise ($\mathbf{H}=\mathbf{I}$, $\mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta\eta}}=\mathbf{0}$): $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{g}$
    - Κρατάμε ανέπαφη την παρατήρηση.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Λόγω δυσκολιών με τις αντιστροφές πινάκων που απαιτούνται για το φίλτρο, το Wiener φίλτρο βολεύει να υπολογίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων.
- Μπορεί να γίνει όταν ο $\mathbf{H}$ είναι διπλά block κυκλοτικός (επομένως αναπαριστά συνέλιξη) και η εικόνα $\mathbf{f}$ και ο θόρυβος $\boldsymbol{\eta}$ είναι *wide-sense stationary* (w.s.s).

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

- Λόγω δυσκολιών με τις αντιστροφές πινάκων που απαιτούνται για το φίλτρο, το Wiener φίλτρο βολεύει να υπολογίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων.
- Μπορεί να γίνει όταν ο $\mathbf{H}$ είναι διπλά block κυκλοτικός (επομένως αναπαριστά συνέλιξη) και η εικόνα $\mathbf{f}$ και ο θόρυβος $\boldsymbol{\eta}$ είναι *wide-sense stationary* (w.s.s).

Ορισμός w.s.s. σήματος:

1) $E[f(m,n)]=\mu$, ανεξάρτητο του m,n.

2) $E[f(m,n)\, f(k,l)]=r(m-k,n-l)$, ανεξάρτητο της θέσης.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

Υπενθύμιση: για **κάθε** κυκλοτικό / διπλά block κυκλοτικό ισχύει:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\mathbf{W}$$

Οι στήλες του $\mathbf{W}^{-1}$ είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathbf{H}$.

Οι ιδιοτιμές (διαγώνιος του Λ_H) είναι η αναπαράσταση Fourier του σήματος από το οποίο κατασκευάστηκε ο κυκλοτικός πίνακας

Επίσης

$$\mathbf{W}^{T} = \mathbf{W}$$

και

$$\left(\mathbf{W}^{-1}\right)^{T} = \mathbf{W}^{-1}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{H} = \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\mathbf{W}$$

$$\mathbf{H}^{T} = \left(\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\mathbf{W}\right)^{T} = \mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\mathbf{W}^{-1}$$

Αν $\mathbf{H}$ είναι πραγματικός:

$$\mathbf{H}^{T} = \left(\mathbf{H}^{T}\right)^{*} = \left(\mathbf{W}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\mathbf{W}^{-1}\right)^{*} = \mathbf{W}^{*}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}\left(\mathbf{W}^{-1}\right)^{*}$$

$$= (N\mathbf{W}^{-1})\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}\frac{1}{N}\mathbf{W} = \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}\mathbf{W}$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

Και το φίλτρο Wiener μετατασχηματίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων :

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{H}^{T}\left(\mathbf{H}\mathbf{R}_{\mathbf{ff}}\mathbf{H}^{T} + \mathbf{R}_{\boldsymbol{\eta\eta}}\right)^{-1}\mathbf{g}$$

$$= (\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W})(\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}\mathbf{W})\left[(\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\mathbf{W})(\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\mathbf{W})(\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}\mathbf{W}) + (\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\eta\eta}}\mathbf{W})\right]^{-1}\mathbf{g}$$

$$= \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}\mathbf{W}\left[\mathbf{W}^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*} + \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\eta\eta}})\mathbf{W}\right]^{-1}\mathbf{g} \;= \mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*} + \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\eta\eta}})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{g}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{W}\hat{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*}(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{ff}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{H}}^{*} + \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{\eta\eta}})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{g}$$

Παρατηρήστε ότι οι Λ πίνακες είναι διαγώνιοι.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

$$\mathbf{W}\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{\Lambda_{ff}}\mathbf{\Lambda_{H}^{*}}(\mathbf{\Lambda_{H}}\mathbf{\Lambda_{ff}}\mathbf{\Lambda_{H}^{*}} + \mathbf{\Lambda_{\eta\eta}})^{-1}\mathbf{W}\mathbf{g} \Leftrightarrow$$

$$F(k,l) = \frac{S_{ff}(k,l)H^{*}(k,l)}{S_{ff}(k,l)\left|H(k,l)\right|^{2} + S_{\eta\eta}(k,l)}G(k,l)$$

$S_{ff}(k,l)$=DFT($R_{ff}(m,n)$) φάσμα ισχύος $f(m,n)$.

$S_{\eta\eta}(k,l)$=DFT($R_{\eta\eta}(m,n)$) φάσμα ισχύος $\eta(m,n)$.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

Αν $S_{ff}(k,l)$ δεν είναι 0 μπορούμε να ορίσουμε τον λόγο Σήματος προς Θόρυβο (Signal to Noise Ratio) στο πεδίο των συχνοτήτων:

$$\mathrm{SNR}(k,l) = \frac{S_{ff}(k,l)}{S_{\eta\eta}(k,l)}$$

Οπότε το φίλτρο Wiener γράφεται:

$$F(k,l) = \frac{H^*(k,l)}{\left|H(k,l)\right|^2 + \mathrm{SNR}^{-1}(k,l)} G(k,l)$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

a b c

FIGURE 5.28 Comparison of inverse and Wiener filtering. (a) Result of full inverse filtering of Fig. 5.25(b). (b) Radially limited inverse filter result. (c) Wiener filter result.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο Wiener

Degraded image | Inverse | Wiener

Noise variance one order of magnitude less.

Noise variance ten orders of magnitude less.

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο ελαχίστων τετραγώνων υπό περιορισμούς

- Όταν δεν έχουμε πληροφορία για το φάσμα του σήματος και του θορύβου, το Wiener δεν είναι βέλτιστο.
- Μια άλλη ιδέα είναι να εισάγουμε έναν 'όρο εξομάλυνσης' $\|\mathbf{Qf}\|^2$ στη σχέση που βελτιστοποιούμε.
- Ορίζουμε την εξομάλυνση μέσω της ποσότητας Q
  - Σαν $\mathbf{Q}$ χρησιμοποιούμε έναν υψιπερατό τελεστή, π.χ. την Λαπλασιανή
  - 'Constrained Least Squares' filter (CLS)

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο ελαχίστων τετραγώνων υπό περιορισμούς

Έχουμε επομένως το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς:

Ελαχιστοποίησε $\|\mathbf{Qf}\|^2$ υπό περιορισμό $\mathbf{Hf} = \mathbf{g}$

Το οποίο γράφεται σαν ελαχιστοποίηση της σχέσης:

$$J(\mathbf{f},\lambda) = \|\mathbf{Hf} - \mathbf{g}\|^2 + \lambda\|\mathbf{Qf}\|^2$$

Data fidelity term

Smoothness term

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο ελαχίστων τετραγώνων υπό περιορισμούς

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} J(\mathbf{f},\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathbf{H}^T(\mathbf{Hf} - \mathbf{g}) + 2\lambda \mathbf{Q}^T\mathbf{Qf} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{f} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \lambda \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g}$$

Η παράμετρος λ ελέγχει την βαρύτητα του όρου εξομάλυνσης:

$\lambda = 0,\ \mathbf{f} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{g}$ ψευδοαντίστροφος, καμμία εξομάλυνση

$\lambda \to \infty,\ \mathbf{f} = 0$ Ακραία εξομάλυνση

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο ελαχίστων τετραγώνων υπό περιορισμούς

Στο πεδίο των συχνοτήτων γράφουμε:

$$F(k,l)=\frac{H^{*}(k,l)}{\left|H(k,l)\right|^{2}+\lambda\left|Q(k,l)\right|^{2}}G(k,l)$$

Γραμμική αποκατάσταση παρουσία θορύβου. Φίλτρο ελαχίστων τετραγώνων υπό περιορισμούς

a b c

FIGURE 5.30 Results of constrained least squares filtering. Compare (a), (b), and (c) with the Wiener filtering results in Figs. 5.29(c), (f), and (i), respectively.

Χαμηλός θόρυβος: Το Wiener και το CLS δίνουν παρόμοιο αποτέλεσμα.
Υψηλός θόρυβος: Το CLS πάει καλύτερα από το Wiener αν το λ έχει 'καλή' τιμή

Συνήθως είναι πιο απλό να επιλέξουμε λ παρά να δώσουμε εκτίμηση του SNR, όπως απαιτεί το Wiener.

Μέτρα αποτίμησης της αποκατάστασης

Αρχική (πραγματική) εικόνα: f
αποκατεστημένη εικόνα: $\hat{f}$

Μέσο τετραγωνικό σφάλμα(MSE):

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left[f(m,n) - \hat{f}(m,n) \right]^2$$

Μέτρα αποτίμησης της αποκατάστασης

Αποτιμώντας με τον λόγο σήματος προς θόρυβο (Signal to Noise Ratio, SNR) θεωρούμε σαν θόρυβο την απόσταση εκτίμησης και πραγματικότητας:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(m,n)^2}{\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left[f(m,n) - \hat{f}(m,n) \right]^2}$$