第二章　固定收益证券基础

周荣喜

金融学院

第二章　固定收益证券基础

【案例1】24美元买下曼哈顿！这并不是荒唐的痴人说梦，而是一个流传已久的故事。故事是这样的：1626年，荷属美洲新尼德兰省总督Peter Minuit花了大约24美元从印第安人手中买下了曼哈顿岛。而到2000年1月1日，曼哈顿岛价值已经达到了约2.5万亿美元。以24美元买下曼哈顿，Peter Minuit无疑占了一个天大的便宜。

但是，如果转换一下思路，Peter Minuit也许并没有占到便宜。如果当时的印第安人拿着这24美元去投资，按照11%(美国1927年-1997年股市的平均投资收益率)的投资收益率计算，到2000年，这24美元将变成约2 142 917万亿美元，远远高于曼哈顿岛的价值2.5万亿美元，几乎是其现在价值的86万倍。如此看来，Peter Minuit是吃了一个大亏。这是什么神奇的力量让资产实现了如此巨大的倍增?

【案例2】2018年4月12日，北京万科宣布了其第一个自持租赁项目万科翡翠书院（地产商自持租赁房，距西二旗8公里）将启动预租的消息。根据出租方案，翡翠书院一期提供的1063套90平方米三居室，只租不售，租金一次性全部付清，10年180万起。

如果是你，你会租房还是买房?

第一节 货币的时间价值

◆货币的时间价值是指货币以一定的利率水平，经历一定时间的投资与再投资所增加的价值，也称资金的时间价值。

◆货币之所以具有时间价值，至少有四个方面的原因：

- 货币可用于投资获得收益，从而在将来拥有更多的货币量。
- 货币的购买力会受通货膨胀的影响，从而随着时间改变。
- 一般来说，未来的预测收入具有不确定性。
- 对于将来的消费而言，个人更喜欢即期的消费，因此必须在将来提供更多的补偿，才能让人们放弃即期的消费。

第一节 货币的时间价值

◆准确计算出货币的时间价值，需要明确两组概念：终值与现值；单利与复利。

◆终值：指当前时刻的资金在未来某个时刻的价值，用FV（F）表示。

◆现值：指未来某个时刻的资金折算到当前时刻的价值，用PV（P）表示。

◆终值与现值的两个重要因素：时间与利率。

◆利率的计算：单利与复利。

2.1.1终值的计算

◆单利终值的计算

设FV为单利终值，M为本金，r（i）为每期利率，n为计息的期数，则单利终值公式为：$FV=M(1+nr)$

【例2-1】投资者将本金1000元按3年定期存入银行，年利率为3%，到期本息共有多少？

解：FV=$M(1+nr)$=1000×(1+3×3%)=1090（元）

第一节 货币的时间价值

2.1.1终值的计算

◆复利终值的计算

设FV为复利终值，M为本金，r为每期利率，n为计息的期数，则复利终值公式为：

$$FV=M(1+r)^n$$

◆注意：此处的每期利率可以是年利率，也可以是月利率。

$$(1+r)^n \to (FV/M,r,n)$$

$\boxed{\text{一次支付终值系数}}$

第一节 货币的时间价值

【例2-2】投资者将本金1000元按3年定期存入银行，年利率为3%，到期本息共有多少？

解：与上例不同，此处按复利终值公式计算：

$$FV = 1000 \times (1+3\%)^3 = 1092.73 \text{（元）}$$

可以看到，此处终值比上例多出2.73元，就是按复利计算的结果。

问：如果月利率为3%，那么到期本息共是多少？如果年利率为3%，按月计息，那么到期本息共是多少？

2.1.2现值的计算

求现值的过程与求终值的过程正好相反。根据单利终值的计算公式，得到单利现值为：

$$PV=FV/(1+nr)$$

根据复利终值的计算公式，得到复利现值为：

$$PV=FV/(1+r)^n$$

第一节 货币的时间价值

2.1.3年金的终值与现值

2.1.3.1年金的概念与种类

◆所谓年金（annuity），是指某段时间内定期发生的一系列相同金额的现金流，例如分期偿还贷款、定期支付养老金等。

◆按每次收付款项发生的时点不同，可以分为普通年金、即付年金、永续年金和递延年金等。

2.1.3.1 年金的概念与种类

- 普通年金（ ordinary annuity ）是指从第一期起，在一定时期内每期期末等额收付的系列现金流，又称后付年金或期末年金。
- 预付年金（annuity due）是指从第一期起，在一定时期内每期期初等额收付的系列现金流，又称先付年金、即付年金或期初年金。其与普通年金的唯一区别就在于付款时点的不同。
- 递延年金（deferred annuity）则是指第一笔现金流不发生在第一期，而是隔若干期后才开始发生的系列等额现金流，它是普通年金的特殊形式。
- 永续年金（perpetual annuity）是指无限期等额支付的年金，即期限趋于无穷的普通年金。

2.1.3.2年金终值的计算

（1）普通年金终值的计算

（2）预付年金终值的计算

（3）递延年金终值的计算

（4）永续年金终值的计算

第一节 货币的时间价值

（1）普通年金终值的计算

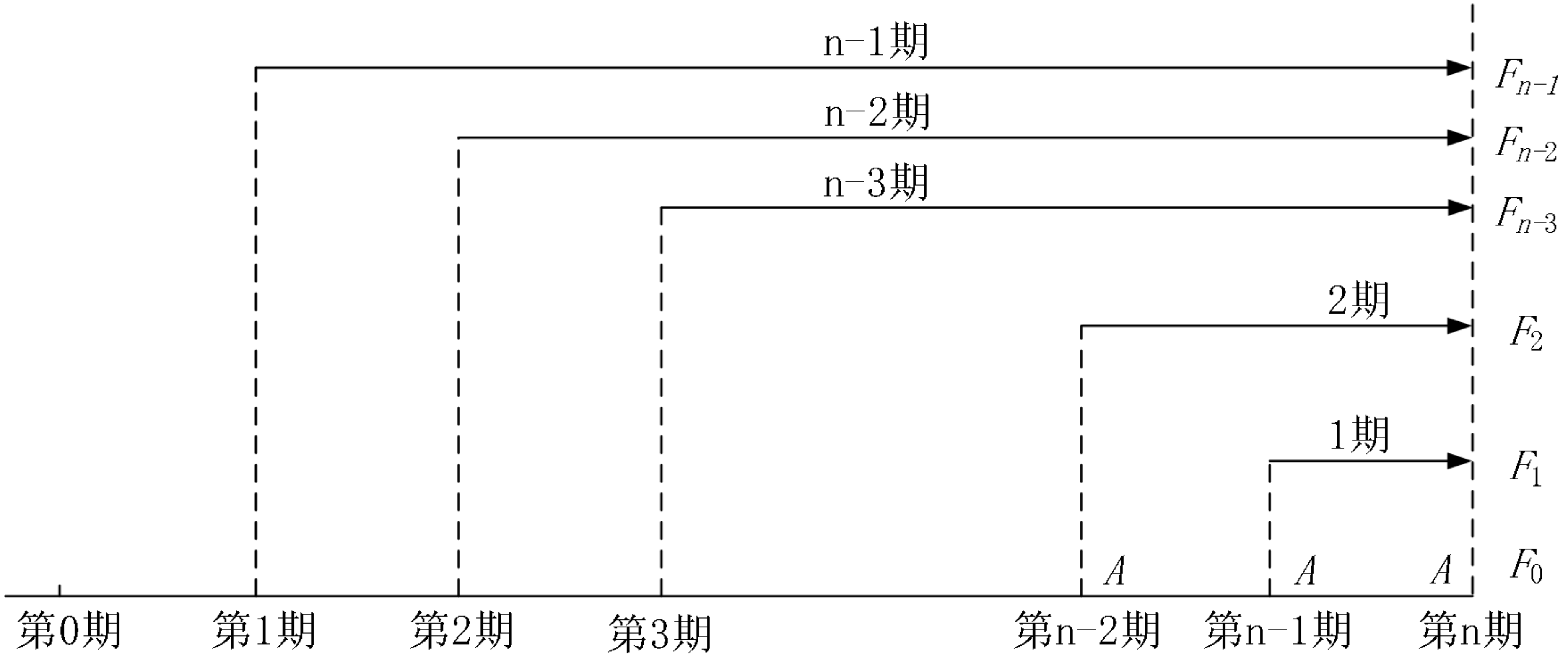


图2-1 普通年金终值的计算

（1）普通年金终值的计算

在图2-1中，A表示每期期末收付的金额，F_k为金额A在k期后的终值，n为复利期数，则年金终值为：

$$FV = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-2} + F_{n-1}$$

设r为每期利率，根据复利终值公式：

$$F_k = F_0 (1+r)^k, k = 0,1,2,3,\ldots n-1$$

（1）普通年金终值的计算

而 $F_0 = A$ ， 所以，

$$FV = F_0 + F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1}$$

$$= A + A(1+r) + A(1+r)^2 + \dots + A(1+r)^{n-1}$$

得

$$FV = A \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} \rightarrow (FV / A, r, n)$$

等额分付终值系数

（1）普通年金终值的计算

【例2-3】投资者购买面值为5000元的10年期债券，年利率为6%，每年末付息一次，第一次付息在一年之后。如果投资者持有该债券直至到期日，将每年得到的利息以年利率4%进行再投资，10年后他（她）一共将获得多少资金?

解：这是一个求普通年金终值的问题。

每年末利息收入为：5000×6%=300（元），正好构成一笔10年期的普通年金，即利息进行再投资的终值为普通年金的终值：

$$FV = 300 \times [(1+4\%)^{10} - 1] / 4\% = 3601.83(\text{元})$$

投资者10年后获得的本息和为：5000+3601.83=8601.83（元）

（2）预付年金终值的计算

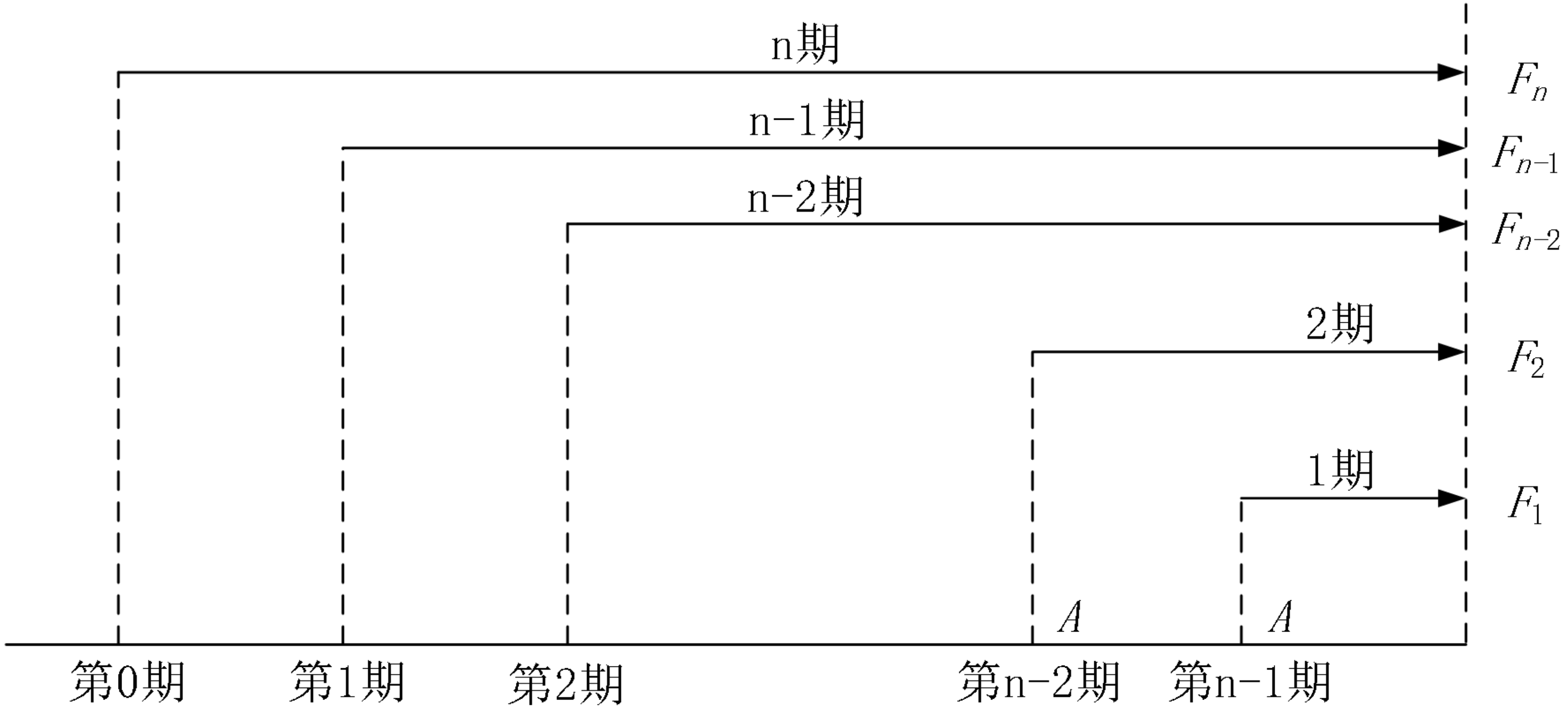


图2-2 预付年金终值的计算

（2）预付年金终值的计算

预付年金是在每期期初收入或付出，它的终值与普通年金终值的推导过程大同小异。在图2-2中，A表示每期期初收付的金额，F_k为金额A在k期后的终值，n为复利期数。

设r为每期利率，预付年金的终值是：

$$
\begin{aligned}
FV &= F_1 + F_2 + \ldots + F_{n-1} + F_n \\
&= A(1+r) + A(1+r)^2 + \ldots + A(1+r)^{n-1} + A(1+r)^n
\end{aligned}
$$

$$FV = A \times \frac{(1+r)^n - 1}{r} \times (1+r)$$

第一节 货币的时间价值

（3）递延年金终值的计算

递延年金只是年金的发生时间向后递延了，只需要从年金开始发生的那年开始计算，所以计算方法和普通年金终值的计算方法相同。

（4）永续年金终值的计算

永续年金是无限期等额收付的特种年金，是普通年金的特殊形式。由于永续年金持续期无限，没有终止时间，因此没有终值，只有现值。

2.1.3.3年金现值的计算

（1）普通年金复利现值的计算

（2）预付年金复利现值的计算

（3）递延年金复利现值的计算

（4）永续年金复利现值的计算

（1）普通年金复利现值的计算

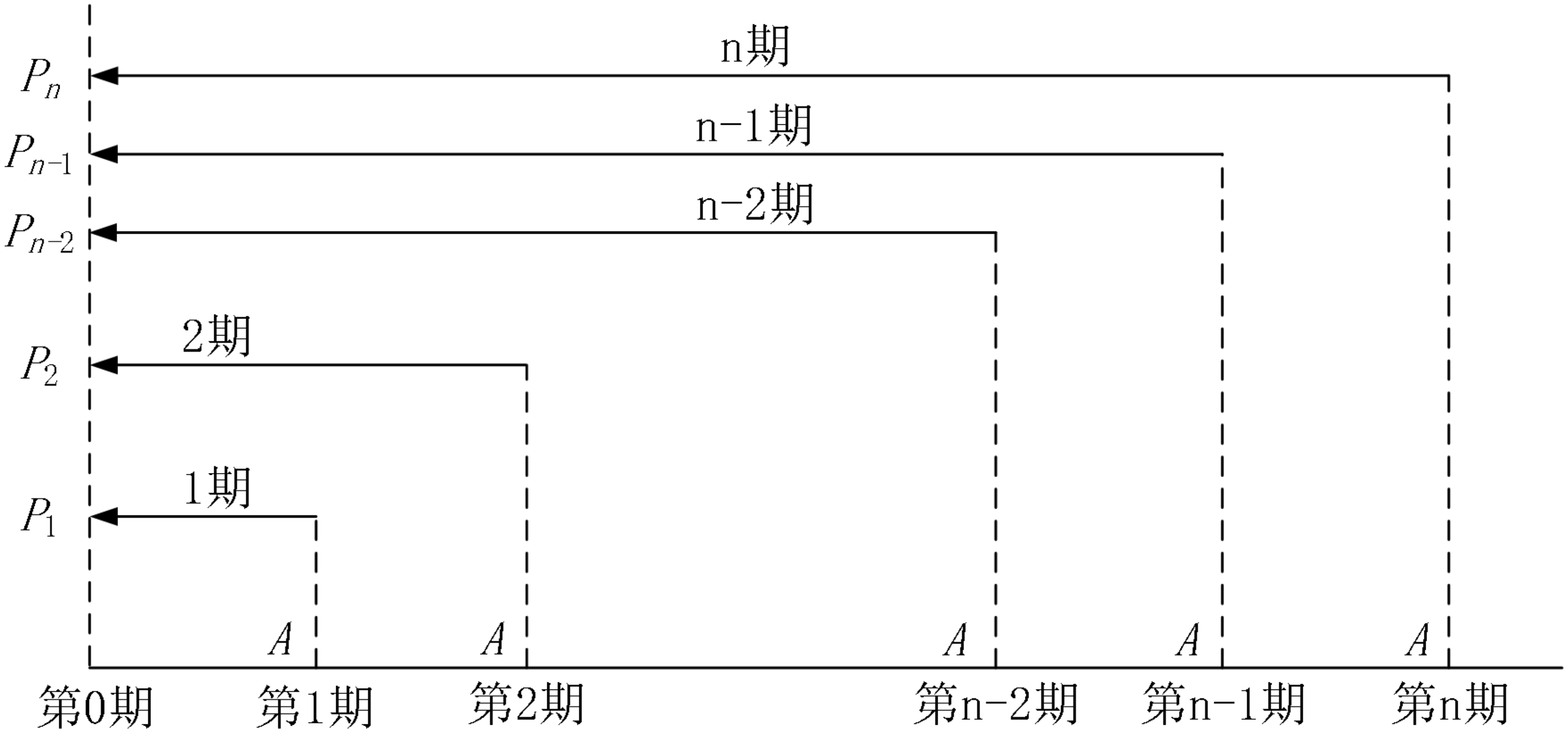


图2-3 普通年金现值的计算

（1）普通年金复利现值的计算

普通年金现值指一定时期内每期期末收付的等额款项的复利现值之和。在图 2-3中，A表示每期期末收付的金额，P_k为第k期金额A的现值， n为复利期数。普通年金的现值是：

$$PV = P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1} + P_n$$

（1）普通年金复利现值的计算

设r为每期利率，根据复利现值公式，有：

$$P_k = A(1+r)^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

$$PV = A(1+r)^{-1} + A(1+r)^{-2} + \ldots + A(1+r)^{-(n-1)} + A(1+r)^{-n}$$
$$= A[1-(1+r)^{-n}]/r$$

$$PV = A \times \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n}$$

等额分付现值系数

第一节 货币的时间价值

【例2-4】银行同意向某客户提供一笔200000元的住房贷款，期限30年，每月月末的还款额相等（月供）。如果贷款年利率为12%，问该客户每月需向银行还款多少？

解：银行希望获得的普通年金现值为200000元，每月收取还款意味着每年收取12次，年金收入的次数n为$30\times12=360$，调整后的每期利率r为$12\% / 12 = 1\%$。运用普通年金现值的计算公式：

$$200000 = A\,[\,1-(1+1\%)^{-360}\,] / 1\%$$

$$A = 2057.23\text{（元）}$$

因此，该客户应当每月向银行还款2057.23元。

第一节 货币的时间价值

（2）预付年金复利现值的计算

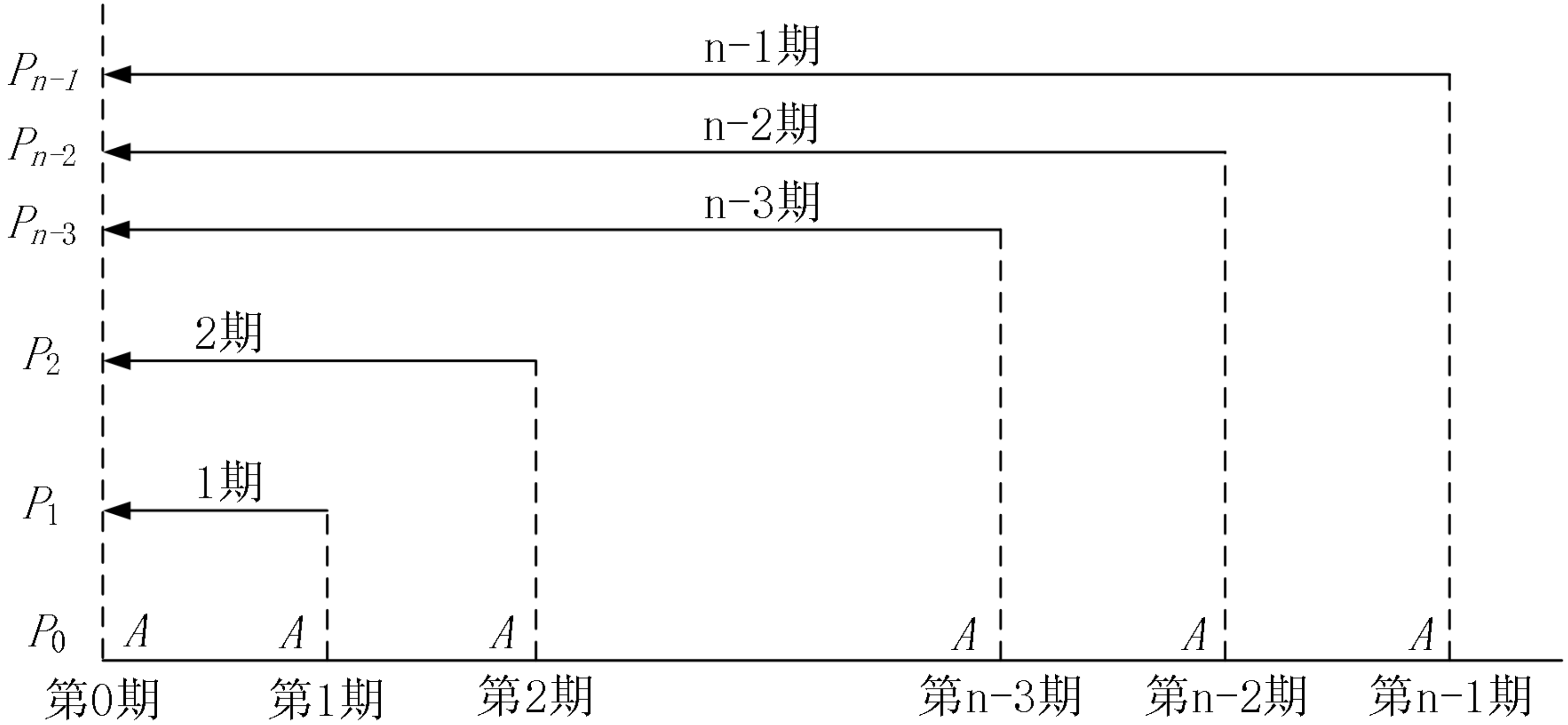


图2-4 预付年金现值的计算

（2）预付年金复利现值的计算

如图2-4所示，预付年金的现值是：

$$PV = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}$$

设r为每期利率，根据复利现值公式，有：

$$PV = A + A(1+r)^{-1} + A(1+r)^{-2} + \ldots + A(1+r)^{-(n-1)}$$

$$= A\{[1-(1+r)^{-n}]/r\}(1+r)$$

$$PV = A \times \frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^{n-1}}$$

第一节 货币的时间价值

（3）递延年金复利现值的计算

递延年金现值的计算方法是把它视为n期普通年金，求出递延期末的现值，然后再把此现值调整到第一期初，此处的“调整”就是“折现”。

（4）永续年金复利现值的计算

普通年金现值为： $PV=A[1-(1+\mathrm{r})^{-n}]/\mathrm{r}$

当n趋于无穷大时，$(1+r)^{-n}$趋近于0。因此，永续年金的现值是：

$$PV=A/\mathrm{r}$$

课堂练习

归国华侨吴先生想支持家乡建设，特地在祖籍所在县设立奖学金。奖学金每年发放一次，奖励每年高考的文理科状元各10000元。奖学金的基金保存在中国银行该县支行。银行一年的定期存款利率为2%。问吴先生要投资多少钱作为奖励基金？

第一节 货币的时间价值

表 1　资金等值计算公式

系数名称	已知项	所求项	公　　式	系数
终值系数	P	F	$F=P(1+i)^n$	(F/P, i, n)
现值系数	F	P	$P=F(1+i)^{-n}$	(P/F, i, n)
年金终值系数	A	F	$F=A\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$	(F/A, i, n)
终值年金系数（偿债基金系数）	F	A	$A=F\dfrac{i}{(1+i)^n-1}$	(A/F, i, n)
年金现值系数	A	P	$P=A\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$	(P/A, i, n)
现值年金系数（资本回收系数）	P	A	$A=P\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$	(A/P, i, n)

表 1 公式中，i 为利率，n 为计息期数。

表1中年金为普通年金，F为终值，P为现值。

练习题

已知i=6%，n=10, 分别求：

- ◆一次支付终值系数
- ◆一次支付现值系数
- ◆等额分付终值系数
- ◆等额分付偿债基金系数
- ◆等额分付现值系数
- ◆等额分付资金回收系数

请探寻它们之间的关系。

第一节 货币的时间价值

思考题

◆在你们考取高中之后，若父母就开始着手为你们在银行储存上大学所需的款项，三年高中期间每月需存储多少才足够支付你们四年大学的学习和生活费用?

◆考取大学之后，若父母一次性将四年的学习和生活费用都交给你们，试问每月取多少，才能顺利完成大学学业?

◆等你们工作以后，每月应给父母多少，才能够回报父母亲的养育之恩?

课堂练习

在你们考取高中之后，若父母就开始着手为你们在银行储存上大学所需的款项，三年高中期间每月需存储多少才足够支付你们四年大学的学习和生活费用？（假设：你们父母采取普通年金方式存款，年利率均为3.6%，你们采取普通年金（即付年金）方式平均每月支取2000元，四年大学期间年利率为3%）

课外作业

假设某一永续年金第一期末支付为A，以后每期末支付递增比例为g，每一利息期的利息率（折现率）为i，计算该永续年金的现值？

2.2.1折现因子(discount factor)

◆今天收到与在1个月后或1年后收到1元钱，其价值是不一样的?为什么？

◆未来的1元在当下的价值，叫作折现因子，也称贴现因子。

◆折现因子是固定收益证券领域的核心概念。

第二节 折现因子与利率

【例2-5】2021年7月26日，财政部发行了182天短期折现国债。市场发行价格是99.069元，每张面值100元。也就是说，2021年7月26日投资者愿意用99.069元购买一张将在2022年1月24日以100元赎回的政府证券。

◆本次发行的短期国债在到期之前不会支付其他任何现金。购买价和支付价格之间的比率为$0.99069=\frac{99.069}{100}$。

◆这个比率可看作发行日和到期日之间的市场折现因子，也就是说，市场参与者愿意用当下的0.99069元换取6个月后的1元。

第二节 折现因子与利率

2.2.1折现因子

【定义2-1】折现因子（discount factor）

设时间t和T，在时间t愿意用一定数量的资金换取未来时间T确定数量的资金，前者与后者的比，即为折现因子。把t与T之间的折现因子记为$Z(t,T)$。

第二节 折现因子与利率

◆在例2-5的日期中，t为2021年7月26日，T为2022年1月24日，折现因子为$Z(t,T)$=0. 99069。简单地说，折现因子体现的是时间t与T之间的时间价值。

◆尽管它是一个值，但本质上讲，它是一个价格，描述了人们愿意在今天用多少钱去购买未来的1元。从这个意义上讲，折现因子的意义是明确的。

第二节 折现因子与利率

◆折现（discounting）+折现值（discounting value）+折现率（discounting rate） +折现因子（discounting factor）

思考题：现值的影响因素有哪些?

$$P = F \times \frac{1}{(1+r)^n}$$

第二节 折现因子与利率

2.2.1.1到期日的折现因子

- 定义2-1和例2-5强调了在t时刻的折现因子取决于到期日T。如果到期日T更长或者更短，折现因子也会随之变化。

- 事实上，处于同样的原因，投资者不仅认为当下的1元比6个月之后的更值钱，也会认为3个月之后的1元比6个月之后的1元更值钱。这一点，我们也可以通过我国的短期国债来印证。

第二节 折现因子与利率

【例2-6】2021年7月26日，财政部发行了91天的短期国债，到期日为2021年10月25日，面值100元的短期国债发行价格为99.578元。结合例2-5，即t=2021年7月26日，T_1=2021年10月25日，T_2=2022年1月24日，我们可以得到折现因子$Z(t,T_1)$=0.99578，这个值要比$Z(t,T_2)$=0.99069高。

在任何给定的时间t到期日，T越长，折现因子越小。

也就是说，有T_1和T_2，且$T_1<T_2$，则有下式成立：

$$Z(t,T_1) \geq Z(t,T_2)$$

第二节 折现因子与利率

◆2.2.1.2随时间变化的折现因子

图2-5　2002年到2020年 不同期限的折现因子

2.2.1.2随时间变化的折现因子

◆折现因子的第二个重要特征是它们随着时间的推移并不是固定的，即使保持到期日与今日时间间隔为固定不变的*T-t*。随着时间推移，货币的时间价值也随之变化。

◆ 首先，在绝大多数时间里，到期时间较短的折现因子总是高于到期时间较长的。其次，折现因子随时间的变化是相当显著的。例如，3年期的折现因子在2013年12月低达0.957706，而在2008年12月和2020年4月却高达0.99。

第二节 折现因子与利率

2.2.1.2随时间变化的折现因子

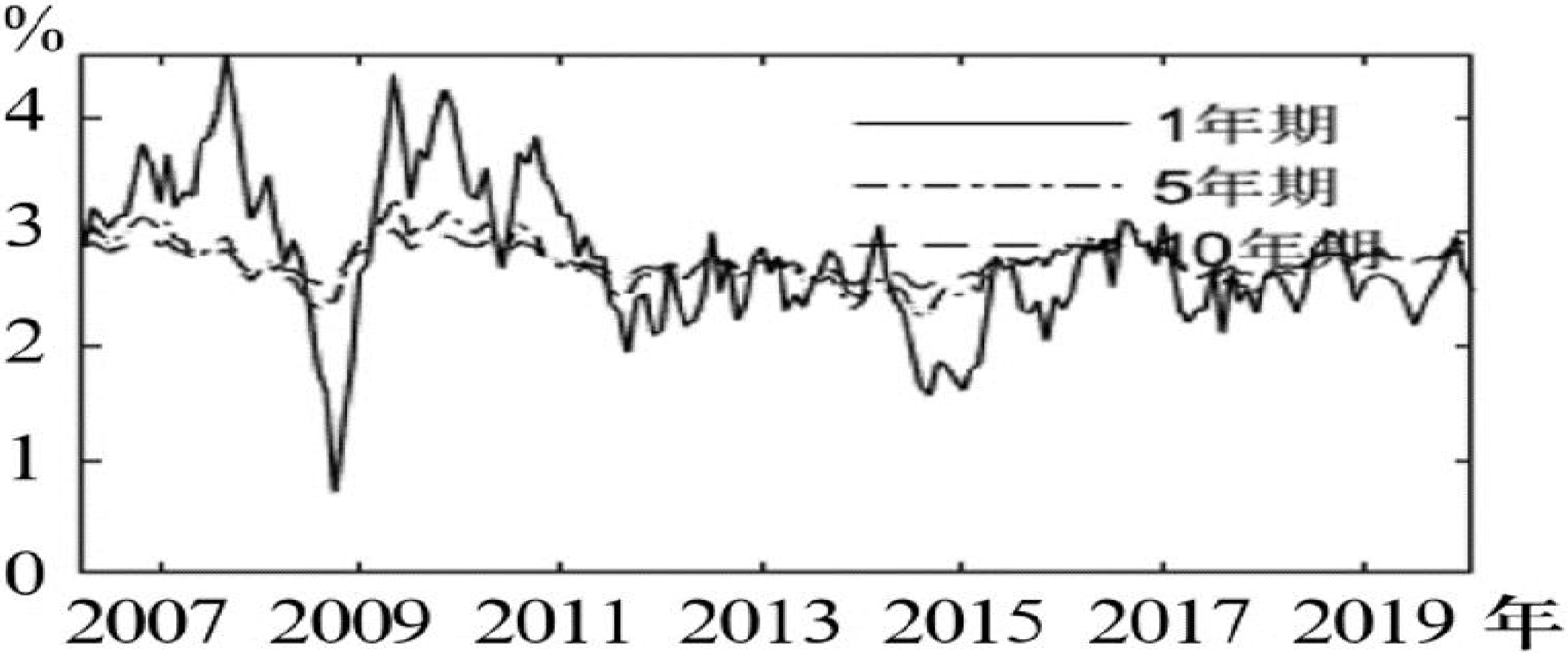


图2-6 预期通货膨胀

第二节 折现因子与利率

【课堂讨论】

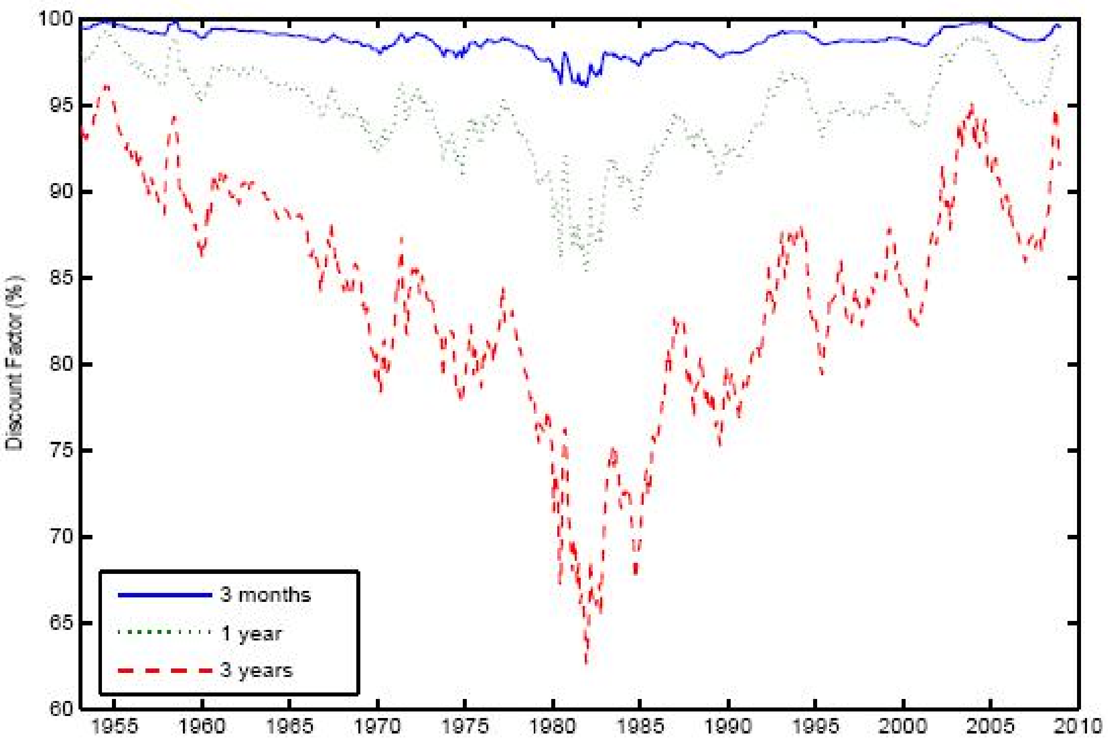
为什么折现因子会随时间变化？

为什么折现因子会随时间变化?

- 比较图2-5中折现因子的波动与图2-6中的预期通货膨胀的波动序列，可以发现预期通货膨胀率是折现因子的一个重要影响因素。
- 通货膨胀率正是决定货币时间价值的因素，因为它决定了货币能买到多少商品。预期通货膨胀率越高，这笔钱在未来能购买到的商品就越少，所以相比于今天，在未来收到这笔钱的吸引力就越小。

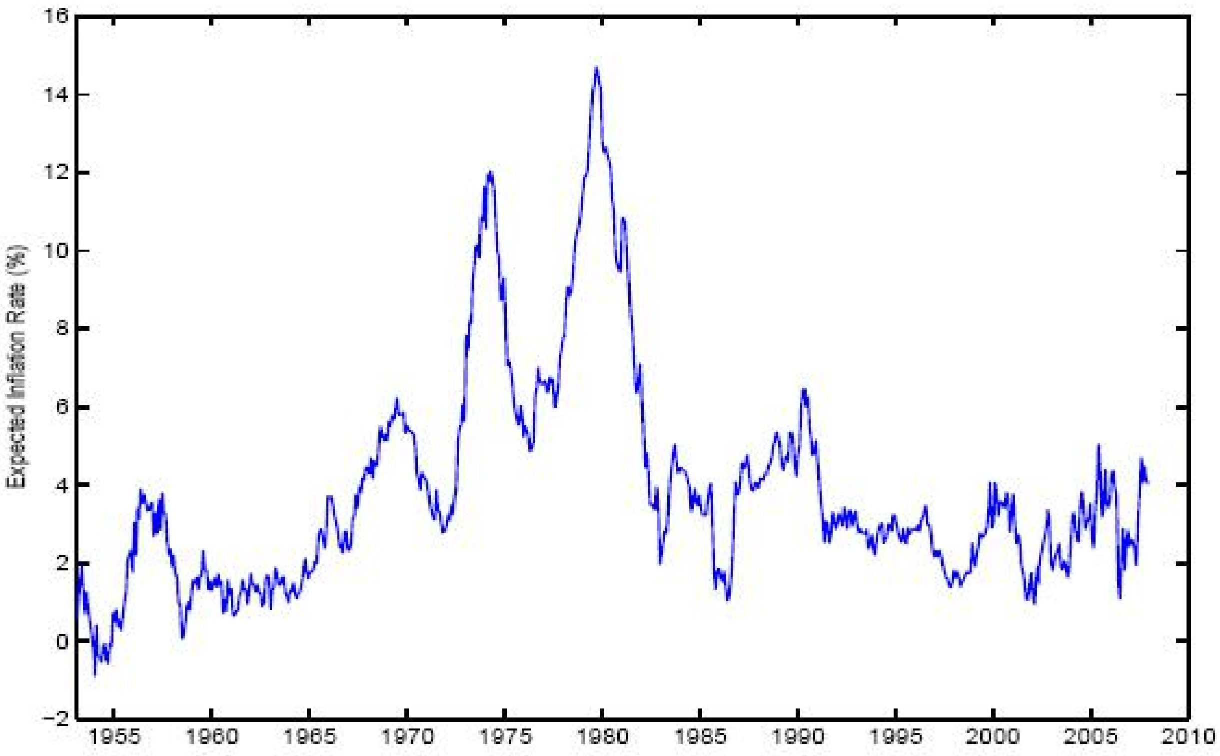
第二节 折现因子与利率

Figure 2.1 Discount Factors



Source: Center for Research in Security Prices (CRSP)

Figure 2.2 Expected Inflation



Data Source: Bureau of Labor Statistics.

Discount Factors and Expected Inflation from USA

第二节 折现因子与利率

2.2.2 利率

◆利率是借款人（债务人）由于在一段时期内使用了贷款人（债权人）的资金而向贷款人支付的价格的一种度量。

◆借款人最初从贷款人处借到的资金总额为本金，为获得本金的暂时使用权而支付的价格就是利率；利率通常用单位时间内（通常为年）本金的百分比来表示。

◆利率通常也被视为资金的价格。

2.2.2 利率

- 以5%的年利率投资了100元，1年后将收到105元。这105元是原始资本加上投资利息。同样的投资行为也能用来描述折现因子：这里的折现因子是1年后的105元与今天的100元的比率，即 $0.9524=\frac{100}{105}$。这个数字其实与5%的利率是等价的，但是并没有利率那么直观。

- 利率的概念取决于初始投资支付利息的频率。

2.2.2 利率

应计利息的复利频率是指每年支付利息并将其计入再投资额的次数。

- 在一定程度上，只提及利率水平不能完整地描述投资回报率、贷款或抵押贷款的成本。
- 复利频率是一个必须附在利率数字上的关键因素。

2.2.2 利率

“以5%的年利率投资了100元，1年后将收到105元。”其实有一个隐含假设，那就是只按5%的利率在到期日付息一次。

◆如果说每6个月计息一次的话，到期日收益的正确金额将会是：

$$\text{到期收益}=100\times(1+\frac{5\%}{2})\times(1+\frac{5\%}{2})=105.0625\ \text{（元）}$$

◆如果每月计息，那到期日收益的正确金额将为

$$\text{到期收益}=100\times(1+\frac{5\%}{12})^{12}=105.12\ \text{（元）}$$

事实1：对于给定的利率（如5%），付息频率越高，最终收益越高。

2.2.2 利率

考虑投资一个证券，今天的成本是100元，1年后支付105元，此证券的利率是多少？直观的答案是5%，因此回报率等于5%= $\frac{105-100}{100}$。然而，正确的答案取决于该证券的付息频率。

- 如果利息每年支付1次，则5%是正确答案。
- 如果每半年支付1次利息，则正确答案是r=4.939%。因为

$$100\times\left(1+\frac{4.939\%}{2}\right)^2=105\text{（元）}$$

- 如果每月付息，则正确答案为r=4.89%，因为

$$100\times\left(1+\frac{4.89\%}{12}\right)^{12}=105\text{（元）}$$

事实2：对于给定的最终收益，更频繁的付息频率意味着更低的利率。

第二节 折现因子与利率

思考题

自从人类有了贫富差距，借贷现象就应运而生。在公元前1700年古巴比伦时期的泥板上就有这样一个问题：以20%的年息贷钱给人，何时连本带利息翻一番？

第二节 折现因子与利率

2.2.2 利率

◆回报率的确是收益和初始投资之间的差额除以后者。利率是对应于复利期内投资的（年化）回报率，但与其他情况是不同的。

◆例如，如果利率为5%，每半年收益一次，那么在6个月内，投资回报率为2.5%，即这6个月中的100元变为102.5元。如果对这个半年回报进行年化，得到5%，这对应于利率。

◆但是，请注意，利率和回报率在1年期内是有所不同的。在1年中，原投资将支付105.0625元，因此回报率为5.0625%>5%。

◆当期限更长时，年化利率与年投资回报率之间的差异也就越大。

第二节 折现因子与利率

折现因子、利率和复利频率

- ◆明确了复利频率、折现因子与利率密切相关，给定利率及其复利频率，我们便可以定义折现因子。反之，给定折现因子，我们可以定义利率及其复利频率。
- ◆两个混合频率特别重要：半年复利和连续复利。

第二节 折现因子与利率

（1）半年复利

【例2-7】令t=2021年8月10日，并且令T=2022年8月10日（1年后）。考虑1年投资100元，半年复利利率r=5%，为期1年，那么有

$$T\text{时刻的回报}=100\times\left(1+\frac{r}{2}\right)\times\left(1+\frac{r}{2}\right)=100\times\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}=105.0625(\text{元})$$

考虑到初始投资是100元，期间没有现金流流向投资者，并且在T时的回报是无风险的，以t（100元）和T（105.0625元）之间的关系建立两个日期之间的折现因子，由下式给出：

$$Z(t,T)=\frac{100}{T\text{时刻的回报}}=\frac{1}{\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2}}$$

第二节 折现因子与利率

（1）半年复利

事实3： 令$r_2(t,T)$表示t和T之间的（年化）每半年复利利率。以$Z(t,T)$来定义**折现因子**：

$$Z(t,T)=\frac{1}{\left(1+\frac{r_2(t,T)}{2}\right)^{2\times(T-t)}}$$

以每半年复利的利率$r_2(t,T)$定义一个T时刻的回报率：

$$T\text{时刻的回报}=t\text{时刻的投资}\times\left(1+\frac{r_2(t,T)}{2}\right)^{2\times(T-t)}$$

由于T时刻的收益在t时刻是已知的，所以t时刻的投资与T时刻的收益之间的关系就定义了货币的时间价值$Z(t,T)$。

类似地，给定折现因子$Z(t,T)$，可以获得每半年复利的利率。

（1）半年复利

事实4： 令$Z(t,T)$为t时刻与T时刻之间的折现因子，那么每半年复利的利率$r_2(t,T)$可以由下面的公式算出：

$$r_2(t,T)=2\times\left(\frac{1}{Z(t,T)^{\frac{1}{2\times(T-t)}}}-1\right)$$

第二节 折现因子与利率

（2）更高的复利频率

事实5： 给定折现因子$Z(t,T)$，令$r_n(t,T)$表示（每年）n次复利的利率，那么$r_n(t,T)$的定义公式为

$$Z(t,T)=\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r_n(t,T)}{n}\right)^{n\times(T-t)}}\right)$$

解出$r_n(t,T)$，可以得到

$$r_n(t，T)=n\times\left(\frac{1}{Z(t，T)^{\frac{1}{n\times(T-t)}}}-1\right)$$

第二节 折现因子与利率

【例2-8】在z时刻投资100元并在1年后收到105元的例子。按年复利的利率结果如表2-1所示。

表2-1 利率与复利频率

复利频率	N	$r_n(t, t+1)$
每年	1	5.000%
每半年	2	4. 939%
每月	12	4. 889%
每半月	24	4. 883%
每周	52	4. 881%
每半周	104	4. 880%
每日	365	4. 879%
每半天	730	4. 879%
每小时	8 760	4. 879%
连续复利	∞	4. 879%

注意到：每天复利的利率（n=252）与更高频率（n>252）复利得到的利率没有区别

第二节 折现因子与利率

◆爱因斯坦说： “复利是世界的第八大奇迹。”

◆假设一张1毫米厚的普通纸张足够大，将其对折，再对折，如此重复对折64次，大概会有多高?

415052万公里

◆所谓复利思维，其本质就是：做事情A，会导致结果B；而结果B，又会反过来加强A，不断循环。

（3）连续利率

事实6： 连续复利（continuously compounded interest rate）的利率$r(t,T)$，由n趋于无穷大的$r_n(t，T)$得到

$$\boldsymbol{Z(t,T)=\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r_n(t,T)}{n}\right)^{n\times(T-t)}}\right)} \qquad Z(t,T)=e^{-r(t,T)(T-t)}$$

解出$r(t,T)$得：$r(t,T)=-\frac{ln\left(Z(t,T)\right)}{T-t}$

注意:连续复利率对于金融学理论研究很重要。而以年计息的复利率在实际的市场交易中非常有用。

◆折现因子和利率之间的关系

给定t时刻和T时刻之间的折现因子$Z(t,T)$，可以定义任何复利频率的利率。这个事实意味着可以通过用这些等式里暗含的相等关系从一个复利频率换算成另一个复利频率。

$$r(t,T)=n\times ln\left(1+\frac{r_n(t,T)}{n}\right)$$

$$r_n(t,T)=n\times\left(e^{\frac{r(t,T)}{n}}-1\right)$$

这表明资金的时间价值可以通过折现因子等价表示，或者由有着适当的复利频率的利率形式表示。

第二节 折现因子与利率

【例】某家银行的利率报价为每年14%，每季度复利一次，问连续复利机制下的利率是多少?

解:

$$\boldsymbol{r(t,T) = 4 \times ln\left(1+\frac{0.14}{4}\right)}=13.76\%$$

第二节 折现因子与利率

课堂练习

【1】利率报价为每年10%，按半年复利，求与之等价的连续复利利率？

$$r(t,T) = n \times ln\left(1 + \frac{r_n(t,T)}{n}\right)$$

$$2\ln\left(1+\frac{10\%}{2}\right) = 9.758\%$$

【2】假设某家贷款银行对贷款利率的报价为每年8%，连续复利，利息每季度支付一次，求与之等价的按季度复利的利率为多少？

$$r_n(t,T) = n \times \left(e^{\frac{r(t,T)}{n}} - 1\right)$$

$$4*\left(e^{8\%/4} - 1\right) = 8.08\%$$

小 结

第一节 货币的时间价值

◆什么是货币的时间价值？

◆什么是年金？ 年金包括哪些种类？

◆不同年金的终值和现值计算公式如何？ 其相互关系如何？

第二节 折现因子与利率

◆什么是折现因子？

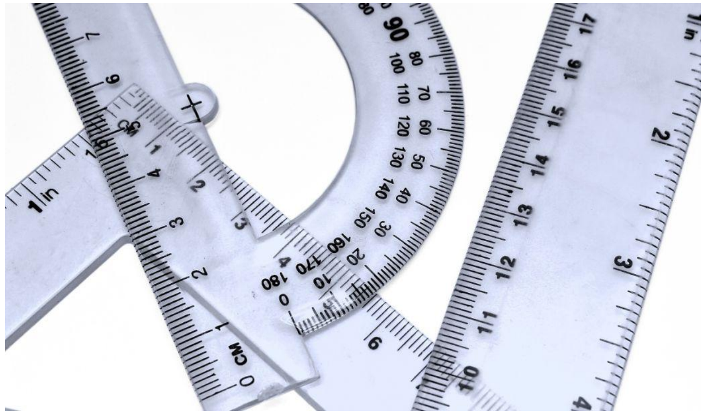
◆折现因子、利率和复利频率之间的关系是什么？

第三节 收益率的度量

投资债券面临的问题?

第三节 收益率的度量

- 当期收益率
- 实际年收益率
- 内部收益率
- 到期收益率
- 约当收益率
- 赎回期收益率
- 即期收益率
- 远期收益率
- 持有期收益率
- 总收益率
- 组合收益率



第三节 收益率的度量

2.3.1当期收益率

◆当期收益率（current yield）是指债券年息票利息收入与债券市场价格的比值，也称本期收益率，可用公式表示如下：

$$y_c = \frac{C}{P} \times 100\%$$

式中，y_c为当期收益率，C为息票利息，P为债券的市场价格。

第三节 收益率的度量

【例2-9】有一偿还期为5年的债券，面值100元，票面利率4%，每年付息1次，现在的市场价格为97.16元，则其当期收益率为：

$$y_c = \frac{100 \times 4\%}{97.16} = 4.12\%$$

如果债券一年付息多次，按照当期收益率的定义，仍然是用一年的利息除以债券市场价格，而不是用每次支付的利息额除以债券市场价格。比如，假设例2-9中的债券改为每半年付息一次，在其他条件不变的情况下，当期收益率仍然是4.12%。

第三节 收益率的度量

2.3.1当期收益率

◆当期收益率可以用来反映债券每年利息收入的收益情况，衡量了债券所有人在某一期间所获得的现金收入相较于购买价格的比率，但没有考虑影响债券投资者收益的其他收入来源，如买卖债券的资本利得，更没有考虑买卖债券的总体收益情况。

◆若要提升当期收益率，最直接的方法不外乎一是提升息票利息，二是将购入债券的价格降低。

2.3.2 实际年收益率

债券的收益率可以表示为每期收益率(rate for period)。例如1年期收益率、半年期收益率、季度收益率、月收益率或天收益率等。

为了对不同债券的收益率进行比较，有必要计算债券的实际年收益率(effective annual rate, EAR)。实际年收益率与每期收益率的关系如下式所示：

$$\boldsymbol{EAR} = (\mathbf{1} + \text{每期收益率})^{\mathbf{1}\text{年中期数}} - \mathbf{1}$$

第三节 收益率的度量

【例2-10】A债券的月度收益率为1%，B债券的半年收益率为6%，求这两种债券的实际年收益率。

解： 由于A债券的收益率是月度收益率，即每期收益率为1%。1年共有12个月。所以，A债券的实际年收益率为：

$$EAR = (1+1\%)^{12} - 1 = 12.68\%$$

由于B债券的收益率是半年收益率，即每期收益率为6%，1年共有2个半年。所以，B债券的实际年收益率则为：

$$EAR = (1+6\%)^{2} - 1 = 12.36\%$$

由此可见，A债券的实际年收益率高于B债券的实际年收益率。

第三节 收益率的度量

2.3.2 实际年收益率

◆实际年收益率指考虑到各种复利的情况下，债券一年的收益率。注意该收益率使用的是复利。

◆实际年收益率（Effective Annual Rate, EAR; Effective Annual Yield, EAY），也称年实际收益率，亦称年有效收益率，有效年收益率(Annual Effective Yield, AEY)

◆注意其与年比例利率（Annual Percentage Rate, APR）区别。

第三节 收益率的度量

【例】某家银行的利率报价为每年14%，每季度复利一次，问连续复利机制下的利率是多少？1年复利4次的年有效收益率（1年复利1次的利率）又是多少?

$$r(t,T) = 4 \times ln\left(1 + \frac{0.14}{4}\right) = 13.76\%$$

$$R_m = \left(1 + \frac{0.14}{4}\right)^4 - 1 = 0.1475 = 14.75\%$$

第三节 收益率的度量

中银理财-稳裕（3个月封闭式）10期

代码：ZY010215	风险评级：R1(保守型)	理财产品登记编码：Z7001021000782
发售起始日：2021-12-22	发售渠道：网银专业版|网银大众版|...	产品到期日：2022-04-01（期限：93天）
发售截止日：2021-12-28	发售地：全行	业绩比较基准：3.05%

http://www.cmbchina.com/cfweb/Personal/Default.aspx

2.3.3内部收益率

◆内部收益率(internal rate of return, IRR)是指资金流入现值总额与资金流出现值总额相等，即净现值（net present value, NPV）等于零时的折现率。内部收益率又称内部报酬率，亦称内含报酬率。

◆内部收益率在项目经济评价中有重要的作用，是一项投资可望达到的报酬率，该指标越大越好。净现值与内部收益率的关系如下：

$$NPV=\sum_{t=1}^{n}\frac{A_t}{(1+y_{IRR})^t}-P$$

式中， y_{IRR} 为内部收益率， A_t 为每期现金流入，P为期初投资额。

2.3.4 到期收益率——定义

- 在所有衡量债券收益率的指标中，到期收益率是应用最广泛的指标。
- 到期收益率（**yield to maturity**，**YTM**）是能使债券未来现金流的现值正好等于债券当前的市场价格(初始投资)的内部收益率。
- 它是按复利计算的收益率，考虑了货币的时间价值，能较好地反映债券的实际收益。

第三节 收益率的度量

2.3.4 到期收益率——定义

$$P=\frac{C}{(1+y)}+\frac{C}{(1+y)^2}+\frac{C}{(1+y)^3}+\dots+\frac{C}{(1+y)^n}+\frac{M}{(1+y)^n}$$

$$P=\sum_{t=1}^{n}\frac{C}{(1+y)^t}+\frac{M}{(1+y)^n}$$

其中

y：到期收益率；**C**：一年所获得利息；**P**：当期价格；

M：固定收益证券期末偿还价格；**n**：偿还期。

第三节 收益率的度量

2.3.4 到期收益率——定义

◆**到期收益率**又称最终收益率，是投资购买债券的**内部收益率**，即可以使投资购买债券获得的未来现金流量的现值等于债券当前市价的**折现率**。

◆**到期收益率**相当于投资者按照当前市场价格购买并且一直持有到满期时可以获得的**年平均收益率**，其中隐含了每期的投资收入现金流均可以按照到期收益率进行再投资。

◆**到期收益率**是使得一个债务工具未来支付的现值等于当前价值的**利率**。

第三节 收益率的度量

思考题

到期收益率与内含报酬率的异同？（对象+现金流）

2.3.4 到期收益率——计算

【例】假设有一只期限为5年，面值为100元的债券，票面利率为6%，每年付息一次，该债券当前的市场价格为98.2元。试求该债券的到期收益率。

$$98.2=\sum_{t=1}^{5}\frac{6}{(1+y_m)^t}+\frac{100}{(1+y_m)^5}$$

如何求解？

2.3.4 到期收益率——计算

（1）插值法

$$98.2=\sum_{t=1}^{5}\frac{6}{(1+y_m)^t}+\frac{100}{(1+y_m)^5}$$

$$P=\sum_{t=1}^{5}\frac{6}{(1+7\%)^t}+\frac{100}{(1+7\%)^5}=95.9$$

因此，可利用插值法计算公式，有

$$\frac{100-98.2}{98.2-95.9}=\frac{6\%-y_m}{y_m-7\%}$$

$$y_m\approx 6.44\%$$

2.3.4 到期收益率——计算

（2）公式法

简便公式

$$y_m = \frac{I + \frac{M-P}{n}}{\frac{M+2P}{3}}$$

假设有一只期限为5年，面值为100元的债券，票面利率为6%，每年付息一次，该债券当前的市场价格为98.2元。试求该债券的到期收益率。

其中：y_m——债券到期收益率；I——每年的固定利息；M——到期归还的本金（面值）；P——债券的购买价格；n——债券距到期日的年数。

2.3.4 到期收益率——计算

（3）使用金融计算器计算（略）

（4）使用Excel计算（略）

（5）利用Matlab或者Python编程计算

（5）利用Matlab编程计算

问题：求这样一元五次方程-95.786*(1+x)^5+5*(1+x)^4+5*(1+x)^3+5*(1+x)^2+5*(1+x)+105=0

MATLAB代码：

a表示系数向量，以降幂的顺序排列；

求根函数为 roots ，这里默认的变量为(1+x)，所以再减去1。

结果有5个，其中四个为虚数，只有第一个为0.06 是问题的解。

```
a=[-95.786,5,5,5,5,105];
r=roots(a)-1;

r=
  0.0600 + 0.0000i
 -0.6881 + 0.9590i
 -0.6881 - 0.9590i
 -1.8158 + 0.5928i
 -1.8158 - 0.5928i
```

2.3.4 到期收益率——计算

【课堂练习】

某5年期债券，面值为100元，票面利率为5%，每年支付一次利息，当前价格为95.786，求该债券的到期收益率。

2.3.4 到期收益率——优点

①该指标综合考虑了债券投资的三种未来现金收益：每一期的现金流（利息）；今天的投资价格与未来偿还的面值之间的资本利得；每一期现金流投资至期末的利息（利息的利息）。

②到期收益率的计算显然要相对科学。

③到期收益率与债券价格之间的一一对应关系也是它被广泛使用的原因之一。

2.3.4 到期收益率——缺点

◆尽管同时考虑了债券投资的三种未来收益，到期收益率指标仍然只是一定条件下的承诺的到期收益率(promised yield to maturity)，并不是预期收益率的精确指标。

◆到期收益率的计算实际包含以下三个假定：

- 没有违约风险；
- 投资者持有到期；
- 每一期的现金流都按照恒定的到期收益率进行再投资。

◆普通债券的到期收益率如此！复杂债券其到期收益率就更加不确定，思考：分期偿付债券、可赎回债券和可回售债券等其到期收益率的不确定性。

2.3.4 到期收益率——应用

- 用于报价（对于给定的债券，只要未来的现金流确定，债券价格与到期收益率之间存在着一一对应的关系）
- 用于比较债券的投资价值（其他条件相同，利息支付不同的债券比较到期收益率，进而判断相对的投资价值）
- 用于折现和定价（即期利率的选择必须符合相应期限和相应风险，到期收益率的选择除了相应期限和相应风险之外，还需符合相应的现金流结构）

2.3.4 到期收益率——应用

债券的票面利率、当期收益率和到期收益率之间，有下述关系：

- 如果债券价格等于债券面值(即平价)，则票面利率=当期收益率=到期收益率。
- 如果债券价格低于债券面值(即折价)，则票面利率<当期收益率<到期收益率。
- 如果债券价格高于债券面值(即溢价)，则票面利率>当期收益率>到期收益率。

如何从理论上给予证明？

第三节 收益率的度量

补充：约当收益率(Equivalent Yield)

对于一年付息多次的债券，到期收益率使用单利法进行年化：

$$P_0 = \sum_{t=1}^{k\times n} \frac{C}{(1+\frac{y}{k})^t} + \frac{M}{(1+\frac{y}{k})^{k\times n}}$$

上式中，y 一般被称为债券的约当收益率，k为每年附息的次数，该收益率是按照单利方法计算出来的年收益率。

注意：约当收益率会低估实际有效的年化收益率?

第三节 收益率的度量

补充：约当收益率

【例】某5年期债券，面值为100元，票面利率为5%，每年支付2次利息，零时点的价格为104.4913元，则该债券的约当收益率为：

$$104.4913=\sum_{t=1}^{2\times5}\frac{100\times2.5\%}{(1+{}^{y}\!/_{2})^{t}}+\frac{100}{(1+{}^{y}\!/_{2})^{2\times5}}$$

$${}^{y}\!/_{2}=2\%$$

$$y=4\%$$

2.3.5 即期收益——定义

即期收益率更多地被称为**即期利率（spot rate）**，是指对于未来只有一笔现金流的债券，使其未来现金流的现值等于债券当前市场价格的折现率。由于即期利率对应的是一笔现金流，所以有时也称为零息利率，其计算公式为：

$$y_s = \sqrt[n]{\frac{C+M}{P}} - 1$$

式中，y_s为即期利率，C为债券到期利息，M为债券面值，P为债券的市场价格，n为债券剩余期限。

如果债券没有票面利率，折现发行，则令上式中的C为零即可。

2.3.5 即期收益率——定义

【例2-11】有一偿还期为5年的债券。面值100元，票面利率4%，到期一次还本付息，现在的市场价格为97.16元，则其即期利率为：

$$y_s = \sqrt[5]{\frac{100 \times 4\% \times 5 + 100}{97.16}} - 1 = 4.31\%$$

2.3.5 即期收益率——定义

- 即期利率的优劣特征是：即期利率针对的是未来只有一笔现金流收益的债券，所以对于零息债券比较适用，但对于还有多次利息支付的附息债券，就无法直接求得。
- 即期利率不是一个能够直接观察到的市场变量，而是一个基于现金流折现法，通过对市场数据进行分析而得到的利率。
- 在现代金融分析中，人们运用各种先进的数学模型与计算方法，能够科学准确地构造各种不同期限的即期利率。

2.3.5 即期收益率——即期收益率与到期收益率区别

- n年期债券的到期收益率实际上可以看作0至n年的即期利率期限结构的某种加权平均，是投资至期末的总的年平均收益率。反过来，n年期的即期利率可以视为n年期到期收益率的边际利率。
- 在为债券定价时，既可以用到期收益率，也可以用即期利率作为折现率，但应用时必须符合两者的内在含义。

2.3.6 远期收益率——定义

◆ 远期收益率更多地被称为远期利率（forward rate），是指从将来某个时点开始，到将来另一个更远时点结束之间的债券收益率（即期利率）。

◆通常情况下，远期利率针对的是将来两个时点之间只有一笔现金流的债券，所以是将来两个时点之间的即期利率。

◆从资金借贷角度看，远期利率是当前约定的未来借贷的均衡利率。

◆ 远期利率的优劣特征是：远期利率在一定程度上可以反映人们对未来利率走势的看法，但它不能用来表示当期投资债券的收益情况。

2.3.6 远期收益率——计算

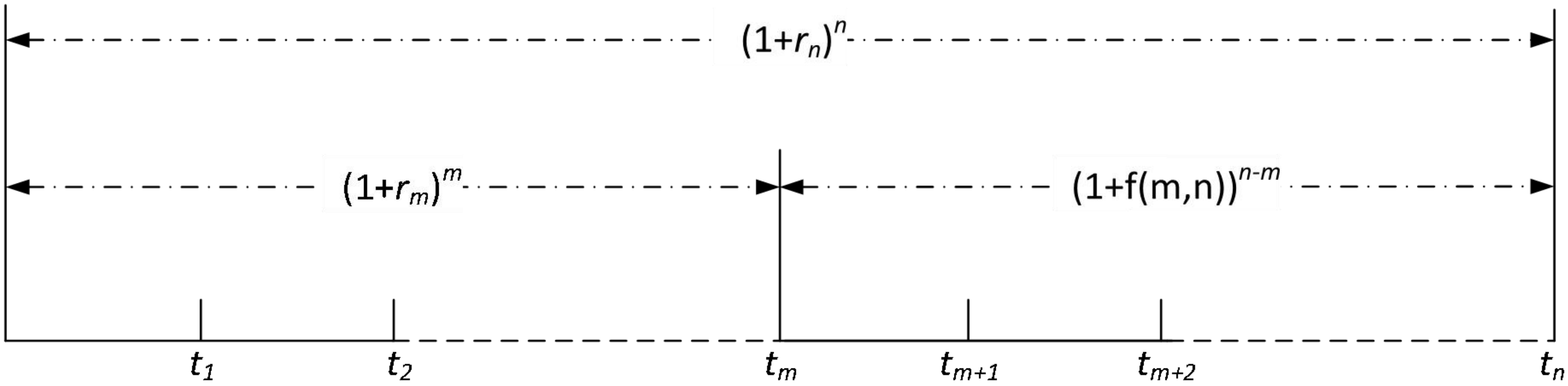


图2-7 即期收益率和远期收益率的关系

$$(1+r_n)^n=(1+r_m)^m(1+f(m,n))^{n-m}$$

2.3.6 远期收益率——计算

【例2-12】假定有一个零 息债券的剩余期限为2年，对应的即期利率为3.12%，另一个零息债券的剩余期限为5年，对应的即期利率为5.60%，试求从2年后开始至5年末的远期利率。

解：根据远期利率的计算公式

$$(1+r_n)^n=(1+r_m)^m(1+f(m,n))^{n-m}$$

$$f(2,5)=\sqrt[3]{\frac{(1+5.60\%)^5}{(1+3.12\%)^2}}-1=7.29\%$$

2.3.6 远期收益率——计算

课堂练习

某投资者签订了一份远期合同，根据约定1年后贷款3000元，3年后偿还本息3500元。问1年后的2年期的远期利率为多少？

2.3.7 赎回收益率

对于可赎回债券（callable bond），发行人在到期之前有可能进行赎回，因此就需要计算债券一旦被赎回的收益率，可按照下式计算：

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+y_r)^t} + \frac{P_r}{(1+y_r)^n}$$

式中：y_r为赎回收益率，P为债券价格，C为票面利息，P_r为债券赎回价，T为债券距赎回的期限(一般用年表示)。

实际上，可赎回债券往往会设置首次提前赎回日以及随后的赎回日，因此可以分别计算未赎回的到期收益率、首次赎回收益率和随后的每次赎回收益率，并将其中最低的作为最差收益率。最差收益率对稳健型债券投资者有特别的参考意义。

第三节 收益率的度量

2.3.8持有期收益率——一期的持有期回报率

◆ 即使将债券持有至到期，投资者获得的实际回报率与事先计算出来的到期收益率也可能不相等。在投资期结束后，为了准确地计算债券的事后收益率，人们经常计算债券的持有期回报率(**holding period return，HPR**)。

◆ 持有期回报率是债券在一定持有期内的收益（包括利息收入和资本利得或损失）相对于债券期初价格的比率，它是衡量债券事后实际收益率的准确指标。根据定义，有：

$$\boldsymbol{HPR = [C + (P_1 - P_0)]/P_0}$$

式中：**HPR**为一期的持有期回报率； **C**表示利息；$\boldsymbol{P_1}$表示为第一期期末的价格；$\boldsymbol{P_0}$表债券期初价格。

2.3.8持有期收益率——一期的持有期回报率

【例2-13】投资者支付1000元购买一种半年付息的债券。票面利率是8%，6个月后该债券的市场价格上升为1068.55元，求这半年内投资者的持有期回报率。

解：持有该债券一期(半年)时，

持有期回报率=$[40 + (1068.55 - 1000)]/1000 = 10.86\%$

第三节 收益率的度量

2.3.8持有期收益率——多期的持有期回报率

多期的持有期回报率 y，也就是复利收益率的计算方法：

$$y = \sqrt[n]{\frac{FV}{P_0}} - 1$$

其中，$FV = P_n + C[(1+r)^n - 1]/r$，$P_n$是期末价格，C 是利息，r 是利息再投资利率，n 是持有期数，P_0为债券的期初价格。

第三节 收益率的度量

2.3.8持有期收益率——多期的持有期回报率

- 债券经过n期后的终值包括三部分：债券在第n期的销售价格、发行人支付的利息和在这期间各次利息产生的利息。
- 在实际投资中，每次利息的再投资利率事先是未知的。到期前债券的销售价格也是未知的。只有持有至到期，债券价格才是已知的，等于债券面值。
- 复利收益率只有在投资期结束以后才能计算出来。所以说复利收益率是多期的持有期回报率，衡量的是债券的事后收益率。

第三节 收益率的度量

2.3.9总收益率——持有至到期的债券的总收益率

运用年金的终值公式，可以得到利息与利息再投资所获得的利息之和：

$$\text{利息}+\text{利息的利息}=C\times\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}\right]$$

式中：C表示债券利息；r表示每期再投资利率；n 表示距到期日的期数。

- **其他条件一定时，债券的到期时间越长，利息所生的利息越多，占债券总收益的比重也越大；**
- **票面利率越高，利息所生的利息越多，债券总收益更大程度上依赖于利息再投资所获利息的多少。**

2.3.9总收益率——持有至到期的债券的总收益率

债券的期末价值=总的利息+利息的利息+债券面值

$$每期收益率 = (\frac{期末价值}{期初价值})^{\frac{1}{n}} - 1$$

由于财务报告通常是以年度为基础的，另外，为了便于比较债券的收益率，要将债券的每期收益率转化成实际年收益率。

$$实际年收益率 = (1 + 每期收益率)^{m} - 1$$

式中：m为每年付息的次数。

第三节 收益率的度量

【例2-14】投资者用905.53元购买一种面值1000元的8年期债券，票面利率是12%，半年付息一次，下一次付息在半年后。如果债券持有至到期日，再投资利率为8%。求该债券的总收益率。

解： 8年后的期末价值=60 $\times\ [(1+4\%)^{16}-1]/4\% + 1000 = 2309.47$

所以，半年期总收益率= $(2309.47/905.53)^{\frac{1}{16}} - 1 = 6.03\%$

实际年收益率= $(1+6.03\%)^{2} - 1 = 12.42\%$

我们可以求出该债券的到期收益率是14%，由于再投资利率(8%)小于到期收益率，所以该债券每年的总收益率小于到期收益率。

第三节 收益率的度量

如果再投资利率为16%，情况有何不同?

期末价值$= 60 \times [(1+8\%)^{16} - 1]/8\% + 1000 = 2819.46$

半年期总收益率$= (2819.46/905.53)^{\frac{1}{16}} - 1 = 7.36\%$

实际年收益率$= (1+7.36\%)^{2} - 1 = 15.26\%$

在这里，再投资利率(16%)大于到期收益率，所以债券每年的总收益率也大于到期收益率。

2.3.9总收益率——提前卖出的债券的总收益率

如果债券可能在到期日之前卖出，也就是投资期比到期时间短，此时总收益率的计算方法有所不同，上述计算步骤中需要做修正的只有第一步。

债券的期末价值＝至投资期末的利息＋至投资期末利息所生的利息＋投资期末的债券价格

2.3.9总收益率——提前卖出的债券的总收益率

其中，投资期末的债券价格是事先未知的，取决于投资者对投资期末收益率的预测。我们可以运用债券的定价公式预测出投资期末的债券价格：

$$P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C}{(1+r)^{t}}+\frac{F}{(1+r)^{N}}$$

式中：P为投资期末的债券价格；C为利息；F为债券面值；r为预期的投资期末每期收益率；N为投资期末距到期日的期数。

第三节 收益率的度量

【例 2-15】投资者购买一种 8 年期的平价（1000 元）出售的债券，票面利率为 12%，每半年付息一次，下一次付息在半年后。投资者 5 年后将会把债券卖出，他预期 5 年中利息的再投资利率为每年 8%，5 年后的 3 年期债券的到期收益率为 10%。求该债券的总收益率。

解：5 年内的利息+5 年内利息的利息 $= 60 \times [(1+4\%)^{10} - 1]/4\% = 720.37$

预测的第 5 年末的债券价格为

$$60 \times [1-(1+5\%)^{-6}]/5\% + 1000/(1+5\%)^{6} = 1050.76$$

所以，5 年后的期末价值 $= 720.37+1050.76=1771.13$

那么，半年期总收益率 $= (1771.13/1000)^{\frac{1}{10}} - 1 = 5.88\%$

实际年收益率 $= (1+5.88\%)^{2} - 1 = 12.11\%$

第三节 收益率的度量

【例2-16】在上例中，投资者的预期有所变化，他预期前两年利息的再投资利率为8%，后3年的再投资利率为9%，5年后的3年期债券的到期收益率为10%。求该债券的总收益率。

解：第1、2年的利息+利息的利息$=60\times[(1+4\%)^4-1]/4\%=254.79$(元)

这是它们在第2年末的终值，到第5年末升值为：

$$254.79\times(1+4\%)^6=322.39\text{（元）}$$

第3年至第5年的利息+利息的利息$=60\times[(1+4.5\%)^6-1]/4.5\%=403.01$（元）

第三节 收益率的度量

预测的第5年末的债券价格为：

$$60 \times [1-(1+5\%)^{-6}]/5\% + 1000/(1+5\%)^{6}$$
$$= 1050.76（元）$$

因此，第5年末的财富终值=322.39+403.01+1050.76=1776.16（元）

半年期总收益率$= (1776.16/1000)^{\frac{1}{10}} - 1 = 5.91\%$

实际年收益率$= (1 + 5.91\%)^{2} - 1 = 12.17\%$

第三节 收益率的度量

2.3.9总收益率——可赎回债券的总收益率

如果债券在投资期内可以被发行人赎回，我们应当先计算出投资者在赎回日可以取得的总收入，包括赎回日以前的利息、利息再投资所生的利息，以及赎回价格。这笔收入将按再投资利率投资直至投资期结束为止。因此，在债券总收益率的计算步骤中，我们只需要修正第一步：

期末价值=（赎回日前的利息+利息的利息+赎回价格）×（1 + r）^{N}

式中：r为每期再投资利率；N为赎回日距投资期末的期数。

第三节 收益率的度量

【例2-17】有一种10年期的可赎回债券，面值为1000元，票面利率为7%.半年付息一次，下一次付息在半年后，市场价格是950元。假设在第5年时该债券可赎回，赎回价格为980元。投资期为8年，投资者预期这8年内利息的再投资利率为每年8%。求解总收益率。

解：5年内的利息支付+5年内利息的利息$= 35 \times [(1+4\%)^{10}-1]/4\% = 420.21$（元）

第5年末债券被赎回时，投资者一共获得：420.21+980=1400.21（元）

这笔收入到第8年末升值为：$1400.21 \times (1+4\%)^{6} = 1771.71$（元）

即投资期末的财富终值为1771.71元。

因此，半年期总收益率$= (1771.71/950)^{\frac{1}{16}} - 1 = 3.97\%$

实际年收益率$= (1+3.97\%)^{2} - 1 = 8.10\%$

2.3.10 组合收益率

- 债券的组合收益率不是构成该组合的单个债券到期收益率的加权平均值。
- 计算债券组合到期收益率的正确方法是，将债券组合看做是一个单一的债券，使该债券组合所有现金流的现值等于该债券组合市场价值的适当折现率就是该债券组合的到期收益率，该收益率也被称为债券组合的内部回报率。

第三节 收益率的度量

【例2-18】有一个债券组合，由三种半年付息的债券组成，下次付息均在半年后，每种债券的相关资料如表2-2：

表2-2 债券组合的基本信息

债券名称	票面利率	到期时间（年）	面值（元）	市场价格（元）	到期收益率（年率）
A	6.0%	6	1000	951.68	7.0%
B	5.5%	5	20000	20000.00	5.5%
C	7.5%	4	10000	9831.68	8.0%

该债券组合的总市场价值为951.68+2000.00+9831.68=30783.36（元）

第三节 收益率的度量

表2-3 债券组合的到期收益率

期数	债券 A 的现金流（元）	债券 B 的现金流（元）	债券 C 的现金流（元）	债券组合的总现金流（元）	总现金流的现值（元）
1	30	550	375	955	$955/(1+r)$
2	30	550	375	955	$955/(1+r)^2$
3	30	550	375	955	$955/(1+r)^3$
4	30	550	375	955	$955/(1+r)^4$
5	30	550	375	955	$955/(1+r)^5$
6	30	550	375	955	$955/(1+r)^6$
7	30	550	375	955	$955/(1+r)^7$
8	30	550	10375	10955	$955/(1+r)^8$
9	30	550		580	$955/(1+r)^9$
10	30	20550		20580	$955/(1+r)^{10}$
11	30			30	$955/(1+r)^{11}$
12	1030			1030	$955/(1+r)^{12}$
总市场价值					30783.36

第三节 收益率的度量

债券组合的到期收益率

通过下式求债券组合的到期收益率**r**：

$$30783.36 = 955 \times \frac{1-(1+r)^{-7}}{r} + \frac{10955}{(1+r)^{8}} + \frac{580}{(1+r)^{9}} + \frac{20580}{(1+r)^{10}} + \frac{30}{(1+r)^{11}} + \frac{1030}{(1+r)^{12}}$$

可以求出该债券组合的到期收益率是**6.26%**。

第三节 收益率的度量——小 结

一、11种收益率的定义及其计算公式

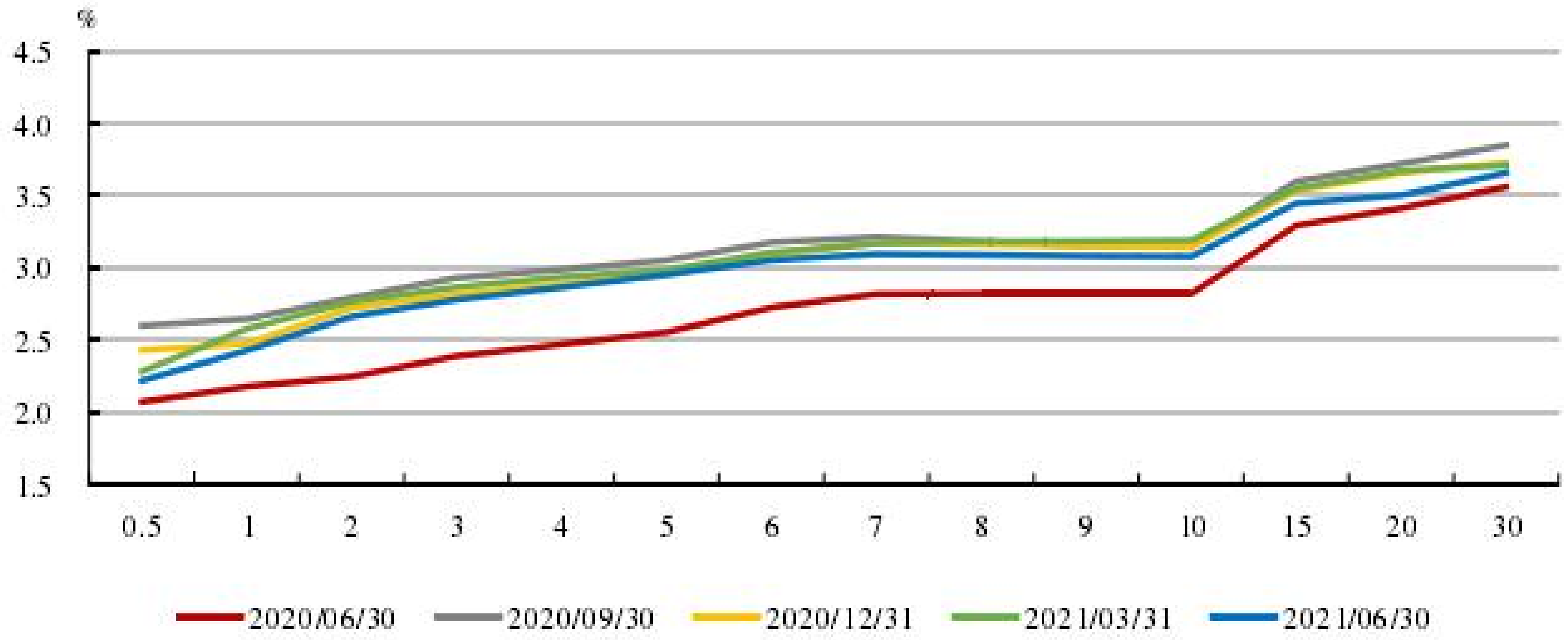
当期收益率、实际年收益率、内部收益率、到期收益率、约当收益率、赎回期收益率、即期收益率、远期收益率、持有期收益率、总收益率、组合收益率

二、课外作业：将课件里面的例题重新计算1遍。

第四节 收益率曲线概述

中国货币政策执行报告

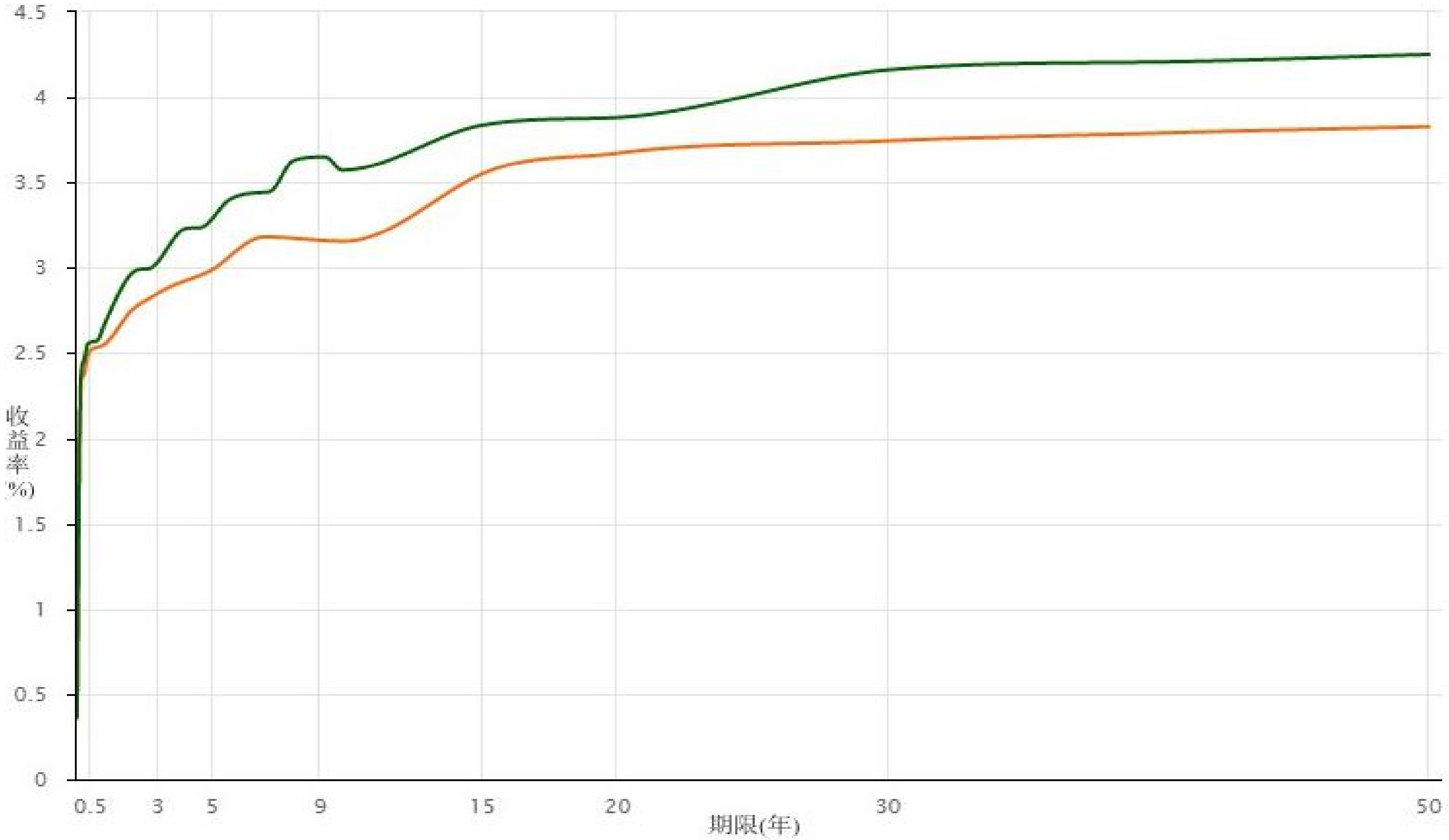
2021年第二季度



数据来源：中央国债登记结算有限责任公司。

图5 银行间市场国债收益率曲线变化情况

第四节 收益率曲线概述



颜色	曲线名称
■	中债国债收益率曲线（到期）[2020-12-29]
■	中债国开债收益率曲线（到期）[2020-12-29]

图2-8 2020年12月29日的国债与国家开发银行债收益率曲线

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型

2.4.2收益率曲线的形状和作用

2.4.3到期收益率曲线的形成和功能缺陷

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——收益率曲线的含义

- 所谓的收益率曲线，就是显示一组信用质量相同、但期限不同的债券或其他金融工具的收益率之间的数量关系图。
- 根据定义中提及的金融工具不同，因此有不同的收益率曲线类型。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

- 到期收益率曲线
- 付息债券到期收益率曲线
- 平价到期收益率曲线
- 即期收益率曲线
- 远期收益率曲线
- 年金收益率曲线

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——收益率曲线的类型

- **到期收益率曲线**

到期收益率曲线是根据一组相同类型债券的到期期限和到期收益率绘制的。到期收益率曲线之所以是最常见的收益率曲线，原因就在于到期收益率是最常用的报酬率指标。

完美的到期收益率曲线?

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

➢ 附息债券的收益率曲线

附息债券收益率曲线是根据一组具有相同票面利率债券的到期收益率与到期期限所绘制的收益率曲线。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——收益率曲线的类型

平价收益率曲线

- 平价收益率曲线在二级市场的交易中不常使用，但发行市场或一级市场中的公司财务人员和其他人员经常使用这种收益率曲线。
- 平价收益率曲线是根据当前以面值交易的债券的到期收益率和到期期限绘制的。对那些以面值或接近面值的价格交易的债券来说，其平价收益率等于这些债券的票面利率，因为交易价格等于面值的债券的到期收益率就等于票面利率。
- 一级市场的参与者可按平价收益率确定按面值发行的新债券所需要的票面利率。投资者倾向于以不高于面值的价格购买新发行的债券，因此债券的票面利率应与债券发行价格等于或稍低于债券面值相匹配。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

平价收益率曲线

- 当债券以面值或接近面值的价格交易时，可以根据债券的收益率绘制平价收益率曲线。
- 实际上，任何期限的债券的交易价格都很少等于面值。因此，债券市场利用实际的非平价普通债券收益率曲线推导出零息债券的收益率曲线，然后再假设债券以面值进行交易的情况下绘制假设的平价收益率曲线。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——收益率曲线的类型

零息债券（或即期）收益率曲线

- 零息债券收益率曲线根据零息债券的收益率和到期期限绘制，如果存在具有流动性的零息债券，市场可根据这些债券绘制零息收益率曲线，然而绘制零息债券收益率曲线并不必须一组零息债券。
- 根据附息债券收益率曲线或平价收益率曲线推导出零息债券收益率曲线。实际上，在很多没有零息债券交易的市场中，可以根据传统到期收益率曲线构建即期收益率曲线。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

➢ 零息债券（或即期）收益率曲线

即期收益率必须满足下面的等式，该等式假设债券每年支付一次利息，并且在付息日进行计算，因而应计利息为零。

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{(1+r_t)^t}+\frac{M}{(1+r_T)^T}$$

其中，P为债券当前价格，r_t到期期限为t年的债券的即期或零息收益率。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

远期收益率曲线

- 在远期金融交易中，交易双方约定在未来某个时间按现在确定的价格用现金交换某个证券。因此，债券所适用的远期利率是债券在未来的即期收益率，也就是所购买的债券在未来某个时点结算时的零息债券的收益率。

- 远期利率是现在根据当前的收益率曲线数据推导出来的，因此，*认为远期利率是对未来即期利率的预测是不正确的。*

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

远期收益率曲线

远期利率可以根据即期利率推导，推导出的利率称为隐含远期利率，是当前即期利率所隐含的利率。远期收益率曲线或远期对远期收益率曲线，根据远期利率和到期期限绘制。远期利率满足如下等式

$$P=\frac{C}{(1+f(0,1))}+\frac{C}{(1+f(0,1))(1+f(1,2))}+\dots+\frac{M}{(1+f(0,1))(1+f(T-1,T))}$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{\prod_{i=1}^{n}(1+f(i-1,i))}+\frac{M}{\prod_{i=1}^{N}(1+f(i-1,i))}$$

其中，$f(i-1,i)$是隐含的一年期债券的远期利率或远期对远期利率，该债券在T年到期。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

远期收益率曲线

◆ 将远期利率曲线看作利率的指示器是对该曲线的误用，远期利率的推导过程反映了所有当前已知的的市场信息。

◆ 在计算远期利率之后可能出现新的**市场信息**，而这些新的市场信息可能改变人们对未来利率的看法，并相应地引起远期利率曲线的变化。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——**收益率曲线的类型**

年金收益率曲线

- **寿险公司以及其他个人养老金公司常使用年金收益率曲线，该曲线根据年金收益率与到期期限绘制，它是按即期收益率为年金产品定价时所隐含的收益率。**
- **即期收益率曲线和年金收益率曲线之间的关系，取决于市场利率水平。**
  - 如果即期收益率曲线向上倾斜，年金收益率就在即期收益率曲线之下；如果即期收益率曲线向下倾斜，年金收益率曲线就位于即期收益率曲线之上。
  - 当票面利率较低时，债券的现金流的现值主要由最后的支付决定，年金收益率曲线与即期收益率曲线就比较接近；当票面利率较高时，这两条曲线就会逐渐分开。

读者可以自行证明这些结论。

第四节 收益率曲线概述

2.4.1收益率曲线的含义和类型——收益率曲线的类型

【例】附息债券期限为5年，面值为100元，票面利率为8%，半年支付1次利息。这一附息债券可以视为两个证券来构成。其中一个是年金债券，期限为5年，每半年产生4元的现金，共有10个点的现金流。另一个是5年的零息债券，面值是100元。

表 2-1 年金证券的拆分

时间点	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
年金证券		4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
零息债券		0	0	0	0	0	0	0	0	0	100
附息债券		4	4	4	4	4	4	4	4	4	104

第四节 收益率曲线概述

表 2-2　即期利率与年金证券的到期收益率

时间点	即期利率	现金流量	现值	年金证券的价值	年金证券的到期收益率
1	5%	100	95.238		5%
2	6%	100	89.000	184.238	5.6517%
3	6.50%	100	82.785	267.023	6.0563%
4	7%	100	76.290	343.312	6.4062%
5	7.30%	100	70.307	413.620	6.6743%

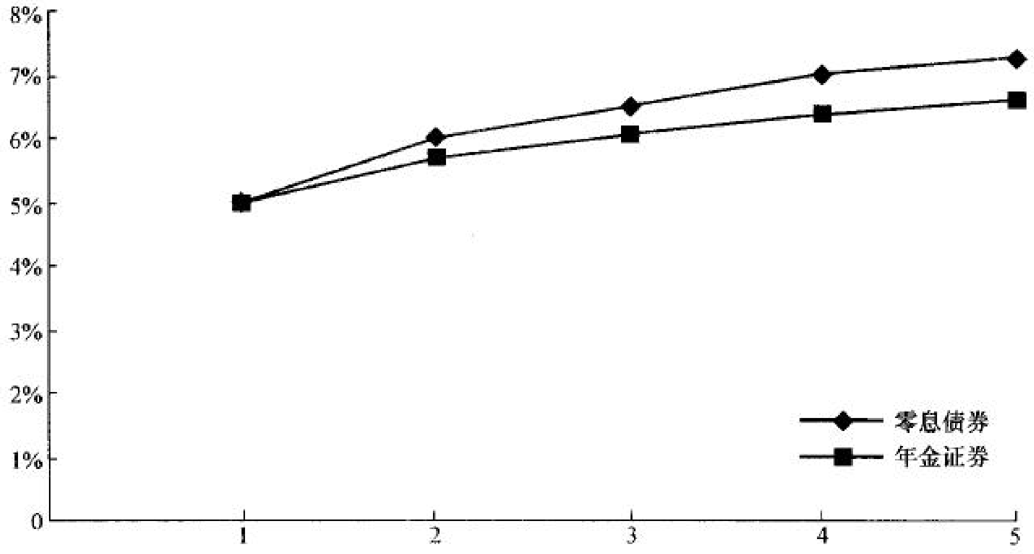


图 2-2　即期利率与年金证券的到期收益率

实证表明：如果零息债券到期收益率曲线或者说即期利率曲线是向右上方倾斜的，那么年金证券到期收益率曲线也向右上方倾斜，并且居于即期利率曲线的下方。?

第四节 收益率曲线概述

实际上，年金证券可以被理解为票面利率极大化的债券，零息债券是票面利率最小化的债券，因此，一般附息债券可以被理解为这两种债券的合成品，附息债券的到期收益率是这两个证券到期收益率的某种平均。

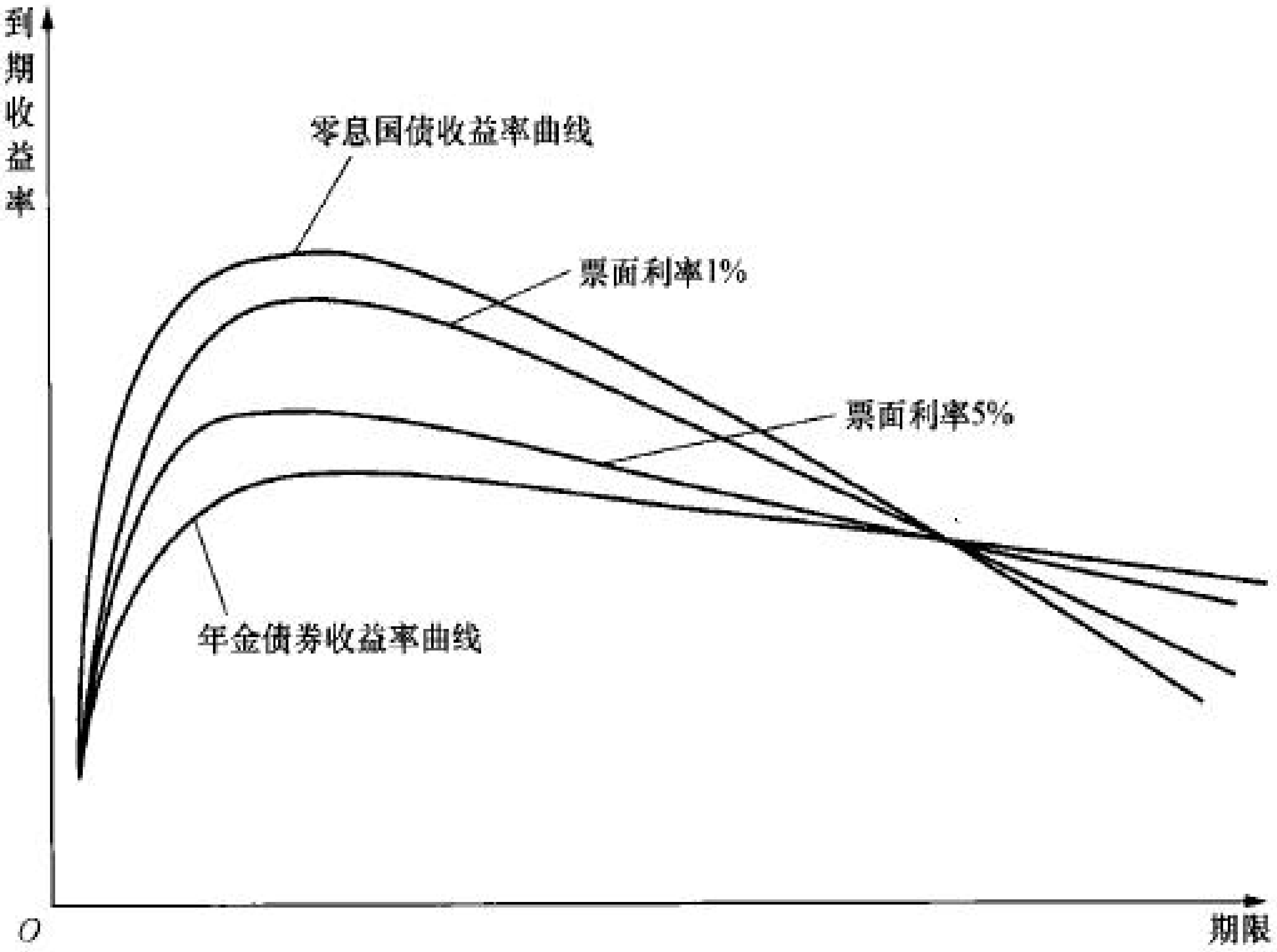


图 2-3 票面利率与到期收益率的关系

第四节 收益率曲线概述

中央国债登记结算有限责任公司自1999年开始编制中国债券收益率曲线（中债收益率曲线），并于2002年实现了第一次升级后，又经过公司内外部专家的深入研究、比较后，结合中国债券市场的实际情况，提出并开发出了全新的债券收益率曲线构建模型。中债收益率曲线的编制理念是为中国债券市场提供完全客观、中立的收益率参考标准。

https://www.chinabond.com.cn/d2s/cbData.html

- 国债收益率曲线
- 中央银行债收益率曲线
- 政策性金融债收益率曲线
- 商业银行次级债收益率曲线
- 企业债收益率曲线
- 短期融资券收益率曲线

第四节 收益率曲线概述

课堂练习

请构造两个算例验证下面的结论。

◆如果即期利率曲线向右下方倾斜，那么年金证券到期收益率曲线也向右下方倾斜，但居于即期利率曲线的上方;

◆如果即期利率曲线先上升后下降，那么年金证券到期收益率曲线也先上升后下降，但最初居于即期利率曲线的下方，与即期利率曲线相交后，居于即期利率曲线的上方。

第四节 收益率曲线概述

2.4.2收益率曲线的形状和作用——收益率曲线的形状

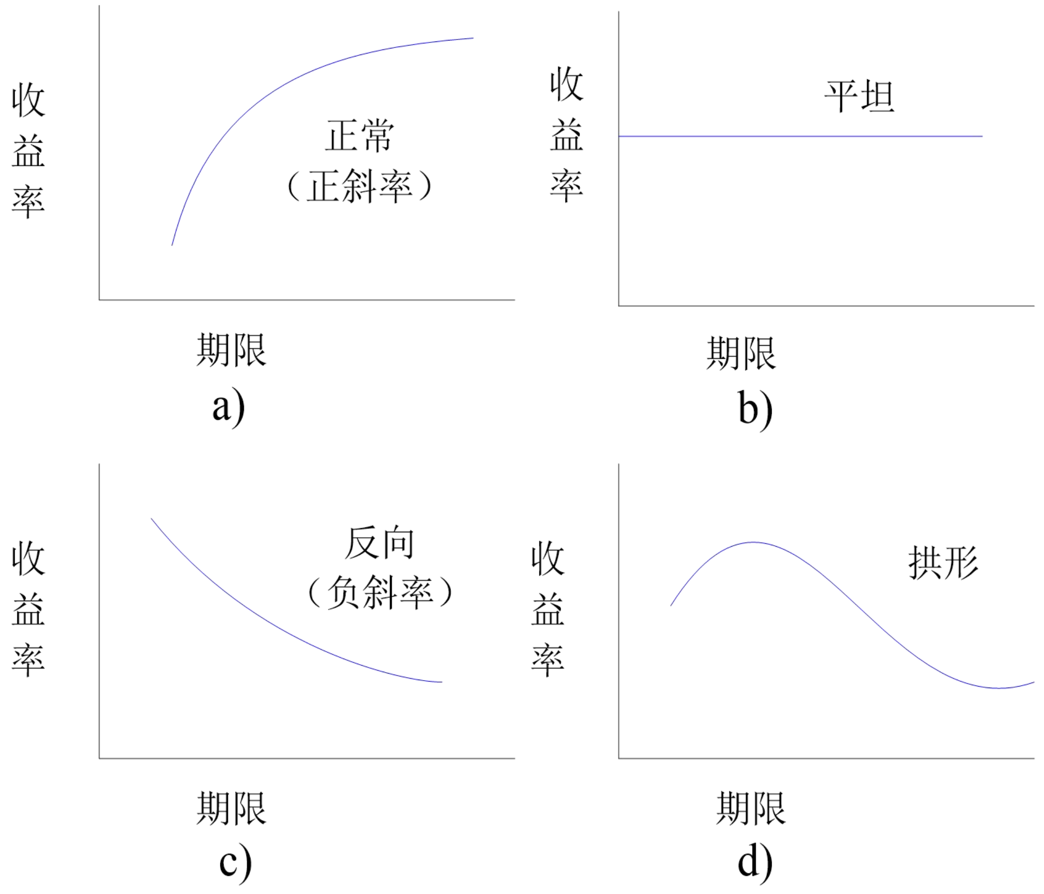


图2-9 四种形态的收益率曲线

第四节 收益率曲线概述

2.4.2收益率曲线的形状和作用——收益率曲线的形状

- 图2-9中a)为向上的收益率曲线又称为正常的收益率曲线，表示到期期限越长，收益率越高。这种类型的收益率曲线在实际中最常见。
- 图2-9中b)为向下的收益率曲线，表示到期期限越长，收益率越低。
- 图2-9中c)为水平的收益率曲线，表示不同期限的收益率相等，呈水平型。
- 图2-9中d)为拱形的收益率曲线又称为驼峰型收益率曲线，表示收益率先随着到期期限的增长而增加，然后达到一个顶点，随后又随着到期期限的增长而下降，呈拱形，继而又上升。

2.4.2收益率曲线的形状和作用——收益率曲线的作用

收益率曲线可以告诉我们，债券市场当前的交易价格还隐含有未来的交易价格，或者至少隐含了市场对未来的预期。换句话说，收益率曲线是反映未来市场状况的一个很好的指标，与其他指标相比，收益率曲线要可靠得多，实证经验也很好的证明了这一点。债券资本市场的所有参与者都对收益率曲线的当前水平和形状以及他们所隐含的未来信息非常感兴趣。

第四节 收益率曲线概述

2.4.2收益率曲线的形状和作用——收益率曲线的作用

- 确定所有债务市场工具的收益率。**收益率曲线基本上确定了期限结构不同的各种债券的价格。**

- 作为未来收益率水平的指示器。收益率曲线的形状与市场对未来利率的预期相对应，债券市场参与者分析收益率曲线当前形状的目的就是为了获得收曲线中所隐含的有关市场利率未来走向的信息。

第四节 收益率曲线概述

2.4.3到期收益率曲线的形成和功能缺陷——到期收益率曲线的形成

- ✓ 如何得到到期收益率曲线？直接的办法就是根据债券的交易价格，直接算出其到期收益率。然后，将具有相同信用质量但剩余期限不同的债券的到期收益率在图上标示出来，就是一条到期收益率曲线。
- ✓ 当然，这种办法还是比较粗糙。一是因为这样的线条其实不是光滑的曲线，而是连点描绘的折线。二是市场上如果存在错误定价的债券，则收益率曲线也许存在不合理的因素。因此，就有必要利用数学工具对市场实际债券的到期收益率数据进行处理，拟合出比较光滑的到期收益率曲线。

第四节 收益率曲线概述

2.4.3到期收益率曲线的形成和功能缺陷——到期收益率曲线的功能缺陷

- ✓ 到期收益率曲线并未区分各种债券因票面利率不同而造成的不同还本付息模式之间的差异。也就是说，与具有相同到期期限的债券相比，票面利率较低的债券在后期的现金流支付比例较大。
- ✓ 收益率曲线还假设所有债券的现金流都是平均分布的。因此，在这种情况下，对收益率曲线构建时所使用的债券来讲，其现金流并不是按恰当的折现率来折现的。
- ✓ 债券收益率曲线的重要功能，在于给市场设置收益率标准并作为定价基础。其功能是有限的，既难于作为收益率标准，又无法合理用来定价。

第四节 收益率曲线概述

2.4.3到期收益率曲线的形成和功能缺陷——到期收益率曲线的功能缺陷

从第一个方面来看，有两个信用质量完全相同的债券，它们的到期期限相同，但它们的到期收益率可能是不一样的。比如，有A、B两个国债，面值都是100元，到期期限都是2年，票面利率都为10%，但A国债是到期一次还本付息，B国债是每年付息一次。显然，在有效的市场上（假设1年期现金流折现率为3.50%、2年期现金流折现率为4.50%），它们的到期收益率是不一样的，见表2-4。

表2-4 相同期限债券的到期收益率可能不同

时期	1 年	2 年	价格（元）	到期收益率
折现率	3.50%	4.50%		
A 国债现金流	0	120	109.89	4.50%
B 国债现金流	10	110	110.39	4.45%

2.4.3到期收益率曲线的形成和功能缺陷——到期收益率曲线的功能缺陷 从第二个方面来看，在实际定价时对多笔现金流折现采用统一的到期收益率并不合理。比如，有如下的到期收益率曲线：1年期对应的到期收益率为2%，2年期对应的到期收益率为3%，3年期对应的到期收益率为4%。假设现在财政部发行一个面值100元、每年付息一次的3年期债券，票面利率5%。于是一个承销商可以按照102.78元购得，因为：

$$\frac{5}{1+4\%}+\frac{5}{(1+4\%)^2}+\frac{5+100}{(1+4\%)^3}=102.78\text{元}$$

第四节 收益率曲线概述

然后该承销商自己发行三个折现债券：A债券期限1年、面值5元，B债券期限2年、面值5元，C债券期限3年、面值105元，其发行价分别为4.90元、4.71元和93.34元，共得到102.95元。因为有：

$$\frac{5}{1+2\%}=4.9\text{元、}\frac{5}{(1+3\%)^2}=4.71\text{元、}\frac{5+100}{(1+4\%)^3}=93.34\text{元}$$

以后承销商自己发行的债券到期时，只需用财政部支付的债券利息和本金来分别偿付，结果可以无风险地获得利益0.17元。显然，这里存在用到期收益率曲线定价不合理的问题。

第四节 收益率曲线概述

课堂练习

（1）收益率曲线的定义？收益率曲线通常有哪些类型？

（2）收益率曲线的形状有哪几种？为什么可能出现这些形态？

第二章　固定收益证券基础——小 结

第一节 货币的时间价值

第二节 折现因子与利率

第三节 收益率的度量

第四节 收益率曲线概述