

### 三、期权上下限关系验证

#### 1. 实验目的、原理简述

**【试验任务】：**假设红利率为 0，通过变换不同因素的取值，在同一幅图中画出期权价格和对应上下线的曲线，验证期权价格在任何情况下与上下限的关系。

**【实验目的】：**探究标的资产初始价格、执行价格、到期期限、无风险利率、标的资产波动率对期权价值、上下限关系的影响，并验证期权价格在上述任何情况下的上下限关系。

**【实验原理】：**利用 Black-Sholes 定价公式对欧式看涨期权和看跌期权进行定价，并根据欧式期权的上下限公式给出上下限。

欧式看涨期权价格计算公式：

$$C = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

欧式看涨期权的上下限关系：

$$\max\{S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0\} \leq C_E \leq S_t$$
$$\max\{S_t - I_t - Xe^{-r(T-t)}, 0\} \leq C_E \leq S_t - I_t$$
$$\max\{S_t e^{-q(T-t)} - Xe^{-r(T-t)}, 0\} \leq C_E \leq S_t e^{-q(T-t)}$$

欧式看跌期权价格计算公式：

$$P = Xe^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$$
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

欧式看跌期权的上下限关系：

$$\max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0\} \leq P_E \leq Xe^{-r(T-t)}$$
$$\max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t + I_t, 0\} \leq P_E \leq Xe^{-r(T-t)}$$
$$\max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t e^{-q(T-t)}, 0\} \leq P_E \leq Xe^{-r(T-t)}$$

## 2. 期权上下限关系实验分析

### 2.1 标的资产初始价格改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
[1, 200]	100	360	25%	3%	0%

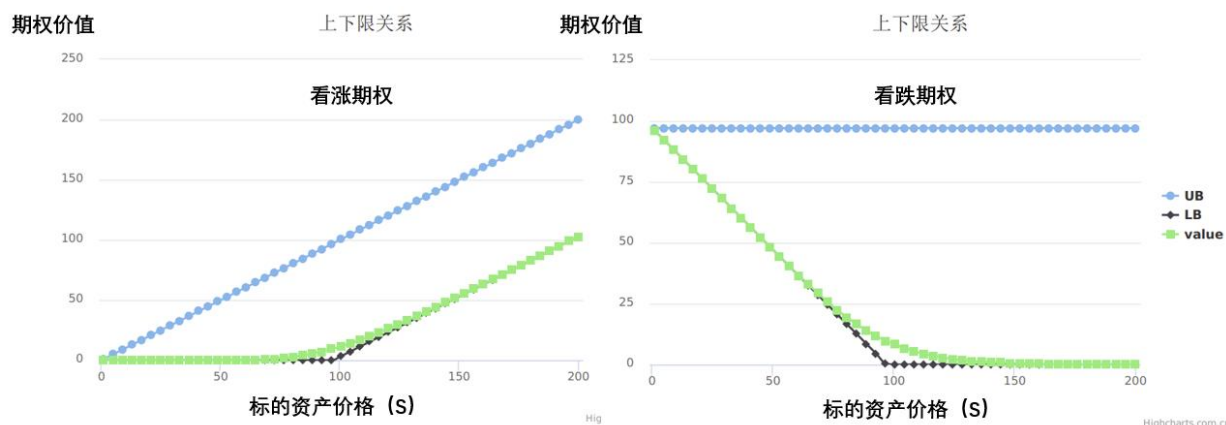


图 27: 标的资产初始价格改变时上下限关系

当标的资产价格小于  $Xe^{-r(T-t)}$  时，看涨期权的下限是 0，看跌期权下限是  $Xe^{-r(T-t)} - S_t$ 。当大于  $Xe^{-r(T-t)}$  时，看涨期权下限是  $S_t - Xe^{-r(T-t)}$ ，看跌期权下限是 0。看涨期权的上限是  $S_t$ ，看跌期权上限始终是  $Xe^{-r(T-t)}$ 。从图中我们可以看出，随着标的资产价格变化，期权价值始终在上下限之内。并且，我们发现标的资产价格在执行价格附近时，期权价格更接近于上限，这一结论适用于看涨与看跌期权。

## 2.2 执行价格改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	[0, 200]	360	25%	3%	0%

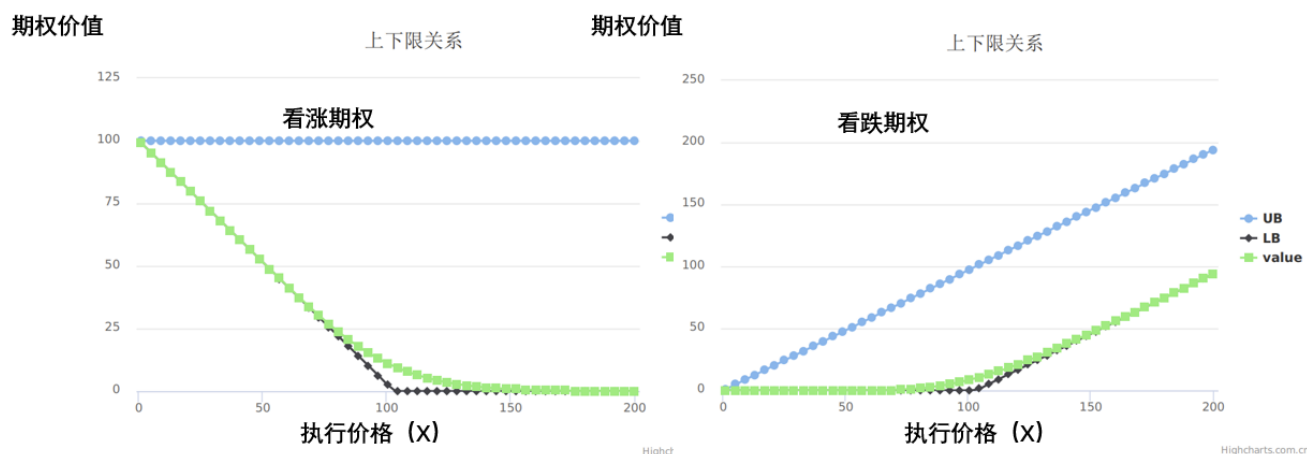


图 28：执行价格改变时上下限关系

当执行价格小于  $S_t e^{r(T-t)}$  时，看涨期权下限是  $S_t - X e^{-r(T-t)}$ ，看跌期权下限是 0。从图像可以看出，随着执行价格增大，看涨期权价值降低，看跌期权价值增大。当执行价格大于  $S_t e^{r(T-t)}$ ，看涨期权下限是 0，看跌期权下限是  $X e^{-r(T-t)} - S_t$ ，随着  $X$  增大而增大。看涨期权的上限始终是  $S_t$ ，看跌期权上限是  $X e^{-r(T-t)}$ （此图中随  $X$  增大而增大）。从图中我们可以看出，随着标的资产价格变化，期权价值始终在上下限之内。并且，我们发现标的资产价格在执行价格附近时，期权价格更接近于上限，这一结论适用于看涨与看跌期权。

### 2.3 到期期限改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	[1, 360]	25%	3%	0%

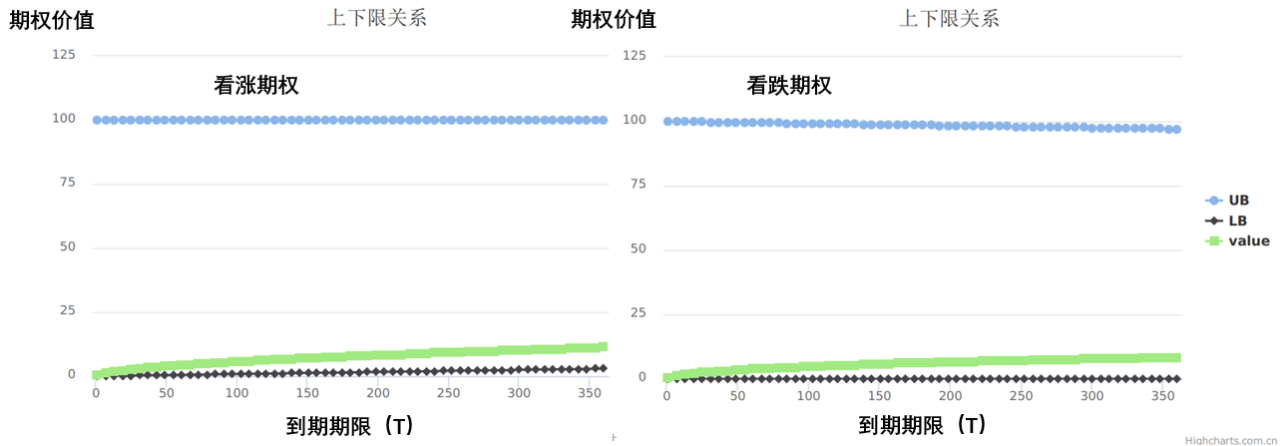


图 29：到期期限改变时上下限关系（I）

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	150	[1, 360]	25%	3%	0%

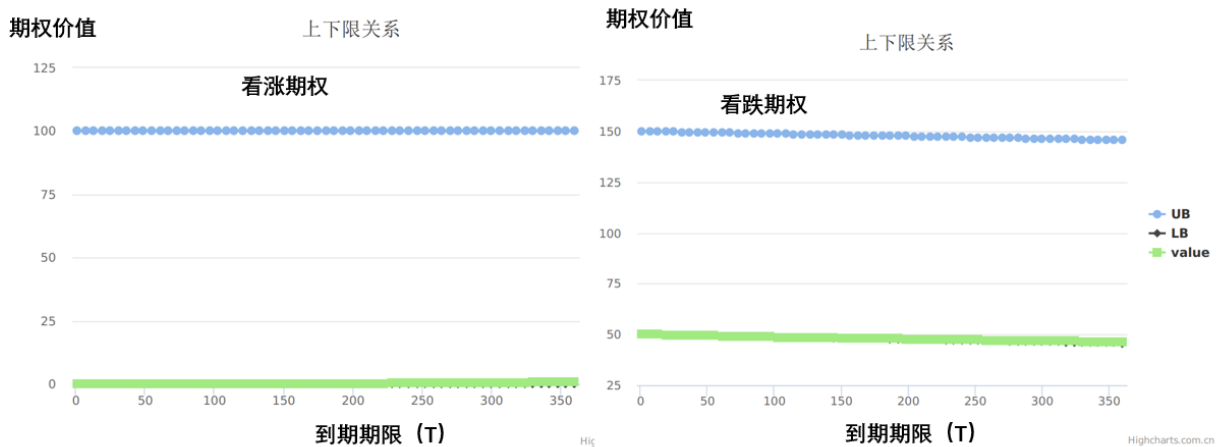


图 30：到期期限改变时上下限关系（II）

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	50	[1, 360]	25%	3%	0%

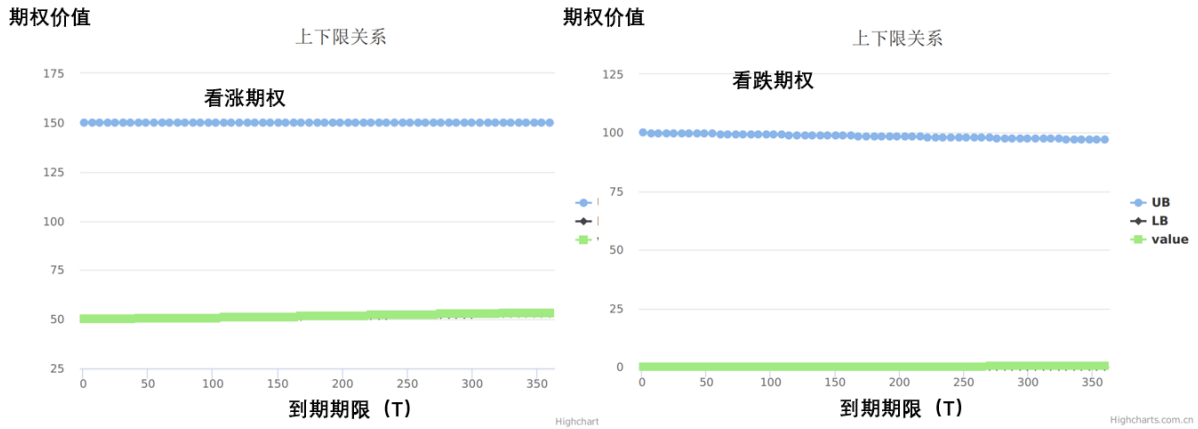


图 31：到期期限改变时上下限关系（III）

- 看涨期权上下限： $\max\{S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0\} \leq C_E \leq S_t$
- 看跌期权上下限： $\max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0\} \leq P_E \leq Xe^{-r(T-t)}$

从看涨和看得期权上下限公式来看，看涨期权的上限不变，始终是标的资产初始价格，看跌期权上限 $Xe^{-r(T-t)}$ 随着期限增加而下降。但看涨和看跌的下限关系就相对复杂。当标的资产价格小于 $Xe^{-r(T-t)}$ 时，看涨期权下限是 0，不随 T 的改变而改变，而看跌期权下限随着 T 增大而减小，直到 $Xe^{-r(T-t)} < S_t$ 后，下限成为 0。当标的资产价格和执行价格相等时，看涨看跌的下限均为 0。当标的资产价格大于 $Xe^{-r(T-t)}$ 时，看涨期权下限是 $S_t - Xe^{-r(T-t)}$ ，随着 T 增大而增大，看跌期权下限是 0。图像验证了理论假设。实验结果表明，无论期限如何变化，期权价值始终满足上下限关系。

## 2.4 波动率改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	360	[0%, 1000%]	3%	0%

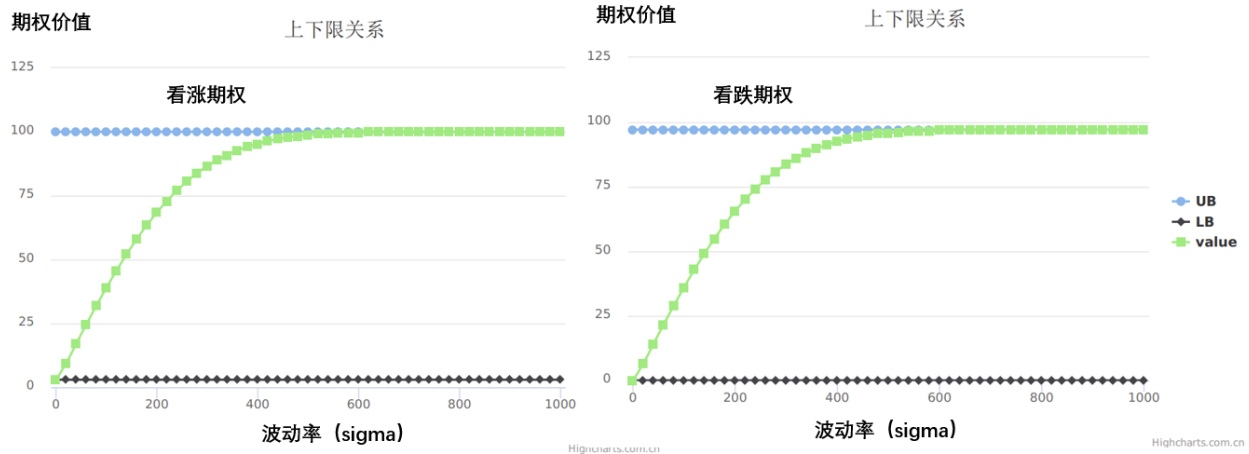


图 32: 波动率改变时上下限关系

无论是看涨期权还是看跌期权，在其他因素给定的情况下，上下限不变。在  $S_t = 100, K = 100$  时，其上下限均为常数，不随波动率改变而改变。看涨期权下限是  $\max\{S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0\}$ ，看跌期权下限是  $\max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0\}$ 。由实验结果可知，随着波动率的增加，期权价值增加，向期权上限靠拢，最后收敛于期权上限。实验结果表明，无论波动率如何变化，期权上下限条件始终满足。

2.5 无风险利率改变时上下限关系

参数列表					
标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	360	25%	[0%, 100%]	0%

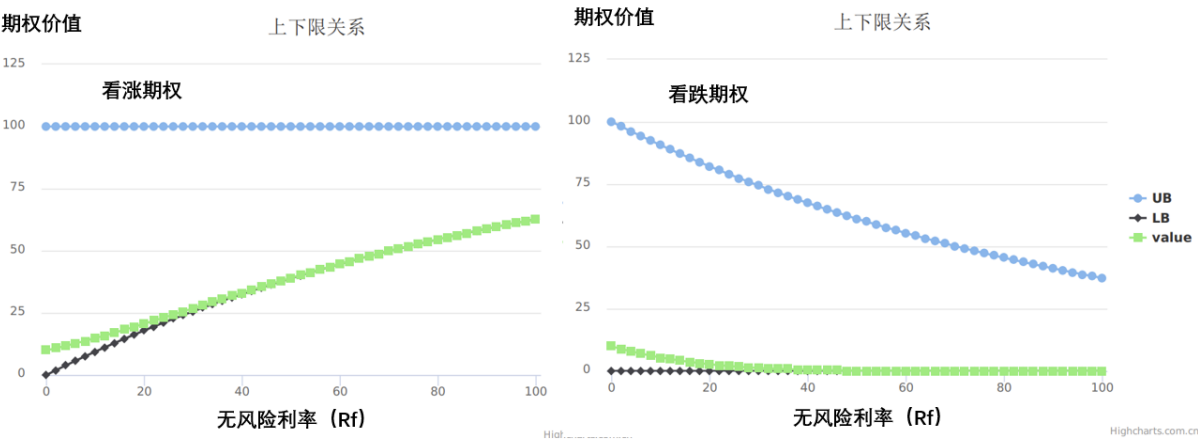


图 33：无风险利率改变时上下限关系

在其他因素不变的情况下，随着无风险利率上升，看涨期权下限增大，看跌期权上下限均减小。随着无风险利率上升，看涨期权价值增大，看跌期权价值减小。实验结果表明，无论无风险利率如何变化，期权价值始终满足上下限关系。并且，我们发现，在无风险利率较低时，期权价值更贴近于期权上限（或向上偏离下限），但随着无风险利率增加，期权价值收敛于期权下限，这一结论同时适用于看涨和看跌期权。

3. 期权上下限验证实验结论

实验参数列表总结					
标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
[1, 200]	100	360	25%	3%	0%
100	[0, 200]	360	25%	3%	0%
100	100	[1, 360]	25%	3%	0%
100	150	[1, 360]	25%	3%	0%
150	100	[1, 360]	25%	3%	0%
100	100	360	[0%, 1000%]	3%	0%
100	100	360	25%	[0%, 100%]	0%

根据实验，在改变资产价格、执行价格、到期期限、波动率、无风险利率时，欧式看涨期权和看跌期权均服从理论的上下限关系。该上下限关系得到了理论模型的完美验证。

## 四、期权下限关系实证分析

### 1. 实验目的、原理阐述

#### 【实验目的】

借助我国 50ETF 期权、上海期货交易所铜期权、豆粕期权的日线数据和分钟高频数据进行实证检验，验证我国期权市场价格是否满足期权下限关系，并以此分析我国期权市场的有效性和套利机会。

#### 【实验要求】

依托考虑成本的欧式看涨看跌期权下限公式，借助我国 50ETF 期权、上证 50ETF、铜期权和铜期货的市场日线数据和分钟数据实证检验我国期权市场价格是否满足期权下限关系，以此分析我国期权市场的有效性和套利机会。实验者可以根据自己的主观判断，选择不同市场情况下，不同频率下的期权和标的资产数据，验证我国期权市场的有效性。

#### 【实验步骤】

- 1、选取不同历史区间的低频看涨、看跌期权合约检验下限关系在日线的满足情况
- 2、选取不同合约的高频数据，检验期权合约下限关系在日内的满足情况
- 3、选择当前正在交易的 50ETF 期权、铜期权、豆粕期权的交易数据，计算期权下限，验证下限关系。

#### 【数据说明】

步骤 1 和步骤 2 的数据和图像均来自对外经济贸易大学数量金融实验教学中心

步骤 3 的期权交易数据来自于 Wind 资讯终端，期货交易数据来自 CSMAR 衍生品数据库。无风险利率选用 Wind 资讯终端提供的 1 年起 SHIBOR 利率，并利用连续复利和年复利关系转化为连续复利率：

$$(1 + r) = e^{R_c(T-t)}$$

#### 【实验原理】

根据报告要求以及数量实验室实证软件的公式说明。在步骤 1、2 中，我们认为 50ETF 期权和铜期货期权都是考虑成本的欧式期权，并且假设标的资产的红利率是 0，成本率是 0.0002。这是为了简化实验所作出的必要假设。

为了更加贴近市场环境，小组构建了步骤 3：

50ETF 期权是一份欧式期权

$$\begin{aligned} \max\{S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0\} &\leq C_E \\ \max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0\} &\leq P_E \end{aligned}$$

按照合约说明，豆粕期权是一份美式期权

$$\begin{aligned} \max\{S_t - X, 0\} &\leq C_E \\ \max\{X - S_t, 0\} &\leq P_E \end{aligned}$$

铜期货期权在 11 月前可以看作标的资产支付红利率的欧式期权，红利率等于无风险利率

$$\begin{aligned} \max\{S_t e^{-r(T-t)} - Xe^{-r(T-t)}, 0\} &\leq C_E \\ \max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t e^{-r(T-t)}, 0\} &\leq P_E \end{aligned}$$



## 2. 低频数据实证实验与分析

### 2.1 铜期权低频实证分析

实验数据描述		
数据时间：2021-01-01——2021-03-31		
期权代码：CU2105C37000	到期时间：2021 年 04 月	标的资产代码：CU
行权价格：37000 看涨期权	总观察次数：58	突破下限次数：45（77.59%）
最大差值：811.0097	最小差值：-1629.0939	差值均值：-229.7985

下限关系--市场实证

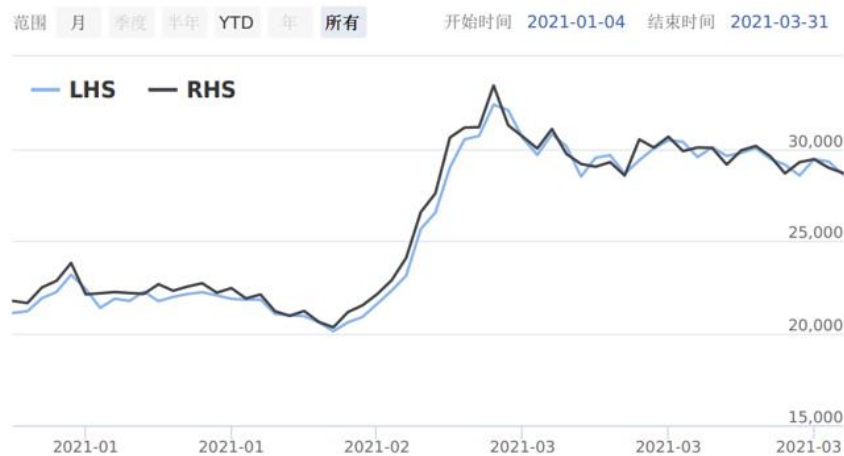


图 XX: CU2105C37000 下限分析

实验数据描述		
数据时间：2021-01-01——2021-03-31		
期权代码：CU2105P37000	到期时间：2021 年 04 月	标的资产代码：CU
行权价格：37000 看涨期权	总观察次数：58	突破下限次数：0（0%）
最大差值：40	最小差值：2	差值均值：7.4483

下限关系--市场实证



图 XX: CU2105C37000 下限分析

## 2.2 上证 50 期权低频实证分析

实验数据描述		
数据时间：2021-01-01——2021-03-24		
期权代码：8#10003041	到期时间：2021 年 03 月	标的资产代码：1510050（上证 50）
行权价格：3 看涨期权	总观察次数：53	突破下限次数：39（53%）
最大差值：0.0159	最小差值：-0.0462	差值均值：-0.0079

下限关系--市场实证

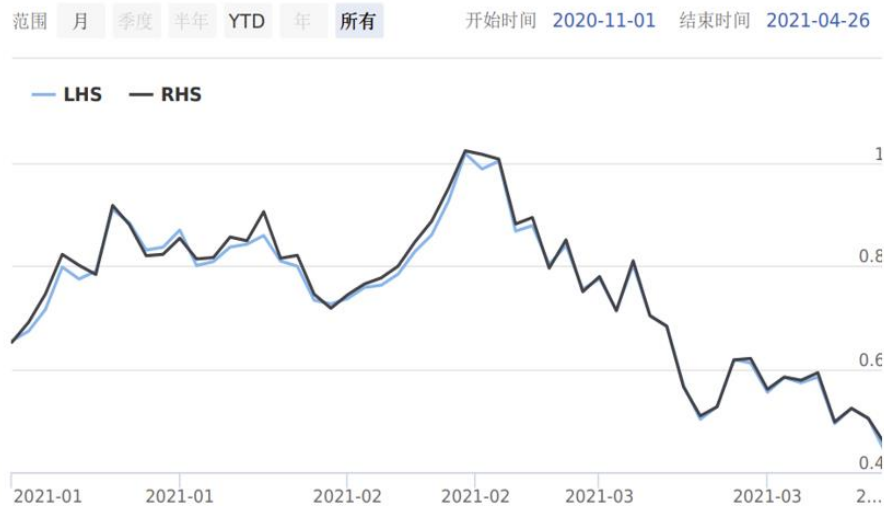


图 XX：8#10003041 下限分析

实验数据描述		
数据时间：2021-01-01——2021-03-24		
期权代码：8#10003042	到期时间：2021 年 03 月	标的资产代码：1510050（上证 50）
行权价格：3 看跌期权	总观察次数：53	突破下限次数：0（0%）
最大差值：0.0064	最小差值：0.0001	差值均值：0.0028

下限关系--市场实证



图 XX：8#10003042 下限分析

### 3. 高频数据实证实验与分析

#### 3.1 上证 50 高频数据实证分析

实验数据描述		
数据时间：2021-04-21		
期权代码：8#10003205	到期时间：2021 年 09 月	标的资产代码：1510050（上证 50）
行权价格：3.4 看涨期权	总观察次数：240	突破下限次数：0（0%）
最大差值：0.0947	最小差值：0.0718	差值均值：0.0809

下限关系--市场实证



图 XX：8#10003205 下限分析

实验数据描述		
数据时间：2021-04-21		
期权代码：8#10003214	到期时间：2021 年 09 月	标的资产代码：1510050（上证 50）
行权价格：3.4 看涨期权	总观察次数：240	突破下限次数：0（0%）
最大差值：0.163	最小差值：0.1523	差值均值：0.157

下限关系--市场实证



图 XX：8#10003214 下限分析

### 3.2 铜期货期权高频数据实证分析

实验数据描述		
数据时间：2021-03-01		
期权代码：CU2105C37000	到期时间：2021 年 04 月	标的资产代码：CU
行权价格：37000 看涨期权	总观察次数：408	突破下限次数：43（10.54%）
最大差值：1671.86	最小差值：-259.2612	差值均值：752.4608

下限关系--市场实证



图 XX：CU2105C37000 下限分析

实验数据描述		
数据时间：2021-03-01		
期权代码：CU2105P37000	到期时间：2021 年 04 月	标的资产代码：CU
行权价格：37000 看涨期权	总观察次数：408	突破下限次数：0（0%）
最大差值：18	最小差值：14	差值均值：15.0245

下限关系--市场实证



图 XX：CU2105P37000 下限分析

## 4. 市场环境实证检验

### 4.1 豆粕期权下限实证检验

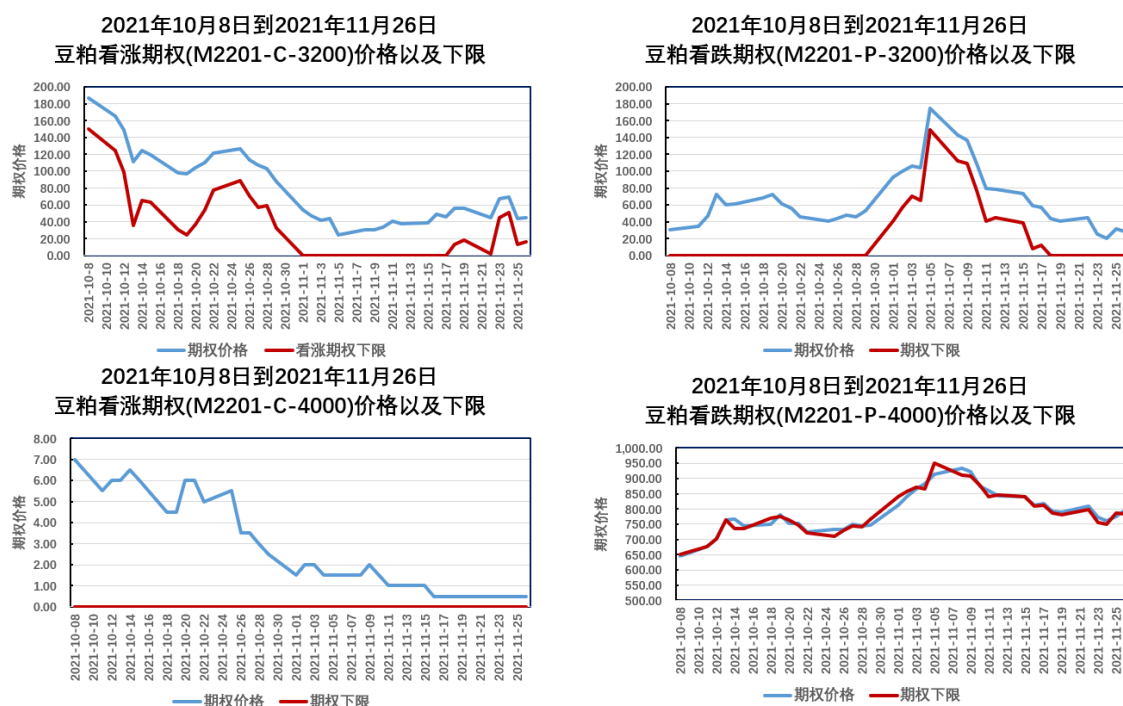


图 XX: 豆粕期权下限分析

从豆粕期权实际交易情况来看，C-3200，P-3200，C-4000 期权下限从 10 月 8 日到 11 月 26 日的交易区间内均满足。但是 P-4000 下限经常被突破，经过统计，在 48 个统计日中，总共有 20 个统计日的期权收盘价突破了期权下限。

### 4.2 上证 50ETF 期权下限实证检验

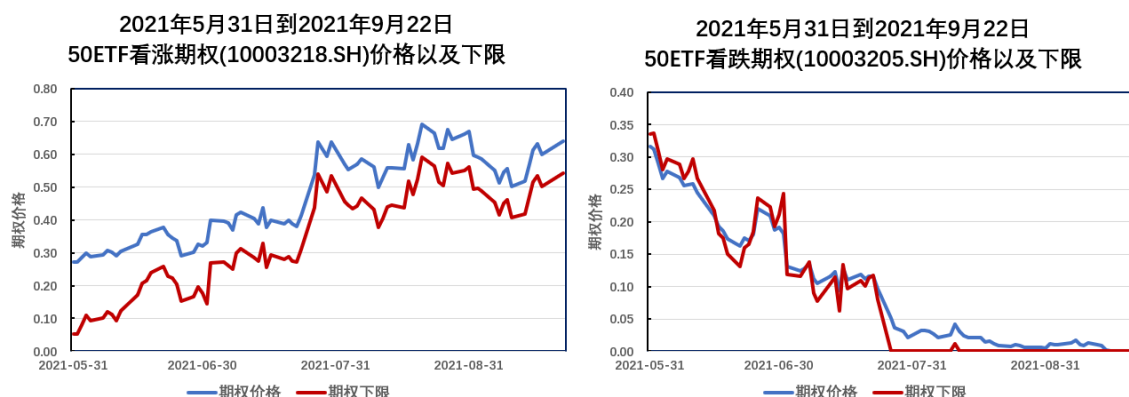


图 XX: 上证 50ETF 期权下限分析

从上证 50ETF 期权来看，3218 合约的期权下限基本满足，但是 3205 看跌期权下限越有 10% 的天数被突破。根据现货和执行价格的关系可以看出，3218 合约的内在价值现值与期权价格差距较大，3205 合约的内在价值现值与期

权价格差距较小，因此在有摩擦的实际市场中，期权下限是可以被突破的（也许在该实证中考虑市场摩擦会有不同的结果）。

### 4.3 铜期权下限实证检验

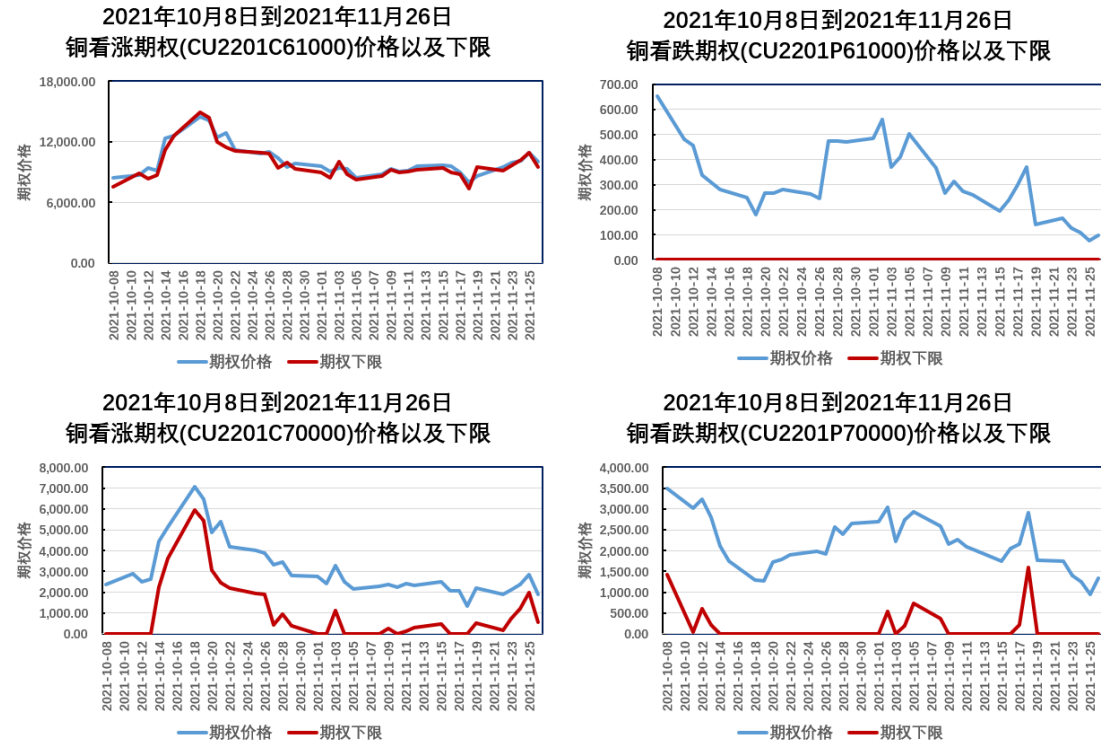


图 XX：铜期权下限分析

从铜期货期权在 10 月 8 日到 11 月 26 日的行情来看，P61000 期权、C70000 期权、P70000 期权的价格均满足期权下限关系，但是 C61000 期权存在较多不满足期权下限的情况。从图像看出，C61000 期权价格尽管有时突破下限，但是这一突破均是暂时且小幅度的，这说明，由于市场摩擦，套利不是充分的，但也是比较有效的。在考虑各种摩擦因素后，期权价格实际上都处于无套利区间中的，否则就会有套利的存在。

## 5. 分析与结论

从上述实验室实证结果以及市场交易数据实证结果中，我们可以总结出以下有关于期权下限在实际交易中满足情况的结论：

- 1、期权的价格下限实际上是存在的，实证结果表明，期权价格下限总体上是满足的。
- 2、尽管市场交易中（无论是在日频维度还是高频维度上），会存在期权价格突破下限的事件，并且突破相对常见，但突破下限的深度、持久性都有较强的限制，很少出现长期、大幅度突破下限的情况，这说明市场是比较有效的。
- 3、从历史行情来看，一般虚值期权的下限关系满足程度较好，突破下限的情况常见于平值期权和实值期权中。
- 4、由于市场摩擦的存在（比如交易成本、流动性限制以及其他微观市场结构问题），实际下限会与理论的下限有所区别，这也可以解释为何一些突破下限的情况（事实上它们仍然处于无套利区间）。
- 5、在实际交易中，套利并非容易。比如看涨期权突破下限时，我们需要构建两个组合：看涨期权+现金、现货资产。而实际上，并非所有现货资产都可以卖空，获取现金资产也是有成本的。这些限制都会导致套利不足。