应用随机过程

张　波　　　商　豪

中国人民大学　统计学院

第3章　Poisson过程

- 3.1 Poisson过程
- 3.2 与Poisson过程相联系的若干分布
- 3.3 Poisson过程的推广

§3.1 Poisson过程的定义

定义 3.1.1 随机过程$\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程，如果$N(t)$表示从时刻0到t某一特定事件A发生的次数，它具备以下两个特点:

(1) $N(t) \geq 0$且取值为整数;

(2) $s < t$时，$N(s) \leq N(t)$ 且 $N(t) - N(s)$表示$(s, t]$时间内事件A发生的次数。

定义 3.1.2 计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为参数为$\lambda(\lambda > 0)$的Poisson过程，如果

(1) $N(0) = 0$;

(2) 过程有独立增量;

(3) 对任意的$s, t \geq 0$,

$$P(N(t+s)-N(s)=n)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\cdots$$

注：(1)Poisson过程是独立平稳增量的计数过程；(2)由于$E[N(t)]=\lambda t$，于是可认为λ是单位时间内发生的事件的平均次数，故一般称λ是Poisson过程的强度或速率.

例 3.1.3 (Poisson过程在排队论中的应用) 在随机服务系统中排队现象的研究中，经常用到Poisson 过程模型，例如,到达电话总机的呼叫数目，到达某服务设施的顾客数，都可以用Poisson过程来描述，以某火车站售票处为例，设从早上8:00开始，此售票处连续售票，乘客依10人/小时的平均速率到达，则从9:00到10:00这1小时内最多有5名乘客来此购票的概率是多少？从10:00-11:00没有人来买票的概率是多少？

我们用一个Poisson过程来描述. 设8:00为0时刻,则9:00为1时刻,参数$\lambda = 10$. 由Poisson过程的平稳性知

$$P(N(2) - N(1) \leq 5) = \sum_{n=0}^{5} e^{-10\cdot 1}\frac{(10\cdot 1)^n}{n!},$$

$$P(N(3) - N(2) = 0) = e^{-10}\cdot\frac{(10)^0}{0!} = e^{-10}.$$

例 3.1.4 (事故发生次数与保险公司接到的索赔数) 若以$N(t)$表示某场所在 $(0,t]$时间内发生不幸事故的数目,则 Poisson过程就是$\{N(t), t\geq 0\}$的一种很好近似. 例如,保险公司接到赔偿请求的次数(设一次事故就导致一次索赔)都是可以应用Poisson过程的模型。我们考虑一种最简单情况,设保险公司每次的赔付都是1,每月平均接到索赔要求4次,则一年中它要付出的金额平均为多少?

设一年开始为0时刻,1月末为时刻1,2月末为时刻2,$\cdots$,

则年末为时刻12

$$P(N(12)-N(0)=n)=\frac{(4\times 12)^n}{n!}e^{-4\times 12}.$$

均值

$$E[N(12)-N(0)]=4\times 12=48.$$

为什么实际中有这么多的现象可以用Poisson过程来反映呢? 其根据是小概率事件原理. 我们在概率论的学习中已经知道, Bernoulli试验中, 每次试验成功的概率很小而试验的次数很多时, 二项分布会逼近Poisson分布.这一想法很自然地推广到随机过程情况.比如上面提到的事故发生的例子, 在很短的时间内发生事故的概率是很小的, 但假如考虑很多个这样很短的时间的连接, 事故的发生将会有一个大致稳定的速率, 这很类似于Bernoulli试验以及二项分布逼近Poisson分布时的假定.

Poisson过程的另一等价定义:

定义 3.1.5 设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个计数过程，若满足

(1)$'$ $N(0) = 0$;

(2)$'$ 过程有平稳独立增量;

(3)$'$ 存在$\lambda > 0$，当$h \downarrow 0$时

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h);$$

(4)$'$ 当$h \downarrow 0$时，

$$P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h).$$

则称$\{N(t), t \geq 0\}$为Poisson过程.

事实上，把$[0, t]$划分为n个相等的时间区间，则由条件$(4)'$可知，当$n \to \infty$时，在每个小区间内事件发生两次或两次以上的概率趋于0，因此，事件发生一次的概率 $p \approx$

GoBack
FullScreen
Close
Quit

$\lambda\frac{t}{n}$(显然p会很小)，事件不发生的概率为 $1-p\approx 1-\lambda\frac{t}{n}$，这恰好是一次Bernoulli 试验.其中事件发生一次即为试验成功，不发生即为失败，再由条件$(2)'$给出的平稳独立增量性，$N(t)$就相当于n次独立Bernoulli 试验中试验成功的总次数，由Poisson 分布的二项分布逼近可知$N(t)$将服从参数为λt的Poisson分布.

Poisson过程两定义等价的严格的数学证明:

定理 3.1.6 满足上述条件$(1)'-(4)'$的计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$是Poisson过程，反过来Poisson 过程一定满足这4个条件.

证明： 设计数过程$\{N(t),t\geq 0\}$满足条件$(1)'\sim(4)'$，现证明它是Poisson过程. 可以看到,其实只需验证$N(t)$服

GoBack FullScreen Close Quit

从参数为λt的Poisson分布即可. 记

$$P_n(t) = P(N(t) = n), \quad n = 0, 1, 2 \cdots$$

$$\begin{aligned} P(h) &= P(N(h) \geq 1) \\ &= P_1(h) + P_2(h) + \cdots \\ &= 1 - P_0(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P(N(t+h) = 0) \\ &= P(N(t+h) - N(t) = 0, N(t) = 0) \\ &= P(N(t) = 0) P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ &= P_0(t) P_0(h) \\ &= P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) \text{（条件}(3)', (4)'\text{）}. \end{aligned}$$

因此

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h},$$

令$h\to 0$，得

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t).$$

解此微分方程，得

$$P_0(t)=Ke^{-\lambda t},$$

其中K为常数．由$P_0(0)=P(N(0)=0)=1$得$K=1$，故

$$P_0(t)=e^{-\lambda t}.$$

同理，当$n \geq 1$时，有

$$\begin{aligned}P_n(t+h) &= P(N(t+h)=n)\\ &= P(N(t)=n, N(t+h)-N(t)=0)\\ &\quad +P(N(t)=n-1, N(t+h)-N(t)=1)\\ &\quad +P(N(t+h)=n, N(t+h)-N(t)\geq 2)\\ &= P_n(t)P_0(h)+P_{n-1}(t)\cdot P_1(h)+o(h)\\ &= (1-\lambda h)P_n(t)+\lambda h P_{n-1}(t)+o(h).\end{aligned}$$

于是

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+o(h),$$

令$h \to 0$得

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

利用归纳法解得

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = P(N(t) = n).$$

反过来，证明Poisson过程满足条件$(1)' \sim (4)'$，只需验证条件$(3)', (4)'$成立.

由定义中第三个条件可得

$$
\begin{aligned}
P(N(t+h)-N(t)=1) &= P(N(h)-N(0)=1) \\
&= e^{-\lambda h}\frac{\lambda h}{1!} = \lambda h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda h)^n}{n!} \\
&= \lambda h[1-\lambda h + o(h)] \\
&= \lambda h + o(h) \\
P(N(t+h)-N(t)\geq 2) &= P(N(h)-N(0)\geq 2) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} e^{-\lambda h}\frac{(-\lambda h)^n}{n!} \\
&= o(h).
\end{aligned}
$$

例 3.1.7 事件A的发生形成强度为λ的Poisson过程$\{N(t), t\geq 0\}$. 如果每次事件发生时以概率p能够被记录下来，并以$M(t)$表示到t时刻被记录下来的事件总数,则

$\{M(t), t \geq 0\}$是一个强度为λp的Poisson过程.

事实上，由于每次事件发生时，对它的记录和不记录都与其他的事件能否被记录独立，而且事件发生服从Poisson分布. 所以 $M(t)$也是具有平稳独立增量的，故只需验证$M(t)$服从均值为λpt的Poisson分布. 即对$t > 0$, 有

$$P(M(t) = m) = \frac{(\lambda pt)^m}{m!} e^{-\lambda pt}.$$

由于

$$
\begin{aligned}
& P(M(t)=m) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} P(M(t)=m|N(t)=m+n)\cdot P(N(t)=m+n) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n}^{m} p^{m}(1-p)^{n}\cdot\frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}e^{-\lambda t} \\
=& e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda pt)^{m}(\lambda(1-p)t)^{n}}{m!n!} \\
=& e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^{m}}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p)t)^{n}}{n!} \\
=& e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^{m}}{m!}e^{\lambda(1-p)t}=e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^{m}}{m!}.
\end{aligned}
$$

例 3.1.8 若每条蚕的产卵数服从Poisson分布，强度

GoBack

FullScreen

Close

Quit

为λ，而每个卵变为成虫的概率为p，且个卵是否变为成虫彼此间没有关系，求每条蚕养活k只小蚕的概率.

解 由上例我们立即知道小蚕数服从强度为λp的Poisson分布，故所求概率为

$$\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt}$$

例 3.1.9 观察资料表明，天空中星体数服从Poisson分布，其参数为λV，这里V是被观察区域的体积.若每个星球上有生命存在的概率为p，则在体积为V的宇宙空间中有生命存在的星球数服从参数为λpV的Poisson分布.

§3.2 与Poisson过程相联系的若干分布

首先给出Poisson过程的有关记号，如图3-1所示，Poisson

过程$\{N(t), t \geq 0\}$的一条样本路径一般是跳跃度为1的阶梯函数.

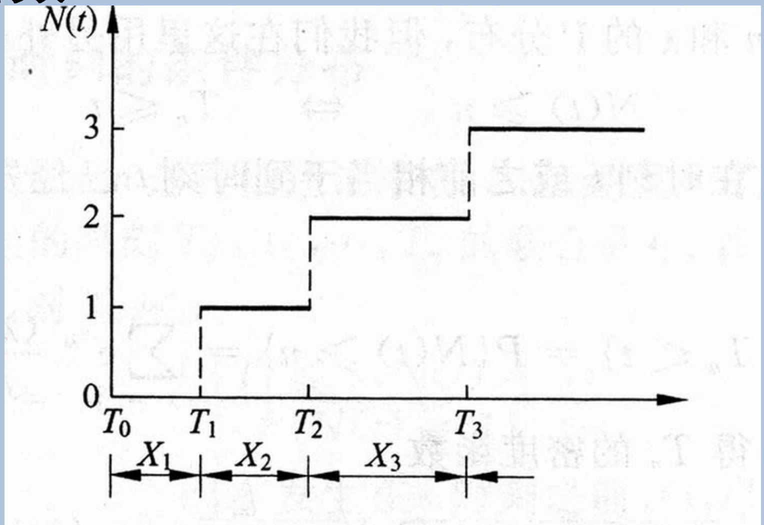

图 3.1 Poisson 过程的样本路径

$T_n, n = 1,2,3\cdots$,表示第n次事件发生的时刻，规定$T_0 = 0$. $X_n, n = 1,2,\cdots$,表示第n次与第$n-1$次事件发生的时间间隔.

§3.2.1 X_n和T_n的分布

定理 3.2.1 $X_n, n = 1, 2, \cdots$服从参数为λ的指数分布，且相互独立.

证明：首先考虑X_1的分布，注意到事件$\{X_1 > t\}$等价于事件$\{N(t) = 0\}$，即$(0, t]$内没有事件发生．因此

$$P(X_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

从而

$$P(X_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

再来看X_2

$$\begin{aligned} P(X_2 > t | X_1 = s) &= P(N(s+t) - N(s) = 0 | X_1 = s) \\ &= P(N(s+t) - N(s) = 0)(\text{独立增量性}) \\ &= e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

所以X_2与X_1独立，且都服从参数为λ的指数分布．重复同样的推导，可得定理结论．

注 1 定理3.2.1的结果应该是预料之中的，由于Poisson过程有平稳独立增量，过程在任何时刻都“重新开始”换言之这恰好就是“无记忆”的体现，与指数分布的“无记忆性”是对应的．

定理 3.2.2 $T_n, n = 1, 2, 3 \cdots$服从参数为n和λ的Γ分布．

证明：由于$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$，而由上述定理知道，X_i是相互独立的且有同指数分布，同时指数分布是Γ分布的一种特殊情形（$n = 1$）由Γ分布可加性，易得T_n服从参数为n和λ的Γ分布，但我们在这里用另外的方法导出．注意

到

$$N(t) \geq n \quad \Longleftrightarrow \quad T_n \leq t$$

即第n次事件发生在时刻t或之前相当于到时刻t已经发生的事件数目至少是n. 因此

$$P(T_n \leq t) = P(N(t) \geq n) = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

对第上式两端求导可得T_n的密度函数

$$\begin{aligned} f(t) &= -\sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Poisson过程又一定义方法:

定义 3.2.3 计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为λ的Poisson过程，如果每次事件发生的时间间隔 $X_1, X_2, \cdots$相互独立，且服从同一参数为λ的指数分布.

定义3.2.1提供了对Poisson过程进行计算机模拟的方便途径：只需产生n个同指数分布的随机数，将其作为$X_i, i = 1, 2, \cdots$,即可得到Poisson过程的一条样本路径.

例 3.2.4 设从早上8:00开始有无穷多的人排队等候服务，只有一名服务员，且每个人接受服务的时间是独立的并服从均值为20分钟的指数分布，则到中午12:00为止平均有多少人已经离去，已有9个人接受服务的概率是多少？

例 3.2.5 由所设条件可知，离去的人数$\{N(t)\}$是强

度为3的Poisson过程（这里以小时为单位）. 设8:00为零时刻，则

$$P(N(4) - N(0) = n) = e^{-12}\frac{(12)^n}{n!}$$

其均值为12，即到12:00为止，离去的人平均是12名. 而有9个人接受过服务的概率是

$$P(N(4) = 9) = e^{-12}\frac{(12)^9}{9!}.$$

例 3.2.6 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程，根据以往资料统计为每小时平均观察到3颗流星.试求：在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率.

解 设早晨8时为0时刻，以$N(t)$表示0时到t时观测到的流星数，则$\{N(t)\}$是强度为3的Poisson过程，则有

$$N(4) - N(0) \sim P(3 \times 4)$$

故在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率为

$$P\{N(4)-N(0)=0\}=e^{-12}$$

§3.2.2 事件发生时刻的条件分布

定理 3.2.7 在已知$[0,t]$内A只发生一次的前提下，A发生的时刻在$[0,t]$上是均匀分布.

事实上，对于$n=1$时的情形，对于$s\le t$

$$
\begin{aligned}
P(T_1\le s|N(t)=1)&=\frac{P(T_1\le s, N(t)=1)}{P(N(t)=1)}\\
&=\frac{P(\text{A发生在}s\text{时刻之前，}(s,t]\text{内A没有发生})}{P(N(t)=1)}\\
&=\frac{P(N(s)=1)\cdot P(N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}\\
&=\frac{\lambda s e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}\\
&=\frac{s}{t}
\end{aligned}
$$

定理 3.2.8 在已知$N(t)=n$的条件下，事件发生的n个时刻T_1,T_2,

$\cdots$,T_n的联合分布密度是

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\frac{n!}{t^n},\quad 0<t_1<t_2<\cdots<t_n.$$

证明：设$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$. **取**$h_i$**充分小使得**$t_i + h_i < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \cdots, n$**，**

$$\begin{aligned}
& P(t_i < T_i \le t_i + h_i, i = 1, 2, \cdots n | N(t) = n) \\
= & \frac{P(N(t_i+h_i)-N(t_i)=1, N(t_{i+1})-N(t_i+h_i)=0, 1\le i\le n, N(t_1)=0)}{P(N(t)=n)} \\
= & \frac{\lambda h_1 e^{-\lambda h_1} \cdots \lambda h_n e^{-\lambda h_n} e^{-\lambda(t-h_1-h_2-\cdots-h_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n / n!} \\
= & \frac{n!}{t^n} h_1 \cdots h_n.
\end{aligned}$$

故按定义，给定$N(t) = n$**时，**$(T_1, \cdots, T_n)$**的**n**维条件分布密度函数**

$$\begin{aligned}
f(t_1, \cdots, t_n) = & \lim_{\substack{h_i \to 0 \\ 1 \le i \le n}} \frac{P(t_i < T_i \le t_i + h_i, 1 \le i \le n | N(t) = n)}{h_1 h_2 \cdots h_n} \\
= & \frac{n!}{t^n}, \qquad 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n.
\end{aligned}$$

注：在已知$[0,t]$内发生了n次事件的前提下，各次事件发生的时刻 $T_1, T_2, \cdots, T_n$（不排序）可看做相互独立的随机变量，且都服从$[0,t]$上的均匀分布.

例 3.2.9 乘客按照强度为λ的Poisson过程来到某火车站，火车在时刻t启程，计算在$(0,t]$ 内到达的乘客等待时间的总和的期望值，即求 $E\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right)$，其中$T_i$是第$i$个乘客来到的时刻.

解： 在$N(t)$给定条件下，取条件期望

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)|N(t)=n\right]$$
$$=nt-E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i|N(t)=n\right]$$

例 3.2.10 记$U_1,U_2,\cdots,U_n$为n个独立的服从$(0,t]$上的均匀分布的随机变量，由定理知

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}T_i|N(t)=n\right]=E\left[\sum_{i=1}^{n}U_i\right]=\frac{nt}{2}$$

从而

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)|N(t)=n\right]=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}.$$

所以

$$E\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)\right]=E\left[E[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)=n]\right]$$
$$=\frac{t}{2}E[N(t)]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

例 3.2.11 考虑例3.2.3中每次事件发生时被记录到的概率随时间发生变化时的情况，设事件A在s时刻发生被记录到的概率是$P(s)$，若以$M(t)$表示到t时刻被记录的事件数，那么它还是Poisson过程吗？试给出$M(t)$的分布.

解: **易看出$M(t)$已不能形成一个Poisson过程，因为虽然它仍然具有独立增量性，但由于$P(s)$的影响，它已不再有平稳增量性. 但可以证明，对$\forall t, M(t)$依然是 Poisson分**

布，参数与t和$P(s)$有关. 实际上，$M(t)$的均值为λtp，其中

$$p = \frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds.$$

事实上，若对$N(t)$给定的条件下,取条件期望，则有

$$\begin{aligned}
&P(M(t)=m)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty} P(M(t)=m|N(t)=m+k)P(N(t)=m+k)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty} P(\text{已知}[0,t]\text{中发生了}m+k\text{次事件，只有}m\text{件被记录})\\
&\times P(N(t)=m+k)
\end{aligned}$$

由于每次事件是否被记录是独立的，所以上式中 $P(M(t)=m|N(t)=m+k)$可以看做在$m+k$次独立试验中有m次成功（被记录）和k次失败（不被记录）的概率.

故

$$P(M(t)=m|N(t)=m+k)=\binom{m+k}{m}p^m(1-p)^k$$

其中p是每次试验成功的概率，由定理3.2.3，并且已知道事件的发生和被记录是独立的，所以

$$\begin{aligned}p&=P(\text{事件在}[0,t]\text{内发生且被记录}|N(t)=m+k)\\&=\int_0^t P(\text{事件在}s\text{时刻发生且被记录}|N(t)=m+k)ds\\&=\int_0^t \frac{1}{t}P(s)ds=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(M(t)=m|N(t)=m+k)\times P(N(t)=m+k)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m+k}{m}p^m(1-p)^k\frac{(\lambda t)^{m+k}}{(m+k)!}e^{-\lambda t}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k)!}{m!k!}p^m(1-p)^k\frac{(\lambda t)^{m+k}}{(m+k)!}e^{-\lambda t}$$

$$=\frac{(\lambda tp)^m}{m!}e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-p)^k}{k!}(\lambda t)^k$$

$$=\frac{(\lambda tp)^m}{m!}e^{-\lambda pt}$$

故 $P(M(t)=m)=\frac{(\lambda tp)^m}{m!}e^{-\lambda pt}$，**其中**$p=\frac{1}{t}\int_0^t P(s)ds$.

§3.3 泊松过程的推广

§3.3.1 非齐次Poisson过程

当Poisson过程的强度λ不再是常数，而与时间t有关时，Poisson过程被推广为非齐次Poisson过程.一般来说,非齐次Poisson过程是不具备平稳增量的(例如例3.2.4).在实际中，非齐次Poisson过程也是比较常用的.例如在考虑设备的故障率时，由于设备使用年限的变化，出故障的可能性会随之变化；放射性物质的衰变速度，会因各种外部条件的变化而随之不同；昆虫产卵的平均数量随年龄和季节而变化等.在这样的情况下，再用齐次Poisson过程来描述就不合适了，于是改用非齐次的Poisson过程来处理.

定义 3.3.1 计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称做强度函数为$\lambda(t) > 0(t \geq 0)$的非齐次泊松过程，如果

(1) $N(0) = 0$;

(2) 过程有独立增量;

(3) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$;

(4) $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

类似于Poisson过程，非齐次Poisson过程有如下的等价定义.

定义 3.3.2 计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$称为强度函数为$\lambda(t) > 0(t \geq 0)$的非齐次 Poisson过程，若

(1) $N(0) = 0$;

(2) 过程有独立增量;

(3) 对任意实数$t \geq 0, s \geq 0, N(t+s) - N(t)$是参数为

$m(t+s)-m(t)=\int_t^{t+s}\lambda(u)du$ 的泊松分布.

注：$m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds$.

泊松过程与非齐次泊松过程之间转换关系:

定理 3.3.3 设$\{N(t),t\geq 0\}$是一个强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程. 对任意$t\geq 0$, 令 $N^*(t)=N(m^{-1}(t))$, 则$\{N^*(t)\}$是一个强度为 1 的泊松过程.

证明： 首先由$\lambda(t)>0$知， $m(t)=\int_0^t\lambda(s)ds>0$且单调增加，所以 $m^{-1}(t)$ 存在且单调增加. 因而只需证明 $\{N^*(t),t\geq 0\}$满足3.1节中的条件$(1)\sim(4)$，其中(1),(2)不难由$N(t)$的相应性质继承得到. 下面证明它满足(3),(4). 记$v(t)=m^{-1}(t)$，则

$$N^*(t)=N(m^{-1}(t))=N(v(t)).$$

设$v=m^{-1}(t), v+h'=m^{-1}(t+h)$，则由

$$\begin{aligned} h &= m(v+h') - m(v) \\ &= \int_v^{v+h'} \lambda(s)ds \\ &= \lambda(v)h' + o(h') \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0^+} \frac{P(N^*(t+h)-N^*(t)=1)}{h} \\ =&\lim_{h'\to 0^+} \frac{P(N(v+h')-N(v)=1)}{\lambda(v)h'+o(h')} \\ =&\lim_{h'\to 0^+} \frac{\lambda(v)h'+o(h')}{\lambda(v)h'+o(h')} = 1 \end{aligned}$$

即

$$P(N^*(t+h)-N^*(t)=1) = h + o(h).$$

同理可得

$$P(N^*(t+h)-N^*(t)\geq 2)=o(h).$$

所以$\{N^*(t),t\geq 0\}$是参数为1的Poisson过程.

注：用此定理可以简化非齐次Poisson过程的问题到Poisson过程中进行讨论. 另一方面也可以进行反方向的操作，即从一个参数为λ的Poisson过程构造一个强度函数为$\lambda(t)$的非齐次Poisson过程.

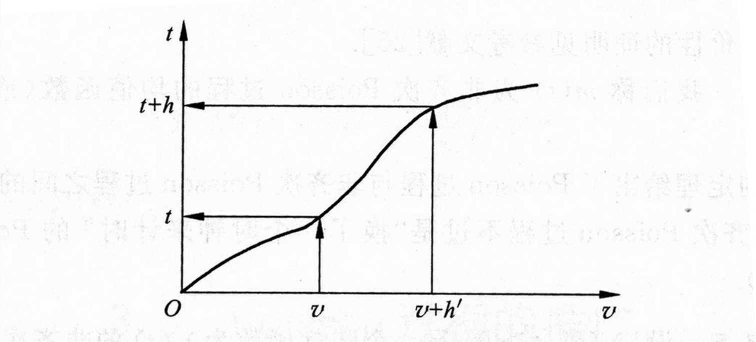

图 3.2 非齐次 Poisson 过程到 Poisson 过程的时间变量的转换

例 3.3.4 设某设备的使用期限为10年，在前5年内它

平均2.5需要维修一次，后5年平均2年需维修一次。试求它在使用期内只维修过一次的概率.

解: 用非齐次Poisson过程考虑，强度函数

$$\lambda(t)=\begin{cases}\frac{1}{2.5}, & 0\le t\le 5\\ \frac{1}{2}, & 5<t\le 10\end{cases}$$

$$m(10)=\int_0^{10}\lambda(t)dt=\int_0^5\frac{1}{2.5}dt+\int_5^{10}\frac{1}{2}dt=4.5$$

因此

$$P(N(10)-N(0)=1)=e^{-4.5}\frac{(4.5)^1}{1!}=\frac{9}{2}e^{-\frac{9}{2}}.$$

∎

§3.3.2 复合Poisson过程

定义 3.3.5 称随机过程$\{X(t),t\ge 0\}$为复合泊松过

程，如果对于

$t \geq 0$，$X(t)$可以表示为

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

其中$\{N(t), t \geq 0\}$是一个Poisson过程，Y_i，$i = 1, 2, \cdots$ 是一族独立同分布的随机变量，并且与$\{N(t), t \geq 0\}$也是独立的.

注：复合Poisson过程不一定是计数过程，但是当$Y_i \equiv c$，$i = 1, 2, \cdots, c$ **为常数时，可化为泊松过程.**

例 3.3.6 保险公司接到的索赔次数服从一个泊松过程$\{N(t)\}$，每次要求赔付的金额Y_i都相互独立，且有同分布F，每次的索赔数额与它发生的时刻无关，则$[0, t]$时间区间内保险公司需要赔付的总金额 $\{X(t)\}$就是一个复合泊

松过程，其中

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

例 3.3.7 （顾客成批到达的排队系统）设顾客到达某服务系统的时间$S_1, S_2, \cdots$形成一强度为 λ的Poisson过程，在每个时刻$S_n, n=1,2,\cdots$可以同时有多名顾客到达. Y_n表示在时刻S_n到达的顾客人数，假定$Y_n, n=1,2,\cdots$ 相互独立，并且与$\{S_n\}$也独立，则在$[0,t]$时间区间内到达服务系统的顾客总人数也可用一复合Poisson过程来描述.

定理 3.3.8 设$\{X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t\geq 0\}$是一复合泊松过程，泊松过程

$\{N(t), t\geq 0\}$的强度为λ，则

(1) $X(t)$有独立增量;

(2) 若$E(Y_i^2) < +\infty$, 则

$$E[X(t)] = \lambda t \cdot EY_1, \quad var[X(t)] = \lambda t \cdot E(Y_1^2).$$

证明：(1) 令$0 \le t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$**，则**

$$X(t_k) - X(t_{k-1}) = \sum_{i=N(t_{k-1})+1}^{N(t_k)} Y_i, \ \ k = 1, 2, \cdots, n$$

由过程过程的独立增量性及各$Y_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ **之间的**

独立性不难得出$X(t)$的独立增量性.

（2）利用矩母函数方法，首先有

$$
\begin{aligned}
\phi_t(u) &= E(e^{uX_t}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{uX_t}|N(t)=n]P(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{u(Y_1+\cdots+Y_n)}|N(t)=n]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{u(Y_1+\cdots+Y_n)}]e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{uY_1})\cdots E(e^{uY_n})e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[E(e^{uY_1})]^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= e^{\lambda t[E(e^{uY_1})-1]}.
\end{aligned}
$$

对上式求导得

$$E[X(t)] = \lambda t E Y_1 \quad \text{及} \quad var(X(t)) = \lambda t E(Y_1^2).$$

例 3.3.9 在保险中的索赔模型中，设保险公司接到的

索赔要求是强度为每个月两次的泊松过程。每次赔付服从均值为10000元的正态分布，则一年中保险公司平均的赔付额是多少.

解： **由定理 3.3.2易得**

$$E[X(12)] = 2 \times 12 \times 10000 = 240000(\text{元})$$

例 3.3.10 设顾客以每分钟6人的平均速率进入某商场，这一过程可以用Poisson过程来描述.又设进入该商场的每位顾客买东西的概率为0.9，且每位顾客是否买东西互不影响，也与进入该商场的顾客数无关，求一天(12小时)在该商场买东西的顾客数的分布与均值.

解　以$N_1(t)$表示在时间$(0,t]$内进入该商场的顾客数，则$\{N_1(t), t \geq 0\}$是速率为$\lambda = 6$(人/分钟)的Poisson过程.再以$N_2(t)$表示在时间$(0,t]$内在该商场买东西的顾客数，并

设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{如果第}i\text{位顾客在该商场买东西} \\ 0, & \text{如果第}i\text{位顾客在该商场未买东西} \end{cases}$$

则Y_i独立同分布于$B(1, 0.9)$，与$\{N_1(t), t \geq 0\}$独立，且

$$N_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

易知

$$N_2(t) \sim P(5.4t)$$

即 $\{N_2(t), t \geq 0\}$是速率为$\lambda = 5.4$(人/分钟)的Poisson过程，t =12小时=720分钟，则

$$N_2(720) \sim P(3888)$$

即一天(12小时)在该商场买东西的平均顾客数为$E[N_2(720)] =$ 3888人.

注：若以Z_i表示进入该商场的第i位顾客在该商场所花的钱数(单位:元)，且有$Z_i \sim B(200, 0.5)$，则

$$N_3(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i$$

示在时间$(0, t]$内该商场的营业额，则该商场一天的平均营业额为

$$E[N_3] = E[Z_1]E[N_1] = (200\times 0.5)\times(6\times 12\times 60) = 432000\text{元}$$

§3.3.3 条件Poisson过程

Poisson过程描述的是一个有着“风险”参数λ的个体发生某一事件的频率，如果我们考虑一个总体，其中的个体存在差异，比如发生事故的倾向性因人而异，这时我们可以把概率分布(3.1.2)式解释为给定λ时，$N(t)$的条件分

布$P_{k|\lambda}(t)$.

定义 3.3.11 设随机变量$\Lambda > 0$，在$\Lambda = \lambda$的条件下，计数过程

$\{N(t), t \geq 0\}$是参数为λ的泊松过程. 则称$\{N(t), t \geq 0\}$为条件泊松过程.

注： 设Λ的分布是G，那么随机选择一个个体在长度为t的时间区间内发生n次事件的概率为

$$P(N(t+s) - N(s) = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dG(\lambda)$$

这是全概率公式.

定理 3.3.12 设$\{N(t), t \geq 0\}$是条件泊松过程，且$E(\Lambda^2) < \infty$，则（1）$EN(t) = tE\Lambda$;

（2）$var[N(t)] = t^2 var(\Lambda) + tE\Lambda$.

证明： (1) $EN(t)=E[E(N(t)|\Lambda)]=E(t\Lambda)=tE\Lambda$;

(2) $var(N(t))=E[N^2(t)]-[EN(t)]^2$

$=E[E(N^2(t)|\Lambda)]-(tE\Lambda)^2$

$=E[(\Lambda t)^2+\Lambda t]-t^2(E\Lambda)^2$

$=t^2 var(\Lambda)+tE\Lambda.$

例 3.3.13 设意外事故的发生频率受某种未知因素影响有两种可能λ_1,λ_2，且$P(\Lambda=\lambda_1)=p$，$P(\Lambda=\lambda_2)=1-p=q$，$0<p<1$为已知. 已知到时刻$t$已发生了$n$次事故. 求下一次事故在$t+s$之前不会到来的概率. 另外，这个发生频率为$\lambda_1$的概率是多少？

解：事实上，我们不难算出

$$P((t,t+s)\text{内无事故}|N(t)=n)$$
$$=\frac{\sum_{i=1}^{2}P(\Lambda=\lambda_i)P(N(t)=n,N(t+s)-N(t)=0|\Lambda=\lambda_i)}{\sum_{i=1}^{2}P(\Lambda=\lambda_i)P(N(t)=n|\Lambda=\lambda_i)}$$
$$=\frac{p(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1(s+t)}+(1-p)(\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2(s+t)}}{p(\lambda_1 t)^n e^{-\lambda_1 t}+(1-p)(\lambda_2 t)^n e^{-\lambda_2 t}}$$
$$=\frac{p\lambda_1^n e^{-\lambda_1(s+t)}+q\lambda_2^n e^{-\lambda_2(s+t)}}{p\lambda_1^n e^{-\lambda_1 t}+q\lambda_2^n e^{-\lambda_2 t}}$$

以及

$$P(\Lambda=\lambda_1|N(t)=n)=\frac{pe^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n}{pe^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^n+(1-p)e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^n}.$$