Ψηφιακή Επεξεργασία Εικόνας

Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

Γιώργος Σφήκας
sfikas@cs.uoi.gr

Στο προηγούμενο μάθημα..

- Μιλήσαμε για την αναπαράσταση σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων
- Είδαμε το ζευγάρι DFT – IDFT

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] w_N^{nk}, \qquad 0 \le k \le N-1$$

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F[k] w_N^{-nk}, \qquad 0 \le n \le N-1$$

όπου $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Στο προηγούμενο μάθημα..

- Μιλήσαμε για την αναπαράσταση σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων
- Αναπαραστήσαμε τον 1Δ DFT ως πράξη πινάκων

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \cdots & \left(\quad \right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \cdots & \left(\quad \right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \cdots & \left(\quad \right)^{N-1} \end{bmatrix}$$

Στο προηγούμενο μάθημα..

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{N}\left(\mathbf{A}^{*}\right)^{T} = \frac{1}{N}\left(\begin{bmatrix} \left(w_N^0\right)^0 & \left(w_N^0\right)^1 & \left(w_N^0\right)^2 & \cdots & \left(w_N^0\right)^{N-1} \\ \left(w_N^1\right)^0 & \left(w_N^1\right)^1 & \left(w_N^1\right)^2 & \cdots & \left(w_N^1\right)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(w_N^{N-1}\right)^0 & \left(w_N^{N-1}\right)^1 & \left(w_N^{N-1}\right)^2 & \cdots & \left(w_N^{N-1}\right)^{N-1} \end{bmatrix}^{*}\right)^{T}$$

Στο προηγούμενο μάθημα..

- Αντίστοιχα για 2Δ DFT, χρησιμοποιούμε τον *ίδιο* πίνακα A και γράφουμε:

$$F = \mathrm{A} f \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$$

- Όπου τώρα F, f είναι NxN πίνακες
  - Ισοδύναμα $F = \mathrm{A} f \mathrm{A}$, αφού $\mathrm{A} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}$
  - (Προσοχή στον τελεστή « ’ » της MATLAB! Για μιγαδικούς υπολογίζει τον *συζυγή* ανάστροφο)

DFT και ιδιότητες

Name	Expression(s)
1) Discrete Fourier transform (DFT) of $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)\, e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$
2) Inverse discrete Fourier transform (IDFT) of $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v)\, e^{j2\pi(ux/M + vy/N)}$
3) Polar representation	$F(u, v) = \|F(u, v)\| e^{j\phi(u,v)}$
4) Spectrum	$\|F(u, v)\| = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v)\right]^{1/2}$ $R = \mathrm{Real}(F); \quad I = \mathrm{Imag}(F)$
5) Phase angle	$\phi(u, v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)}\right]$
6) Power spectrum	$P(u, v) = \|F(u, v)\|^2$
7) Average value	$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$

(Continued)

DFT και ιδιότητες

Name	DFT Pairs
1) Symmetry properties	See Table 4.1
2) Linearity	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) Translation (general)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(ux_0/M + vy_0/N)}$
4) Translation to center of the frequency rectangle, $(M/2, N/2)$	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{u+v}$
5) Rotation	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad u = \omega\cos\varphi \quad v = \omega\sin\varphi$
6) Convolution theorem†	$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$ $f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$

(Continued)

DFT και ιδιότητες

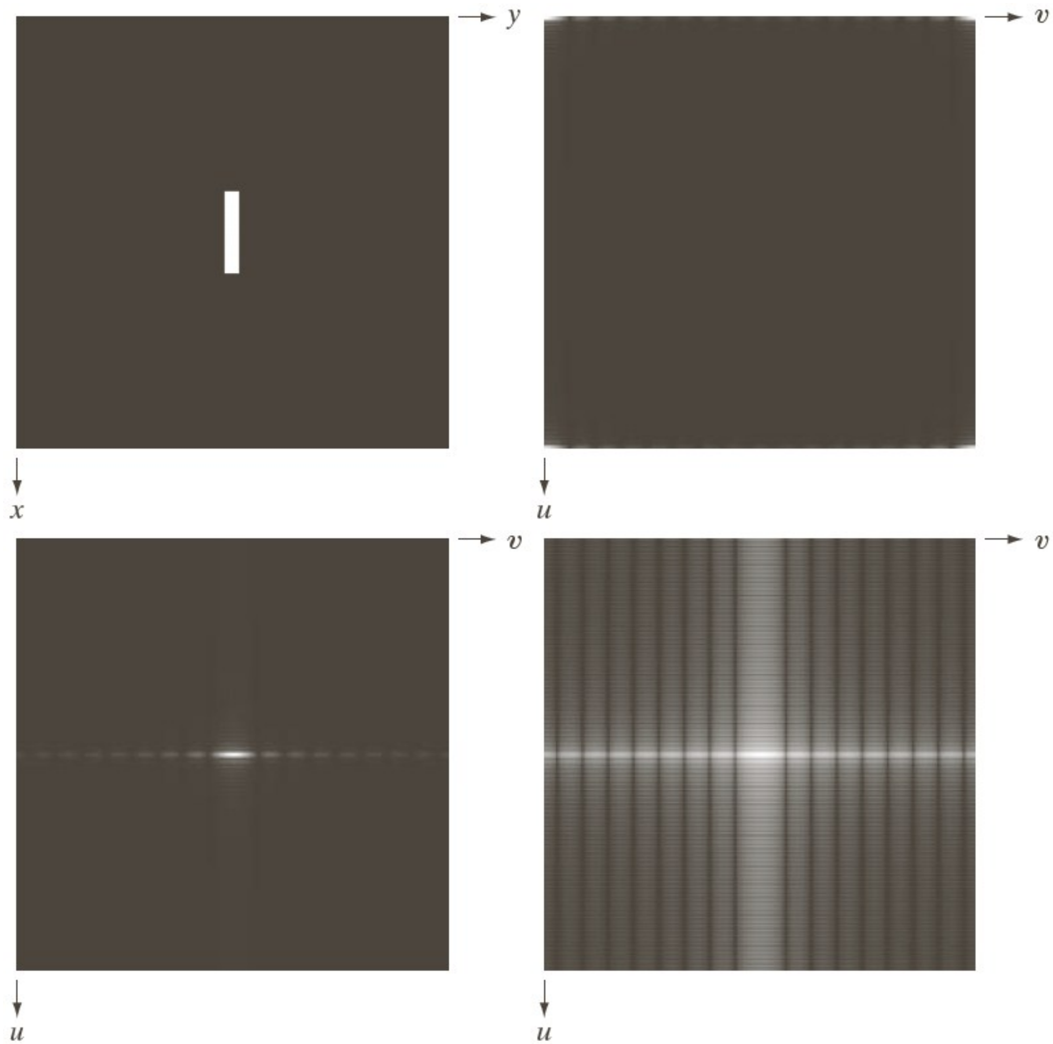
- Ιδιότητα συμμετρίας πραγματικού σήματος:

$$F(u,v) = F^*(-u,-v)$$

- απ΄όπου συμπεραίνουμε ότι

$$F(u,v) = |F(-u,-v)|$$

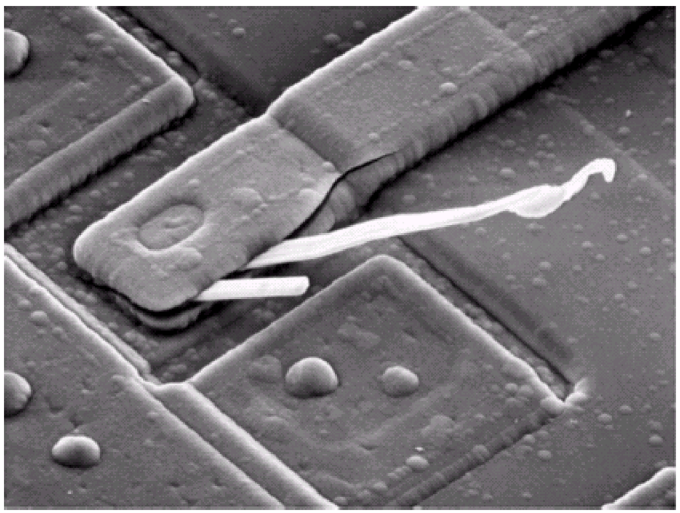
DFT και ιδιότητες



a b
c d

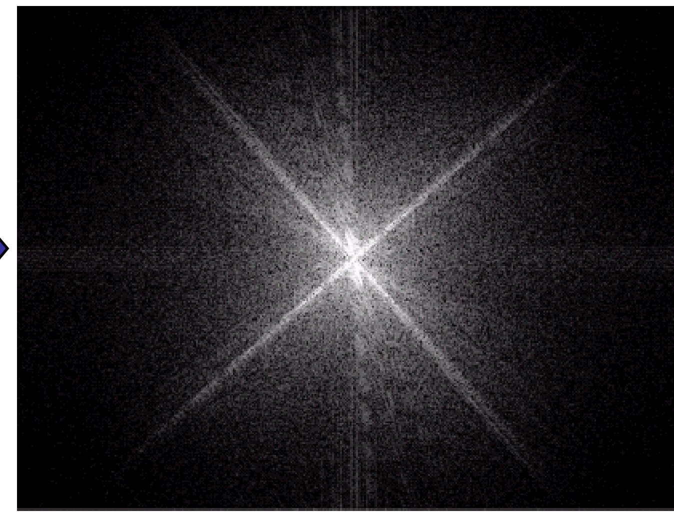
FIGURE 4.24
(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum. (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

DFT και ιδιότητες



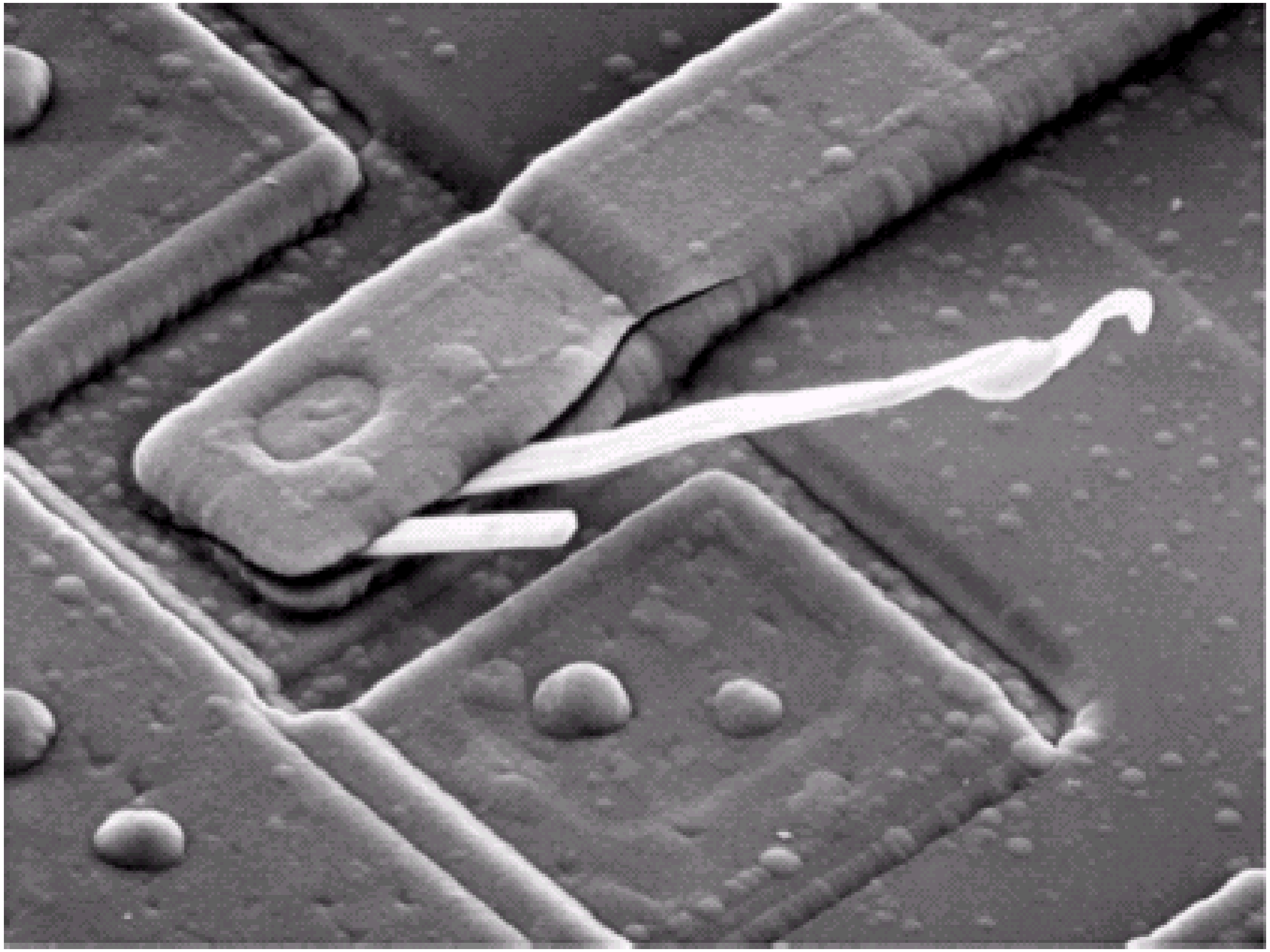
Scanning electron microscope image of an integrated circuit magnified ~2500 times

DFT

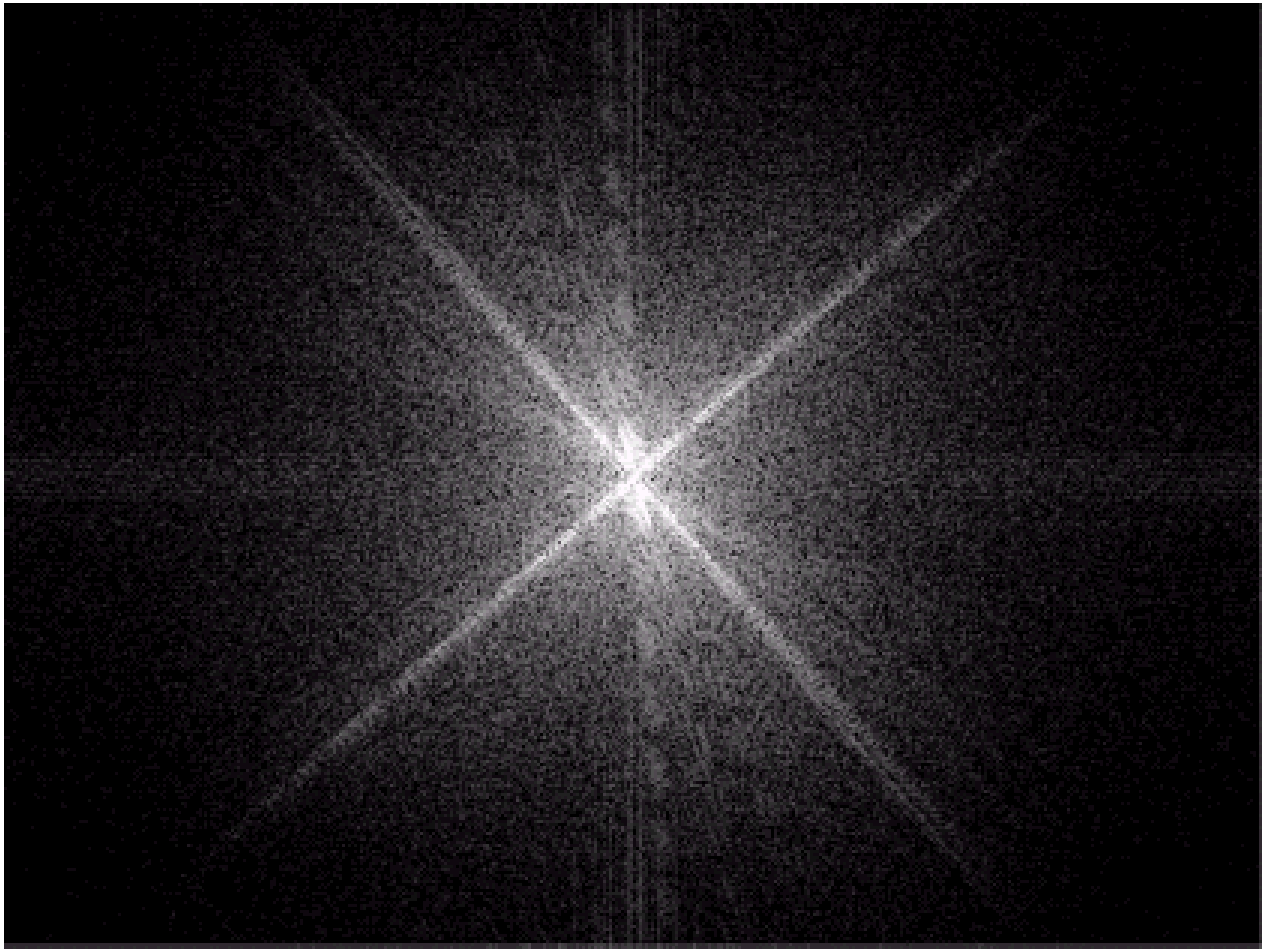


Fourier spectrum of the image

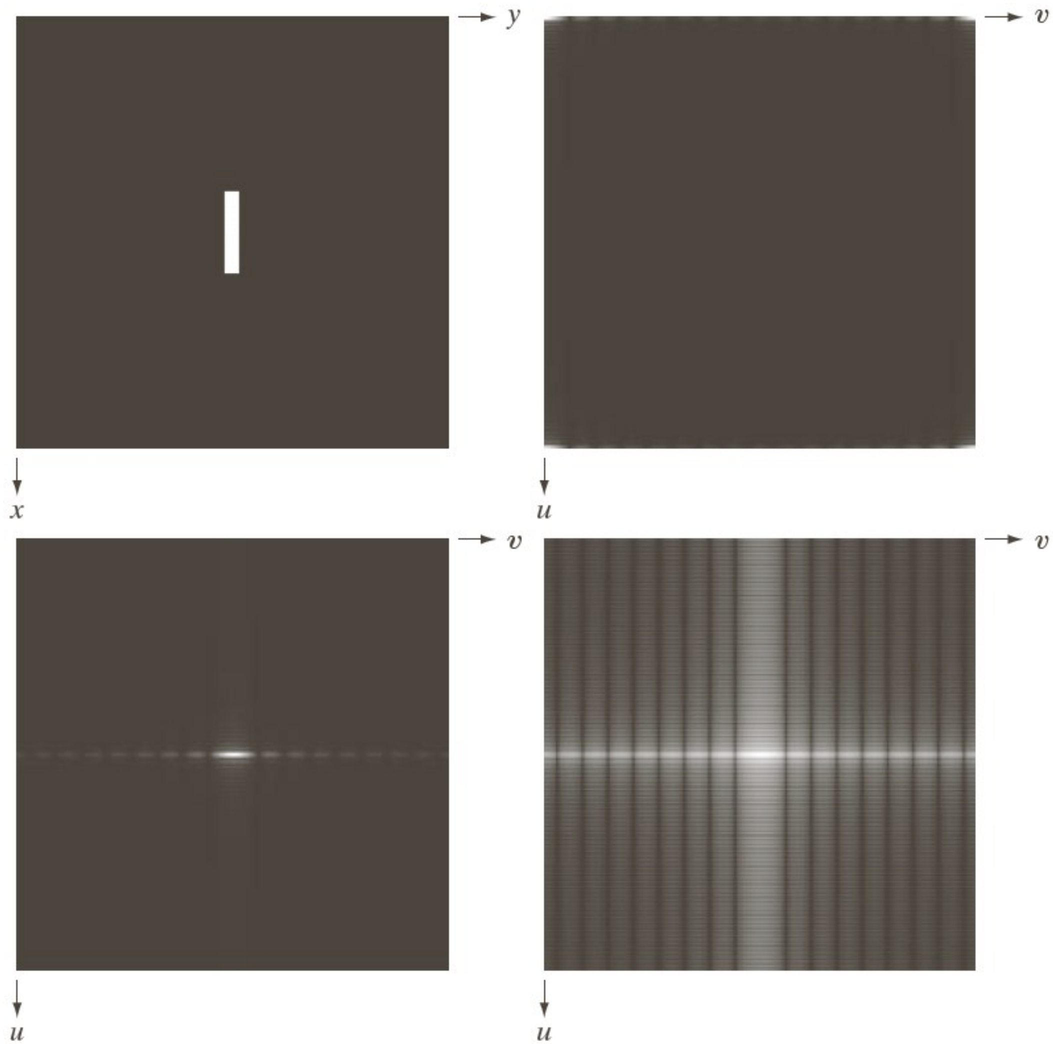
DFT και ιδιότητες



DFT και ιδιότητες



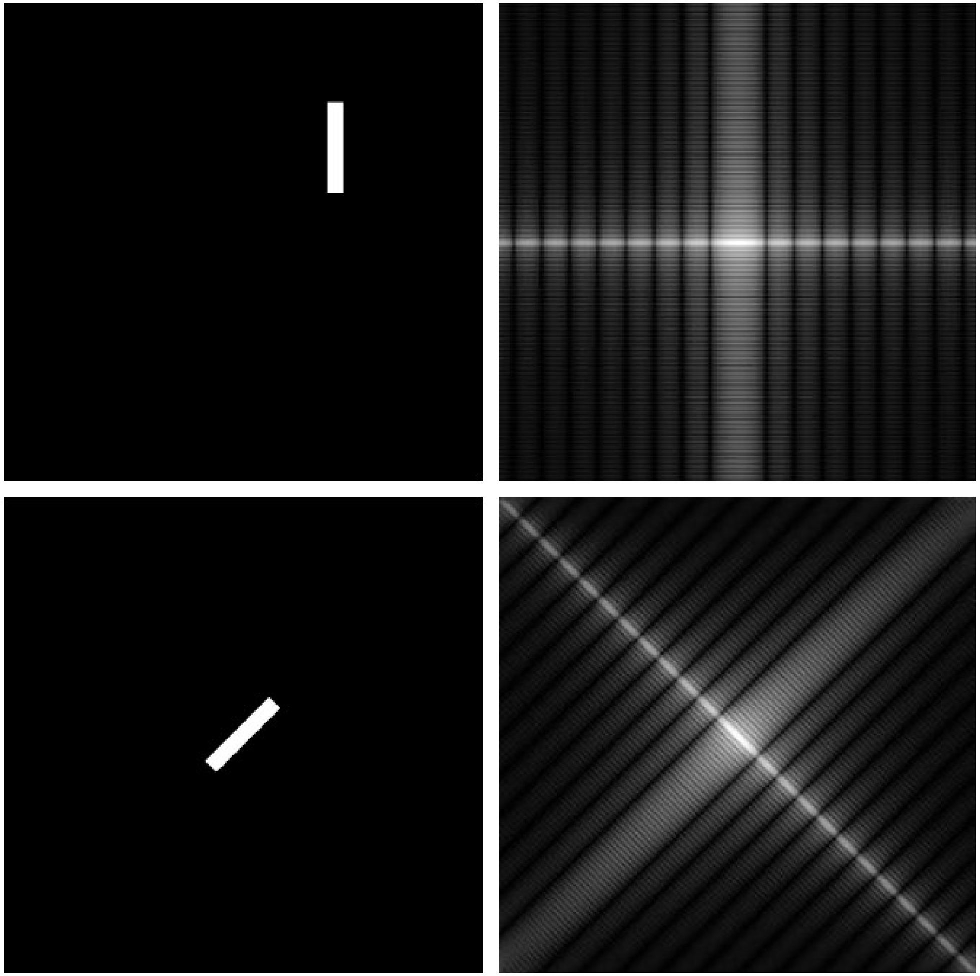
DFT και ιδιότητες



a b
c d

FIGURE 4.24
(a) Image.
(b) Spectrum showing bright spots in the four corners.
(c) Centered spectrum. (d) Result showing increased detail after a log transformation. The zero crossings of the spectrum are closer in the vertical direction because the rectangle in (a) is longer in that direction. The coordinate convention used throughout the book places the origin of the spatial and frequency domains at the top left.

DFT και ιδιότητες



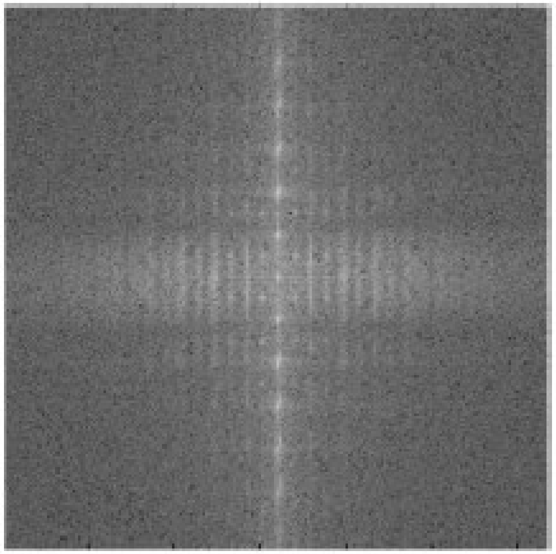
a b
c d

FIGURE 4.25 (a) The rectangle in Fig. 4.24(a) translated, and (b) the corresponding spectrum. (c) Rotated rectangle, and (d) the corresponding spectrum. The spectrum corresponding to the translated rectangle is identical to the spectrum corresponding to the original image in Fig. 4.24(a).

DFT και ιδιότητες

Image with periodic structure

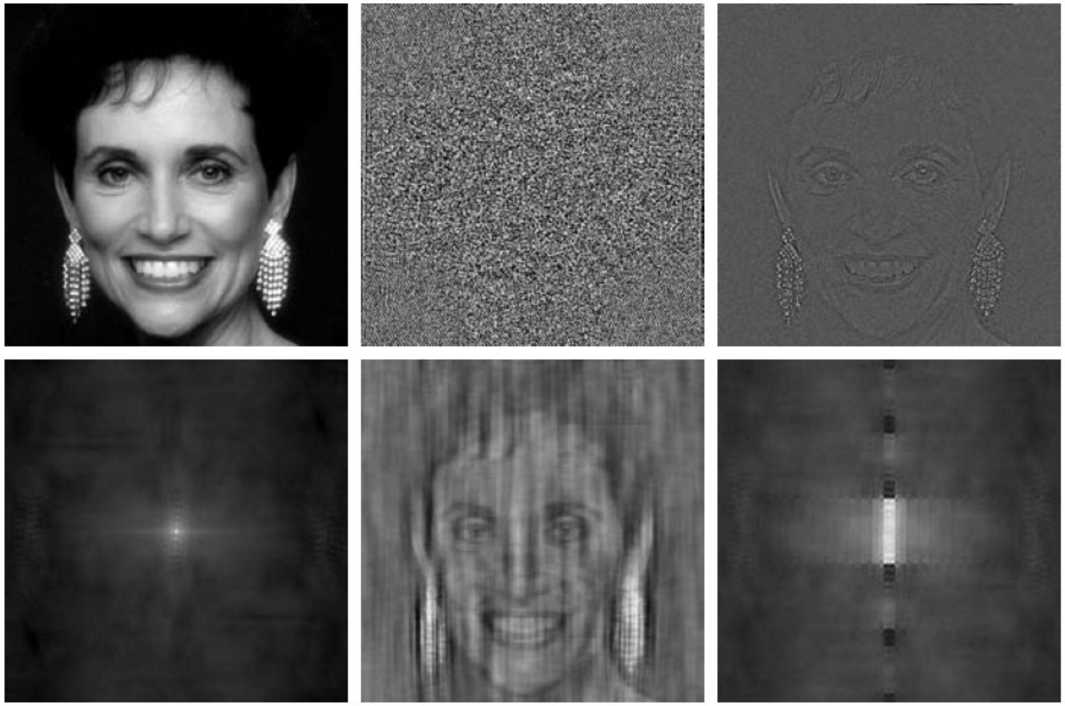
$f(x,y)$



$|F(u,v)|$

FT has peaks at spatial frequencies of repeated texture

DFT και ιδιότητες

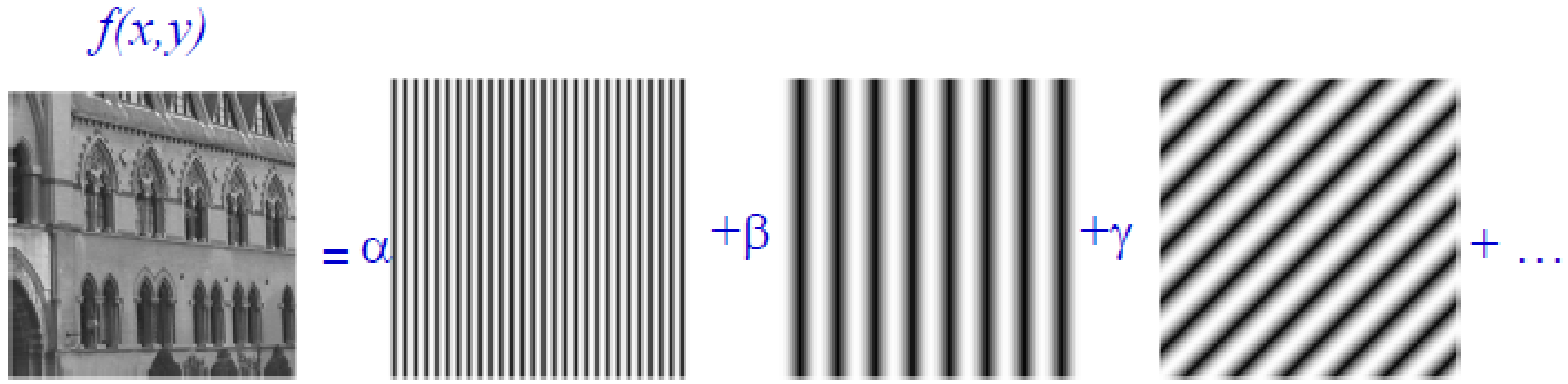


a b c
d e f

FIGURE 4.27 (a) Woman. (b) Phase angle. (c) Woman reconstructed using only the phase angle. (d) Woman reconstructed using only the spectrum. (e) Reconstruction using the phase angle corresponding to the woman and the spectrum corresponding to the rectangle in Fig. 4.24(a). (f) Reconstruction using the phase of the rectangle and the spectrum of the woman.

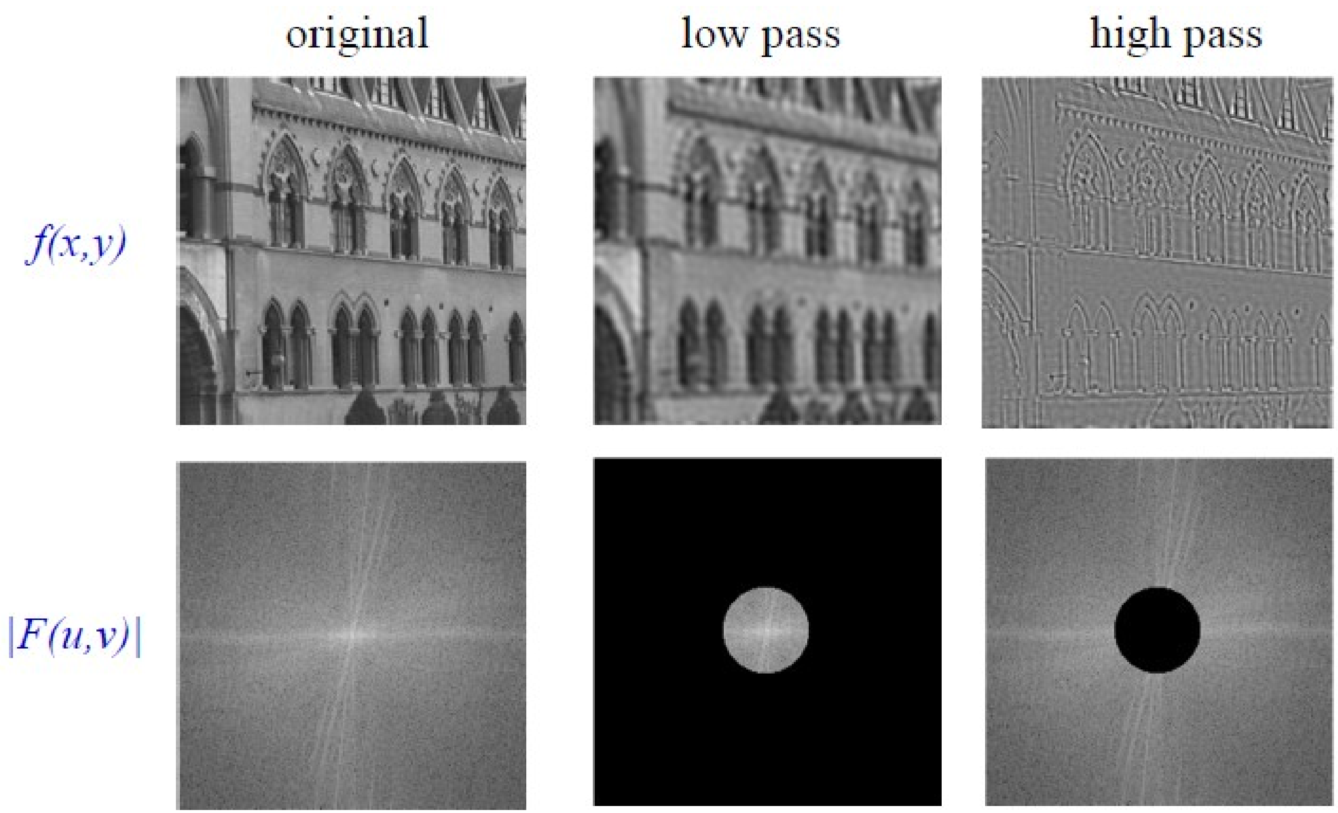
Ερμηνεία DFT εικόνας

- Θυμηθείτε ότι με τον DFT εκφράζουμε την εικόνα σαν ένα ζυγισμένο άθροισμα εικόνων-συνημιτονοειδών και ημιτονοειδών διαφόρων συχνότητων



Ερμηνεία DFT εικόνας

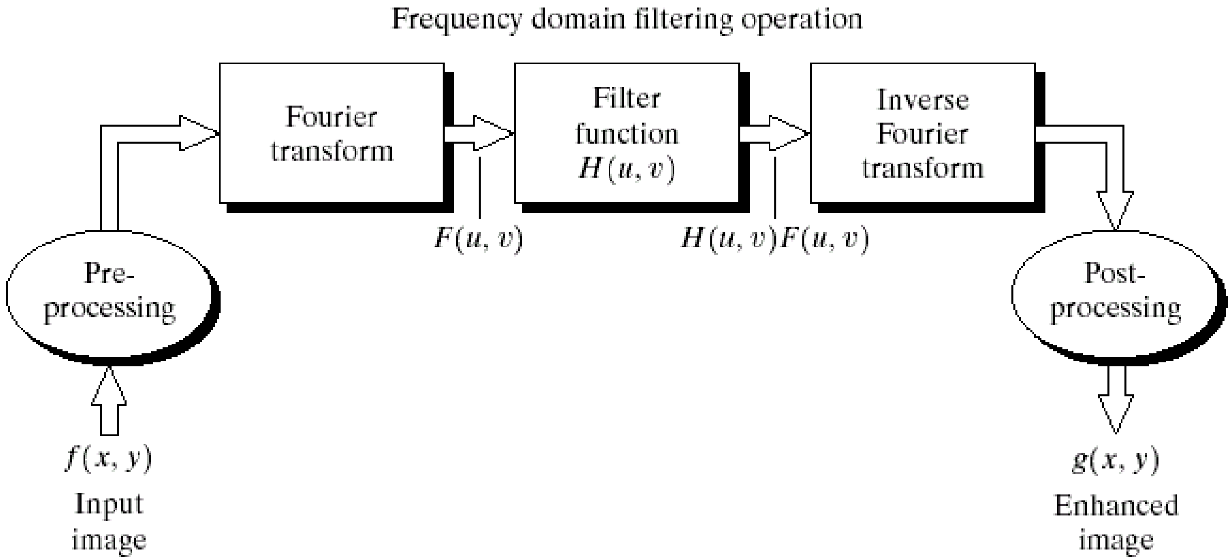
- Κρατώντας μέρος από όλους τους όρους, είναι ένας τρόπος να κατασκευάσουμε φίλτρα στο πεδίο των συχνοτήτων



Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

Φιλτράρισμα εικόνας στο πεδίο συχνοτήτων:

1. Υπολογίζουμε $F(u,v)$ (DFT εικόνας)
2. Πολλ/ζουμε $F(u,v)$ με φίλτρο $H(u,v)$
3. Υπολογίζουμε αντίστροφο DFT



Zero-padding και φίλτρα

- ‘Κανονικά’ κάναμε padding στο πεδίο του χώρου...

Zero-padding και φίλτρα

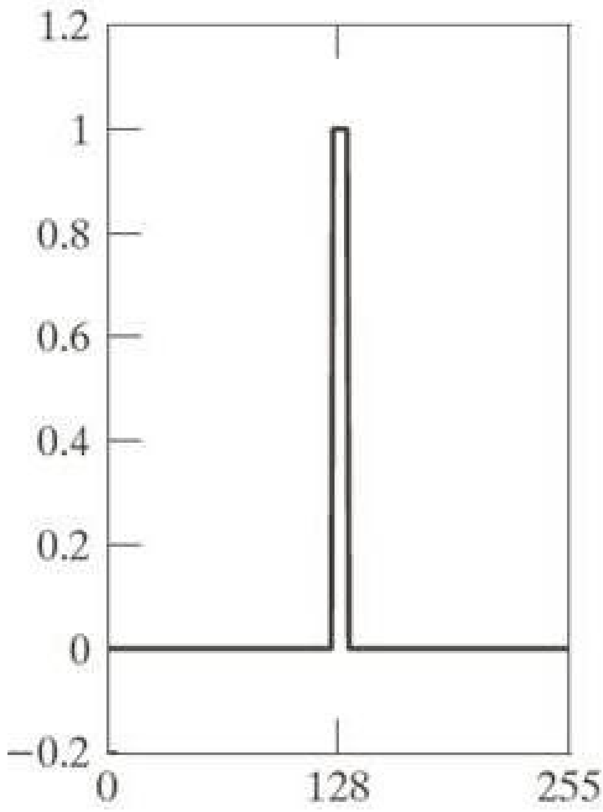
- ‘Κανονικά’ κάναμε padding στο πεδίο του χώρου...
- ...Το φίλτρο όμως ορίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων
  - => πρόβλημα

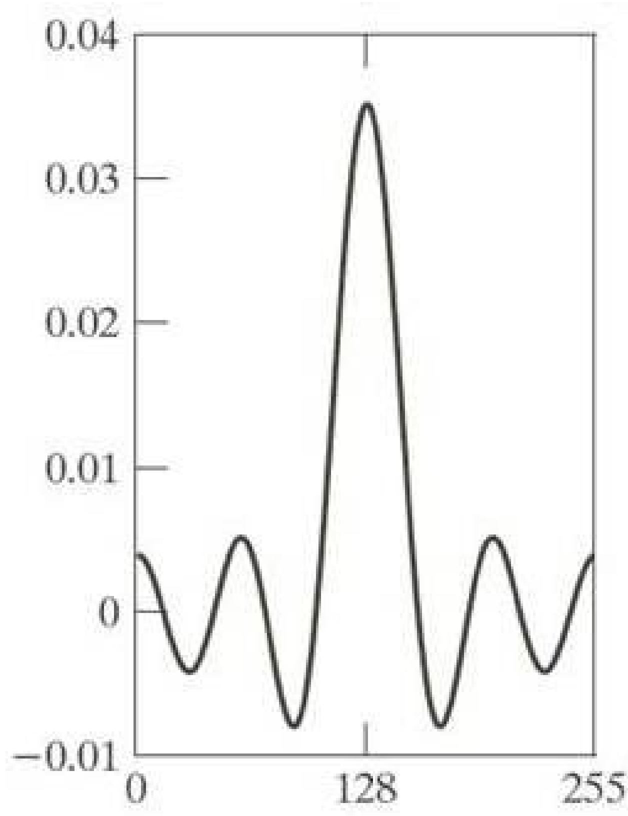
Zero-padding και φίλτρα

- ‘Κανονικά’ κάναμε padding στο πεδίο του χώρου...
- ...Το φίλτρο όμως ορίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων
  - => πρόβλημα
- Μία λύση είναι:
  - Να υπολογίσουμε τον IDFT του φίλτρου.
  - Κάνουμε zero-padding ώστε να έχουμε ίδιες διαστάσεις με την εικόνα
  - Υπολογίζουμε τον DFT της zero-padded εικόνας

Zero-padding και φίλτρα

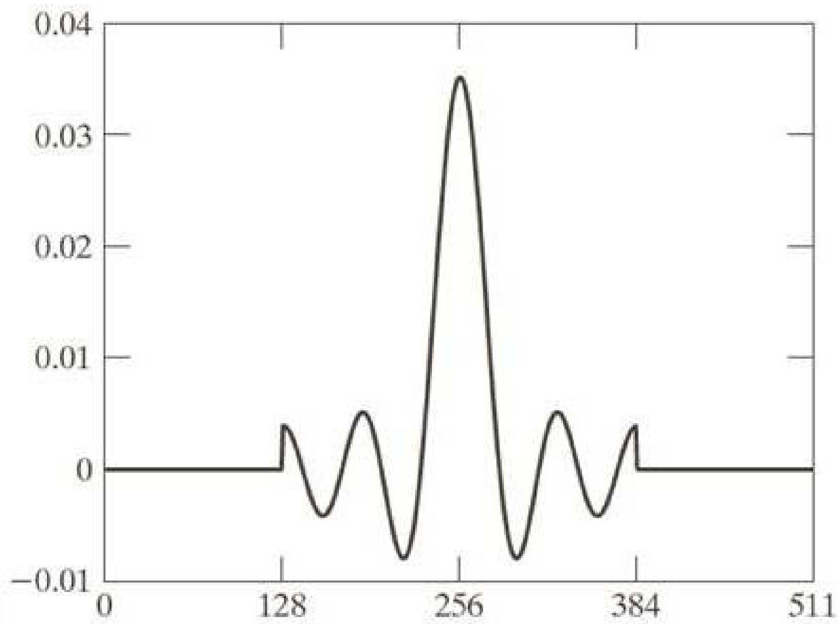
- Φίλτρο στο Fourier, και IDFT του, μήκους 256

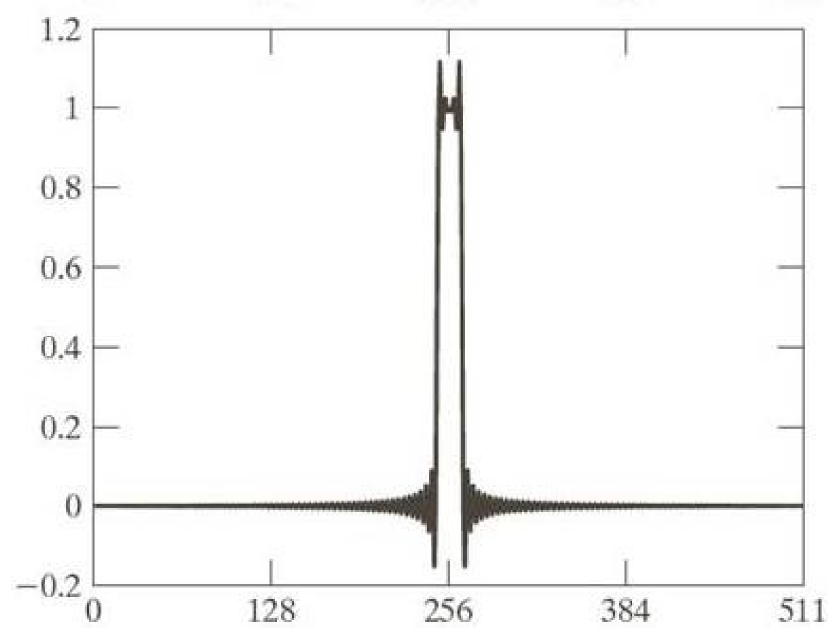




Zero-padding και φίλτρα

- Zero-padded φίλτρο και DFT του





- Η ‘απότομη’ περικοπή στον χώρο (λόγω του zero-padding) αντιστοιχεί στο ‘ringing effect’ στις συχνότητες

Zero-padding και φίλτρα

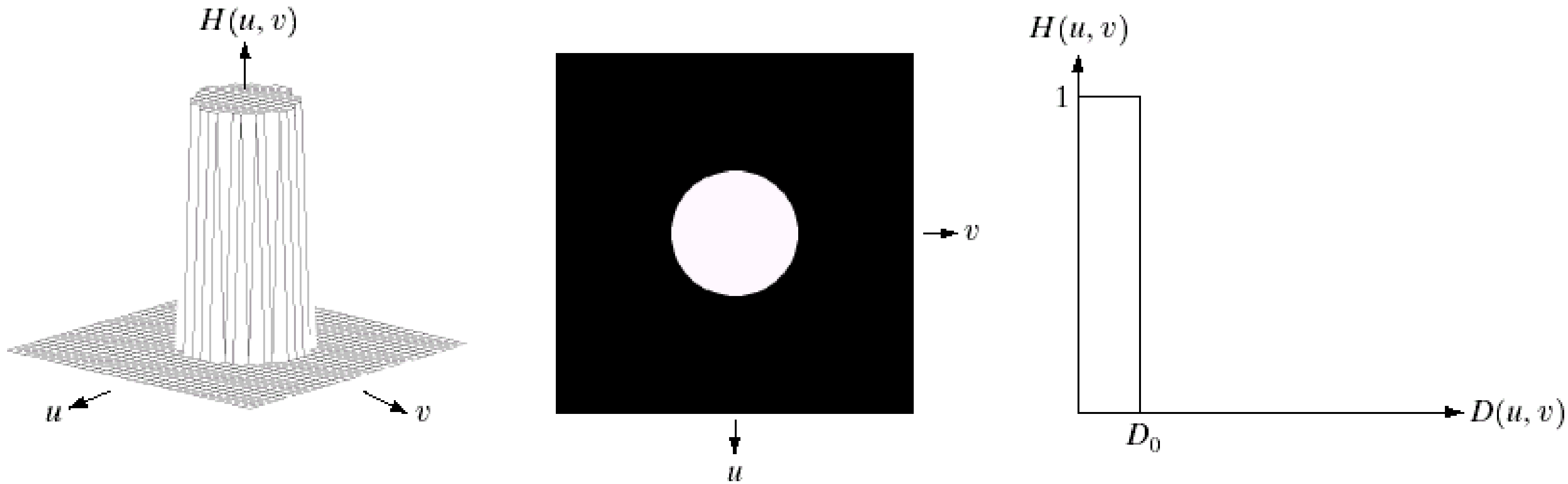
- Αν κάνουμε zero-padding θα έχουμε ringing effect (φαινόμενο κωδωνισμού)
- Αν δεν κάνουμε zero-padding θα αποφύγουμε το ringing effect, αλλά θα έχουμε σφάλματα αναδίπλωσης
- Πρέπει να πάρουμε μια απόφαση για το τι θα ‘κερδίσουμε’ και τι θα ‘χάσουμε’
- Μία λύση είναι να κάνουμε zero-padding στην εικόνα και να χρ/σουμε φίλτρο συχνοτήτων ίδιου μεγέθους, χωρίς να μας απασχολήσει το zero-padding για το φίλτρο
  - Σφάλματα αναδίπλωσης, αλλά αποφεύγουμε το ringing
- Μία καλύτερη λύση είναι να χρησιμοποιήσουμε φίλτρο που εξασθενεί ομαλά, αντί για ιδεατό φίλτρο

Εξομάλυνση στο πεδίο των συχνοτήτων

- Οι ομαλές ως προς την ένταση περιοχές σχετίζονται με τις χαμηλές συχνότητες
- *Χαμηλοπερατά φίλτρα* – περνάνε οι χαμηλές συχνότητες, μηδενίζονται οι υψηλές

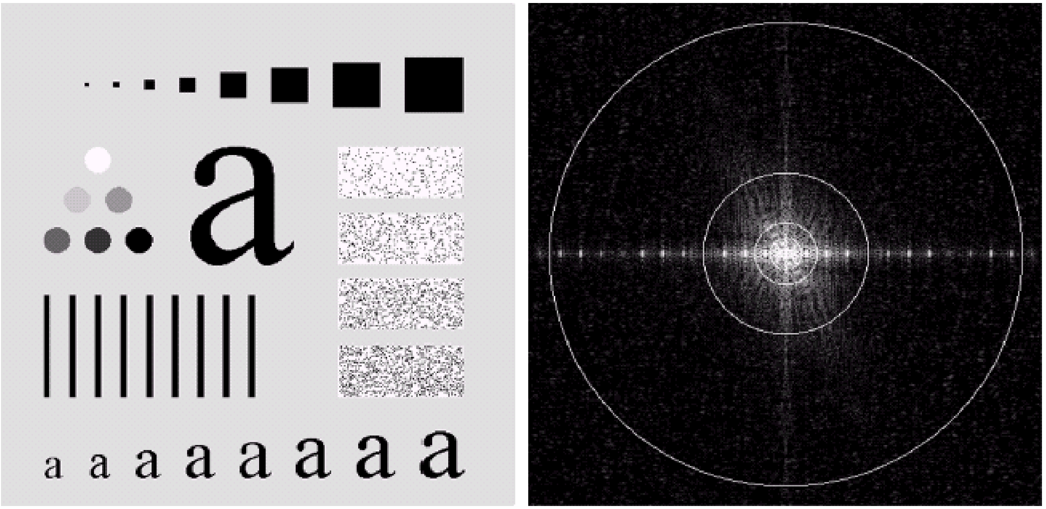
Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο

Αυτό το φίλτρο περικόπτει (μηδενίζει) όλες τις συχνότητες που είναι πάνω από μία ορισμένη απόσταση D_0 από το κέντρο του Fourier.



Ανάλογα το κατώφλι αλλάζει η συμπεριφορά του φίλτρου

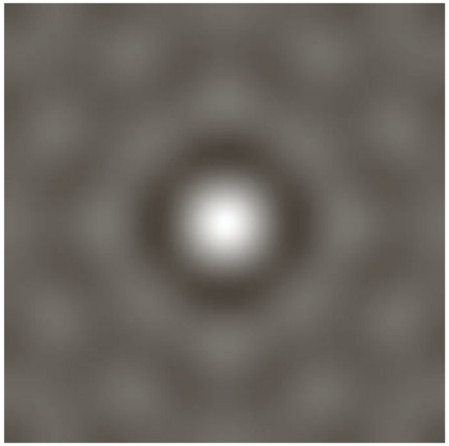
Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο

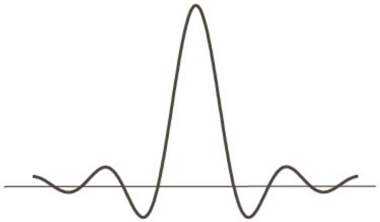


Εικόνα και φάσμα Fourier. Έχει σχεδιαστεί σειρά από ιδεατά χαμηλοπερατά φίλτρα με διάφορες ακτίνες (παράμετρους/κατώφλι D_0 του φίλτρου)

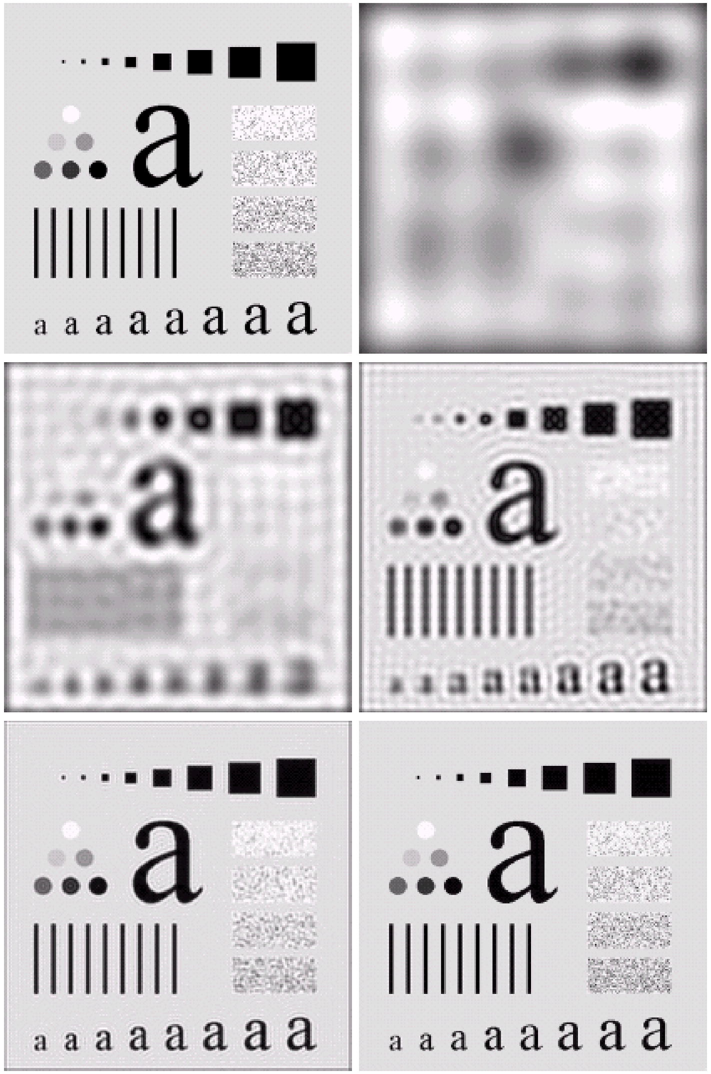
Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο

- Το ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο (ILPF) είναι μια sinc συνάρτηση στον χώρο, που σχετίζεται με το ringing effect που συζητήσαμε.
- Ο κύριος λοβός προκαλεί την εξομάλυνση, ενώ οι υπόλοιποι λοβοί προκαλούν το ringing





Ιδεατό χαμηλοπερατό φίλτρο



Αρχική εικόνα

ILPF, D_0=5

ILPF, D_0=15

ILPF, D_0=30

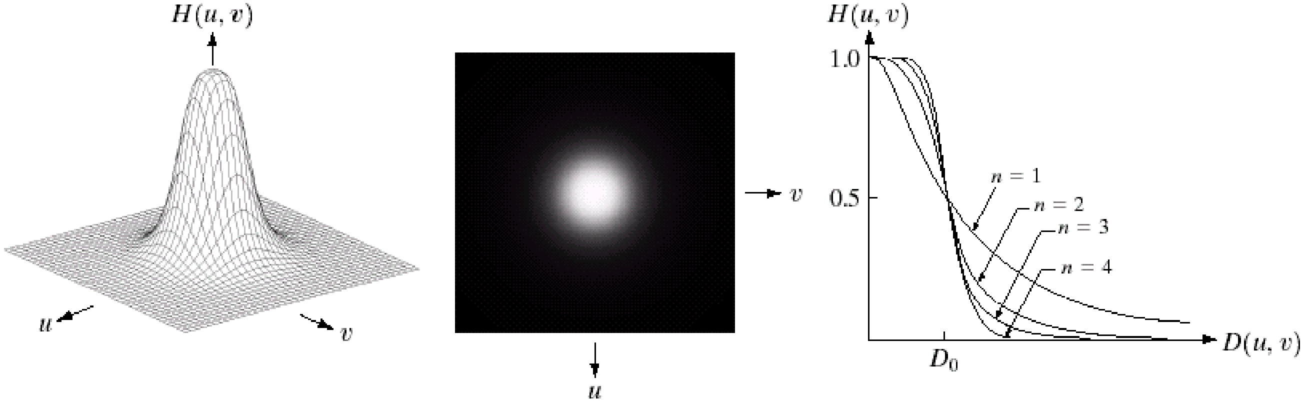
ILPF, D_0=80

ILPF, D_0=230

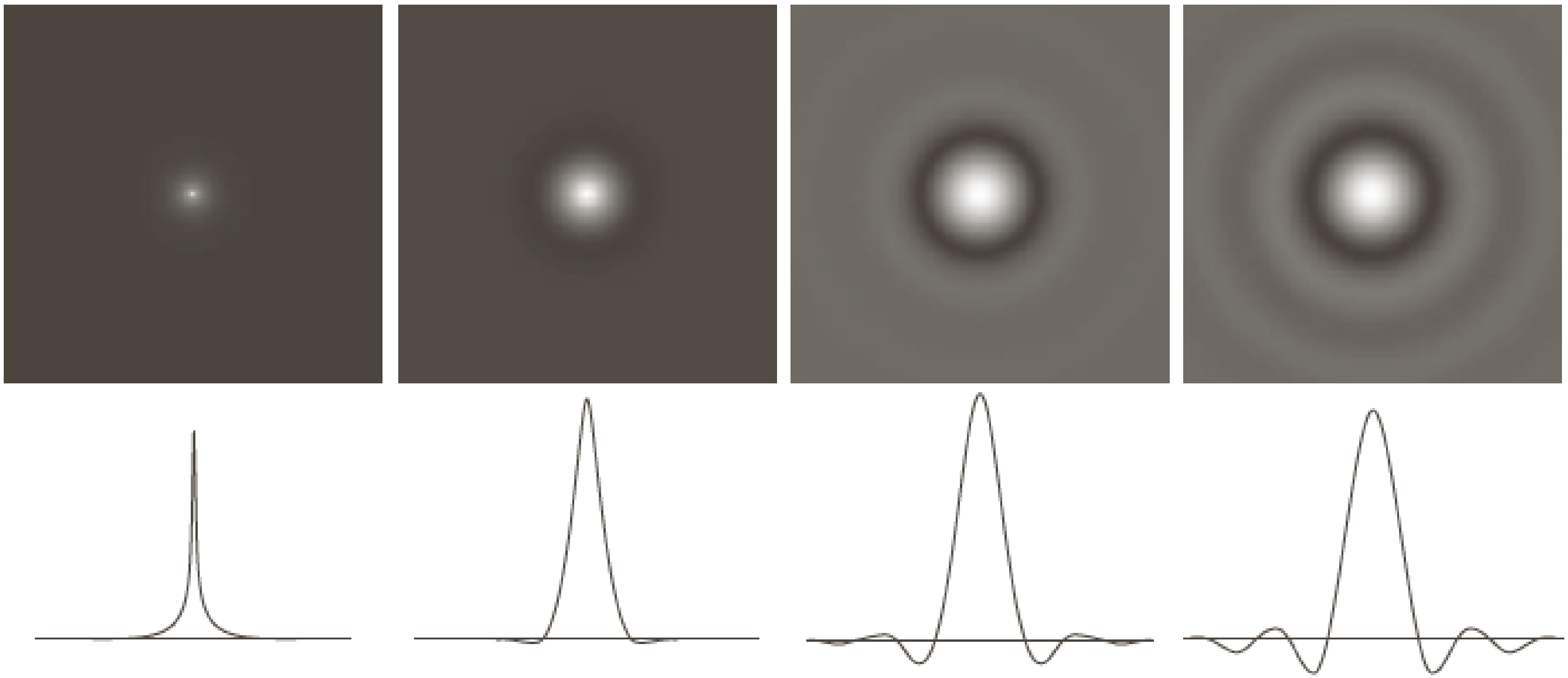
Χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth

- Το φίλτρο Butterworth με τάξη n και ακτίνα περικοπής D_0 ορίζεται ως

$$H(u,v)=\frac{1}{1+[D(u,v)/D_0]^{2n}}$$



Χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth



a b c d

FIGURE 4.46 (a)–(d) Spatial representation of BLPFs of order 1, 2, 5, and 20, and corresponding intensity profiles through the center of the filters (the size in all cases is 1000 × 1000 and the cutoff frequency is 5). Observe how ringing increases as a function of filter order.

Χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth

Αρχική εικόνα

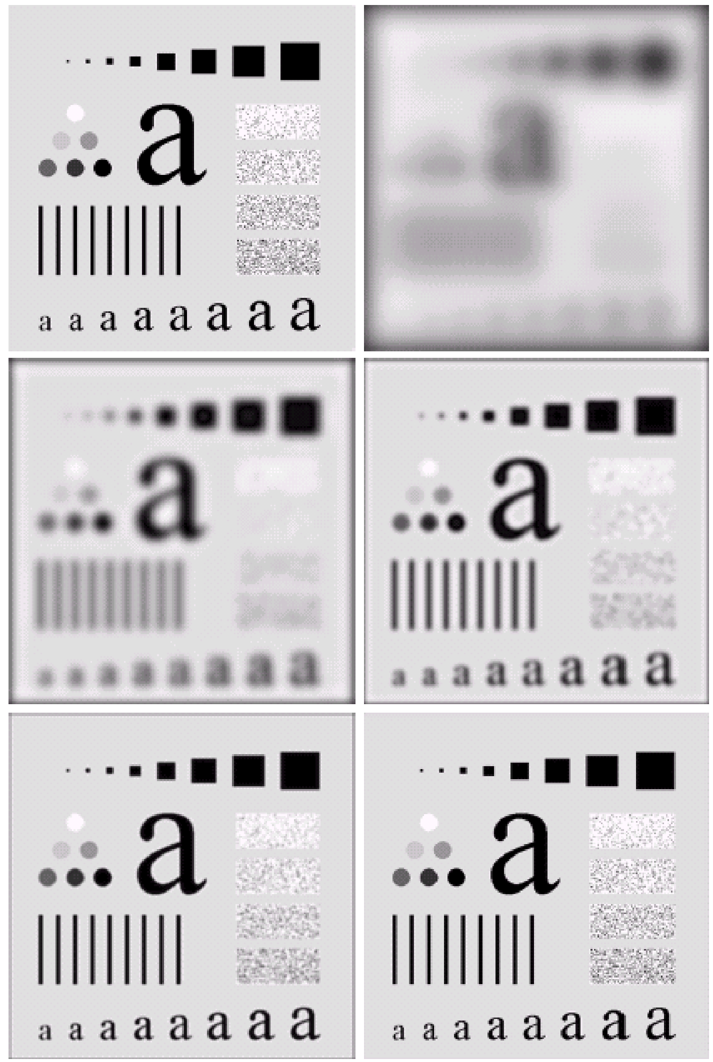
BLPF n=2, D_0=5

BLPF n=2, D_0=15

BLPF n=2, D_0=30

BLPF n=2, D_0=80

BLPF n=2, D_0=230

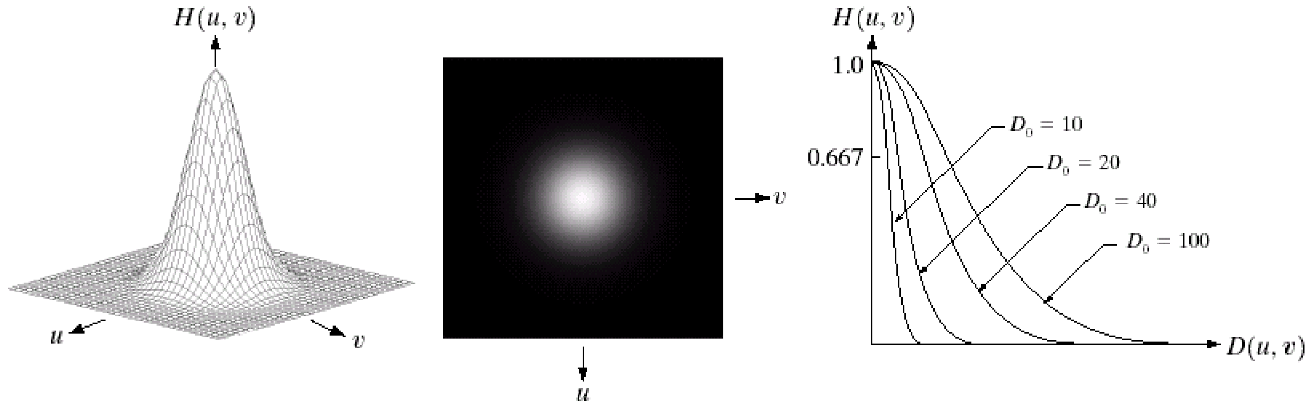


Λιγότερο ringing από το ιδεατό φίλτρο, λόγω ομαλής εξασθένησης στην H

Gaussian χαμηλοπερατό φίλτρο

- Το Gaussian χαμηλοπερατό φίλτρο ορίζεται ως:

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2{D_0}^2}$$



Gaussian χαμηλοπερατό φίλτρο

Original image

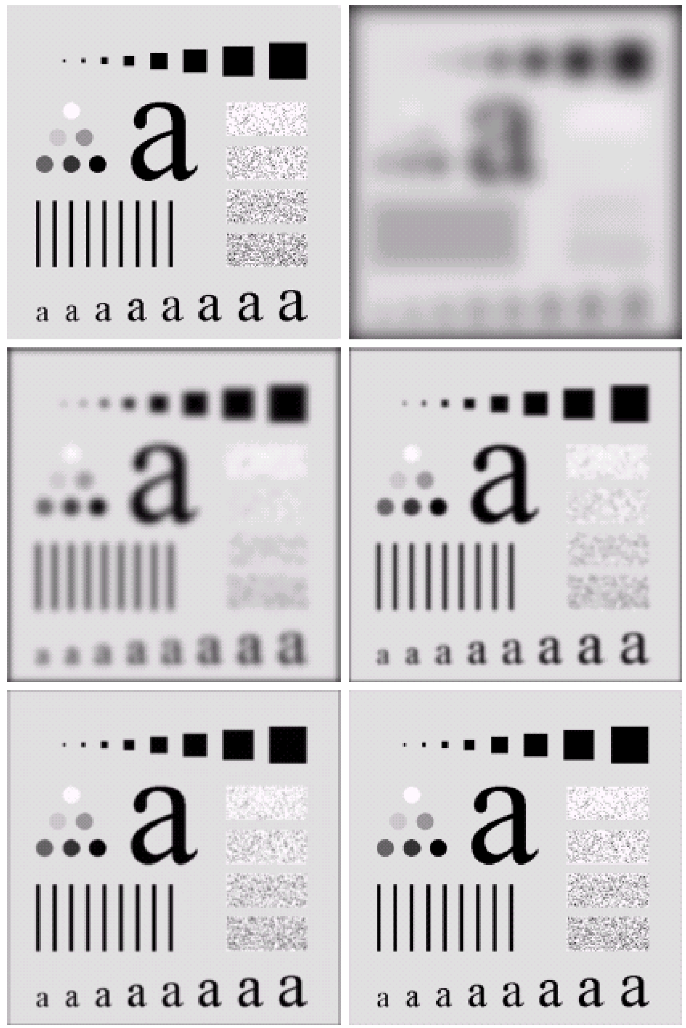
Gaussian D_0=5

Gaussian D_0=15

Gaussian D_0=30

Gaussian D_0=85

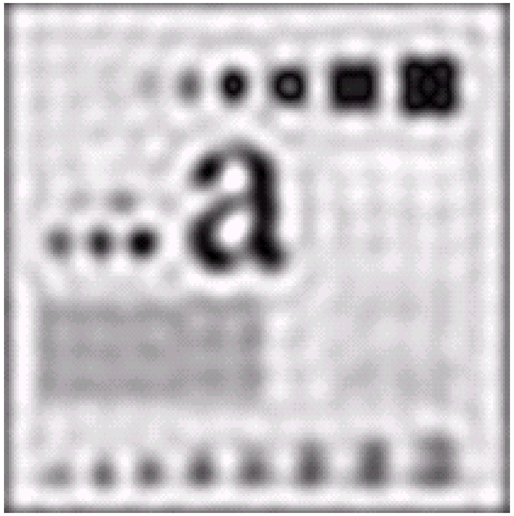
Gaussian D_0=230

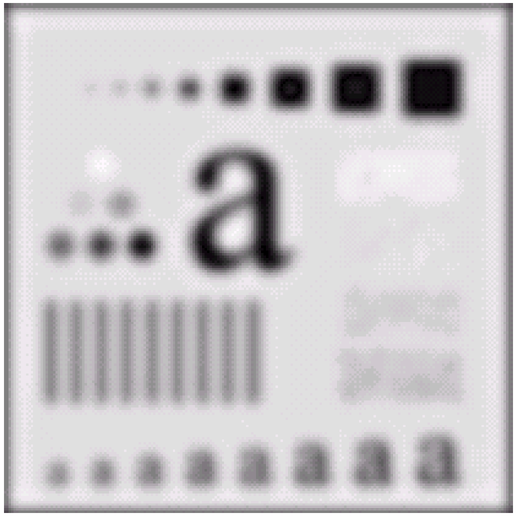


Λιγότερο ringing από BLPF, αλλά και λιγότερη εξομάλυνση

Σύγκριση χαμηλοπερατών φίλτρων

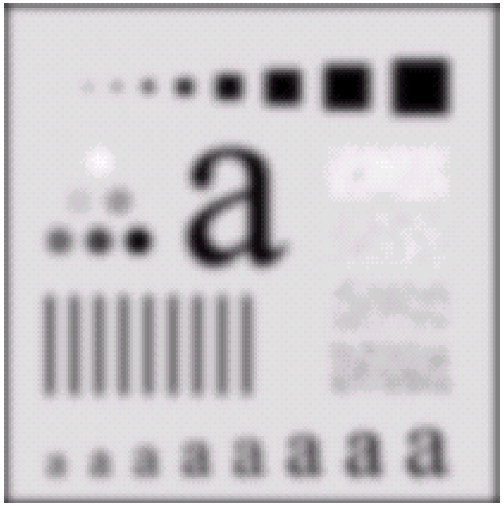
ILPF D_0=15





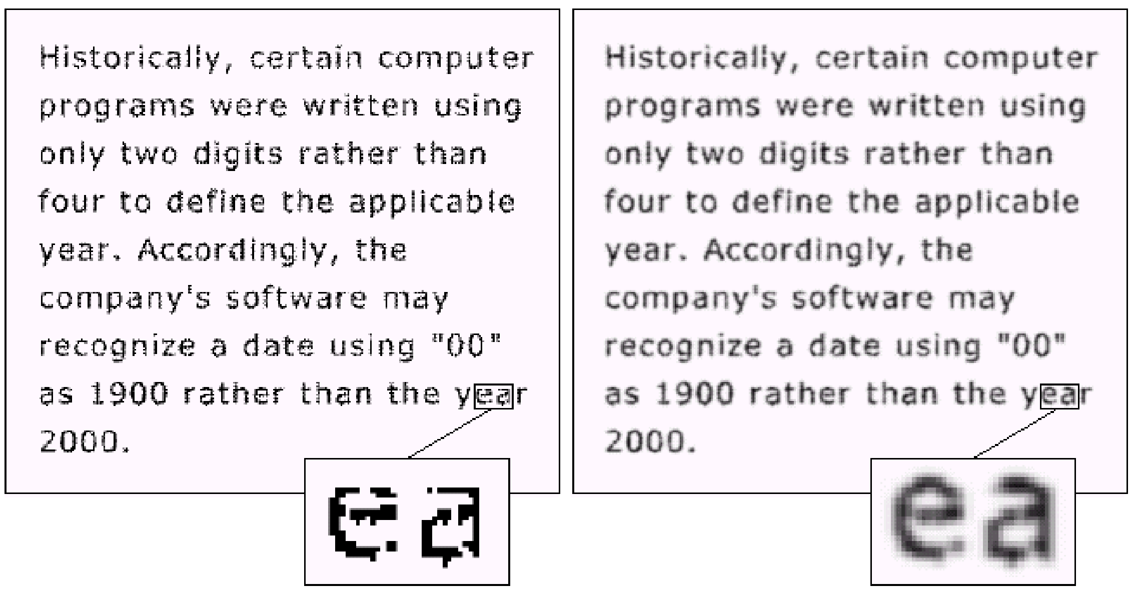
BLPF n=2, D_0=15

Gaussian D_0=15

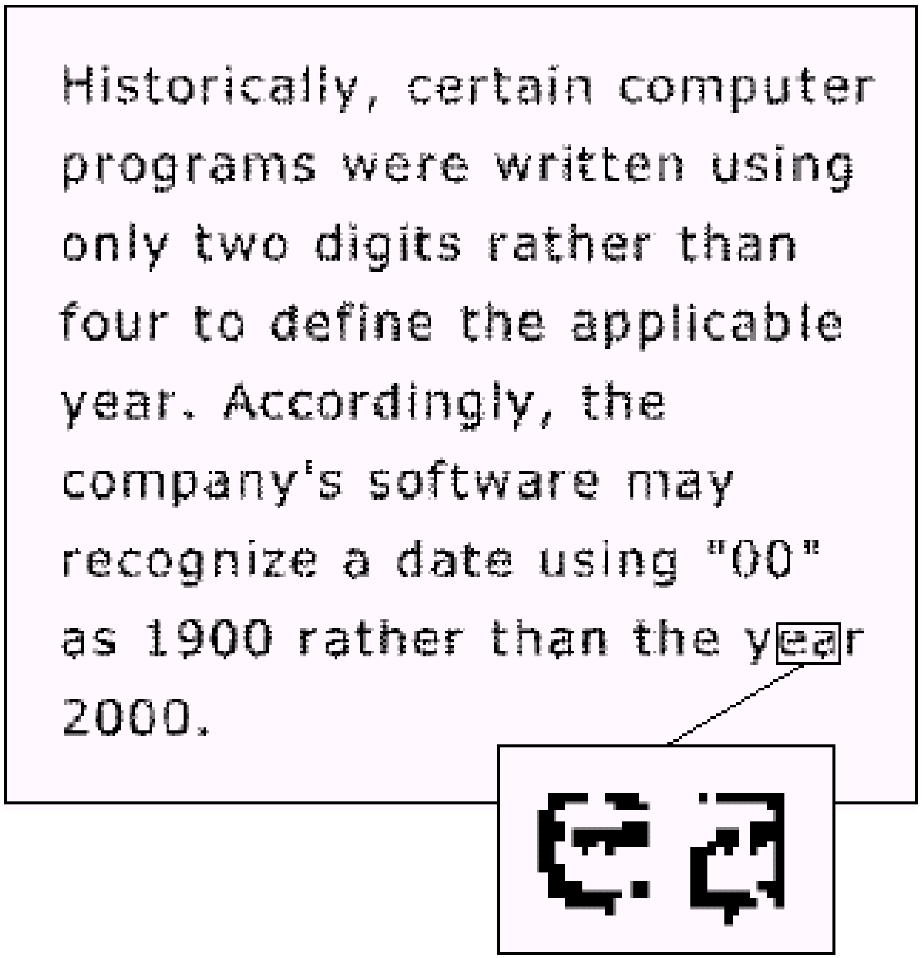


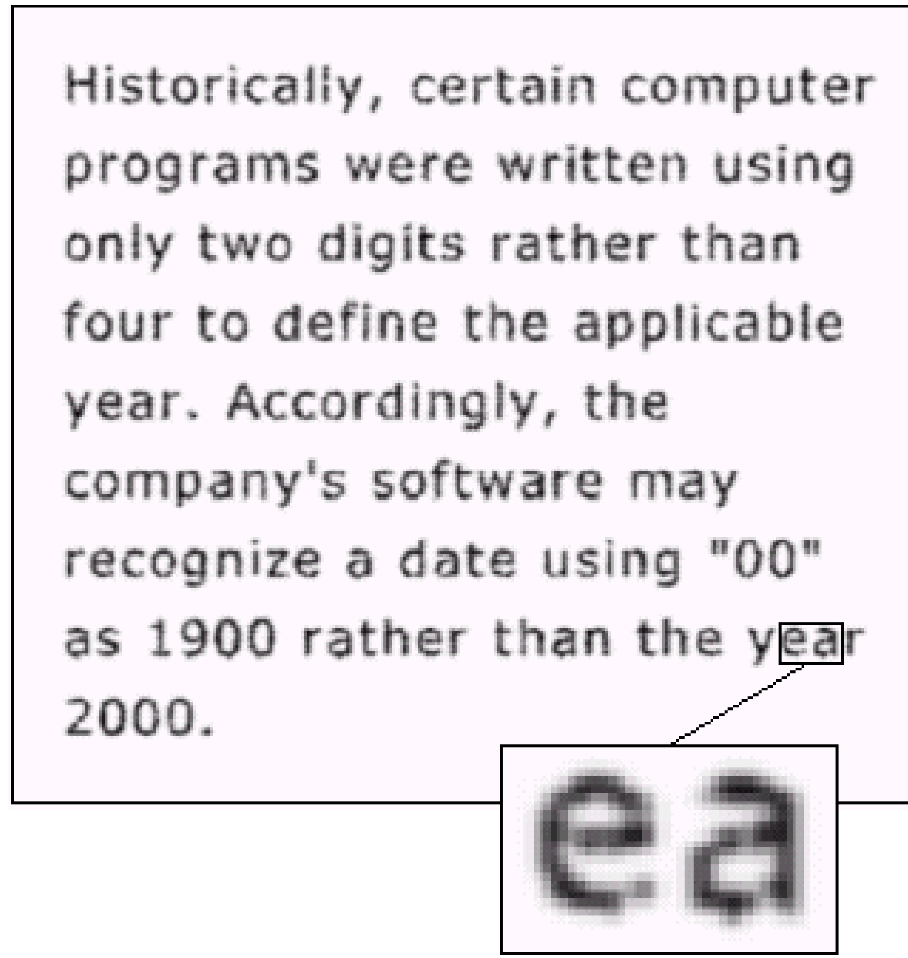
Χαμηλοπερατά φίλτρα: παραδείγματα χρήσης

Ένα χαμηλοπερατό Γκαουσιανό φίλτρο χρησιμοποιείται εδώ για να ‘ενώσει’ τους ‘κομμένους’ χαρακτήρες



Χαμηλοπερατά φίλτρα: παραδείγματα χρήσης





Χαμηλοπερατά φίλτρα: παραδείγματα χρήσης

- Γκαουσιανά χαμηλοπερατά φίλτρα για διόρθωση ατελειών

Χαμηλοπερατά φίλτρα: παραδείγματα χρήσης

Όξυνση στο πεδίο των συχνοτήτων

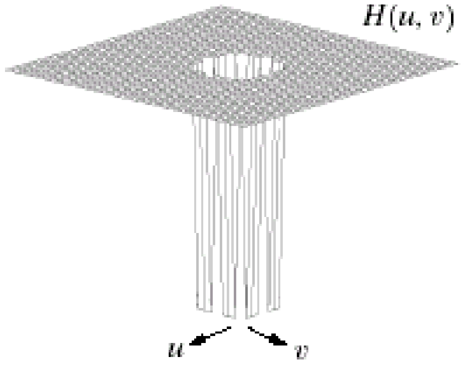
- Οι ακμές και οι λεπτομέρειες σχετίζονται με τις υψηλές συχνότητες
- *Υψιπερατά φίλτρα* – περνάνε οι υψηλές συχνότητες, μηδενίζονται οι χαμηλές
- Τα υψιπερατά φίλτρα ορίζονται σαν το αντίθετο των χαμηλοπερατών φίλτρων:

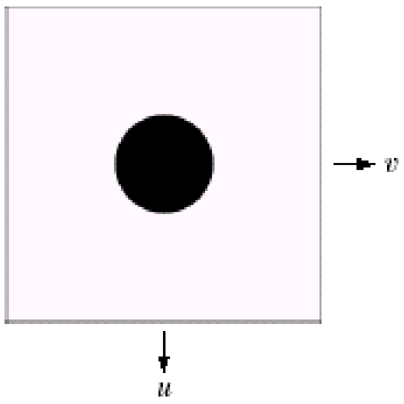
$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

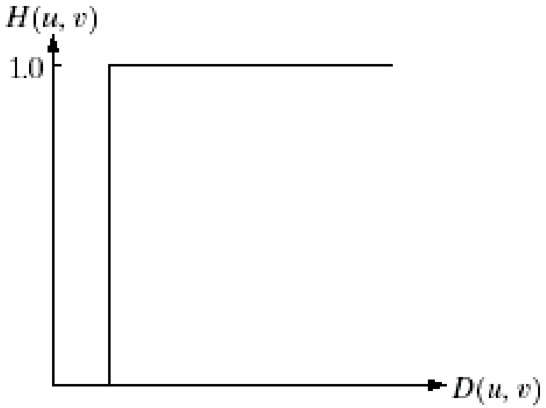
Ιδεατά υψιπερατά φίλτρα

- Το ιδεατό υψιπερατό φίλτρο δίνεται από:

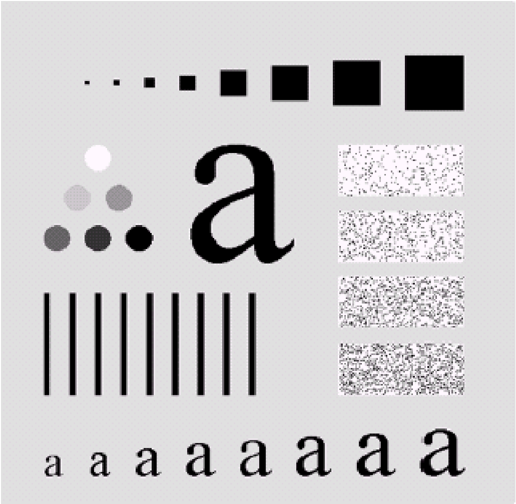
$$H(u,v)=\begin{cases}0 \text{ if } D(u,v)\le D_0\\ 1 \text{ if } D(u,v)> D_0\end{cases}$$

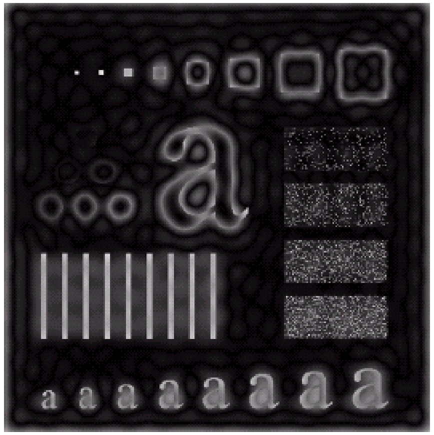




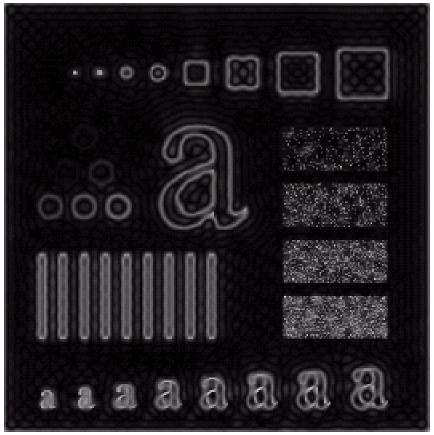


Ιδεατά υψιπερατά φίλτρα

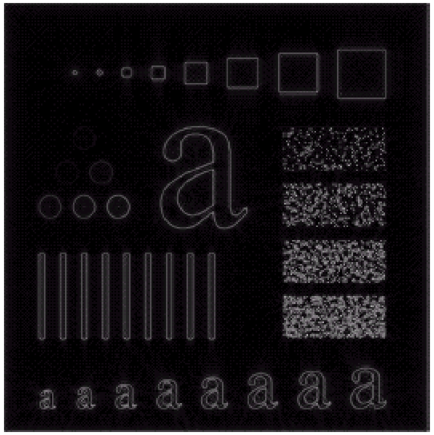




IHPF $D_0 = 15$



IHPF $D_0 = 30$

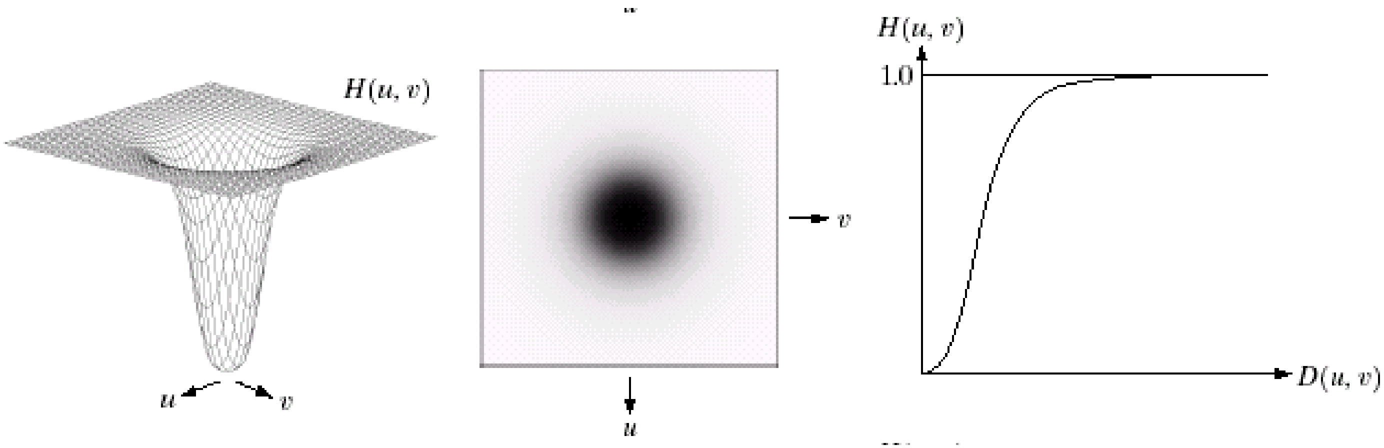


IHPF $D_0 = 80$

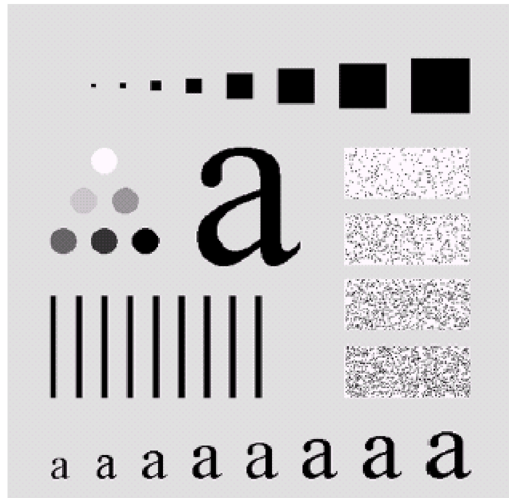
Υψιπερατό φίλτρο Butterworth

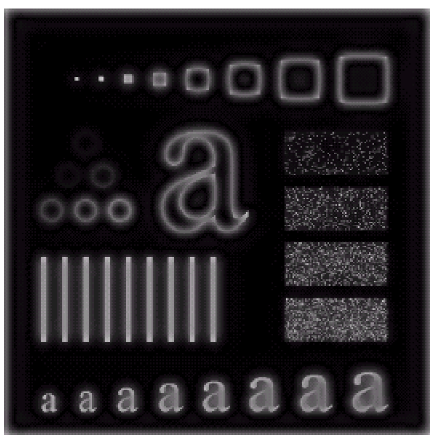
- Το Butterworth υψιπερατό φίλτρο ορίζεται ως:

$$H(u,v) = \frac{1}{1+[D_0 / D(u,v)]^{2n}}$$

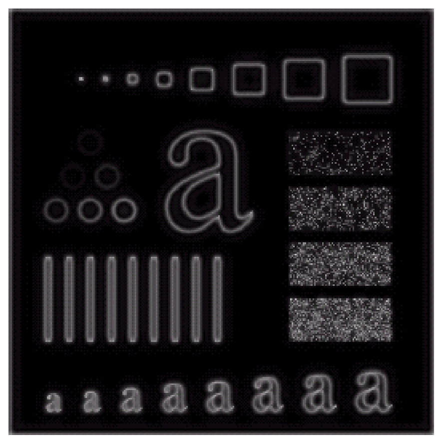


Υψιπερατό φίλτρο Butterworth

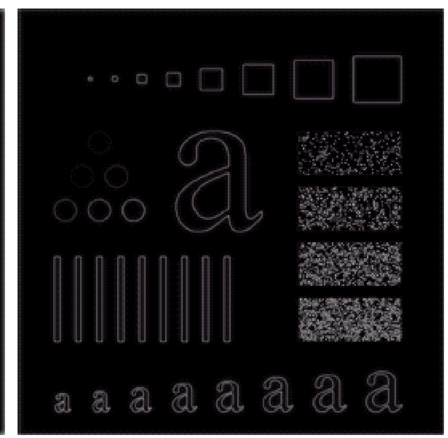




BHPF n=2, D_0 =15



BHPF n=2, D_0 =30

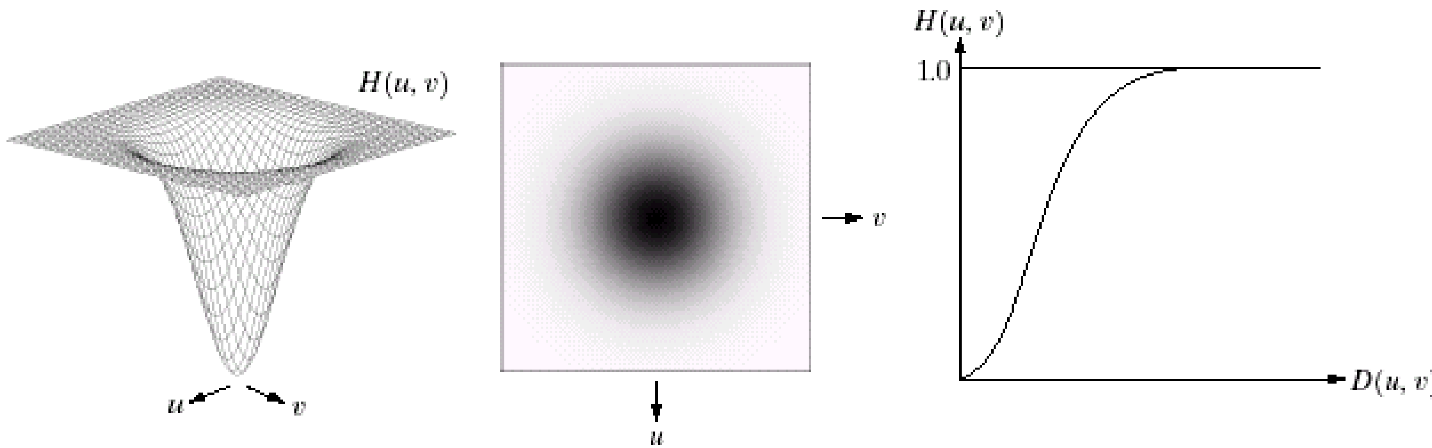


BHPF n=2, D_0 =80

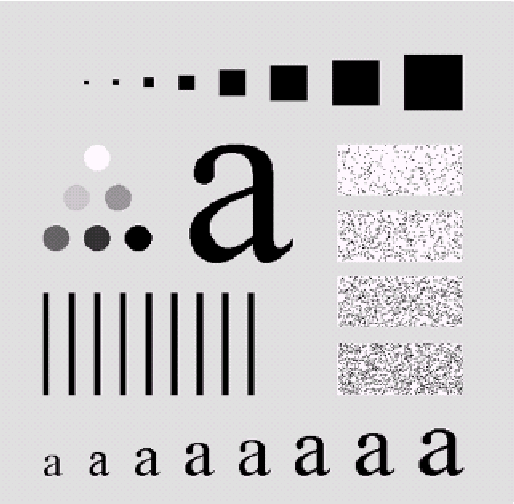
Γκαουσσιανό υψιπερατό φίλτρο

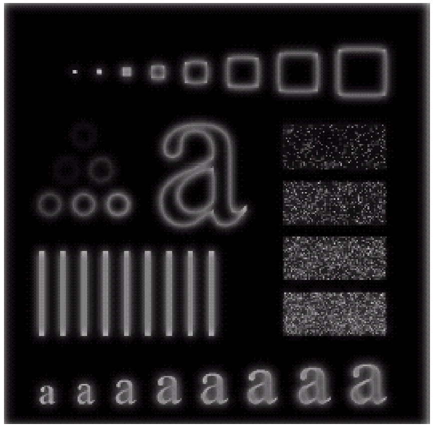
- Το Γκαουσιανό υψιπερατό φίλτρο ορίζεται ως:

$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2D_0^{\;2}}$$

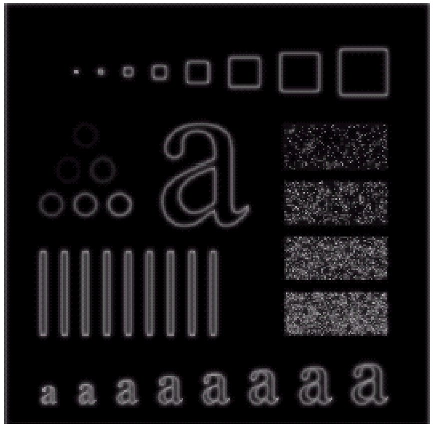


Γκαουσσιανό υψιπερατό φίλτρο





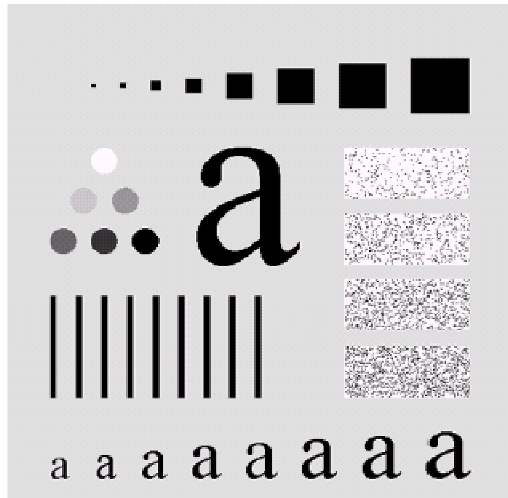
Gaussian HPF
n=2, D_0 =15

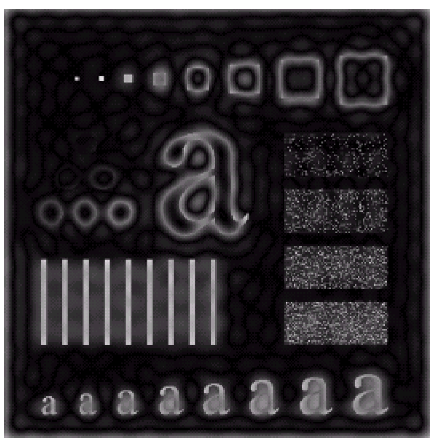


Gaussian HPF
n=2, D_0 =30

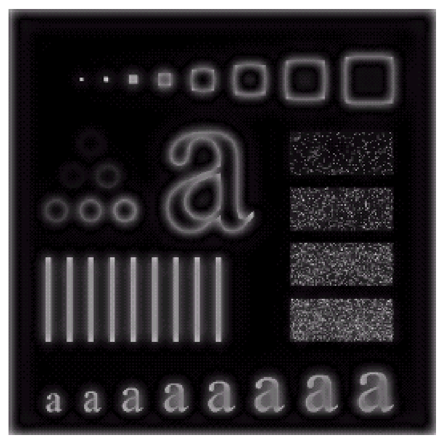
Gaussian HPF
n=2, D_0 =80

Σύγκριση υψιπερατών φίλτρων

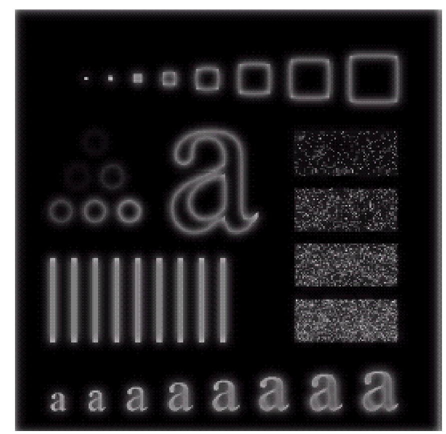




IHPF D_0 = 15



BHPF n=2, D_0 =15



Gaussian HPF
n=2, D_0 =15

Τα υψιπερατά φίλτρα στο πεδίο του χώρου

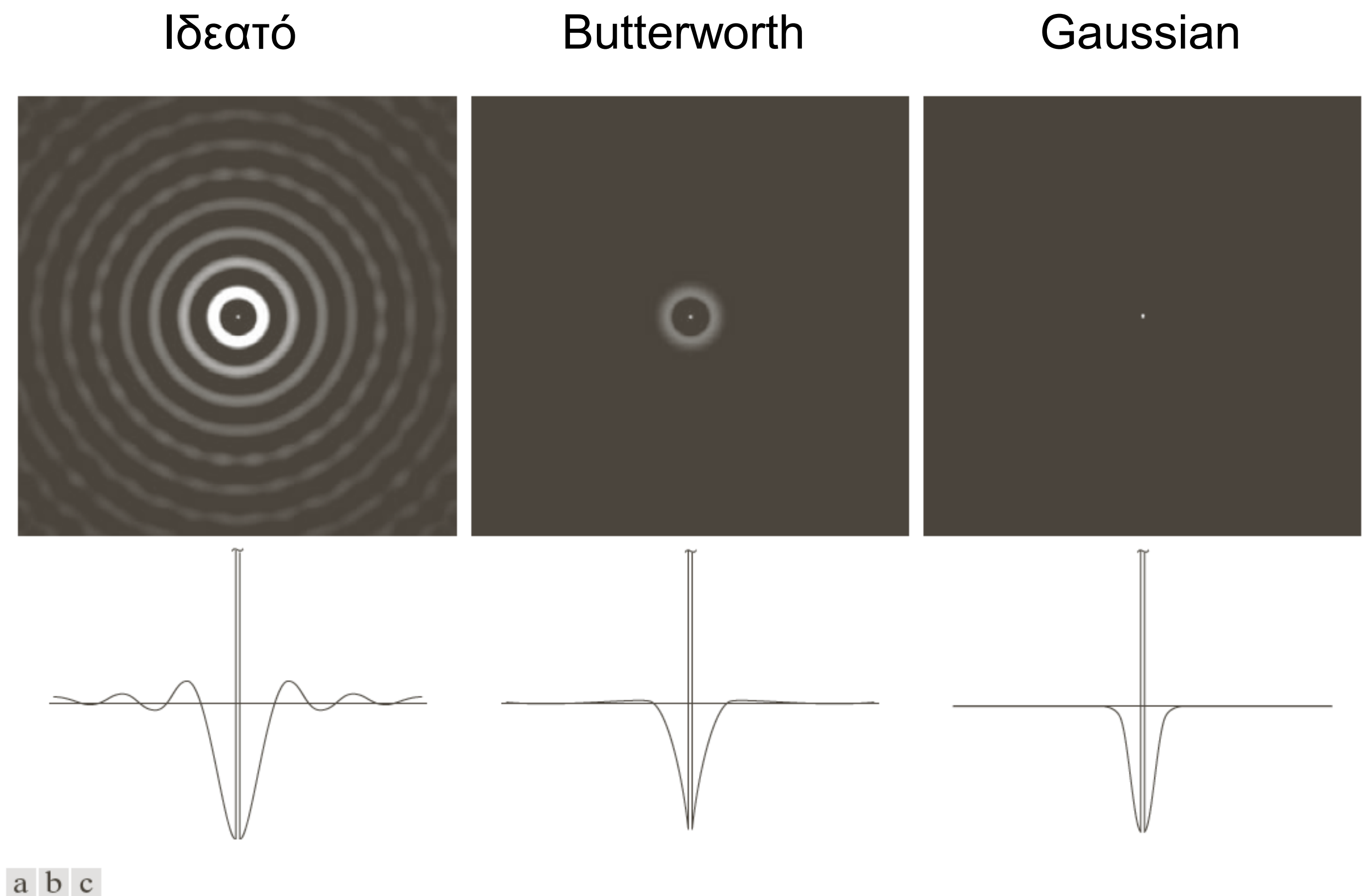
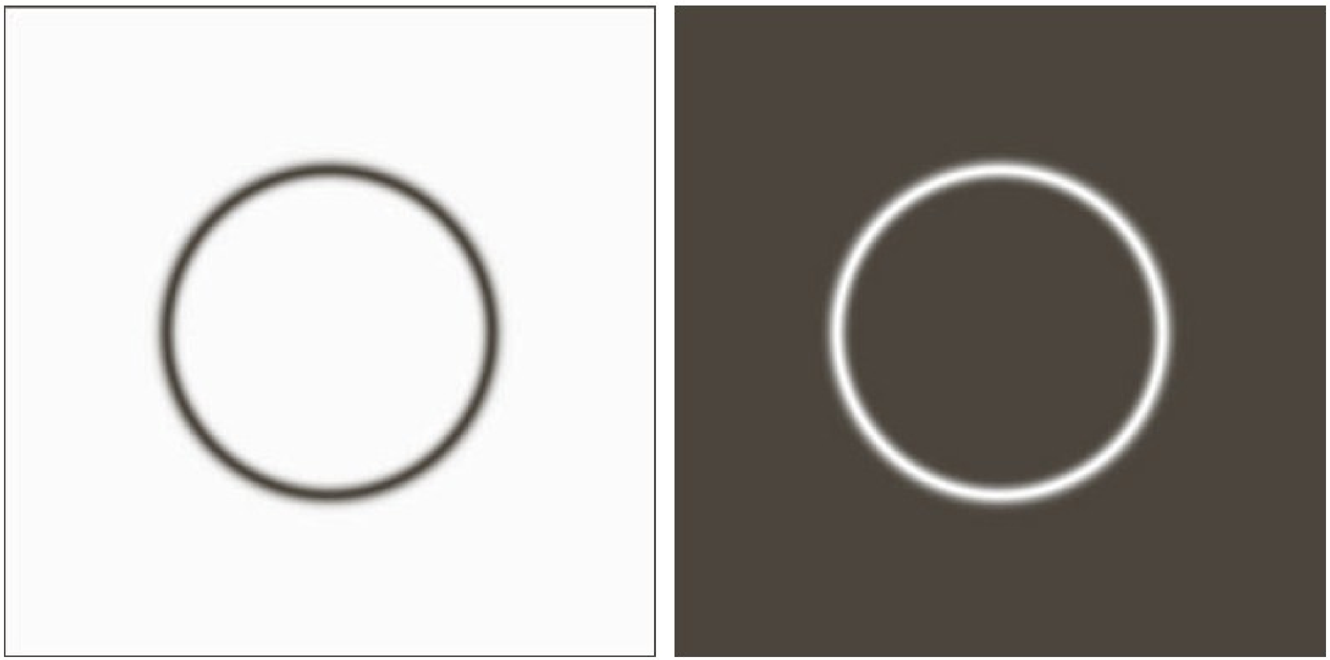


FIGURE 4.53 Spatial representation of typical (a) ideal, (b) Butterworth, and (c) Gaussian frequency domain highpass filters, and corresponding intensity profiles through their centers.

Ζωνοπερατά φίλτρα (bandpass/bandreject filters)



a b

FIGURE 4.63 (a) Bandreject Gaussian filter. (b) Corresponding bandpass filter. The thin black border in (a) was added for clarity; it is not part of the data.

Ζωνοπερατά φίλτρα (bandpass/bandreject filters)

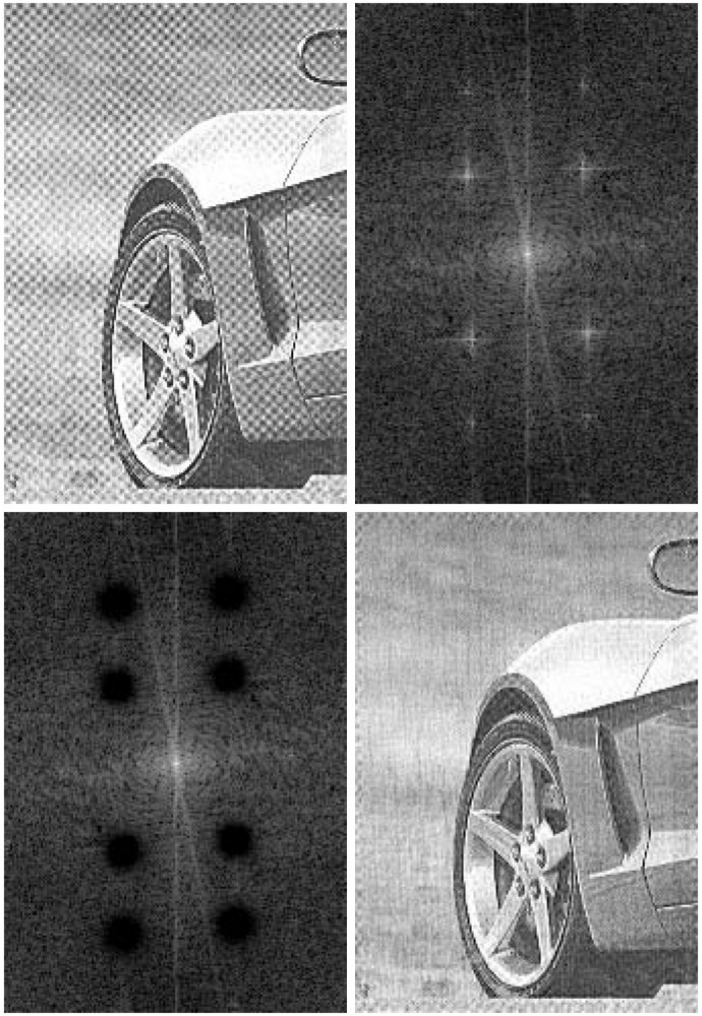
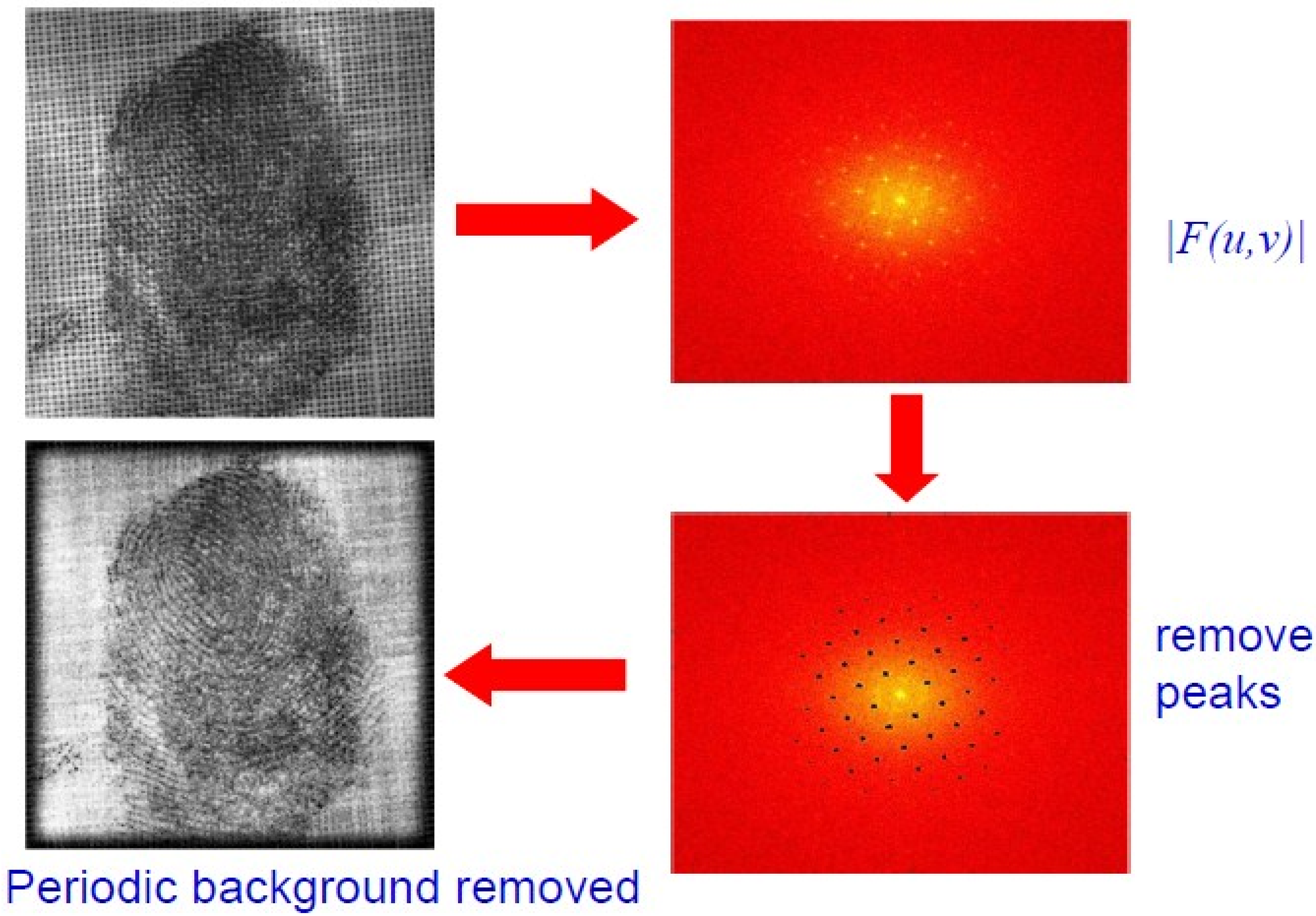


FIGURE 4.64
(a) Sampled newspaper image showing a moiré pattern.
(b) Spectrum.
(c) Butterworth notch reject filter multiplied by the Fourier transform.
(d) Filtered image.

Ζωνοπερατά φίλτρα (bandpass/bandreject filters)



Ζωνοπερατά φίλτρα (bandpass/bandreject filters)

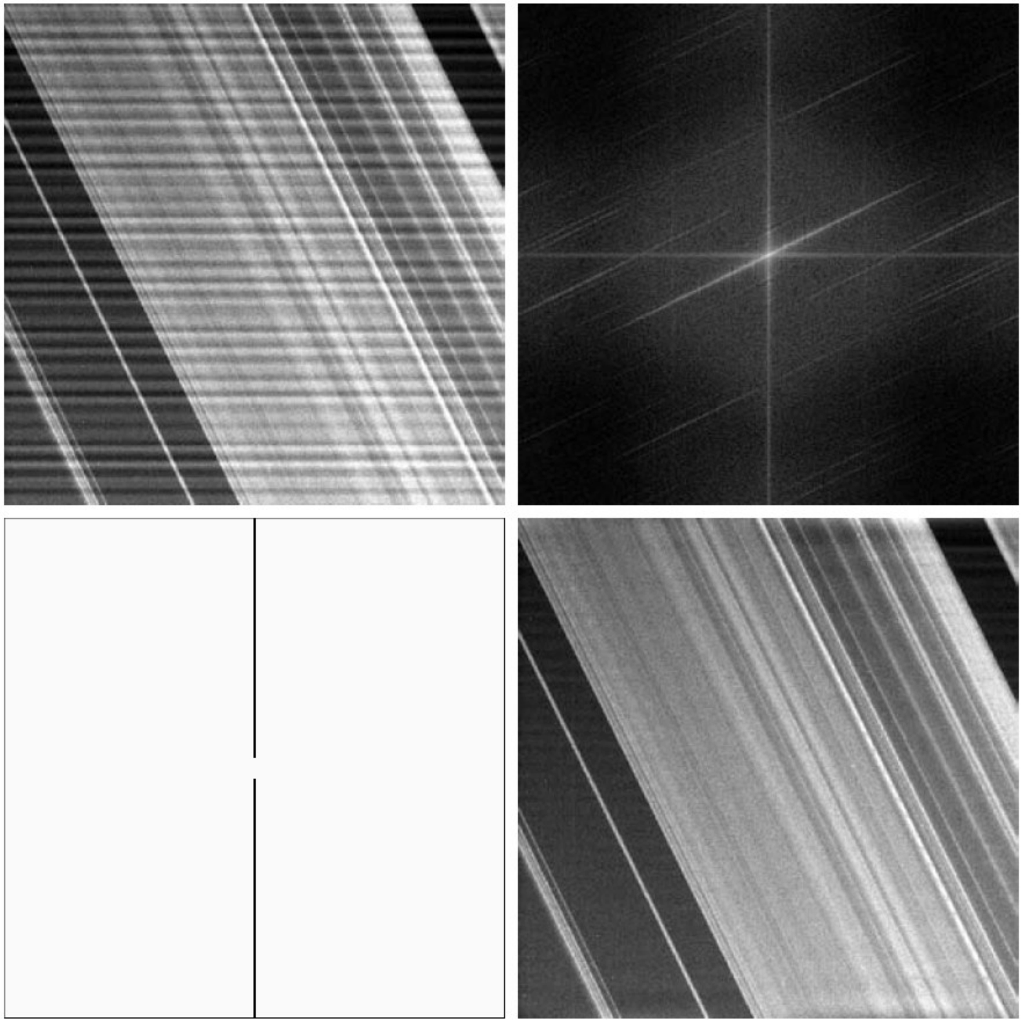
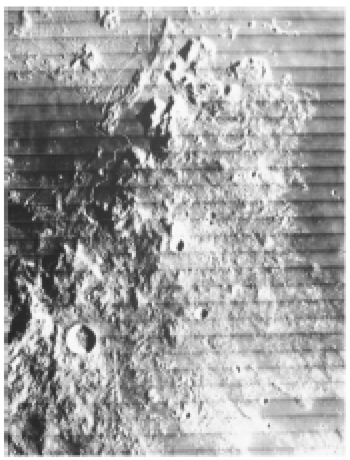
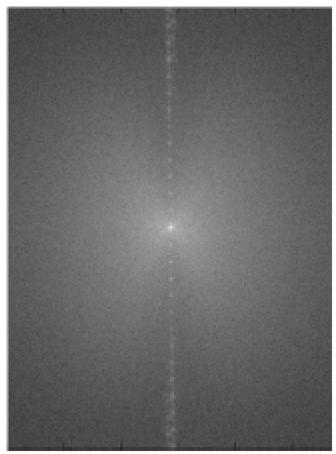


FIGURE 4.65 (a) 674 × 674 image of the Saturn rings showing nearly periodic interference. (b) Spectrum: The bursts of energy in the vertical axis near the origin correspond to the interference pattern. (c) A vertical notch reject filter. (d) Result of filtering. The thin black border in (c) was added for clarity; it is not part of the data. (Original image courtesy of Dr. Robert A. West, NASA/JPL.)

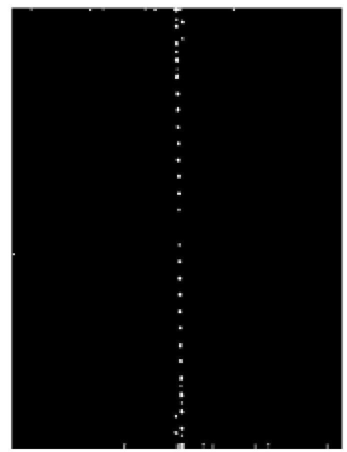
Ζωνοπερατά φίλτρα (bandpass/bandreject filters)

Lunar orbital image (1966)





$|F(u,v)|$



remove peaks

join lines removed

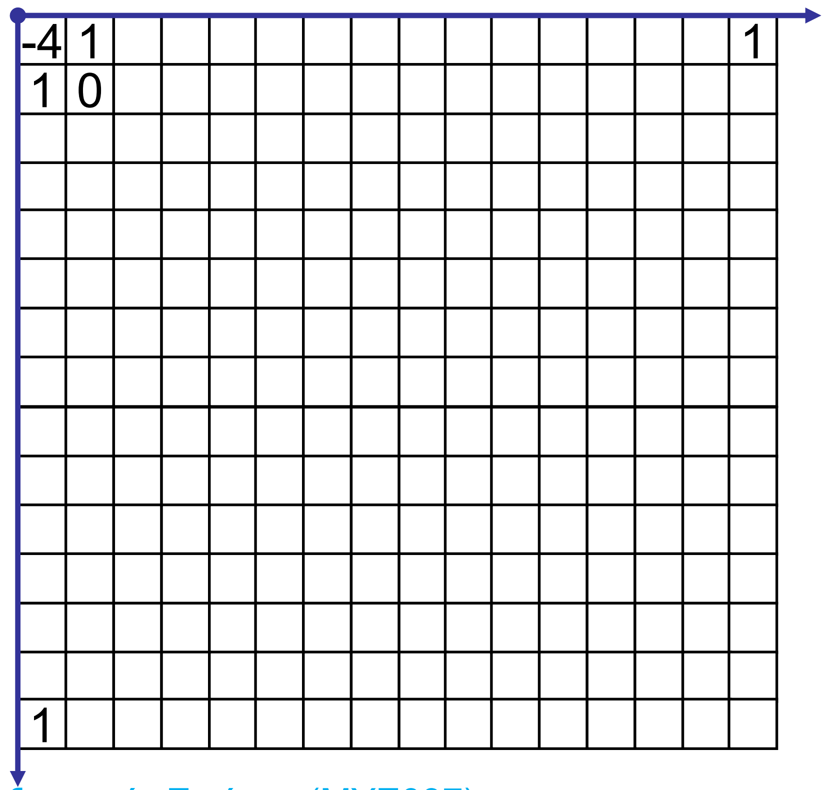
Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

- Τα διάφορα χωρικά φίλτρα που είδαμε σε προηγούμενο μάθημα (π.χ. Sobel, unsharp μάσκα, high boost filtering) μπορούν να υλοποιηθούν στον χώρο των συχνοτήτων.

Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

- Λαπλασιανό φίλτρο
- Κάνουμε padding μέχρι μέγεθος 602x602, και μετά υπολογίζουμε DFT.

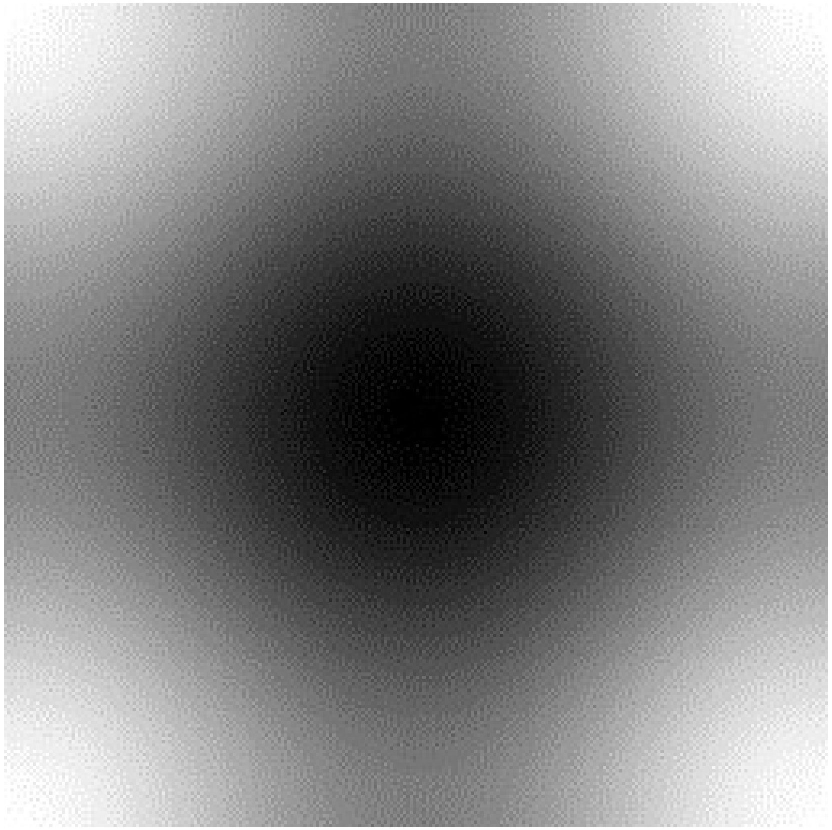
0	1	0
1	-4	1
0	1	0



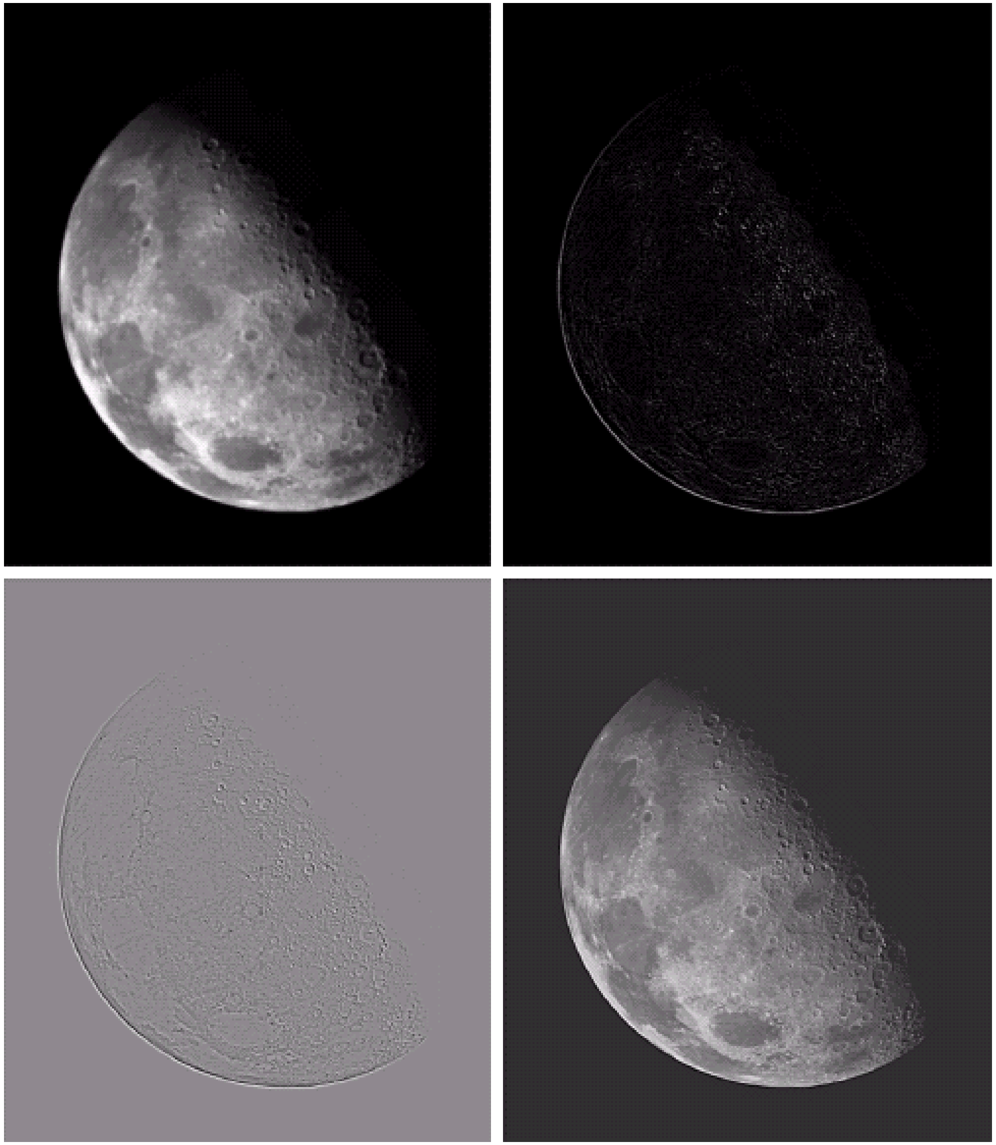
Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων

- Το Λαπλασιανό στον χώρο των συχνοτήτων

$$H(u,v) = -4\pi^2(u^2 + v^2)$$



Φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων



Original image

Laplacian filtered image

Laplacian image scaled

Enhanced image

Ταχύς Μετασχηματισμός Φουριέ (Fast Fourier Transform, FFT)

- Ένας ακόμα λόγος που χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Fourier στην ΨΕΕ είναι ο αλγόριθμος **Fast Fourier Transform (FFT)**.
- Μειώνει την πολυπλοκότητα από $\mathrm{O}(N^4)$ σε $\mathrm{O}(N^2 \log N^2)$.

Συνοψίζοντας

- Κάθε φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων αντιστοιχεί σε φιλτράρισμα στο πεδίο του χώρου, και αντίστροφα
- Στο κάθε πεδίο – χώρος ή συχνότητα – έχουμε άλλες δυνατότητες και άλλες δυσκολίες.
- Πολλές διαδικασίες που είναι δύσκολο ή σχεδόν αδύνατον να διατυπωθούν απ΄ευθείας στο πεδίο του χώρου, γίνονται τετριμμένες στο πεδίο των συχνοτήτων
- Το φιλτράρισμα στο πεδίο των συχνοτήτων μπορεί να γίνει πολύ γρήγορα – ειδικά για μεγάλες εικόνες.