第九讲实验任务—期权的价格特征实验

小组成员分工：

陈润楠 202083003 第四部分 期权上下限与平价关系实证分析

魏恺锋 202041038 第三部分 期权上下限关系

王　晨 202083015 第二部分 分析时间价值与标的资产价格之间的关系

刘健辉 202083013 第一部分 期权价格的影响因素分析

目录

第九讲实验任务—期权的价格特征实验........1
小组成员分工：........1
一、期权价格的影响因素分析........1
1.1 实验目的、原理简述........1
1.2 实验任务一：期权价值的单影响因素分析........1
1.2.1 期权价值与资产价格的关系........1
1.2.2 期权价值与波动率的关系........2
1.2.3 期权价值与无风险利率的关系........2
1.2.4 期权价值与红利率的关系........3
1.2.5 期权价值与到期期限的关系........3
1.2.6 期权价值与执行价格的关系........3
1.3 实验任务二：期权价值的双影响因素分析........4
1.3.1 到期日和标的资产价格对期权价值价格的影响........4
1.3.2 波动率和标的资产价格对期权价值价格的影响........4
1.3.3 到期日和波动率对期权价值价格的影响........5
1.4 实验总结........5
二、分析时间价值与标的资产价格之间的关系........6
2.1 实验目的、原理简述........6
2.2 实验任务一：期权的时间价值与各因素之间的关系........7
2.2.1 标的资产价格与时间价值之间关系........7
2.2.2 期权的时间价值与到期期限、无风险收益率、波动率、标的资产价值的区间的关系........8
2.2.3. 期权上下限验证实验结论........9
2.3 实验任务二：期权时间价值随到期日变化实验分析........10
2.3.1 时间长度与时间价值之间的关系........10
2.3.2 衰减大小与剩余时间之间的关系........10
2.4 期权上下限验证实验结论........11
三、 期权上下限关系验证........11
3.1 实验目的、原理简述........11

3.2 期权上下限关系实验分析..12
3.2.1 标的资产初始价格改变时上下限关系..12
3.2.2 执行价格改变时上下限关系..12
3.2.3 到期期限改变时上下限关系..13
3.2.4 波动率改变时上下限关系..15
3.2.5 无风险利率改变时上下限关系..15
3.3 期权上下限验证实验结论..16
四、期权上下限和平价关系的实证分析..17
——以50ETF期权为例..17
4.1 实验目的..17
4.2 符号说明..17
4.3 数据来源与预处理..17
4.3.1数据来源..17
4.3.2数据预处理..18
4.4 期权上下限..18
4.4.1 欧式看涨期权..19
4.4.2 欧式看跌期权..20
4.4.3 期权上下限关系理论假设..21
4.4.4 期权上下限实证分析..21
4.4.5 期权上下限关系总结..25
4.5 期权平价关系..25
4.5.1平价关系理论验证..25
4.5.2 期权平价关系理论假设..26
4.5.3 平价关系实证分析..27
4.5.4期权平价关系总结..28

一、期权价格的影响因素分析

1.1　实验目的、原理简述

【试验任务1】： 控制5个变量不变，通过改变另一个变量的取值，　在图像中观察期权价值受该变量的影响情况。

【试验任务2】： 控制4个变量不变，通过改变另两个变量的取值，　在图像中观察期权价值受这两个变量共同影响的情况。

【实验目的】： 探究标的资产初始价格、执行价格、到期期限、无风险利率、标　的资产波动率对期权价值的影响，　并探索什么情况下，看涨期权的价值与到期期限可能不是正相关；什么情况下，看跌期权的价值与到期期限可能不是正相关。

【实验原理】： 利用 Black-Shores 定价公式对计算给定变量下欧式看涨期权、看跌期权的价值。

欧式期权价格计算公式：

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{(-r(T-t))} N(d_2)$$

$$P = X \cdot e^{(-r(T-t))} N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

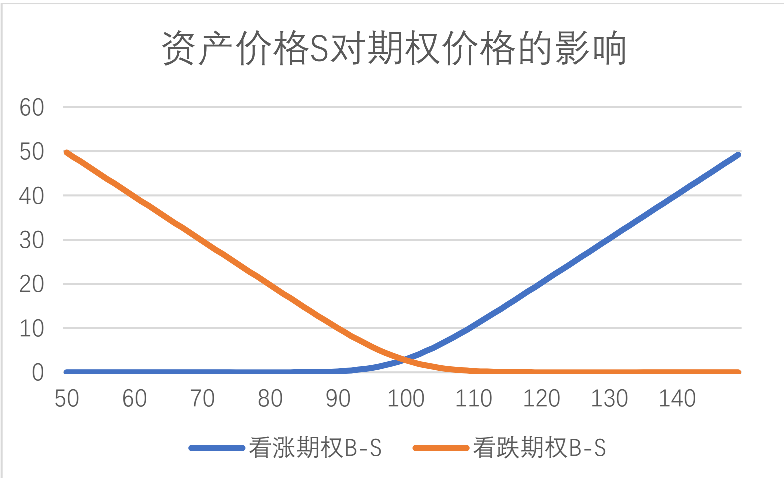
$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}$$

1.2 实验任务一：期权价值的单影响因素分析

1.2.1 期权价值与资产价格的关系

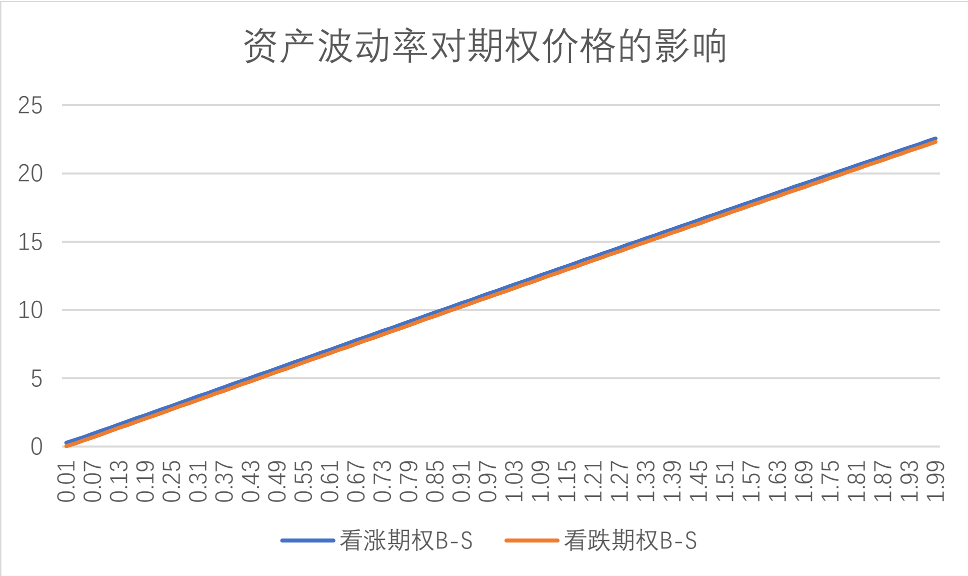
固定期权的执行价格、无风险利率、到期期限、股价波动率、红利 率，改变价格 S，得到期权价值随着价格变化的折线图，如下所示：



从上图中我们可以看出随着初始价格，即标的资产价格 S 的上升，看涨期权价值也上升，而看跌期权价值下降，说明资产价格变动与看涨期权价值变动成正向关系，与看跌期权价值变动成反向关系。

1.2.2 期权价值与波动率的关系

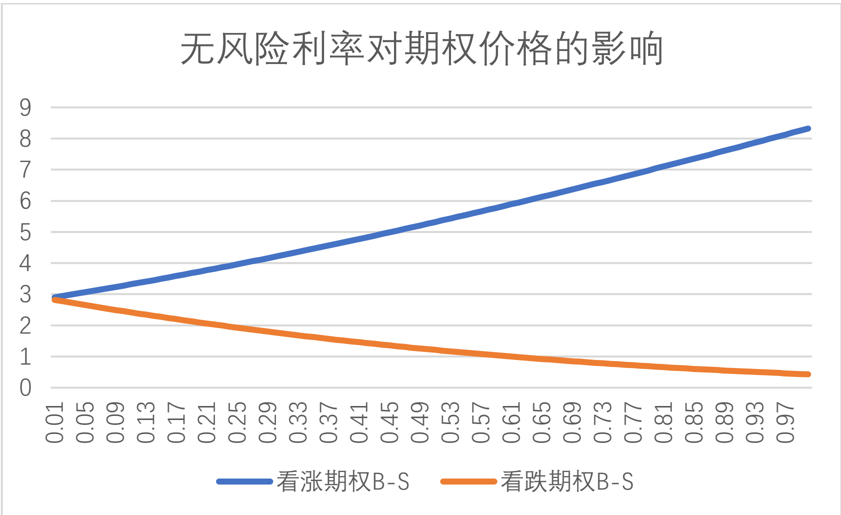
固定期权的执行价格、无风险利率、到期期限、价格、红利率， 改变价格波动率，得到期权价值随着股价波动率变化的折线图，如下所示：



从上图中可以看出，随着股价波动率的上升，看涨期权和看跌期权的价 值都随之上升，说明股价波动率变动与看涨和看跌期权的价值变动成正向关系。除此之外，若执行价格 X 和初始价格 S 相等时，在其他条件不变的情况下，BS 公式计算出在任何波动率下看涨期权的价格均高于看跌期权，符合买卖全平价关系。

1.2.3 期权价值与无风险利率的关系

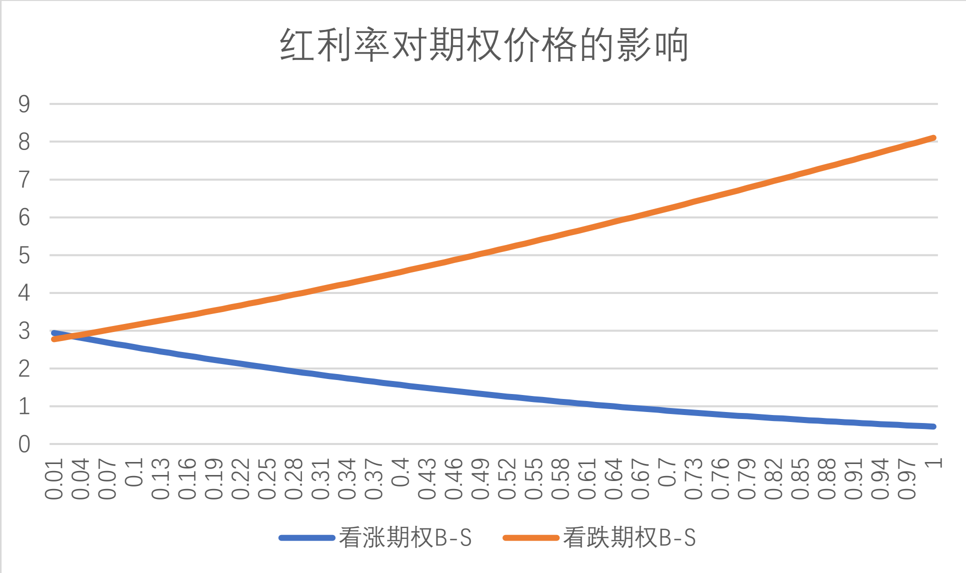
固定期权的执行价格、到期期限、股价波动率、价格、红利率，改变无风险利率，得到了期权价值随着无风险利率变动的折线图，如下所示：



从上图中，可以看出随着无风险利率的上升，看涨期权价值也上升，而看跌期权价值下降，而且，期权价值的变化随无风险利率的变化呈现出线性关系。说明无风险利率变动与看涨期权价值变动成正向关系，与看跌期权价值变动成反向关系。

1.2.4 期权价值与红利率的关系

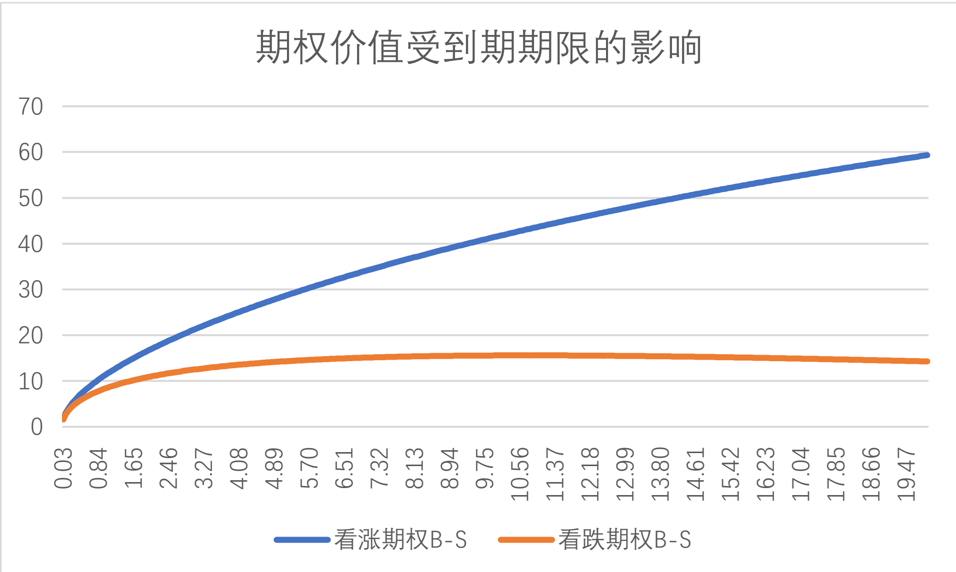
固定期权的执行价格、到期期限、股价波动率、价格、无风险利率， 改变红利率，得到期权价值随着无风险利率变动的折线图，如下所示：



从上图中可以看出，红利率越高，价格越可能由于分红而降低，因此，随着红利率的上升，看跌期权价值也上升，而看涨期权价值下降，说明红利率变动与看跌期权价值变动成正向关系，与看涨期权价值变动成反向关系。

1.2.5 期权价值与到期期限的关系

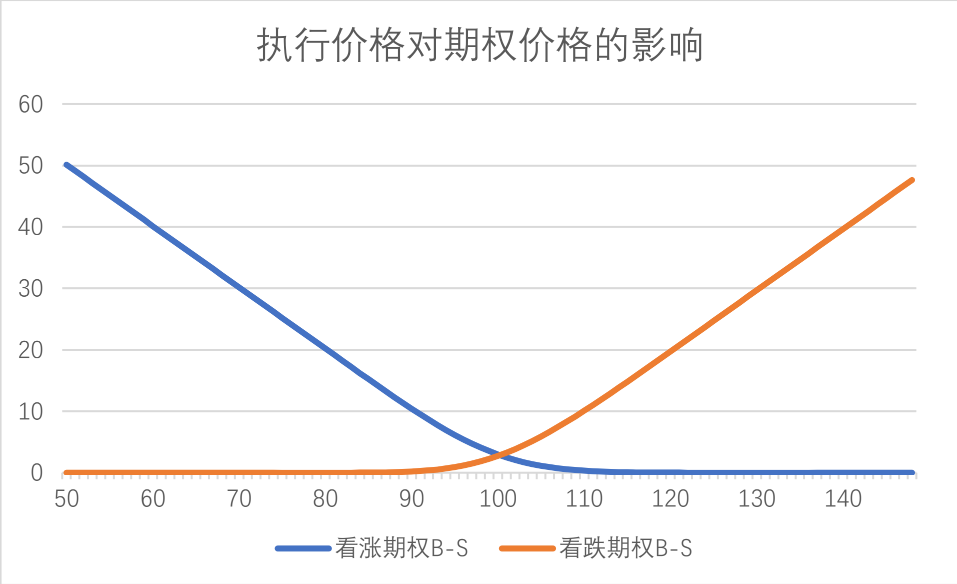
固定期权的执行价格、红利率、股价波动率、价格、无风险利率，改变到期期限，得到期权价值随着到期期限变动的折线图，如下所示：



从上图中可以看出，随到期期限不断增大，看涨期权价值持续上升，看跌期权价值先快速上升后缓慢下降。

1.2.6 期权价值与执行价格的关系

固定期权的到期期限、红利率、股价波动率、价格、无风险利 率，改变执行价，得到期权价值随着执行价变动的折线图，如下所示：

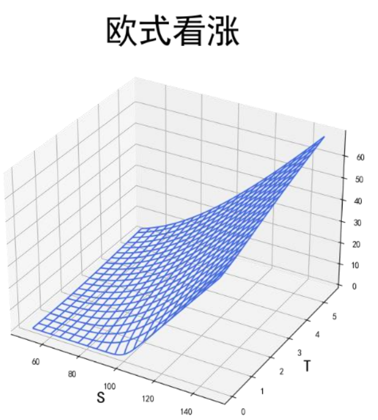


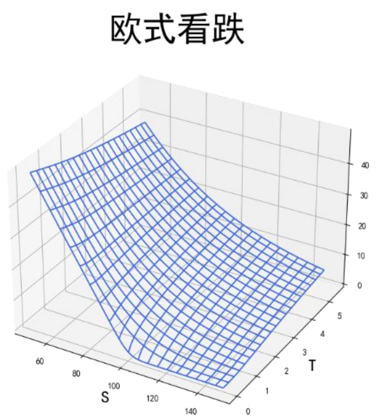
从上图中我们可以看出，随着执行价格的上升，看跌期权价值上升，看涨期权价值下降，说明执行价格的变动与看跌期权价值变动成正向关系，与看涨期权价值变动成反向关系。

1.3 实验任务二：期权价值的双影响因素分析

1.3.1 到期日和标的资产价格对期权价值价格的影响

固定期权的红利率、波动率、执行价格、无风险利率，改变到期期限和标的资产价格，分别得到看跌、看涨期权权价值随着到期日和标的资产价格变动的折线图，如下所示：

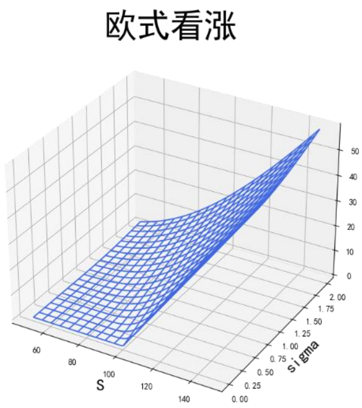


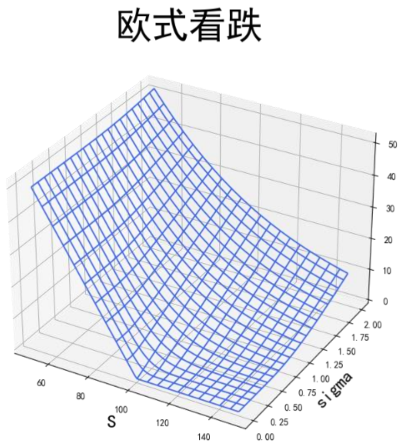


从图中可以看出，当标的资产价格和到期期限同时增大时，看涨期权价值上升得最快。当标的资产价格下降，到期期限上升时，看跌期权价值上升得最快。

1.3.2 波动率和标的资产价格对期权价值价格的影响

固定期权的红利率、到期期限、执行价格、无风险利率，改变波动率和标的资产价格，分别得到看跌、看涨期权权价值随着波动率和标的资产价格变动的折线图，如下所示：

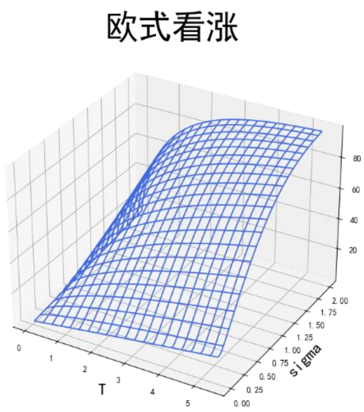


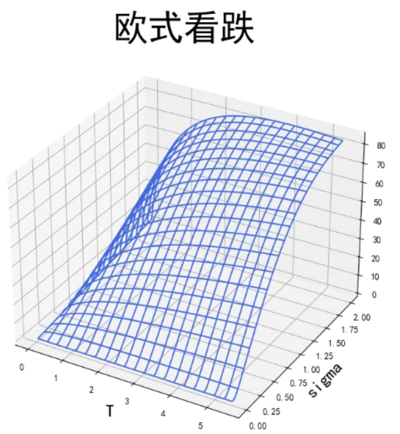


从图中可以看出，当标的资产价格和波动率同时增大时，看涨期权价值上升得最快。当标的资产价格下降，波动率上升时，看跌期权价值上升得最快。

1.3.3 到期日和波动率对期权价值价格的影响

固定期权的红利率、标的资产价格、执行价格、无风险利率，改变波动率和到期期限，分别得到看跌、看涨期权价值随着波动率和到期期限变动的折线图，如下所示：





从图中可以看出，只有当期期限和波动率同时增大时，看涨和看跌期权价值才都会快速上升。只要到期期限或波动率中有一者减小，看涨和看跌期权的价值都会快速下降。

1.4 实验总结

期权价格受单因素影响情况汇总如下：

因素名称	看涨期权	看跌期权
标的资产价格	正相关	负相关
波动率	正相关	正相关
无风险利率	正相关	负相关

红利率	负相关	正相关
到期期限	正相关	不确定
执行价格	负相关	正相关

二、分析时间价值与标的资产价格之间的关系

2.1 实验目的、原理简述

【试验任务一】：红利率q=0，分析欧式看涨期权和看跌期权的时间价值与标的资产价格关系。可以通过改变到期期限、波动率、标的资产价值的区间来观察看涨看跌期权时间价值变化的规律，并猜测标的资产价格满足什么条件时，时间价值最大。

【试验任务二】：本实验假设红利率为0，其他因素如波动率、无风险利率，实值期权、虚值期权的执行价格可以改变，通过设置到期期限的变动区间，比较虚值、实值、平值期权的时间价值衰减特征，了解时间价值随着到期日的临近，其衰减的速度。

【实验目的一】：探究标的资产价格、执行价格、到期期限、无风险利率、标的资产波动率对期权时间价值的影响，求出满足时间价值最大的条件。

【实验目的二】：探究随着时间减小时不同种类的期权的时间价值的变化，并且分析虚值、实值、平值期权时间价值衰减的变化量。

【实验原理】：利用 Black-Shores 定价公式对欧式看涨期权和看跌期权进行定 价，并根据欧式期权的上下限公式给出上下限。

欧式看涨期权价格计算公式：

$$C=S\cdot Nd1-X\cdot e-rT-tNd2\ C=S\cdot N(d_1)-X\cdot e^{(-r(T-t))}N(d_2)$$

$$d_1=\frac{\ln(S/X)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\mathrm{d}_2=\mathrm{d}_1-\sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}$$

欧式看涨期权内在价值：

内在价值=St-X

欧式看跌期权价格计算公式：

$$P=X\cdot e^{(-r(T-t))}N(-d_2)-S\cdot N(-d_1)$$

$$d_1=\frac{\ln(S/X)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\mathrm{d}_2=\mathrm{d}_1-\sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}$$

欧式看涨期权内在价值：

内在价值=X-St

2.2 实验任务一：期权的时间价值与各因素之间的关系

2.2.1 标的资产价格与时间价值之间关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
[1,200]	100	1年	0.03	3%	0%

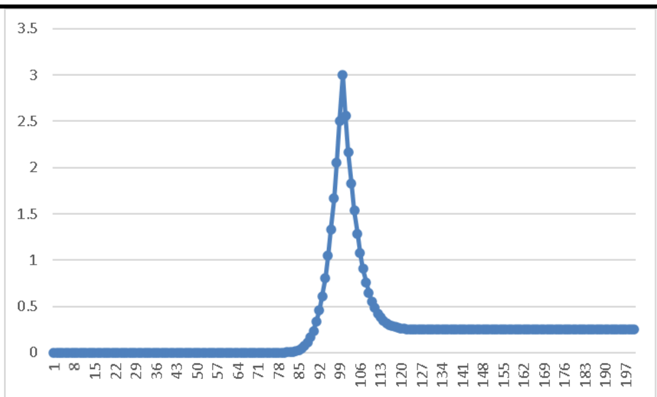


图2-1 ：欧式看涨期权的时间价值随标的资产变化关系图

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
[1,200]	100	1年	0.03	3%	0%

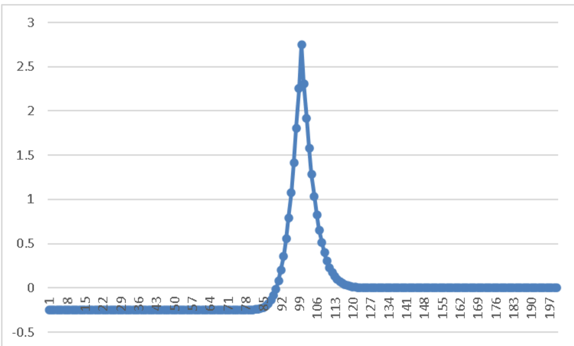


图2-2：欧式看跌期权的时间价值随标的资产变化关系图

通过欧式期权的内在价值计算公式以及价值计算公式，实际中结合宏函数，计算出在不同的标的资产价格下的看涨期权和看跌期权的时间价值，并将其绘制成一张图表。分析欧式看涨期权和看跌期权的时间价值与标的资产价格关系。

分析图2-1和图2-2，可以看出欧式看涨期权和欧式看跌期权的时间价值随标的资产变化趋势相同，图形形状相似。欧式看涨期权在资产价格在1至85之间时，时间价值为几乎为零，变化微小，但仍是上升趋势；在85至100之间时，时间价值增长极其迅速，最终在100时达到峰值，然后在100至115时急速下滑，最终

收敛到0.2496左右。欧式看跌期权的时间价值曲线相似，只是初始时价值在-0.2497时，也在100时达到峰值，在100至115时急速下滑，最终收敛到0。

2.2.2 期权的时间价值与到期期限、无风险收益率、波动率、标的资产价值的区间的关系

为了研究期权的时间价值最大的条件，先对其他变量进行考量。首先要考虑到的是影响期权时间价值的变量到期期限、无风险收益率、波动率、标的资产价值之间是没有相关性的，故可以通过对每个变量单独实验以此来检验。通过欧式期权的内在价值计算公式以及价值计算公式，实际中结合宏函数，绘制出不同条件下的欧式看涨期权和看跌期权的时间价值图。

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	1年	[0. 05, 1]	3%	0%

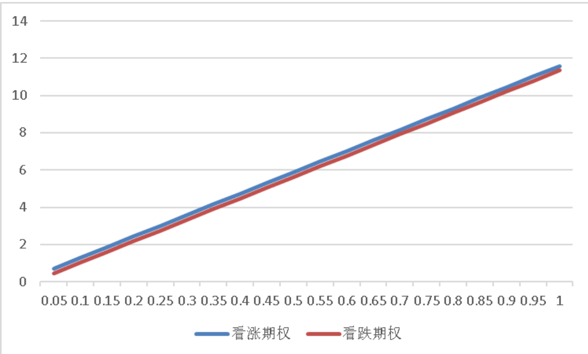


图2-3：不同波动率下欧式看涨期权和看跌期权的时间价值

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	1年	0. 03	[1%, 39%]	0%

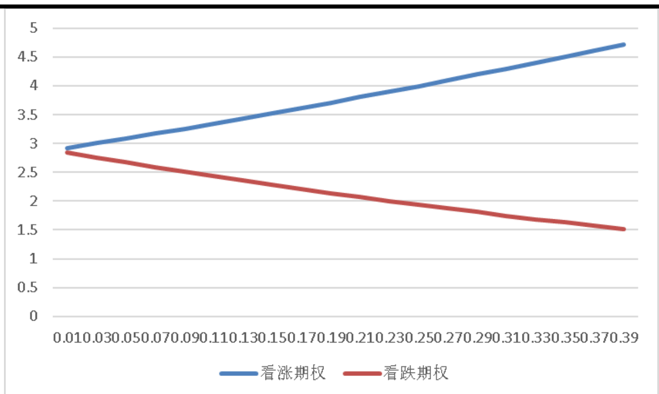


图2-4：不同无风险收益率下欧式看涨期权和看跌期权的时间价值

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	1年	0.03	3%	[0.01,0.39]

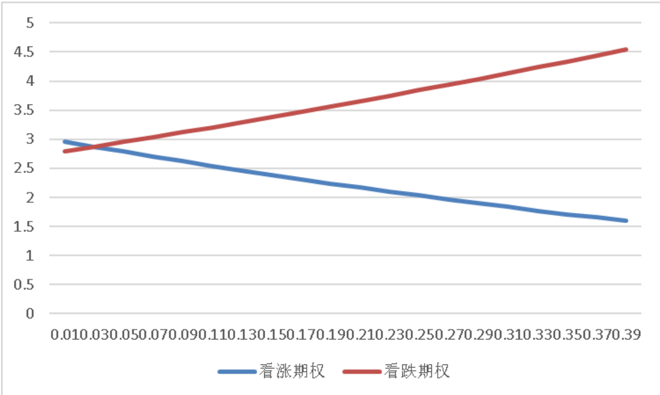


图2-5：不同红利率下欧式看涨期权和看跌期权的时间价值

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	[0.1,5.8]	0.03	3%	0%

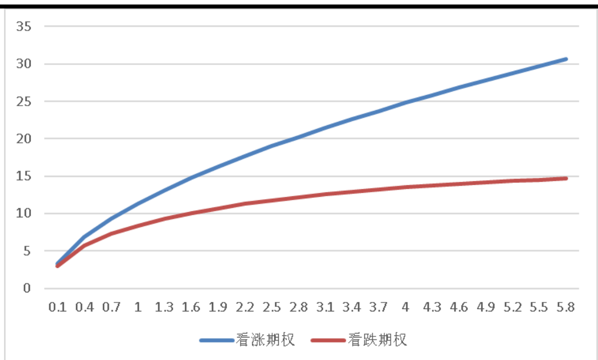


图2-6：不同到期期限下欧式看涨期权和看跌期权的时间价值

通过观察可以发现，四种变量对其影响均不相同，而且一种变量对看涨期权和看跌期权的影响也不相同，波动率与时间价值均呈正相关关系；无风险收益率越高，看涨期权的时间价值越大，看跌期权时间价值越小，红利率越大；看跌期权时间价值越高，看涨期权时间价值越低；到期期限越长，时间价值越大。

2.2.3. 期权上下限验证实验结论

根据实验，如果要让看涨期权时间价值大，标的资产价格为100，波动率高，无风险收益率高，红利率低，到期期限长，可以达到；故如果要让看涨期权时间价值大，标的资产价格为100，波动率高，无风险收益率低，红利率高，到期期限长，可以实现预期。

2.3 实验任务二：期权时间价值随到期日变化实验分析

2.3.1 时间长度与时间价值之间的关系

通过欧式期权的内在价值计算公式以及价值计算公式，实际中结合宏函数，计算出在不同的到期期限下的虚值、实值、平值期权的时间价值，并绘制出时间衰减图。分析欧式看涨期权和看跌期权的时间价值与标的资产价格关系。以看涨期权为例，绘制随着时间价值随着到期日的临近，相同时间变化下其衰减的力度。

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
{50, 100, 150}	100	1年	0.03	3%	0%

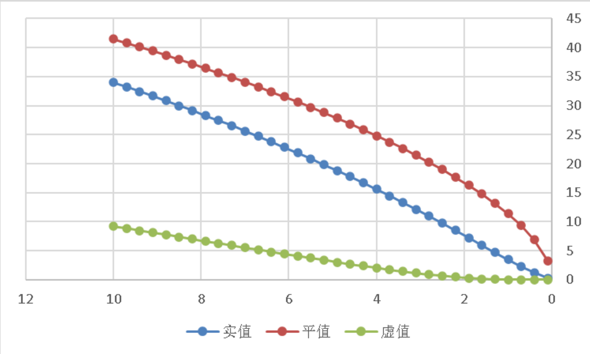


图2-7:看涨期权时间价值随到期日的时间价值关系

在图中我们能看到三种在同一时间下的时间价值均不相同，平值时间价值最大，然后是实值，最后是虚值，三者随着时间缩减时间价值也在减少，最终也趋于0。通过观察，我们也发现三者的减少速度也是不同的，故我们将其变化量的趋势进行观察。

2.3.2 衰减大小与剩余时间之间的关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
{50, 100, 150}	100	1年	0.03	3%	0%

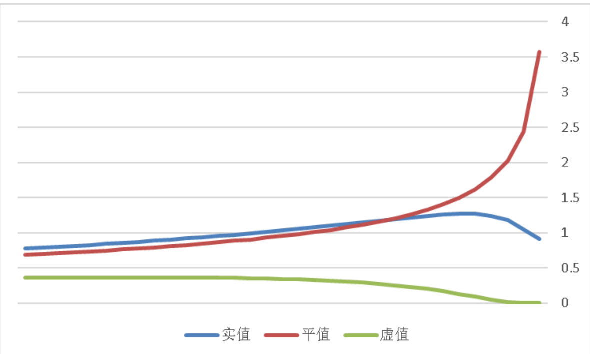


图2-8:衰减速度随时间的变化关系

通过图中我们可以看出，在时间离到期还有4，5年前，三者的时间价值下降速度几乎稳定，改变也不明显，在快到期之时，各项都发生了变化，平值期权的时间价值降低的幅度越增增大，实值期权时间价值的降低幅度从之前的增大变为减小（时间价值的二阶导由大于零变为小于零），而虚值期权的时间价值降低幅度开始缩减，最后趋于零。上文所述也对应着三种期权时间价值最后都收敛到很小数值之一事实。

2.4 期权上下限验证实验结论

根据实验，研究并分析了时间价值的减少在不同时间段上的变化和整体曲线。该了解时间价值随着到期日的临近，其衰减的速度。

三、 期权上下限关系验证

3.1 实验目的、原理简述

【试验任务】：假设红利率为 0，通过变换不同因素的取值， 在同一幅图中画出期权价格和对应上下限制的曲线，验证期权价格在任何情况下与上下限的关系。

【实验目的】：探究标的资产初始价格、执行价格、到期期限、无风险利率、标 的资产波动率对期权价值、上下限关系的影响， 并验证期权价格在上述任何情况 下的上下限关系。

【实验原理】：利用 Black-Shores 定价公式对欧式看涨期权和看跌期权进行定 价，并根据欧式期权的上下限公式给出上下限。

欧式看涨期权价格计算公式：

$$C = S \cdot N(d_1) - X \cdot e^{(-r(T-t))} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}$$

欧式看涨期权的上下限关系：

$$\mathrm{Max}\left(\mathrm{X}e^{-r(T-t)} - S_t, 0\right) \le C_E \le S_t$$

$$\mathrm{Max}\left(S_t - \mathrm{X}e^{-r(T-t)} - I_t, 0\right) \le C_E \le S_t - I_t$$

$$\mathrm{Max}\left(S_t e^{-q(T-t)} - \mathrm{X}e^{-r(T-t)}, 0\right) \le C_E \le S_t e^{-q(T-t)}$$

欧式看跌期权价格计算公式：

$$P = X \cdot e^{(-r(T-t))} N(-d_2) - S \cdot N(-d_1)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$\mathrm{d}_2 = \mathrm{d}_1 - \sigma\sqrt{\mathrm{T}-\mathrm{t}}$$

欧式看跌期权的上下限关系：

$$\mathrm{Max}\left(Xe^{-r(T-t)}-S_t,0\right)\le P_E\le Xe^{-r(T-t)}$$
$$\mathrm{Max}\left(Xe^{-r(T-t)}+I_t-S_t,0\right)\le P_E\le X^{-r(T-t)}$$
$$\mathrm{Max}\left(Xe^{-r(T-t)}-S_te^{-q(T-t)},0\right)\le P_E\le Xe^{-r(T-t)}$$

3.2 期权上下限关系实验分析

3.2.1 标的资产初始价格改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
[1, 100]	52	1年 1	0.38519	3%	0%

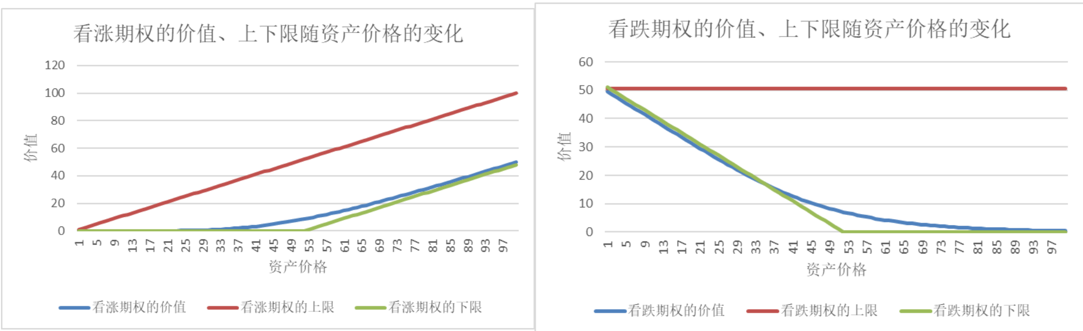


图 27：标的资产初始价格改变时上下限关系

当标的资产价格小于Xe−r(T−t)时，看涨期权的下限是 0，看跌期权下限是Xe−r(T−t) − St 。当大于Xe−r(T−t)时，看涨期权下限是St − Xe−r(T−t)，看跌期权下限是 0。看涨期权的上限是St ，看跌期权上限始终是Xe−r(T−t) 。从图中我们可以看出，随着标的资产价格变化， 期权价值始终在上下限之内。并且，我们 发现标的资产价格在执行价格附近时，期权价格更接近于上限， 这一结论适用于看涨与看跌期权。

3.2.2 执行价格改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
50	[1, 100]	1年 1	0.38519	3%	0%

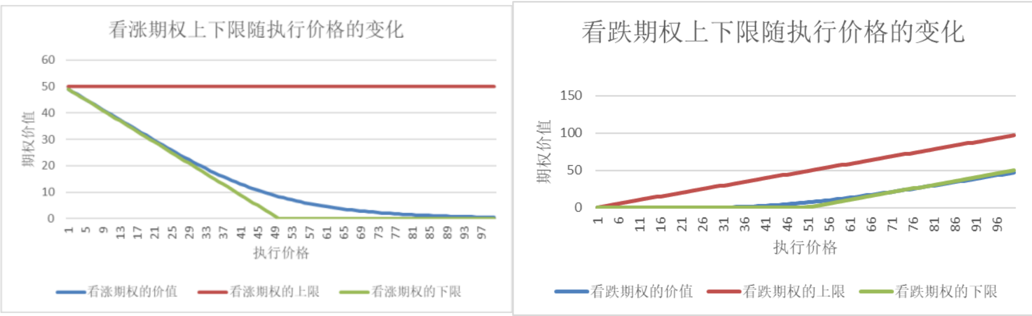


图 28：执行价格改变时上下限关系

当执行价格小于St er(T−t)时，看涨期权的下限是St − Xe−r(T−t)，看跌期权下限是0。从图像可以看出，随着执行价格增大，看涨期权的价值降低，看跌期 权价值增大。当执行价格大于St er(T−t)，看涨期权下限是 0，看跌期权下限是 Xe−r(T−t) − St ，随着 X 增大而增大。看涨期权的上限始终是St ，看跌期权上限是Xe−r(T−t) (此图中随 X 增大而增大)。从图中我们可以看出，随着标的资产价格变化，期权价值始终在上下限之内。并且， 我们发现标的资产价格在执行 价格附近时， 期权价格更接近于上限，这一结论适用于看涨与看跌期权。

3.2.3 到期期限改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	[0,10]	0.385191	3%	00025

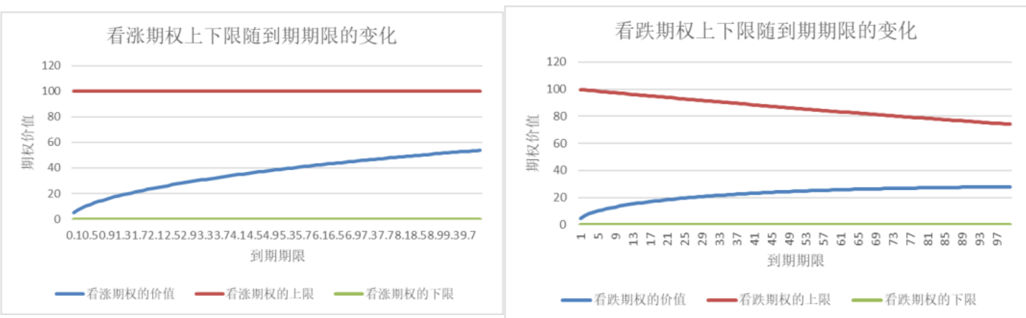


图 29：到期期限改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	52	[0，10]	0. 3851 91	3%	0%

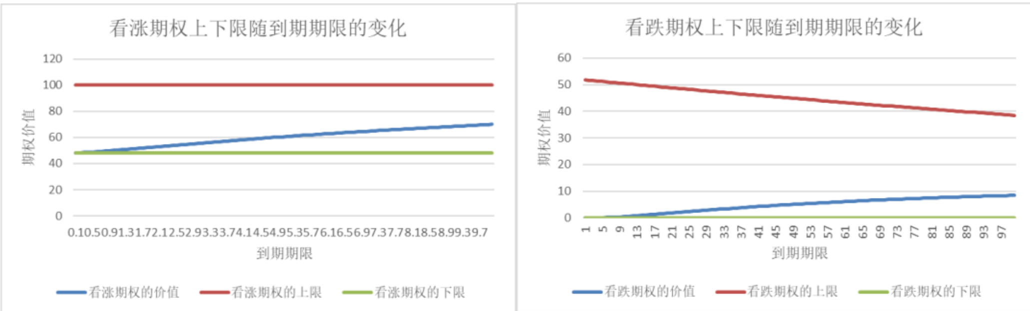


图 30：到期期限改变时上下限关系（II ）

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	150	[0, 10]	0. 38519 1	3%	0%

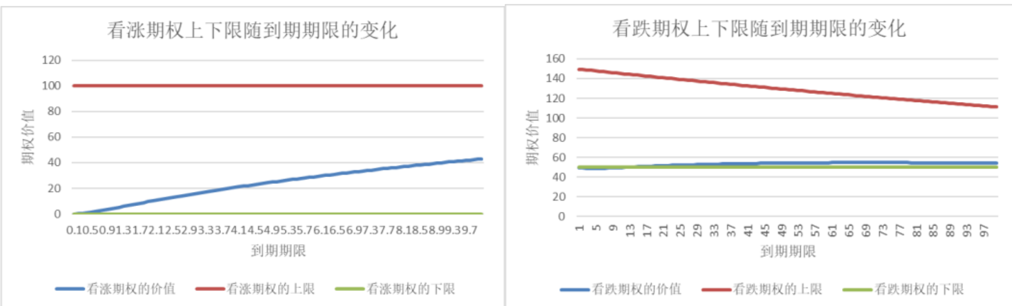


图 31：到期期限改变时上下限关系（III ）

- 看涨期权上下限： $\max\{S_t - Xe^{-r(T-t)}, 0\} \le C_E \le S_t$
- 看跌期权上下限： $\max\{Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0\} \le P_E \le Xe^{-r(T-t)}$

从看涨和看得期权上下限公式来看， 看涨期权的上限不变， 始终是标的资产 初始价格， 看跌期权上限Xe−r(T−t)随着期限增加而下降。但看涨和看跌的下限关系就相对复杂。当标的资产价格小于Xe−r(T−t)时， 看涨期权下限是 0 ，不随 T 的改变而改变， 而看跌期权下限随着 T 增大而减小， 直到Xe−r(T−t) ＜ St 后，下限成 为 0。当标的资产价格和执行价格相等时，看涨看跌的下限均为 0。当标的资产 价格大于Xe−r(T−t)时， 看涨期权下限是St − Xe−r(T−t)，随着 T 增大而增大， 看跌期权下限是 0。图像验证了理论假设。 实验结果表明， 无论期限如何变化， 期权 价值始终满足上下限关系。

3.2.4 波动率改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	1年	[0, 10]	3%	0%

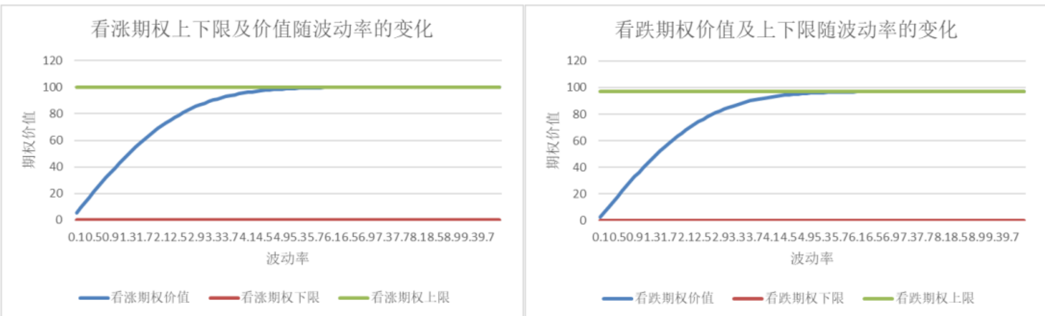


图 32：波动率改变时上下限关系

无论是看涨期权还是看得期权， 在其他因素给定的情况下， 上下限不变。在 St = 100, K = 100时， 其上下限均为常数， 不随波动率改变而改变。看涨期权下限是max{St − Xe−r(T−t), 0}，看跌期权下限是max{Xe−r(T−t) − St, 0}。由实验结果可知， 随着波动率的增加， 期权价值增加， 向期权上限靠拢， 最后收敛于期权上 限。 实验结果表明，无论波动率如何变化，期权上下限条件始终满足。

3.2.5 无风险利率改变时上下限关系

参数列表

标的资产价格	执行价格	到期期限	波动率	无风险利率	红利率
100	100	1年	0.385191	[0%, 100%]	0%

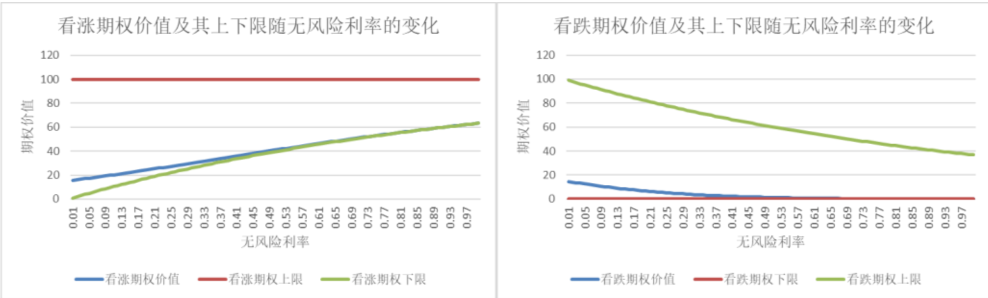


图 33：无风险利率改变时上下限关系

在其他因素不变的情况下， 随着无风险利率上升， 看涨期权下限增大，看跌 期权上下限均减小。随着无风险利率上升， 看涨期权价值增大， 看跌期权价值减 小。实验结果表明， 无论无风险利率如何变化， 期权价值始终满足上下限关系。 并且， 我们发现， 在无风险利率较低时， 期权价值更贴近于期权上限(或向上偏 离下限)，但随着无风险利率增加，期权价值收敛于期权下限，这一结论同时适 用于看涨和看跌期权。

3.3 期权上下限验证实验结论

根据实验，在改变资产价格、执行价格、到期期限、波动率、无风险利率时， 欧式看涨期权和看跌期权均服从理论的上下限关系。该上下限关系得到了理论 模型的完美验证。

四、期权上下限和平价关系的实证分析

——以 50ETF 期权为例

4.1 实验目的

从wind数据库下载目前在交易的各执行价的50ETF期权的结算价数据以及同日期的标的资产50ETF的收盘数据，分析日频率下期权上下限和看涨看跌期权平价关系是否满足，若不满足，探索其规律。

4.2 符号说明

变量	含义
X	执行价格
S_t	标的资产在时刻 t 的价格
T	期权到期时间
I_t	现金收益现值
q	红利率
r	无风险利率
C_E	欧式看涨期权费
P_E	欧式看跌期权费

4.3 数据来源与预处理

4.3.1数据来源

通过Wind数据库期权统计专题收集以下数据：

近一年SHIBOR三月利率、不同行权价的50ETF购12月2465A、50ETF购3月2465A、50ETF沽12月2465A、50ETF沽3月2465A自上市至今的日频率收盘价、结算价、行权价、最后交易日等数据以及其标的资产近一年每日收盘价。

4.3.2数据预处理

（1）无风险利率复利化

选定Wind数据库中期权定价计算器中无风险利率为SHIBOR三月利率，故需使用如下公式：

$$(1+\mathrm{R})^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\mathrm{rT}}$$

求得无风险复利利率用于后续计算期权上下限与平价关系左右两侧数据。

（2）距离到期日时间计算

鉴于期权定价采用Actual/365准则，50ETF最后到期日为到期月份第四个星期三，因而确定到期日后，对价格对应时间进行时间计算，因为利率并不区分工作日与到期日，因而无需去除节假日，获得距离到期日天数，用于后续计算。

4.4 期权上下限

期权的价值与期权的内在价值和时间价值密切相关，由此产生了期权的上下限的概念。期权内在价值、期权时间价值与期权费之间的关系如表所示，鉴于50ETF期权为欧式期权，**以下分析仅针对欧式期权。**

表4. 1内在价值、时间价值、期权费内涵及关系

价值	阐释
内在价值	马上执行期权可获得的收益
时间价值	交易商愿意为标的资产价格波动的不确定性所支付的代价
期权费	获得买/卖权的成本
三者关系	时间价值=期权费-内在价值

为更好表示三者关系，请见下图：

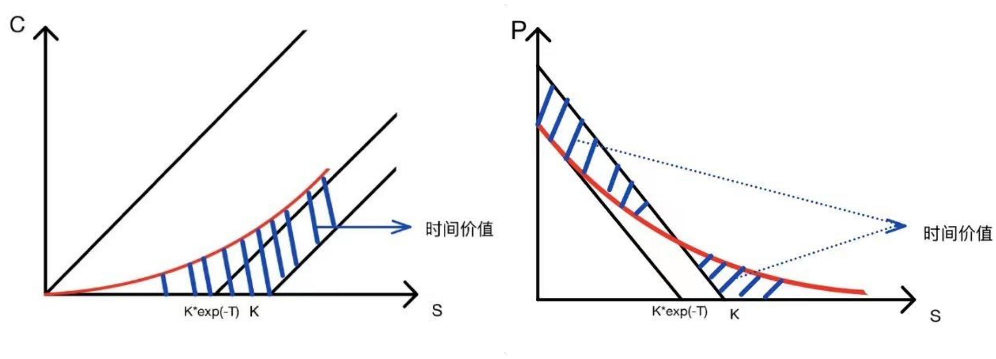


图4. 1 时间价值图形表示

4.4.1 欧式看涨期权

(1) 欧式看涨期权上限

对于看涨期权，其价值不可高过标的资产价值，否则将会由于期权产品属性，产生套利机会，套利者可以通过购买股票并卖出期权以轻易获得无风险盈利，因而其价值存在上限。

(2) 欧式看涨期权下限

对于下限，通过现金流复制技术可以轻易证明，看涨期权费存在下限。

但此处将采用不同于课上所讲的**反证法**进行现金流复制技术证明看涨期权费存在下限。

不妨假设欧式看涨期权c不存在下限，则一定有：

$$C_E < S_t - Xe^{-(T-t)} \quad \Longrightarrow \quad S_t - Xe^{-(T-t)} - C_E > 0$$

因而构建如下现金流组合，将不等式右侧正向为卖出，负向为买入作为现金流方向：

表4. 2反证法证明看涨期权存在下限

操作	资产	t时刻	T时期$S_T<X$	T时期$S_T \geq X$
空	股票S_t	S_t	$-S_T$	$-S_T$
多	面值为X债券	$-Xe^{-T-t}$	X	X
多	欧式看涨期权	$-C_E$	0	S_T-X
总计		$S_t - Xe^{-(T-t)} - C_E > 0$	$X-S_T>0$	0

因而，若如是复制现金流量会导致出现在期初和期末无负现金流情况，存在套利机会，市场并不会允许该套利空间存在，因而一定有：

$$C_E \geq S_t - Xe^{-(T-t)}$$

由此可知，看涨期权的价值将会存在下限。

同理，其在标的资产无收益、标的资产存在现金收益、标的资产有红利率的条件下，对应的期权价格的上下限分别为：

$\mathrm{Max}(Xe^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq C_E \leq S_t$ 标的资产无现金收益

$\mathrm{Max}(S_t - Xe^{-r(T-t)} - I_t, 0) \leq C_E \leq S_t - I_t$ 标的资产有现金收益

$\mathrm{Max}(S_t e^{-q(T-t)} - Xe^{-r(T-t)}, 0) \leq C_E \leq S_t e^{-q(T-t)}$ 标的资产有持续收益

4.4.2 欧式看跌期权

(1) 欧式看跌期权上限

对于欧式看跌期权，易知在T时刻，期权的价值不会超过X，因此期权的当前价格不会超过X的贴现值。故有：

$$P_E \leqslant Xe^{-(T-t)}$$

(2) 欧式看跌期权下限

此处同样采用非课上所讲现金流复制技术进行反证法证明存在下限。

不妨假设有下列关系：

$$P_E < Xe^{-(T-t)} - S_t \quad \Longrightarrow \quad Xe^{-(T-t)} - S_t - C_E > 0$$

表4. 3反证法证明看跌期权存在下限

操作	**资产**	**t时刻**	**T时期S_T<X**	**T时期S_T≥X**
多	股票S_0	$-S_t$	S_T	S_T
空	面值为X债券	$Xe^{-(T-t)}$	-X	-X
多	欧式看跌期权	$-P_E$	$X-S_T$	0
总计		$Xe^{-(T-t)} - S_t - P_E > 0$	0	S_T -X>0

因而，若如是复制现金流量会导致出现在期初和期末无负现金流情况，存在套利机会，市场并不会允许该套利空间存在，因而一定有：

$$P_E \geqslant Xe^{-(T-t)} - S_t$$

由此可知，看跌期权的价值将会存在下限。

同理，其在标的资产无收益、标的资产存在现金收益、标的资产有红利率的条件下，对应的期权价格的上下限分别为：

$$\mathrm{Max}\left(Xe^{-r(T-t)}-S_t,0\right)\le P_E\le Xe^{-r(T-t)} \quad \text{标的资产无现金收益}$$
$$\mathrm{Max}\left(Xe^{-r(T-t)}+I_t-S_t,0\right)\le P_E\le X^{-r(T-t)} \quad \text{标的资产有现金收益}$$
$$\mathrm{Max}\left(Xe^{-r(T-t)}-S_te^{-q(T-t)},0\right)\le P_E\le Xe^{-r(T-t)} \quad \text{标的资产有红利收益}$$

4.4.3 期权上下限关系理论假设

我们需要注意，期权的上下限是一种理论上的分析，是建立在对金融市场的一定假设的前提下的。期权上下限与平价关系的基本假设有：

- 市场的所有交易均没有交易费用。
- 市场中不存在套利机会，所有交易者均不可能获得套利利润。
- 对市场中的所有交易利润以相同税率进行征税。
- 所有市场参与者可以按无风险利率进行资金的借入和贷出。

4.4.4 期权上下限实证分析

(1) 50ETF看涨期权上下限实证分析

根据上述公式在EXCEL中计算期权上下限数据，并绘制如下图形。

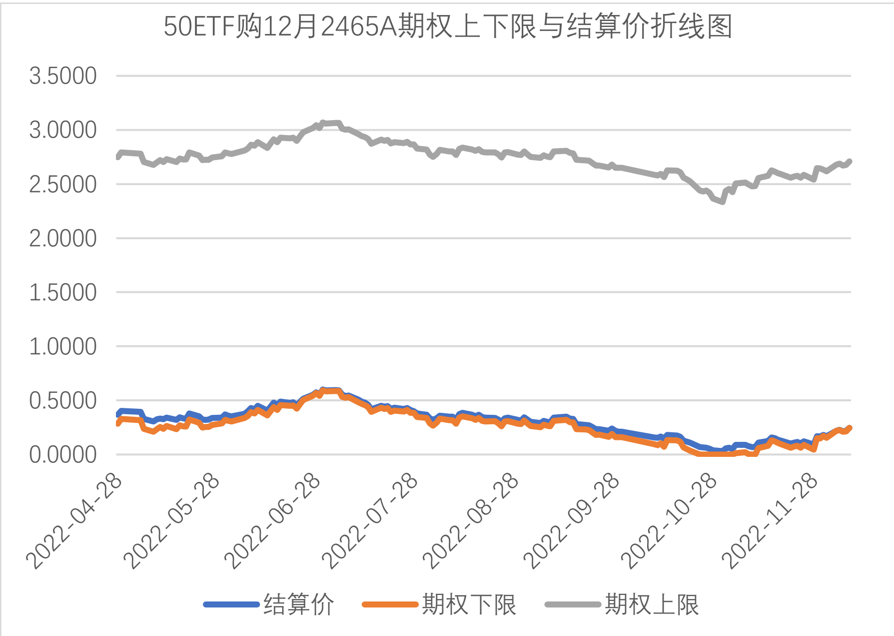


图4. 2 50ETF购12月2465A期权上下限与结算价折线图

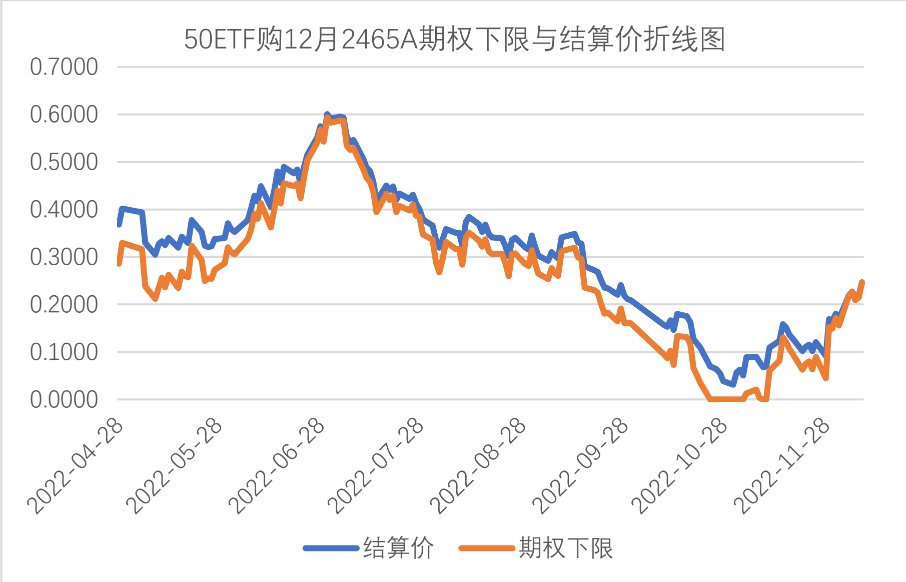


图4.3 50ETF购12月2465A期权下限与结算价折线图

由图4.2可见，结算价远远低于期权上限，但与期权下限相距较近，为更好地观察结算价与期权下限的关系，由图4.3进行期权下限与结算价的折线图绘制，同时通过EXCEL的IF函数进行统计结算价小于期权下限的个数，发现该期权结算价均大于期权价值下限，因而50ETF购12月2465A期权满足期权上下限关系。

为获得验证结论的非偶然性，再对不同行权价与不同到期日的50ETF购3月2465A期权进行上下限关系验证：

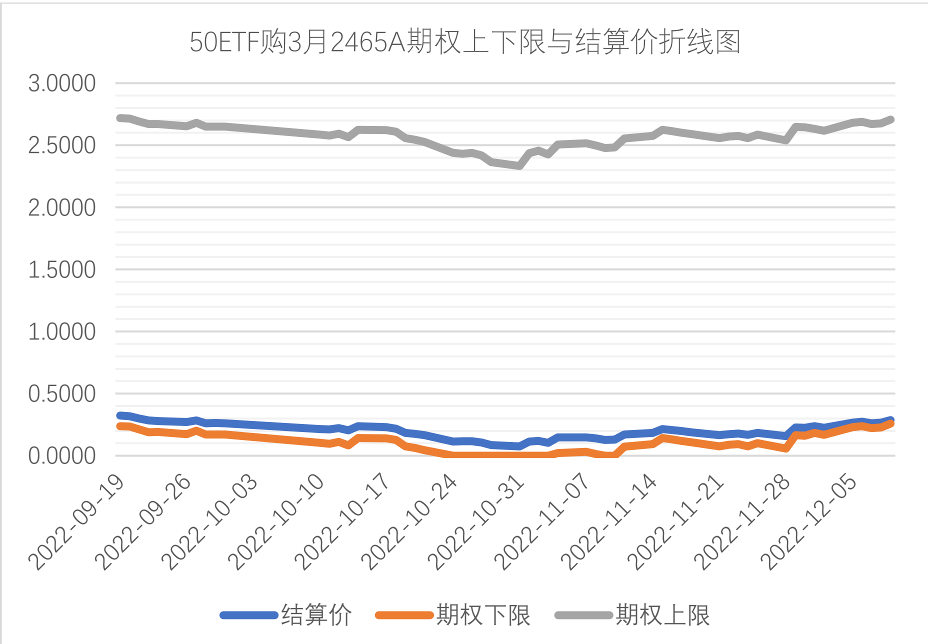


图4.4 50ETF购3月2465A期权上下限与结算价折线图

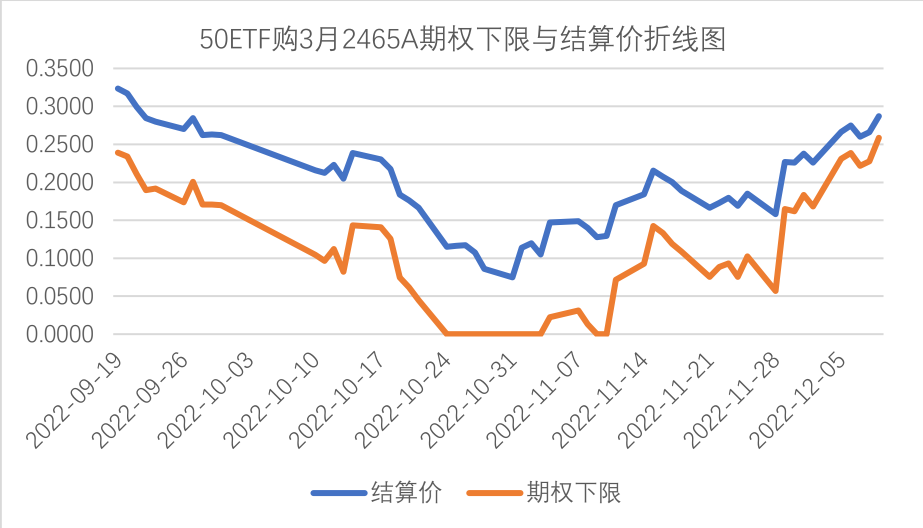


图4.5 50ETF购3月2465A期权下限与结算价折线图

可见50ETF购3月2465A仍满足期权上下限关系。
因而得出50ETF看涨期权满足期权上下限关系。

(2) 50ETF看跌期权上下限实证分析

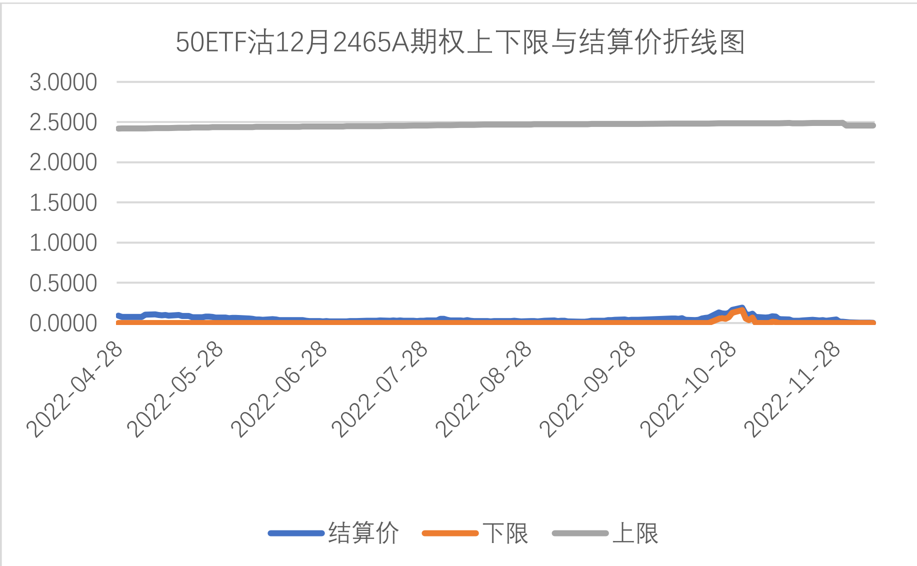


图4.6 50ETF沽12月2465A期权上下限与结算价折线图

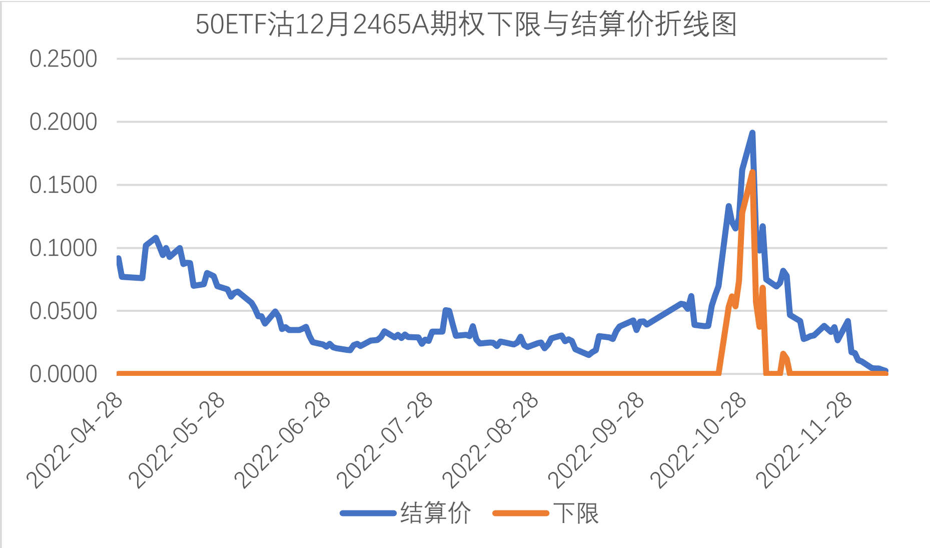


图4.7 50ETF沽12月2465A期权下限与结算价折线图

由图4.6可见，看跌期权结算价远远低于期权上限，但与期权下限相距较近，为更好地观察结算价与期权下限的关系，由图4.7进行期权下限与结算价的折线图绘制，同时通过EXCEL的IF函数进行统计结算价小于期权下限的个数，发现该期权结算价均大于期权价值下限，因而50ETF沽12月2465A期权满足期权上下限关系。

为获得验证结论的非偶然性，再对不同行权价与不同到期日的50ETF沽3月2465A期权进行上下限关系验证：

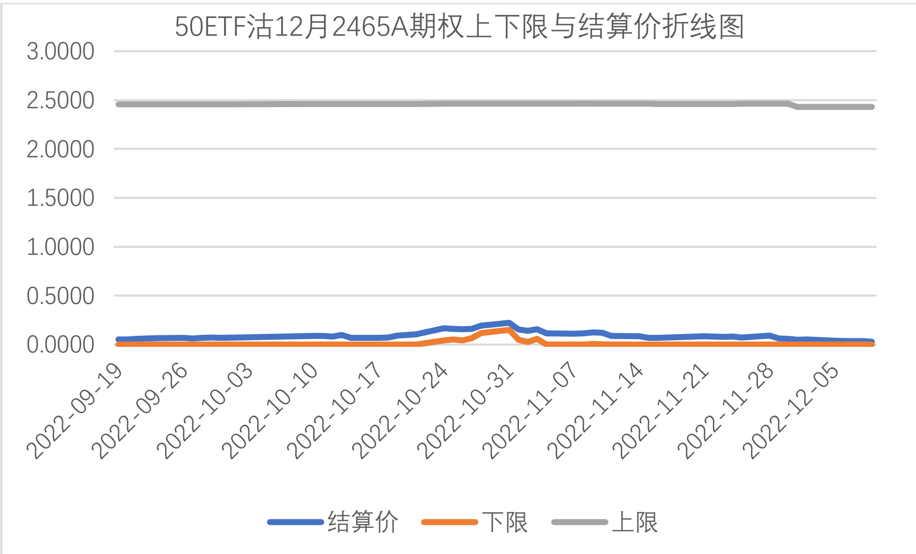


图4.8 50ETF沽12月2465A期权上下限与结算价折线图

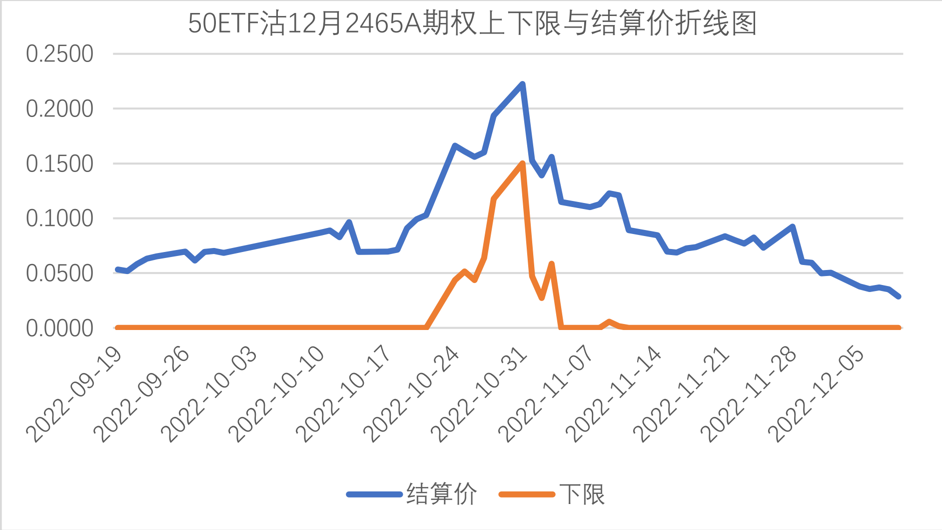


图4.9 50ETF沽12月2465A期权上下限与结算价折线图

由图4.8、图4.9可见50ETF沽3月2465A仍满足看跌期权上下限关系。
因而得出50ETF看跌期权满足期权上下限关系。

4.4.5 期权上下限关系总结

根据实证分析绘制图像可知，22年12月和23年3月到期的50ETF看涨和看跌期权均满足期权上下限关系。

4.5 期权平价关系

4.5.1平价关系理论验证

期权平价关系是对具有相同执行价格和到期日的期权的看涨期权与看跌期权价格之间相互关系的描述，表明两者价值可以相互推导。

平价关系仅对欧式期权成立，此处仍采用不同于课上所讲的现金流复制技术进行**反证法**证明平价关系。

不妨假设存在下列关系：

$$C_E + Xe^{-(T-t)} > P_E + S_t$$

采用如下资产操作进行现金流复制：

表4.4反证法证明平价关系

操作	资产	t时刻	T时期$S_T<X$	T时期$S_T \geq X$
多	股票S_0	$-S_t$	S_T	S_T
空	面值为X债券	$Xe^{-(T-t)}$	$-X$	$-X$
空	欧式看涨期权	C_E	0	$X-S_T$
多	欧式看跌期权	$-P_E$	$X-S_T$	0
总计		$C_E+Xe^{-(T-t)}-P_E-S_t>0$	0	0

因而，若如是复制现金流量会导致出现在期初和期末无负现金流情况，存在套利机会，市场并不会允许该套利空间存在，同理若平价公式两边大小关系相反,也会存在套利空间，因而一定有：

$$C_E+Xe^{-(T-t)}=P_E+S_t$$

由此可知，平价关系一定存在。

同理可推知标的资产有收益情况，因而可知对于欧式买权和卖权，对于期权的标的资产为无收益资产、有收益资产以及有红利 率的资产的情况下，期权平价关系分别有：

$$C_E+Xe^{-r(T-t)}=P_E+S_t \quad \text{标的资产无现金收益}$$
$$C_E+I_t+Xe^{-r(T-t)}=P_E+S_t \quad \text{标的资产有现金收益}$$
$$C_E+Xe^{-r(T-t)}=P_E+S_te^{-q(T-t)} \quad \text{标的资产有红利收益}$$

4.5.2 期权平价关系理论假设

我们需要注意，期权的平价关系是一种理论上的分析，是建立在对金融市场的一定假设的前提下的。期权上下限与平价关系的基本假设有：

- 市场的所有交易均没有交易费用。
- 市场中不存在套利机会，所有交易者均不可能获得套利利润。
- 对市场中的所有交易利润以相同税率进行征税。
- 所有市场参与者可以按无风险利率进行资金的借入和贷出。

4.5.3 平价关系实证分析

根据上述公式在EXCEL中计算平价公式左右两侧数据，并绘制平价关系折线图。为减少结果偶然性，分别对23年3月份到期和22年12月份到期的看涨和看跌期权进行平价关系折线图绘制：

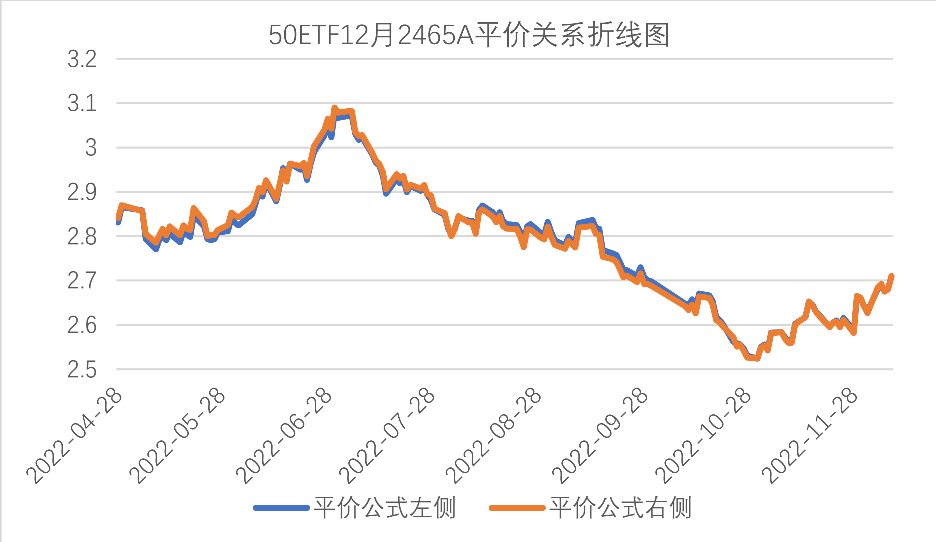


图5.1 50ETF12月2465A平价关系折线图

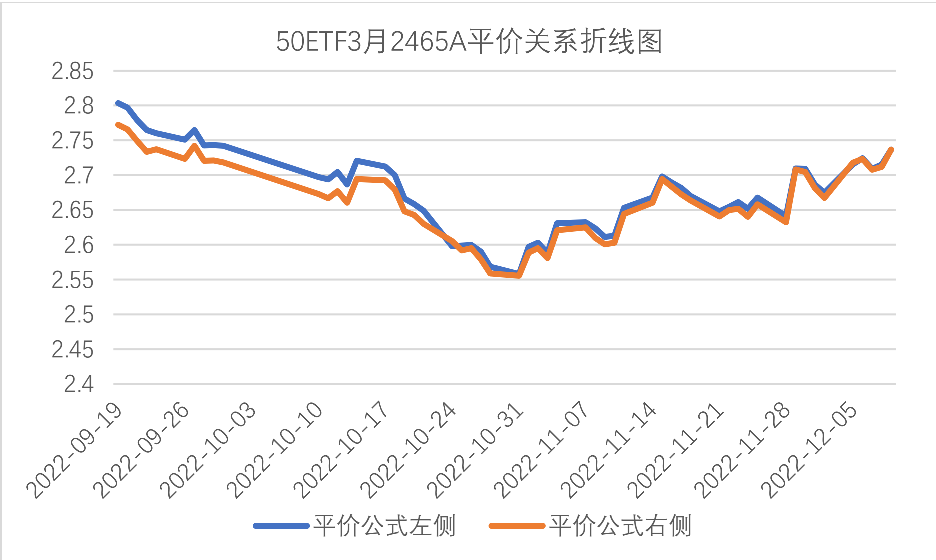


图5.2 50ETF3月2465A平价关系折线图

(1)平价关系分析

作为欧式期权的50ETF期权在理论上满足平价关系，但由图5.1与图5.2可见平价关系并未被很好地满足，基于平价关系的理论假设分析其原因由于市场中期权交易中一些做市商以手续费为收入，因而会造成买价与卖价的价差存在，因而

导致平价公式并不满足，但同时市场又不存在套利空间，因为理论上的套利空间的利润被做市商所收取的手续费替代。

其次，市场中不同时段对于交易利润的所收取税率不同，税率的变化会直接影响看涨期权和看跌期权在市场中的活跃度，因而导致出现一些平价关系的紊乱。

此外，借入贷出无风险资金的利率在实际中并不会相同，往往由于贷出的收益利率相对较低，而借入无风险资金的利率成本相对较高，存在一定价差，导致实际上的平价关系两边的折现因子的无风险利率需要带入不同数值才可满足，因而会出现一定的偏离。

(2)平价关系相关规律

根据图5.1和5.2我们观察规律可见随着临近到期日，平价关系左右两侧的差距开始收敛，这是因为随着到期日的临近，期权的活跃度会上升，更多的市场参与者参与期权交易中，导致市场的套利机会更少、套利空间更窄，更偏向于无套利市场，因而相应成本与收益会逐步收敛至相等，导致平价关系近乎成立。

4.5.4期权平价关系总结

实证分析发现，22年12月和23年3月到期的50ETF看涨和看跌期权并未满足平价关系，通过平价关系的理论假设给出理论解释，并发现随着到期日临近，平价关系左右两侧的价差会逐渐收敛到更小值。