第三章　平稳时间序列分析

本章结构

1. 方法性工具
2. ARMA模型
3. 平稳序列建模
4. 序列预测

3.1 方法性工具

差分运算

一阶差分 $\nabla x_t = x_t - x_{t-1}$

p 阶差分 $\nabla^p x_t = \nabla^{p-1} x_t - \nabla^{p-1} x_{t-1}$

k 步差分 $\nabla_k x_t = x_t - x_{t-k}$

延迟算子

延迟算子类似于一个时间指针，当前序列值乘以一个延迟算子，就相当于把当前序列值的时间向过去拨了一个时刻

记 B 为延迟算子，有:

$$x_{t-1} = Bx_t$$

$$x_{t-2} = B^2 x_t$$

$$\vdots$$

$$x_{t-p} = B^p x_t, \qquad \forall p \geq 1$$

延迟算子的性质

- $B^0 = 1$
- $\boldsymbol{B(c \cdot x_t) = c \cdot B(x_t) = c \cdot x_{t-1}}$，$\boldsymbol{c}$**为任意常数**
- $B(x_t \pm y_t) = x_{t-1} \pm y_{t-1}$
- $B^n x_t = x_{t-n}$
- $(1-B)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i B^i$ 其中 $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$

用延迟算子表示差分运算

p 阶差分

$$\nabla^p x_t = (1-B)^p x_t = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i C_p^i x_{t-i}$$

k 步差分

$$\nabla_k = x_t - x_{t-k} = (1-B^k)x_t$$

线性差分方程

定义如下形式方程为序列 $\{z_t : t = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ 的线性差分方程：

$$z_t + \alpha_1 z_{t-1} + \cdots + \alpha_p z_{t-p} = h(t)$$

其中 $p \geq 1$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ 为实数，$h(t)$ 为 t 的已知函数。

特别地，当函数 $h(t) = 0$ 时，差分方程：

$$z_t + \alpha_1 z_{t-1} + \cdots + \alpha_p z_{t-p} = 0$$

称为齐次线性差分方程。否则，线性差分方程称为非齐次线性差分方程。

齐次线性差分方程的解 $z_t+\alpha_1 z_{t-1}+\cdots+\alpha_p z_{t-p}=0$

下列方程：

$$\lambda^p+\alpha_1\lambda^{p-1}+\cdots+\alpha_p=0$$

称为齐次线性差分方程的特征方程。这是一个一元 p 次线性方程，它至少存在 p 个非零根，称这 p 个非零根为特征根，记为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ 。

根据特征根 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ 的情况，齐次线性差分方程的解有如下情形：

齐次线性差分方程的解 $z_t + \alpha_1 z_{t-1} + \cdots + \alpha_p z_{t-p} = 0$

特征方程: $\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + a_2\lambda^{p-2} + \cdots + a_p = 0$

p 个特征根为 p 个同实数，方程的解为:

$$z_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t$$

p 个特征根有相同实根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$ ，方程的解为:

$$z_t = (c_1 + c_2 t + \cdots + c_d t^{d-1})\lambda_1^t + c_{d+1}\lambda_{d+1}^t + \cdots + c_p\lambda_p^t$$

特征根中存在复根时:

$$z_t = r^t(c_1 e^{it\omega} + c_2 e^{-it\omega}) + c_3\lambda_3^t + \cdots + c_p\lambda_p^t$$

非齐次线性差分方程的解

首先，找一个非齐次线性差分方程的特解 z_t''：

$$z_t'' + a_1 z_{t-1}'' + a_2 z_{t-2}'' + \cdots + a_p z_{t-p}'' = h(t)$$

其次，求出其对应的齐次线性差分方程的通解 z_t'。

则，非齐次线性差分方程的通解为：

$$z_t = z_t' + z_t''$$

时序分析与线性差分方程的关系

常用的时间序列模型和某些模型的自协方差函数和自相关函数都可以视为线性差分方程。

线性差分方程对应的特征根的性质对判断模型的平稳性有着非常重要的意义。