应用随机过程

张　波　　　商　豪

中国人民大学　统计学院

GoBack

FullScreen

Close

Quit

第2章 随机过程的基本概念与类型

§2.1　基本概念

定义 2.1.1 随机过程是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的一族随机变量$\{X(t),t\in T\}$，其中t是参数，它属于某个指标集T，T称为参数集.

注：

- **当**$T=\{0,1,2,\cdots\}$ **时称之为随机序列或时间序列.**
- **随机过程**$\{X(t,\omega),t\in T,\omega\in\Omega\}$**是定义在**$T\times\Omega$**上的二元函数.**
- **参数空间**T **是向量集合时，随机过程**$\{X(t),v\in T\}$**称为随机场.**

随机过程的分类：（1）$X(t)$**表示系统在时刻**t**所处的状态.**

(2) $X(t)$的所有可能状态构成的集合为状态空间，记为S.

(3) 依照状态空间可分为连续状态和离散状态；

(4) 依照参数集，可分为离散参数过程和连续参数过程.

注：一般如果不作说明都认为状态空间是实数集$\mathbb{R}$或$\mathbb{R}$的子集.

例 2.1.2 （随机游动）一个醉汉在路上行走，以概率p前进一步，以概率$1-p$后退一步（假定其步长相同）. 以$X(t)$记他在路上的位置，则$X(t)$就是直线上的随机游动.

例 2.1.3 (Brown运动) 英国植物学家Brown注意到

飘浮在液面上的微小粒子不断进行无规则的运动，这种运动后来称为Brown运动. 它是分子大量随机碰撞的结果.若记$(X(t), Y(t))$为粒子在平面坐标上的位置，则它是平面上的Brown运动.

例 2.1.4 （排队模型）顾客来到服务站要求服务. 当服务站中的服务员都忙碌，即服务员都在为别的顾客服务时，来到的顾客就要排队等候. 顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的，所以如果用$X(t)$表示t时刻的队长，用 $Y(t)$表示t时刻到来的顾客所需的等待时间，则$\{X(t), t \in T\}, \{Y(t), t \in T\}$都是随机过程.

§2.2 有限维分布与Kolmogorov定理

定义 2.2.1 对任意有限个$t_1,\cdots,t_n\in T$，定义随机过程的n**维分布** $F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)$:

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P(X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n).$$

随机过程的所有的一维分布，二维分布，$\cdots,n$维分布等等的全体

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\}$$

称为随机过程$\{X(t),t\in T\}$的**有限分布族**.

注：知道了随机过程的有限维分布就知道了$\{X(t),t\in T\}$中任意n个随机变量的联合分布．也就掌握了这些随机变量之间的相互依赖关系.

分布族的性质: (1) **对称性**

对 $(1,2,\cdots,n)$的任一排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，有

$$\begin{aligned}
&F_{t_{j_1},\cdots,t_{j_n}}(x_{j_1},\cdots,x_{j_n})\\
=&P(X(t_{j_1})\le x_{j_1},\cdots,X(t_{j_n})\le x_{j_n})\\
=&P(X(t_1)\le x_{t_1},\cdots,X(t_n)\le x_{t_n})\\
=&F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n).
\end{aligned}$$

(2) **相容性**

对于 $m<n$，有

$$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)=F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m).$$

定理 2.2.2 设分布函数族$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n),t_1,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\}$ 满足上述的对称性和相容性，则必存在一个随机

过程$\{X(t), t\in T\}$，使

$$\{F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n), t_1,\cdots,t_n\in T, n\geq 1\}$$

恰好是$\{X(t), t\in T\}$的有限维分布族.

注：随机过程的有限维分布函数族是随机过程概率特征的完整描述,它是证明随机过程存在性的有力工具.但是在实际问题中，要知道随机过程的全部有限维分布是不可能的，因此，人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

定义 2.2.3 设$\{X(t), t\in T\}$是一随机过程.

(1) 称$X(t)$的期望 $\mu_X(t)=E[X(t)]$为过程的**均值函数**(如果存在的话).

(2)如果$\forall t\in T, E[X^2(t)]$存在，则称随机过程$\{X(t), t\in$

$T\}$ **为二阶矩过程**.

此时，称函数$\gamma(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-\mu_X(t_1))(X(t_2)-\mu_X(t_2))],\ \ t_1,t_2\in T$ **为过程的协方差函数；称**$Var[X(t)]=\gamma(t,t)$**为过程的方差函数；称**$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)],\ \ s,t\in T$ **为自相关函数**.

由Schwartz不等式知，二阶矩过程的协方差函数和自相关函数存在，且有 $\gamma_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t)$.

例 2.2.4 $X(t)=X_0+tV, a\le t\le b$, **其中**X_0**和**V**是相互独立且服从**$N(0,1)$**分布的随机变量**.

注：易知$X(t)$服从正态分布，且$X(t_1),\cdots,X(t_n)$也是n维正态分布. 所以只要知道它的一阶矩和二阶矩就

完全确定了它的分布.

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E(X_0 + tV) = EX_0 + tEV = 0$$

$$\begin{aligned}\gamma(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(X_0 + t_1V)(X_0 + t_2V)] \\ &= E[X_0^2] + t_1t_2E[V^2] = 1 + t_1t_2.\end{aligned}$$

§2.3　随机过程的基本类型

§2.3.1　平稳过程

定义 2.3.1 如果随机过程$\{X(t), t \in T\}$对任意的$t_1, \cdots, t_n \in T$和任意的h(使得$t_i + h \in T$)有,

$(X(t_1 + h), \cdots, X(t_n + h))$与 $(X(t_1), \cdots, X(t_n))$具有相同的联合分布, 记为

$$(X(t_1+h), \cdots, X(t_n+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \cdots, X(t_n)) \quad (2.3.1)$$

则称$\{X(t), t\in T\}$为严平稳的.

定义 2.3.2 如果随机过程$X(t)$的所有二阶矩都存在，并且均值函数$E[X(t)]=\mu$,协方差函数$\gamma(t,s)$只与时间差$t-s$有关，则称$\{X(t), t\in T\}$为宽平稳过程或二阶平稳过程.

注：

- 对于宽平稳过程，由于$\gamma(s,t)=\gamma(0,t-s), s,t\in\mathbb{R}$，可记为$\gamma(t-s)$;
- $\gamma(t)$为偶函数，且$\gamma(0)=var(X(t)), |\gamma(\tau)|\le\gamma(0)$;
- $\gamma(\tau)$具有非负定性,即对任意时刻t_k和实数$a_k, k=1,2,\cdots,N$，有

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_ia_j\gamma(t_i-t_j)\ge 0.$$

当参数t仅取整数值$0,\pm1,\pm2\cdots$或 $0,1,2\cdots$时，称平稳过程为平稳序列.

例 2.3.3 (平稳白噪声序列）设$\{X_n,n=0,1,\cdots\}$为一列两两互不相关的随机变量序列，满足$EX_n=0,n=0,1,2\cdots$, 且

$$EX_mX_n=\begin{cases}0\ , & \text{当}m\neq n\\ \sigma^2, & \text{当}m=n\end{cases}$$

则白噪声序列$\{X_n,n=0,1,\cdots\}$为平稳的. 这是因为协方差函数$cov(X_n,X_m)=E(X_nX_m)$只与$m-n$有关.

例 2.3.4 (滑动平均序列）设$\{\varepsilon_n,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为一列互不相关的且有相同均值$m$和方差$\sigma^2$的随机变量序列. 设$a_1,a_2,\cdots,a_k$为任意$k$个实数. 考虑如下定义序列的平稳

性:

$$X_n = a_1\varepsilon_n + a_2\varepsilon_{n-1} + \cdots + a_k\varepsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

容易看出

$$EX_n = m(a_1 + \cdots + a_k).$$

令$\xi_j = \varepsilon_j - m$,则由$\varepsilon_j$的两两互不相关性知, 协方差函数

$$\gamma(n+\tau, n) = E[(X_n - m(a_1 + \cdots + a_k))(X_{n+\tau} - m(a_1 + \cdots + a_k))]$$
$$= E[(a_1\xi_n + \cdots + a_k\xi_{n-k+1})(a_1\xi_{n+\tau} + \cdots + a_k\xi_{n+\tau-k+1})]$$
$$= \begin{cases} \sigma^2(a_k a_{k-\tau} + \cdots + a_{\tau+1}a_1), & \text{若} 0 \le \tau \le k-1, \\ 0, & \text{若} \tau \ge k, \end{cases}$$

即协方差函数仅与时间间隔τ有关. 故$\{X_n, n = 0, \pm1, \cdots\}$为平稳序列.

考虑如下两个特殊平稳过程：

设$\{X_n, n \geq 0\}$为独立同分布随机变量序列， $E[X_n^2] < \infty, E[X_n] = \mu, n = 0, 1, 2, \cdots$.

$\{Y_n = Y, n \geq 0\}$，其中Y是随机变量，$E[Y^2] < \infty$.

可以用这两个过程来阐述不同平稳过程之间的差异.对过程$\{X_n\}$而言，由大数定律知，

$$\frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \cdots + X_{n-1})$$

以概率1收敛于常数m.但对于过程$\{Y_n\}$而言

$$\frac{1}{n}(Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{n-1}) = Y$$

即经对时间的平均后，随机性没发生任何改变.于是自然产生这样的问题：在何种条件下，平稳过程对时间的平均值可以等于过程的均值？

对于平稳过程$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$，重要的是确定它的均值μ和它的协方差函数$\gamma(\tau)$. 由于$E[X_t]=\mu$，为估计μ，就必须对随机过程$\{X_n\}$作大量观察. 以$X_j(t)$记第j次观察中时刻t的值，$j=1,2,\cdots,n$. 由大数定律知，可以用$\widehat{\mu}=\frac{1}{n}(X_1(t)+\cdots+X_n(t))$来估计$\mu$.同样，为了估计协方差函数$\gamma(\tau)$，也可以用

$$\widehat{\gamma}(\tau)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k(t+\tau)-\widehat{\mu})(X_k(t)-\widehat{\mu})$$

来估计.然而对随机过程作多次观察一般来说很难做到，容易的是作一次观察，获得一条样本路径，我们希望由这一次观察来估计μ和$\gamma(\tau)$.对于一般的随机过程这是不可能的，但是对于平稳过程，只要加上一些条件，就可以从一次观察中得到μ和$\gamma(\tau)$的较好的估计，这就是遍历性定理.

定义 2.3.5 设$\{X(t), -\infty < t < \infty\}$为一平稳过程，若

$$\overline{X} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt = m \tag{2.3.2}$$

或当参数空间为$T = \mathbb{Z}$(整数集)时，

$$\overline{X} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N} X(k) = m$$

则称$\{X(t), t \in T\}$的**均值有遍历性**.

注：这里的极限是指在均方意义下的极限，即

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt - m\right|^2\right] = 0.$$

定义 2.3.6

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} (X(t)-m)(X(t+\tau)-m)dt = \gamma(\tau)$$

或当参数空间为$T=\mathbb{Z}$时,

$$\overline{\gamma}(\tau)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{k=-N}^{N}(X(k)-m)(X(k+\tau)-m)=\gamma(\tau)$$

则称$\{X(t),t\in T\}$的**协方差有遍历性**.

定义 2.3.7 若随机过程(或随机序列)的均值和协方差函数都具有遍历性, 则称此**随机过程有遍历性**.

注:如果t 只取非负实数(非负整数)时,相应的积分和求和就限制在$[0,\infty)$上. 如相应于上述定义改为:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t)dt=m$$

或

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}X(k)=m.$$

由遍历性的定义式，自然提出问题：极限是否存在？如果存在，它是随机变量的极限. 那么在什么条件下它能等于常数呢？

定理 2.3.8 （均值遍历性定理）

(1) 设$\{X_t, -\infty < t < \infty\}$是平稳过程，则$\{X_t, -\infty < t < \infty\}$的均值有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\gamma(\tau)d\tau = 0.$$

(2)设$\{X_n, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$是平稳序列，其均值函数为$\mu$,协方差函数为$\gamma(\tau)$，则$\{X_n, n = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$的均值有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}\gamma(\tau) = 0.$$

证明：由于证明的思路相同，这里只证明连续时间的均值遍历性定理. 首先，计算$\overline{X}$的均值和方差. 记

$$\bar{X}_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X(t)dt,$$

则有

$$E\bar{X} = E\lim_{T\to\infty}\bar{X}_T = \lim_{T\to\infty}E\bar{X}_T = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} EX(t)dt = m$$

进而

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{X}) = {} & E[(\bar{X} - E\bar{X})^2] \\
& = E \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (X(t) - m)dt \right]^2 \\
& = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} E \left[\int_{-T}^{T} (X(t) - m)dt \right]^2 \\
& = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} E[(X(t) - m)(X(s) - m)]dtds \\
& = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} \gamma(t - s)dtds
\end{aligned}
$$

在上述积分中，做变换

$$
\begin{cases} \tau = t - s \\ v = t + s \end{cases}
$$

则变换的Jacobi行列式值为

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}$$

积分区域变换为顶点分别在τ轴和v轴上的菱形区域

$D: -2T \leq \tau \pm v \leq 2T.$

由于$\gamma(\tau)$是偶函数，故 $Var(\bar{X})$等于

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{1}{2} \iint_D \gamma(\tau) d\tau dv$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{8T^2} \int_{-2T}^{2T} \gamma(\tau) d\tau \int_{-(2T-|\tau|)}^{2T-|\tau|} dv$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} \gamma(\tau)(2T - |\tau|) d\tau$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} \gamma(\tau)(2T-\tau)d\tau$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \gamma(\tau)(1-\frac{\tau}{2T})d\tau.$$

故关于均值的遍历性定理就化为上式极限是否趋于零的问题. 于是由均方收敛的定义知这确实是等价的. ∎

推论 2.3.9 若$\int_{-\infty}^{\infty}|\gamma(\tau)|d\tau < \infty$, 则均值遍历性定理成立.

证明：由于当$0 \le \tau \le 2T$时，$|(1-\tau/2T)\gamma(\tau)| \le |\gamma(\tau)|$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\left|\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{T})\gamma(\tau)d\tau\right| &\le \frac{1}{T}\int_0^{2T}|\gamma(\tau)|d\tau \\ &\le \frac{1}{T}\int_0^{\infty}|\gamma(\tau)|d\tau \to 0.\end{aligned}$$

推论 2.3.10 对于平稳序列而言，若$\gamma(\tau) \to 0(\tau \to \infty)$, 则均值遍历性定理成立.

证明：因为当$\tau \to \infty$时，$\gamma(\tau) \to 0$, 故由Stoltz定理知

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{\tau=0}^{N-1}\gamma(\tau) = \lim_{N\to\infty}\gamma(N-1) = 0$$

从而序列的均值有遍历性.

协方差函数遍历性定理:

定理 2.3.11 （协方差函数遍历性定理）

设$\{X_t, -\infty < t < \infty\}$是平稳过程，其均值函数为零，则协方差函数有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau_1}{2T}\right)(B(\tau_1)-\gamma^2(\tau))d\tau_1 = 0$$

其中 $B(\tau_1) = E[X(t+\tau+\tau_1)X(t+\tau_1)X(t+\tau)X(t)]$.

注：对于平稳过程$\{X(t), t\in T\}$的协方差函数$\gamma(\tau)$的遍历性定理，可以考虑随机过程$\{Y_\tau(t), -\infty < t < \infty\}$,其中

$$Y_\tau(t) = (X(t+\tau) - m)(X(t) - m),$$

则$E[Y_\tau(t)] = \gamma(\tau)$. 由定理的证明过程可见，均值具有遍历性等价于$var(\overline{X}) = 0$. 因此可以类推协方差函数 $\gamma(\tau)$具有遍历性等价于$Var(\overline{\gamma}(\tau)) = 0$.

例 2.3.12 设$X(t) = a\cos(\omega t + \Theta), \Theta \sim U(0, 2\pi), \omega \neq 0$，则$\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$的均值有遍历性.

证明：其均值函数为: $EX(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t + \theta)d\theta = 0$, 其协方差函数为:

$$E[X(t+\tau)X(t)] = E[a^2\cos(\omega(t+\tau) + \Theta)\cos(\omega t + \Theta)]$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos((t+\tau)\omega+\theta)\cos(t\omega+\theta)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} [\cos((2t+\tau)\omega+2\theta)+\cos\tau\omega]d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\tau\omega$$

所以$\{X(t), t\in\mathbb{R}\}$是平稳过程. 又因为

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\gamma(\tau)d\tau = \frac{a^2}{2T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\cos\omega\tau d\tau$$

$$= \frac{a^2}{2T}\cdot\frac{\sin 2T\omega}{\omega} - \frac{a^2}{4T^2}\int_0^{2T}\tau\cos\omega\tau d\tau.$$

由微分第二中值定理可知，存在$\xi\in(0,2T)$，使得

$$\left|\int_0^{2T}\tau\cos\omega\tau d\tau\right| = \left|2T\int_\xi^{2T}\cos\omega\tau d\tau\right| \le \frac{4T}{\omega},$$

从而，令$T\to\infty$，得

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T}\left(1-\frac{\tau}{2T}\right)\gamma(\tau)d\tau\to 0.$$

故均值遍历性成立.

§2.3.2 独立增量过程

定义 2.3.13 如果对任何$t_1,t_2,\cdots t_n\in T,t_1<t_2<\cdots<t_n$随机变量$X(t_2)-X(t_1),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$是相互独立的，则称$X(t)$为独立增量过程. 如果对任何 t_1,t_2，有$X(t_1+h)-X(t_1)\overset{d}{=}X(t_2+h)-X(t_2)$，则称$\{X(t),t\in T\}$为是平稳增量过程. 兼有独立增量和平稳增量的过程称为平稳独立增量的过程.

注：平稳独立增量过程的均值函数是时间t的线性函数. 本书后面将要介绍的Poisson过程和Brown运动都是这类过

程.这两类过程是随机过程理论中的两块最重要的基石.