3.2 ARMA模型

- **AR模型（Auto Regression Model）**
- MA模型（Moving Average Model）
- ARMA模型（Auto Regression Moving Average model）

一、自回归过程：AR模型

通常地，由于系统惯性的作用，时间序列往往存在着前后依存关系。最简单的一种情形就是变量当前的取值主要与其前几期的取值状况有关，用数学模型来描述这种关系就是下面介绍的 p 阶自回归模型。

具有如下结构的模型称为 p 阶自回归模型，简记为 AR(p):

$$
\begin{cases}
x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t \\
\phi_p \neq 0 \\
E(\varepsilon_t) = 0,\quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, s \neq t \\
Ex_s \varepsilon_t = 0, \forall s < t
\end{cases}
$$

自回归过程：AR模型

AR(p)模型通常可简记为：

$$\boldsymbol{x_t = \phi_0 + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \varepsilon_t}$$

特别当 $\phi_0 = 0$ 时，称为中心化 AR(p) 模型。

对于非中心化模型，令：

$$\boldsymbol{y_t = x_t - \mu} \qquad \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p}$$

称 $\{y_t\}$ 为 $\{x_t\}$ 的中心化序列，中心化变换只是让序列整体上下进行了平移。并不改变它们之间的相关关系。所以，今后讲述 AR 模型时，仅对中心化模型进行讲述。

自回归系数多项式

引进延迟算子，中心化 AR(p) 模型又可以简记为：

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

其中，自回归系数多项式

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

平稳性观察

AR 模型是常用的平稳序列的拟合模型之一，但并非所有的 AR 模型都是平稳的。

例3.1:考察如下四个模型的平稳性

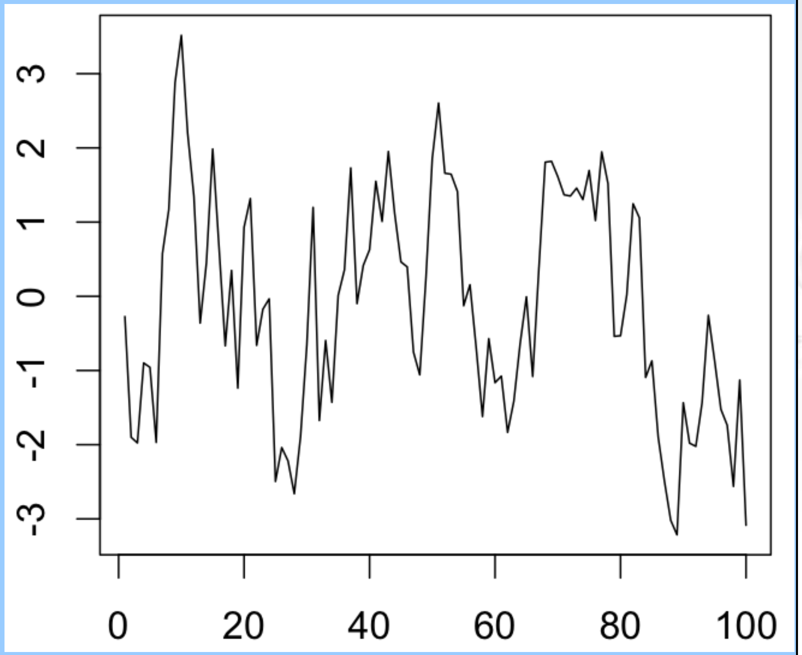
$$(1)\quad x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$(2)\quad x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$$

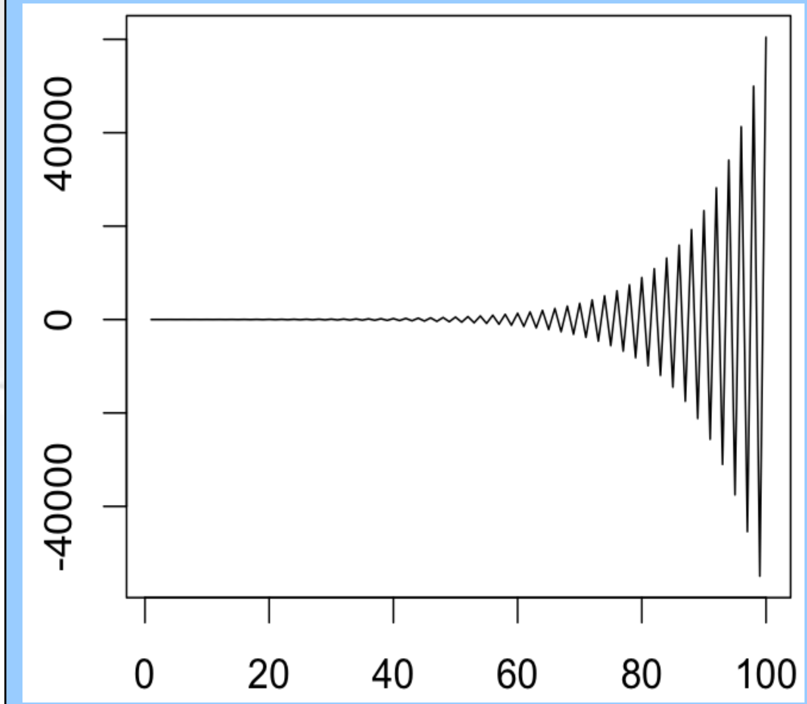
$$(3)\quad x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$(4)\quad \boldsymbol{x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t}$$

例3.1平稳序列时序图



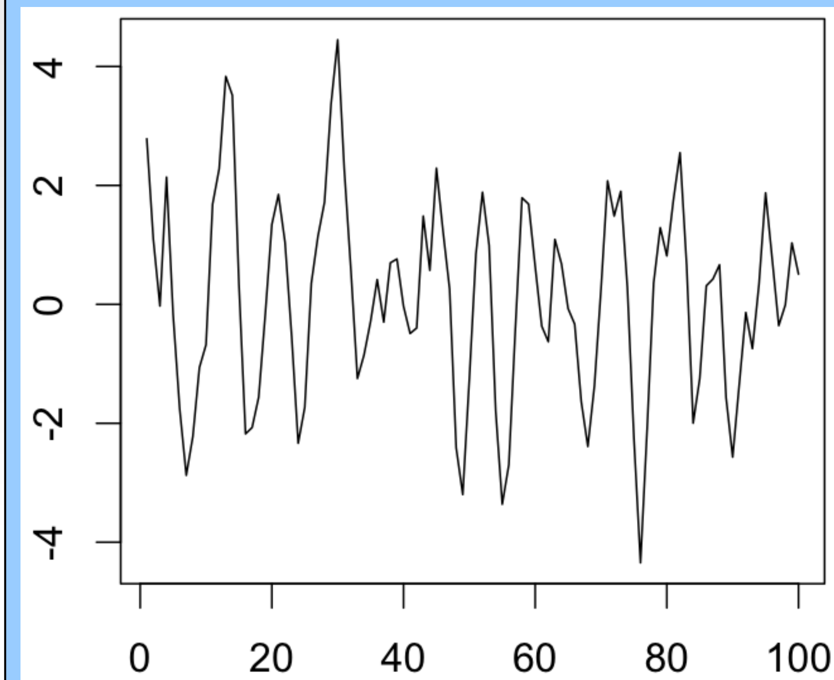
(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$



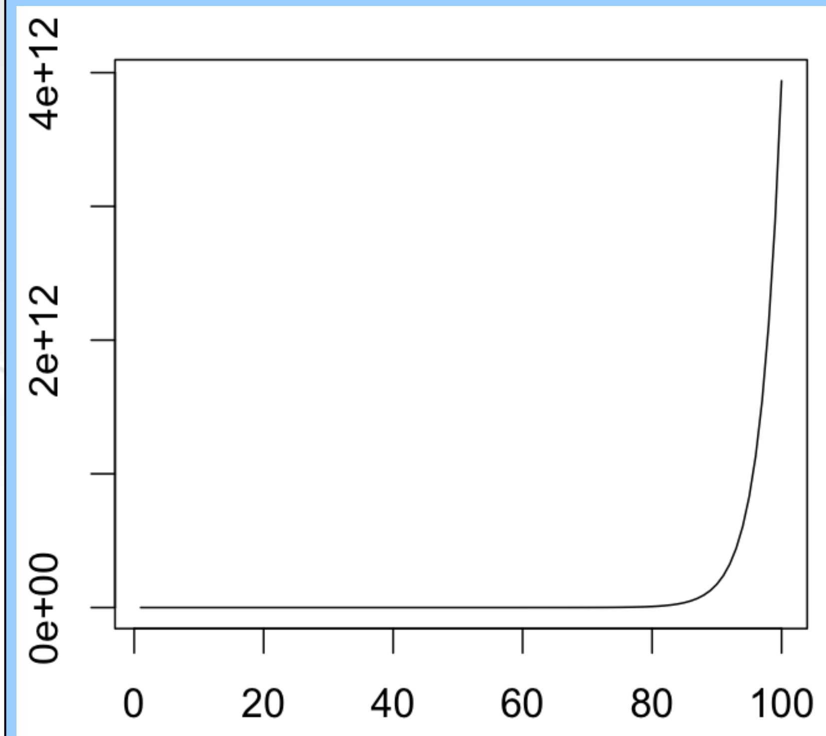
(2) $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$

直观判断，模型（1）平稳，模型（2）非平稳。

例3.1平稳序列时序图



(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$



(4) $\boldsymbol{x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t}$

直观判断，模型（3）平稳，模型（4）非平稳。

AR(1)模型：

首先，来看最简单的AR模型，即AR(1)模型：

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

假设序列均值为0，若序列平稳，则其方差为常数。模型两端求方差得：

$$\gamma_0 = \phi\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2$$

从而：

$$\boldsymbol{\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}}$$

要使方差存在，模型系数需满足：$|\phi|<1$。此为AR(1)模型平稳性条件。

AR(1)模型：$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$

模型两端乘 x_{t-k}，求期望得：

$$\gamma_k = \phi \gamma_{k-1}$$

可得自协方差一般式：

$$\boldsymbol{\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}}$$

从而，自相关系数：

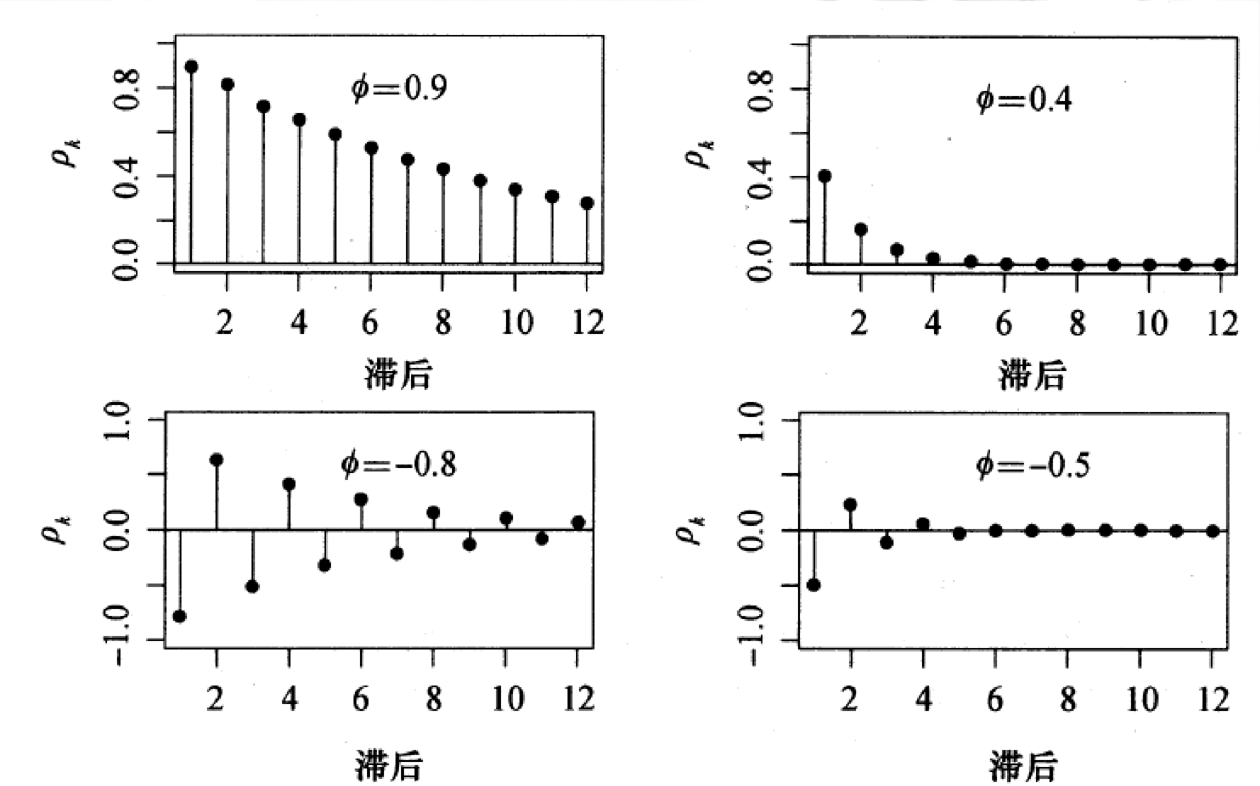
$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

AR(1)模型：

模型系数满足：$|\phi|<1$

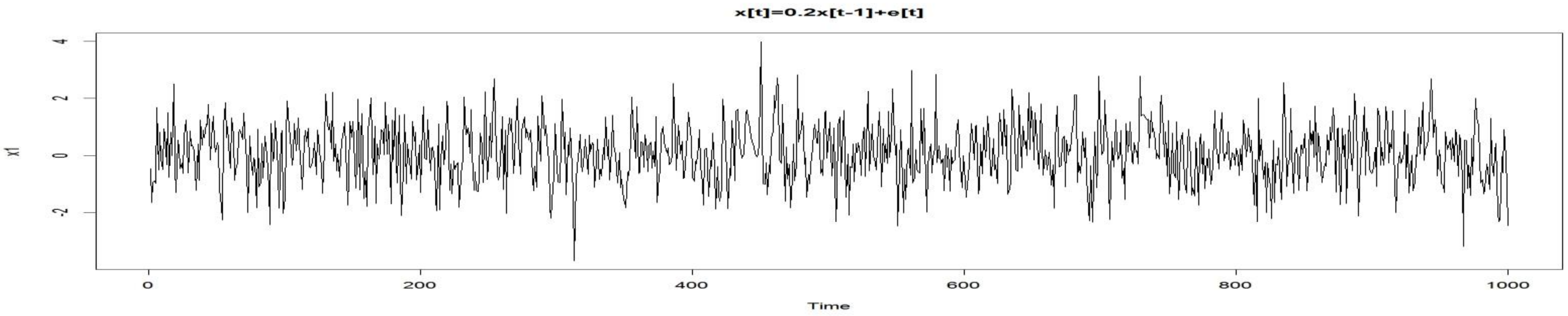
自相关系数始终为正时：$0<\phi<1$

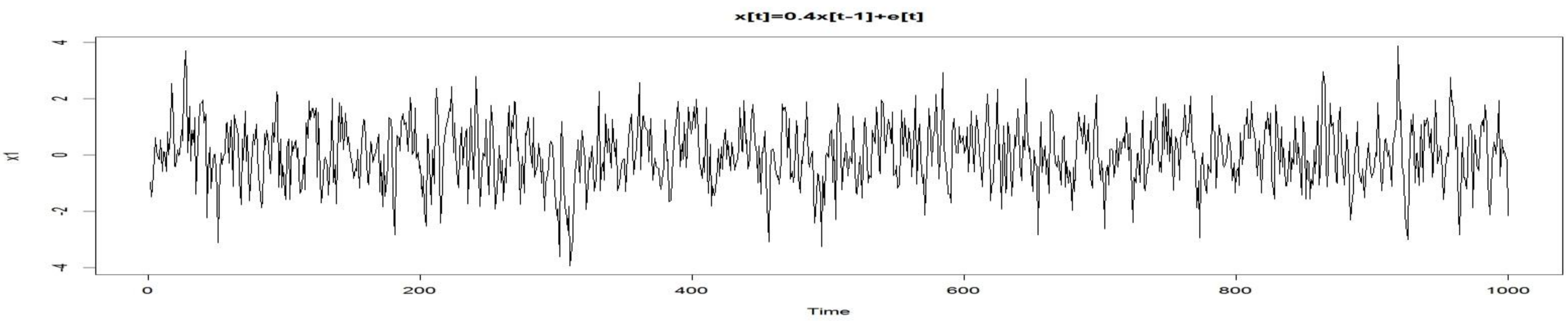
自相关系数正负交替：$-1<\phi<0$



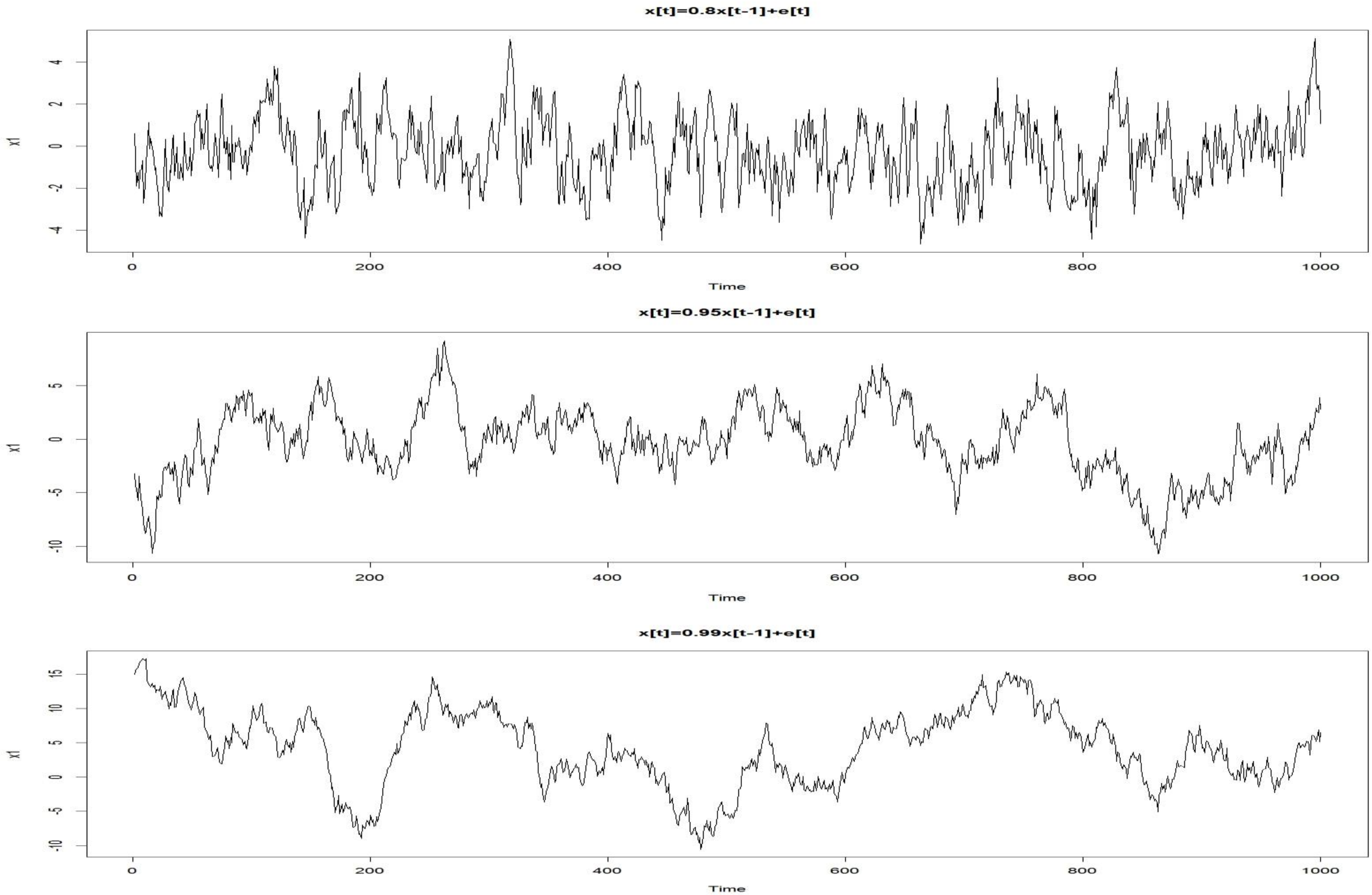
AR(1)模型模拟序列：

由 $\rho_k = \phi^k$ 知，ϕ 越接近于 0，序列越接近白噪声，越接近 1，越接近于不稳定。（下述序列系数依次是0.2、0.4）

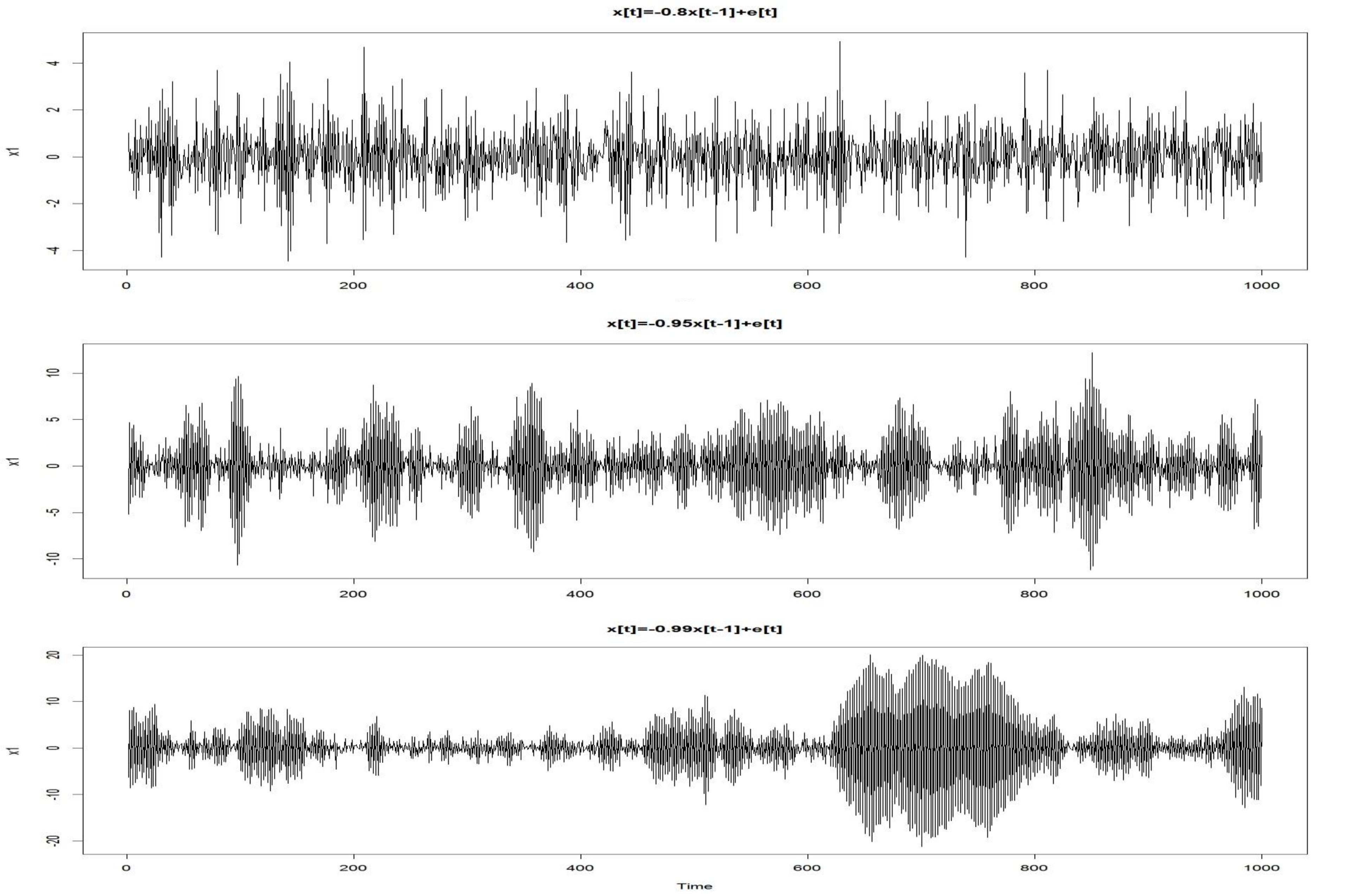




下述序列系数依次是0.8、0.95、0.99



下述序列系数依次是 -0.8、-0.95、-0.99



AR(2)模型：

再来看AR(2)模型：

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$$

假设序列均值为 0，模型两端乘 x_{t-k} ，求期望得：

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}$$

再除以方差： $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$

其中 k=0 和 1 时： $\rho_0 = 1$

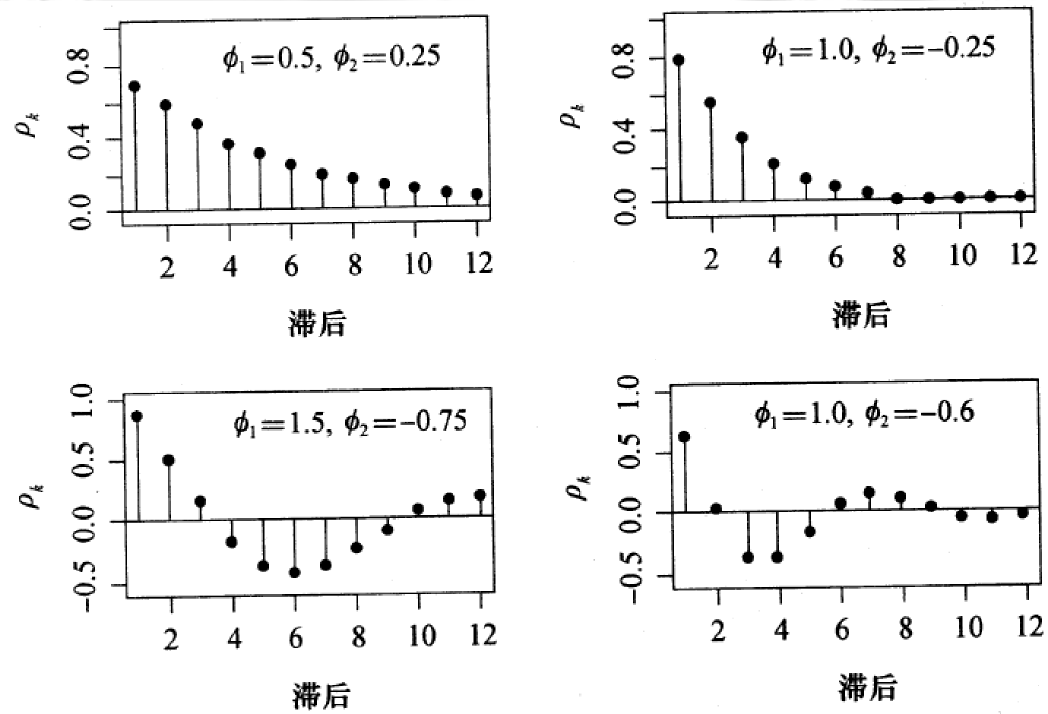
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$$

AR(2)模型：

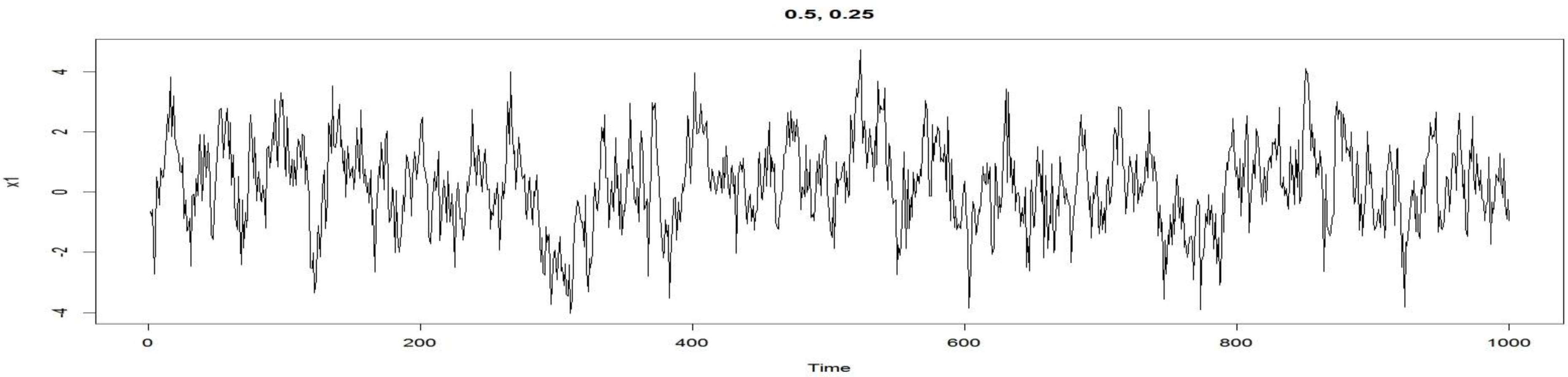
AR(2) 模型自相关可以有各种形状。如下图：

要使 AR(2) 模型平稳，排除误差项后，模型的两个系数应使序列随着时间趋向于0。但是，很难从直观上看出系数应满足什么条件。

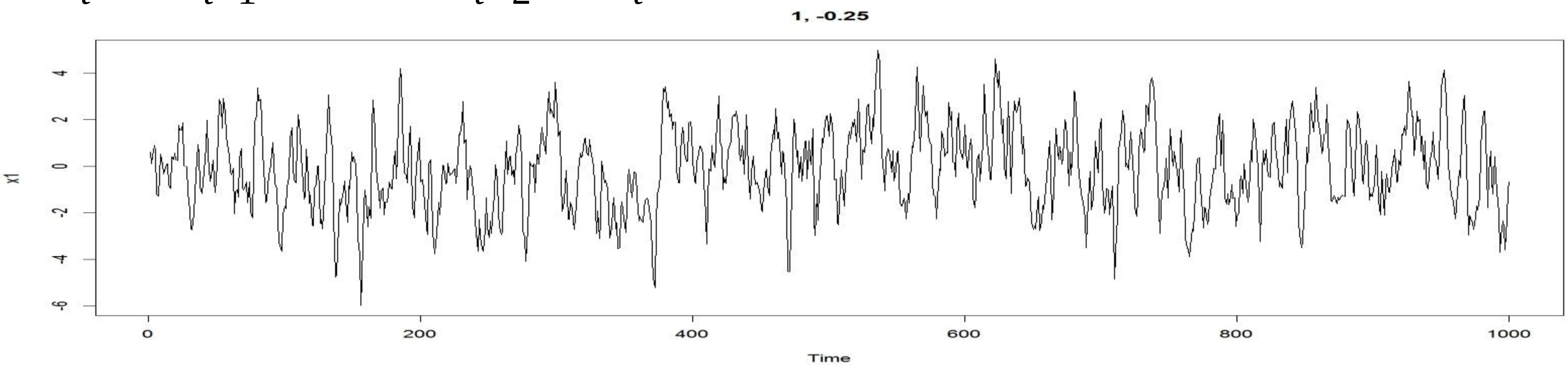
下面我们针对右图的四个模型进行了模拟。



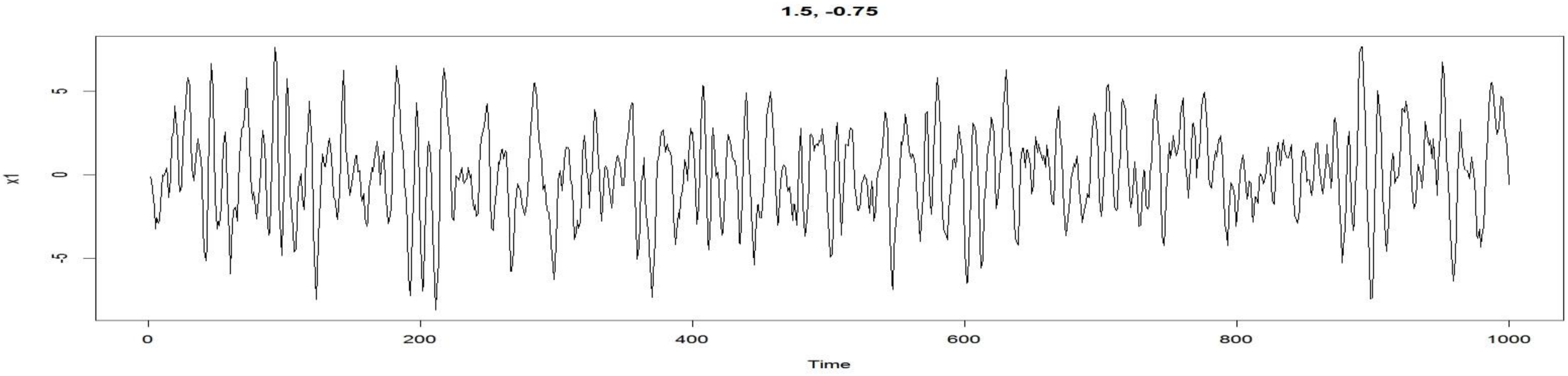
$$x_t = 0.5x_{t-1} + 0.25x_{t-2} + \varepsilon_t$$



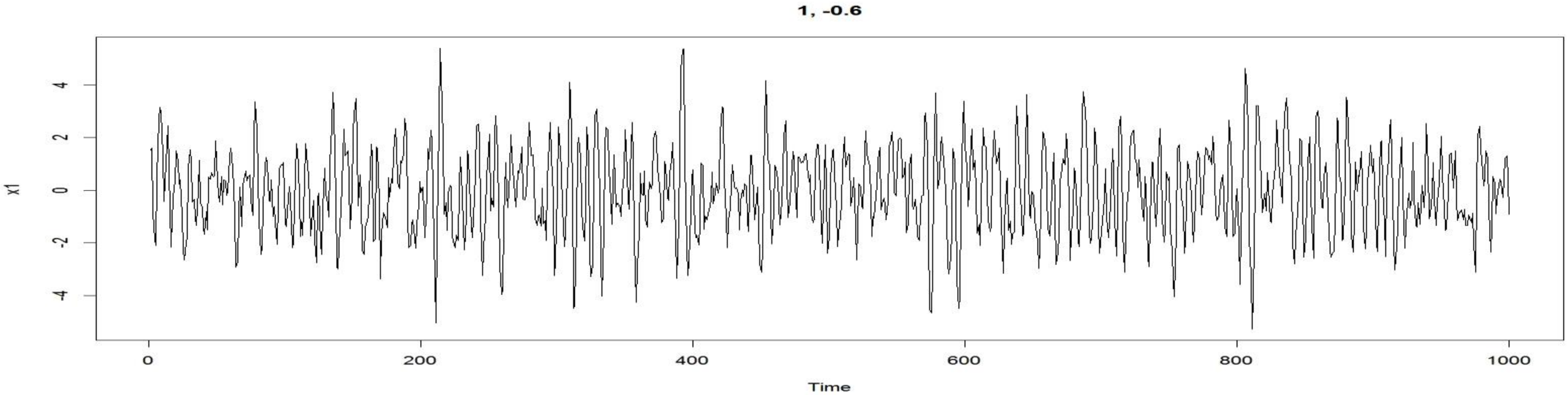
$$x_t = x_{t-1} - 0.25x_{t-2} + \varepsilon_t$$



$$x_t = 1.5x_{t-1} - 0.75x_{t-2} + \varepsilon_t$$



$$x_t = x_{t-1} - 0.6x_{t-2} + \varepsilon_t$$



AR模型的平稳性辨别

除了AR(1) 模型外，对于阶数大于2的AR模型，平稳性的条件很难直观的看出来。接下来，推导一般的AR模型的平稳性辨别条件。

回顾中心化 AR(p) 模型，可以简记为：

$$\Phi(B)x_t = \varepsilon_t$$

其中，

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p$$

AR(p) 模型可看作非齐次线性差分方程：

$$\boldsymbol{x_t - \phi_1 x_{t-1} - \phi_2 x_{t-2} - \cdots - \phi_p x_{t-p} = \varepsilon_t}$$

AR模型的平稳性辨别

上述方程的通解为： $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_t' + \boldsymbol{x}_t''$

（1）求齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t = 0$ 的一个通解 x_t'

$$x_t' = \sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1} \lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j \lambda_j^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t (c_{1j} \cos t\omega_j + c_{2j} \sin t\omega_j)$$

其对应特征方程 $\lambda^p - \phi_1 \lambda^{p-1} - \cdots - \phi_p = 0$ 的 p 个特征根

为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$，一般地，设 p 个特征根取值如下：

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_d$ 为 d 个相同实根；

$\lambda_{d+1}, \ldots, \lambda_{p-2m}$ 为 $p-d-2m$ 互不相同的实根；

$\lambda_{p-2m+1}, \ldots, \lambda_p$ 为 $2m$ 个复根，它们两两共轭。

AR模型的平稳性辨别

（2）求非齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=\varepsilon_t$ 的一个特解 x_t''

$$x_t''=\Phi^{-1}(B)\varepsilon_t=\left[\prod_{i=1}^{p}(1-\lambda_i B)\right]^{-1}\varepsilon_t=\sum_{i=1}^{p}k_i\left(1-\lambda_i B\right)^{-1}\varepsilon_t$$

（3）求非齐次线性差分方程 $\Phi(B)x_t=\varepsilon_t$ 的通解：

$$x_t=\sum_{j=1}^{d}c_j t^{j-1}\lambda_1^t+\sum_{j=d+1}^{p-2m}c_j\lambda^t+\sum_{j=1}^{m}r_j^t(c_{1j}\cos t\omega_j+c_{2j}\sin t\omega_j)$$

$$+\sum_{i=1}^{p}k_i\left(1-\lambda_i B\right)^{-1}\varepsilon_t$$

特征根辨别

自回归序列平稳，要求：$\forall c_1,\cdots,c_{p-2m},c_{1j},c_{2j}(j=1,\cdots,m)$

$$\lim_{t\to\infty} x_t =$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[\begin{array}{l}\sum_{j=1}^{d} c_j t^{j-1}\lambda_1^t + \sum_{j=d+1}^{p-2m} c_j\lambda^t + \sum_{j=1}^{m} r_j^t(c_{1j}\cos t\omega_j + c_{2j}\sin t\omega_j) \\ +\sum_{i=1}^{p} k_i\left(1-\lambda_i B\right)^{-1}\varepsilon_t\end{array}\right]=0$$

上式成立条件：

$$|\lambda_j|<1 \quad ,j=1,2,\cdots,p-2m$$

$$|r_j|<1 \quad ,j=1,2,\cdots,m$$

即：AR(p) 模型的平稳的充要条件是其 p 个特征根都在单位圆内。

平稳域判别

对于一个 AR(p) 模型而言，如果没有平稳性的要求，实际上也就意味着对参数向量没有任何限制，它们可以取遍维欧氏空间的任意一点。

如果加上了平稳性限制，参数向量就只能取维欧氏空间的一个子集，使得特征根都在单位圆内的系数集合称为平稳域：

$$\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p \mid \text{特征根都在单位圆内}\}$$

对于低阶自回归模型，用平稳域的方法判别模型的平稳性通常更为简便。

AR(1)模型平稳条件

模型结构 $x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$

特征根 $\lambda = \phi$

平稳域 $|\phi| < 1$

AR(2)模型的平稳条件

方程结构： $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$

特征根： $\lambda_1 = \dfrac{\phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$ $\lambda_2 = \dfrac{\phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$

平稳条件： $(1)\left|\phi_2\right| = \left|\lambda_1 \lambda_2\right| < 1$

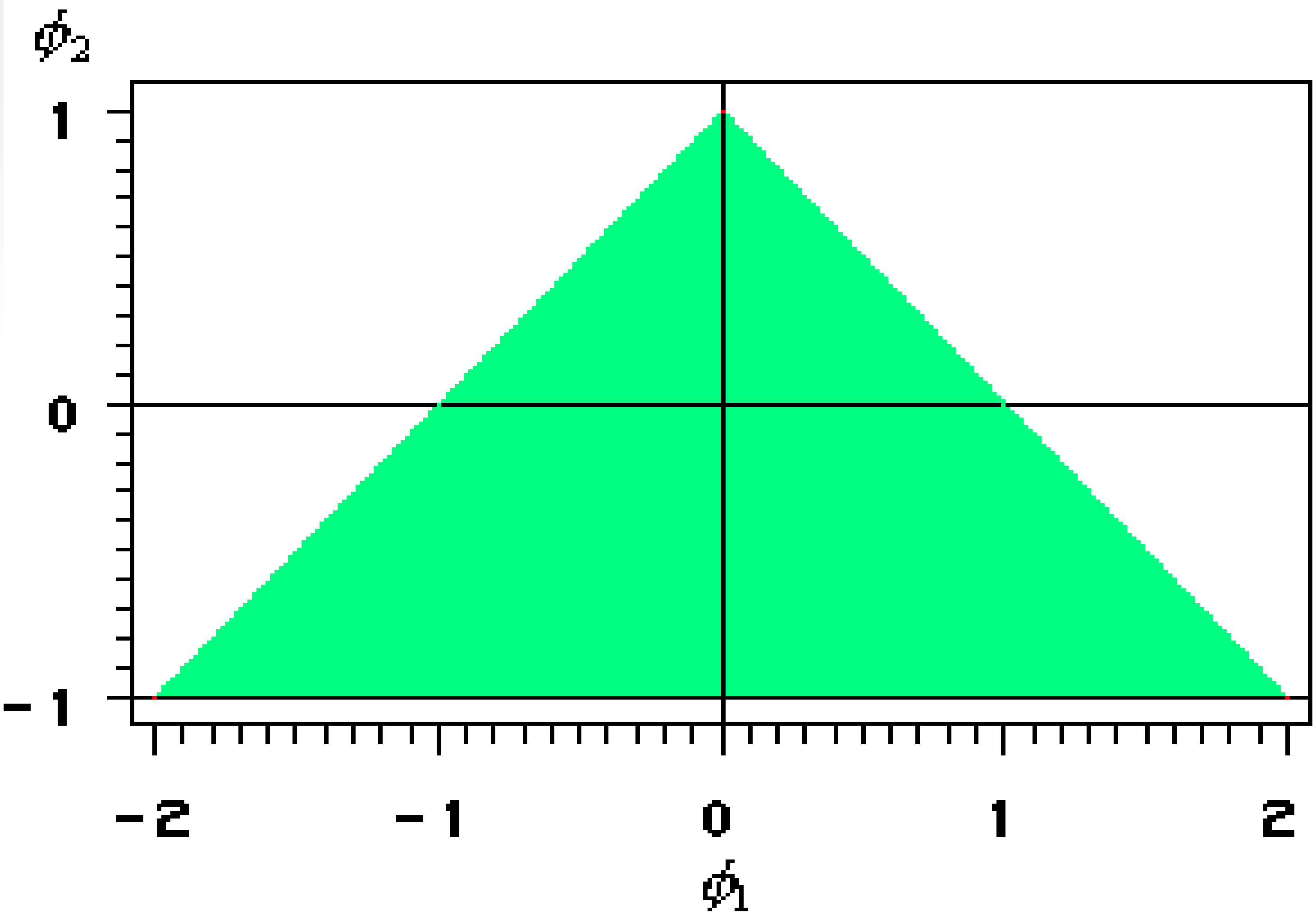
$(2)\phi_2 + \phi_1 = -\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 - (1-\lambda_1)(1-\lambda_2) < 1$

$(3)\phi_2 - \phi_1 = -\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 1 - (1+\lambda_1)(1+\lambda_2) < 1$

平稳域： $\{\phi_1, \phi_2 \,\|\phi_2| < 1,\ \text{且}\ \phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$

AR(2)的平稳域

$$\{\phi_1, \phi_2 \| \phi_2 | < 1, \text{ 且} \phi_2 \pm \phi_1 < 1\}$$



例3.1：平稳性判别

(1) $x_t = 0.8x_{t-1} + \varepsilon_t$

(2) $x_t = -1.1x_{t-1} + \varepsilon_t$

(3) $x_t = x_{t-1} - 0.5x_{t-2} + \varepsilon_t$

(4) $\boldsymbol{x_t = x_{t-1} + 0.5x_{t-1} + \varepsilon_t}$

模型	特征根判别	平稳域判别	结论
(1)	$\lambda_1 = 0.8$	$\phi = 0.8$	平稳
(2)	$\lambda_1 = -1.1$	$\phi = -1.1$	非平稳
(3)	$\lambda_1 = \frac{1+i}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1-i}{2}$	$\lvert\phi_2\rvert = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 0.5, \phi_2 - \phi_1 = -1.5$	平稳
(4)	$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$	$\lvert\phi_2\rvert = 0.5, \phi_2 + \phi_1 = 1.5, \phi_2 - \phi_1 = -0.5$	非平稳

练习1:

假设 $\{x_t\}$ 是 AR(1) 过程：$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$ ， $-1<\phi<1$。

(a)、$y_t = \nabla x_t$，求这个序列的自协方差函数。

(b)、$y_t = \nabla x_t$，求这个序列的方差。

练习2：

证明平稳AR(2) 过程 $x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$ 的方差如下：

$$\gamma_0 = \frac{1-\varphi_2}{(1+\varphi_2)(1-\varphi_1-\varphi_2)(1+\varphi_1-\varphi_2)}\sigma_\varepsilon^2$$