

张 波 商 豪

中国人民大学 统计学院

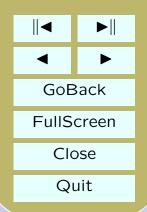






- 2.1 基本概念
- 2.2 有限维分布与Kolmogorov定理
- 2.3 随机过程的基本类型





# **§2.1** 基本概念

定义 2.1.1 随机过程是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$ ,其中t是参数,它属于某个指标集下,下称为参数集.

#### 注:

- 当 $T = \{0, 1, 2, \cdots\}$  时称之为随机序列或时间序列.
- 随机过程 $\{X(t,\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ 是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数.
- 参数空间T 是向量集合时,随机过程 $\{X(t), v \in T\}$ 称为随机场。

随机过程的分类: (1) X(t)表示系统在时刻t所处的状态.





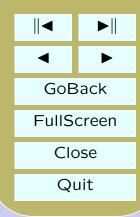
- (2) X(t)的所有可能状态构成的集合为状态空间,记为S.
- (3) 依照状态空间可分为连续状态和离散状态;
- (4) 依照参数集,可分为离散参数过程和连续参数过程.

注: 一般如果不作说明都认为状态空间是实数集ℝ或ℝ的子集.

例 2.1.2 (随机游动)一个醉汉在路上行走,以概率p前进一步,以概率1-p后退一步(假定其步长相同). 以X(t)记他在路上的位置,则X(t)就是直线上的随机游动.

例 2.1.3 (Brown运动) 英国植物学家Brown注意到





飘浮在液面上的微小粒子不断进行无规则的运动,这种运动后来称为Brown运动.它是分子大量随机碰撞的结果.若记(X(t),Y(t))为粒子在平面坐标上的位置,则它是平面上的Brown运动.

例 2.1.4 (排队模型)顾客来到服务站要求服务. 当服务站中的服务员都忙碌,即服务员都在为别的顾客服务时,来到的顾客就要排队等候. 顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的,所以如果用X(t)表示t时刻的队长,用 Y(t)表示t时刻到来的顾客所需的等待时间,则 $\{X(t),t\in T\}$ , $\{Y(t),t\in T\}$ 都是随机过程.





# §2.2 有限维分布与Kolmogorov定理

定义 2.2.1 对任意有限个 $t_1, \dots, t_n \in T$ ,定义随机过程的n维分布  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ :

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X(t_1) \le x_1,\dots,X(t_n) \le x_n).$$

随机过程的所有的一维分布,二维分布,…,n维分布等等的全体

$$\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n),t_1,\dots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限分布族.

注: 知道了随机过程的有限维分布就知道了 $\{X(t), t \in T\}$ 中任意n个随机变量的联合分布. 也就掌握了这些随机变量之间的相互依赖关系.



6/27



Quit

Close

## 分布族的性质: (1) 对称性

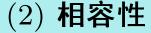
对 
$$(1,2,\cdots,n)$$
的任一排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ ,有

$$F_{t_{j_1}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n})$$

$$= P(X(t_{j_1}) \le x_{j_1}, \dots, X(t_{j_n}) \le x_{j_n})$$

$$= P(X(t_1) \le x_{t_1}, \dots, X(t_n) \le x_{t_n})$$

$$= F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$



对于 m < n,有

$$F_{t_1,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_m,\infty,\cdots,\infty)=F_{t_1,\cdots,t_m}(x_1,\cdots,x_m).$$

定理 2.2.2 设分布函数族 $\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n),t_1,\dots,t_n\in T,n\geq 1\}$  满足上述的对称性和相容性,则必存在一个随机





过程 $\{X(t), t \in T\}$ , 使

$$\{F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n),t_1,\dots,t_n\in T,n\geq 1\}$$

恰好是 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布族.

注:随机过程的有限维分布函数族是随机过程概率特征的完整描述,它是证明随机过程存在性的有力工具.但是在实际问题中,要知道随机过程的全部有限维分布是不可能的,因此,人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

定义 2.2.3 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程.

- (1) 称X(t)的期望  $\mu_X(t) = E[X(t)]$ 为过程的均值函数(如果存在的话).
  - (2)如果 $\forall t \in T, E[X^2(t)]$ 存在, 则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$





T} 为二阶矩过程.

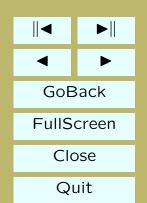
此时, 称函数 $\gamma(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))], t_1, t_2$  T 为过程的协方差函数; 称 $Var[X(t)] = \gamma(t, t)$ 为过程的方 **差函数**; 称 $R_X(s, t) = E[X(s)X(t)], s, t \in T$  为自相关函数.

由Schwartz不等式知,二阶矩过程的协方差函数和自相关函数存在,且有  $\gamma_X(s,t)=R_X(s,t)-\mu_X(s)\mu_X(t)$ .

例 2.2.4  $X(t) = X_0 + tV, a \le t \le b$ , 其中 $X_0$ 和V是相互独立且服从N(0,1)分布的随机变量.

注: 易知X(t)服从正态分布,且 $X(t_1)$ ,  $\dots$ ,  $X(t_n)$ 也是n维正态分布. 所以只要知道它的一阶矩和二阶矩就





### 完全确定了它的分布.

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E(X_0 + tV) = EX_0 + tEV = 0$$

$$\gamma(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(X_0 + t_1V)(X_0 + t_2V)]$$

$$= E[X_0^2] + t_1t_2E[V^2] = 1 + t_1t_2.$$



#### 10/27

# §2.3 随机过程的基本类型

## **§2.3.1** 平稳过程

定义 2.3.1 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对任意的 $t_1, \dots, t_n \in T$ 和任意的h(使得 $t_i + h \in T$ )有,

 $(X(t_1+h), \dots, X(t_n+h))$ 与  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 具有相同的联合分布,记为

$$(X(t_1+h),\cdots,X(t_n+h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1),\cdots,X(t_n))$$
 (2.3.1)



则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为严平稳的.

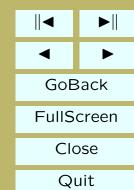
定义 2.3.2 如果随机过程X(t)的所有二阶矩都存在,并且均值函数 $E[X(t)] = \mu$ ,协方差函数 $\gamma(t,s)$ 只与时间差t-s有关,则称 $\{X(t),t\in T\}$ 为宽平稳过程或二阶平稳过程.

#### 注:

- 对于宽平稳过程,由于 $\gamma(s,t) = \gamma(0,t-s), s,t \in \mathbb{R}$ ,可记为 $\gamma(t-s)$ ;
- $\bullet$   $\gamma(t)$ 为偶函数,且 $\gamma(0) = var(X(t)), |\gamma(\tau)| \le \gamma(0);$
- $\gamma(\tau)$ 具有非负定性,即对任意时刻 $t_k$ 和实数 $a_k, k = 1, 2, \dots, N$ ,有

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \ge 0.$$





当参数t仅取整数值 $0,\pm 1,\pm 2\cdots$ 或  $0,1,2\cdots$ 时,称平稳过程为平稳序列。

例 2.3.3 (平稳白噪声序列) 设 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为一列两两互不相关的随机变量序列,满足 $EX_n = 0, n = 0, 1, 2 \dots$ ,且

$$EX_m X_n = \begin{cases} 0, & \exists m \neq n \\ \sigma^2, & \exists m = n \end{cases}$$

则白噪声序列 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为平稳的. 这是因为协方 差函数 $cov(X_n, X_m) = E(X_n X_m)$ 只与m - n有关.

例 2.3.4 (滑动平均序列)设 $\{\varepsilon_n, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$ 为一列互不相关的且有相同均值m和方差 $\sigma^2$ 的随机变量序列. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为任意k个实数. 考虑如下定义序列的平稳



12/27



### 性:

$$X_n = a_1 \varepsilon_n + a_2 \varepsilon_{n-1} + \dots + a_k \varepsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## 容易看出

$$EX_n = m(a_1 + \dots + a_k).$$

令 $\xi_j = \varepsilon_j - m$ ,则由 $\varepsilon_j$ 的两两互不相关性知,协方差函数

即协方差函数仅与时间间隔 $\tau$ 有关. 故 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为平稳序列.



13/27



Close

考虑如下两个特殊平稳过程:

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为独立同分布随机变量序列,  $E[X_n^2] < \infty, E[X_n] = \mu, n = 0, 1, 2, \cdots$ 

 ${Y_n = Y, n \ge 0}$ , 其中Y是随机变量,  $E[Y^2] < \infty$ .

可以用这两个过程来阐述不同平稳过程之间的差异.对过程 $\{X_n\}$ 而言,由大数定律知,

$$\frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1})$$

以概率1收敛于常数m.但对于过程 $\{Y_n\}$ 而言

$$\frac{1}{n}(Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}) = Y$$

即经对时间的平均后,随机性没发生任何改变.于是自然产生这样的问题: 在何种条件下,平稳过程对时间的平均值可以等于过程的均值?



14/27



对于平稳过程 $\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$ ,重要的是确定它的均值 $\mu$ 和它的协方差函数 $\gamma(\tau)$ . 由于 $E[X_t]=\mu$ ,为估计 $\mu$ ,就必须对随机过程 $\{X_n\}$ 作大量观察. 以 $X_j(t)$ 记第j次观察中时刻t的值, $j=1,2,\cdots,n$ . 由大数定律知,可以用 $\widehat{\mu}=\frac{1}{n}(X_1(t)+\cdots+X_n(t))$ 来估计 $\mu$ .同样,为了估计协方差函数 $\gamma(\tau)$ ,也可以用

$$\widehat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_k(t+\tau) - \widehat{\mu})(X_k(t) - \widehat{\mu})$$

来估计.然而对随机过程作多次观察一般来说很难做到,容易的是作一次观察,获得一条样本路径,我们希望由这一次观察来估计 $\mu$ 和 $\gamma(\tau)$ .对于一般的随机过程这是不可能的,但是对于平稳过程,只要加上一些条件,就可以从一次观察中得到 $\mu$ 和 $\gamma(\tau)$ 的较好的估计,这就是遍历性定理.





定义 2.3.5 设 $\{X(t), -\infty < t < \infty\}$ 为一平稳过程,

若

$$\overline{X} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)dt = m$$
 (2.3.2)

或当参数空间为 $T = \mathbb{Z}(整数集)$ 时,

$$\overline{X} = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} X(k) = m$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值有遍历性.

注: 这里的极限是指在均方意义下的极限,即

$$\lim_{T \to \infty} E\left[ \left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t) dt - m \right|^2 \right] = 0.$$

定义 2.3.6

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (X(t) - m)(X(t + \tau) - m) dt = \gamma(\tau)$$



16/27









FullScreen

Close

或当参数空间为 $T = \mathbb{Z}$ 时,

$$\overline{\gamma}(\tau) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} (X(k)-m)(X(k+\tau)-m) = \gamma(\tau)$$

则称 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差有遍历性.

定义 2.3.7 若随机过程(或随机序列)的均值和协方 差函数都具有遍历性,则称此随机过程有遍历性.

注: 如果t 只取非负实数(非负整数)时,相应的积分和求和就限制在 $[0,\infty)$ 上. 如相应于上述定义改为:

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt = m$$

或

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} X(k) = m.$$



17/27







FullScreen

Close

由遍历性的定义式,自然提出问题:极限是否存在?如果存在,它是随机变量的极限.那么在什么条件下它能等于常数呢?

### 定理 2.3.8 (均值遍历性定理)

(1) 设 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程,则 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 的均值有遍历性的充分必要条件是

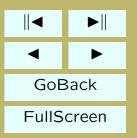
$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{2T}) \gamma(\tau) d\tau = 0.$$

(2)设 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 是平稳序列,其均值函数为 $\mu$ ,协方差函数为 $\gamma(\tau)$ ,则 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ 的均值有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \gamma(\tau) = 0.$$



18/27



Quit

Close

证明: 由于证明的思路相同,这里只证明连续时间的均值遍历性定理. 首先,计算 $\overline{X}$ 的均值和方差. 记

$$\bar{X}_T = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t) dt,$$

则有

$$E\bar{X} = E \lim_{T \to \infty} \bar{X}_T = \lim_{T \to \infty} E\bar{X}_T = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T EX(t)dt = m$$



19/27



### 进而

$$\begin{split} Var(\bar{X}) &= E[(\bar{X} - E\bar{X})^2] \\ &= E\lim_{T \to \infty} \left[ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (X(t) - m) dt \right]^2 \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{4T^2} E\left[ \int_{-T}^T (X(t) - m) dt \right]^2 \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E[(X(t) - m)(X(s) - m)] dt ds \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \gamma(t - s) dt ds \end{split}$$

在上述积分中, 做变换

$$\begin{cases} \tau = t - s \\ v = t + s \end{cases}$$



20/27





FullScreen

Close

### 则变换的Jacobi行列式值为

$$J = \begin{vmatrix} 1 - 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}$$

积分区域变换为顶点分别在T轴和V轴上的菱形区域

$$D: -2T \le \tau \pm v \le 2T.$$

由于 $\gamma(\tau)$ 是偶函数,故 $Var(\bar{X})$ 等于

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{4T^2} \cdot \frac{1}{2} \iint_D \gamma(\tau) d\tau dv$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{8T^2} \int_{-2T}^{2T} \gamma(\tau) d\tau \int_{-(2T - |\tau|)}^{2T - |\tau|} dv$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} \gamma(\tau) (2T - |\tau|) d\tau$$



21/27





FullScreen

Close

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} \gamma(\tau) (2T - \tau) d\tau$$
$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \gamma(\tau) (1 - \frac{\tau}{2T}) d\tau.$$

故关于均值的遍历性定理就化为上式极限是否趋于零的问题.于是由均方收敛的定义知这确实是等价的.

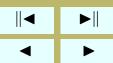
推论 2.3.9 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau < \infty$ , 则均值遍历性定理成立.

证明:由于当 $0 \le \tau \le 2T$ 时, $|(1 - \tau/2T)\gamma(\tau)| \le |\gamma(\tau)|$ ,

$$\frac{1}{T} \left| \int_0^{2T} (1 - \frac{\tau}{T}) \gamma(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{T} \int_0^{2T} |\gamma(\tau)| d\tau \\
\leq \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |\gamma(\tau)| d\tau \to 0.$$



22/27



GoBack

FullScreen

Close

推论 2.3.10 对于平稳序列而言,若 $\gamma(\tau) \to 0(\tau \to \infty)$ , 则均值遍历性定理成立.

证明: 因为当 $\tau \to \infty$ 时,  $\gamma(\tau) \to 0$ , 故由Stoltz定理知

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\tau=0}^{N-1} \gamma(\tau) = \lim_{N \to \infty} \gamma(N-1) = 0$$

从而序列的均值有遍历性.

协方差函数遍历性定理:

## 定理 2.3.11 (协方差函数遍历性定理)

设 $\{X_t, -\infty < t < \infty\}$ 是平稳过程,其均值函数为零,则协方差函数有遍历性的充分必要条件是

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} \left( 1 - \frac{\tau_1}{2T} \right) (B(\tau_1) - \gamma^2(\tau)) d\tau_1 = 0$$
  
其中  $B(\tau_1) = E[X(t + \tau + \tau_1)X(t + \tau_1)X(t + \tau)X(t)].$ 



23/27



Close

注:对于平稳过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的协方差函数 $\gamma(\tau)$ 的遍历性定理,可以考虑随机过程 $\{Y_{\tau}(t), -\infty < t < \infty\}$ ,其中

$$Y_{\tau}(t) = (X(t+\tau) - m)(X(t) - m),$$

则 $E[Y_{\tau}(t)] = \gamma(\tau)$ . 由定理的证明过程可见,均值具有遍历性等价于 $var(\overline{X}) = 0$ . 因此可以类推协方差函数  $\gamma(\tau)$ 具有遍历性等价于 $Var(\overline{\gamma}(\tau)) = 0$ .

例 2.3.12 设 $X(t) = a\cos(\omega t + \Theta), \Theta \sim U(0, 2\pi), \omega \neq 0$ , 则 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 的均值有遍历性.

证明: 其均值函数为:  $EX(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos(\omega t + \theta) d\theta = 0$ , 其协方差函数为:

$$E[X(t+\tau)X(t)] = E[a^2\cos(\omega(t+\tau) + \Theta)\cos(\omega t + \Theta)]$$



24/27



$$= \frac{a^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((t+\tau)\omega + \theta) \cos(t\omega + \theta) d\theta$$

$$= \frac{a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos((2t+\tau)\omega + 2\theta) + \cos\tau\omega] d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2\pi} \cos\tau\omega$$

所以 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ 是平稳过程. 又因为

$$\frac{1}{T} \int_0^{2T} \left( 1 - \frac{\tau}{2T} \right) \gamma(\tau) d\tau = \frac{a^2}{2T} \int_0^{2T} \left( 1 - \frac{\tau}{2T} \right) \cos \omega \tau d\tau$$
$$= \frac{a^2}{2T} \cdot \frac{\sin 2T\omega}{\omega} - \frac{a^2}{4T^2} \int_0^{2T} \tau \cos \omega \tau d\tau.$$

由微分第二中值定理可知,存在 $\xi \in (0,2T)$ ,使得

$$\left| \int_0^{2T} \tau \cos \omega \tau d\tau \right| = \left| 2T \int_{\xi}^{2T} \cos \omega \tau d\tau \right| \le \frac{4T}{\omega},$$



25/27



GoBack

FullScreen

Close

从而,令 $T \to \infty$ ,得  $\frac{1}{T} \int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) \gamma(\tau) d\tau \to 0.$ 

故均值遍历性成立.

## §2.3.2 独立增量过程

定义 2.3.13 如果对任何 $t_1, t_2, \dots t_n \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 随机变量 $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的,则称X(t)为独立增量过程. 如果对任何  $t_1, t_2$ ,有 $X(t_1+h)-X(t_1)\stackrel{d}{=} X(t_2+h)-X(t_2)$ ,则称 $\{X(t), t\in T\}$ 为是平稳增量过程. 兼有独立增量和平稳增量的过程称为平稳独立增量的过程.

注: 平稳独立增量过程的均值函数是时间t的线性函数. 本书后面将要介绍的Poisson过程和Brown运动都是这类过





程.这两类过程是随机过程理论中的两块最重要的基石.



