第 2 章 固定收益证券基础

【学习目标】

- 掌握货币时间价值的含义和计算方法
- 掌握各种收益率和折现因子的计算
- 了解收益率曲线的含义、类型和作用

【引导案例】

24 美元买下曼哈顿！这并不是荒唐的痴人说梦，而是一个流传已久的故事。

故事是这样的：1626 年，荷属美洲新尼德兰省总督 Peter Minuit 花了大约 24 美元从印第安人手中买下了曼哈顿岛。而到 2000 年 1 月 1 日，曼哈顿岛的价值已经达到了约 2. 5 万亿美元。以 24 美元买下曼哈顿，Peter Minuit 无疑占了一个天大的便宜。

但是，如果转换一下思路，Peter Minuit 也许并没有占到便宜。如果当时的印第安人拿着这 24 美元去投资，按照 11%(美国 1927 年-1997 年股市的平均投资收益率)的投资收益率计算，到 2000 年，这 24 美元将变成约 2 142 917 万亿美元，远远高于曼哈顿岛的价值 2. 5 万亿美元，几乎是其现在价值的 86 万倍。如此看来，Peter Minuit 是吃了一个大亏。这是什么神奇的力量让资产实现了如此巨大的倍增?

显然，这是资金（货币）的时间价值导致的。资金的时间价值又隐含折现因子大小，折现因子又和收益率密切相关，因此，资金的时间价值是固定收益证券的定价与风险管理的基础。本章主要介绍货币时间价值、折现因子、收益率的度量，及收益率随时间变化的收益率曲线等基础知识。

2.1 货币的时间价值

我们知道，现在的 1 元钱比 1 年后的 1 元钱价值要大，这是因为货币具有时间价值，这一概念是分析各种金融工具所必需的基础概念之一。

货币的时间价值（time value of money）是指货币以一定的利率水平，经历一定时间的投资与再投资所增加的价值，也称资金的时间价值。

西方经济学用边际效用理论把货币的时间价值解释为：货币的所有者要进行以价值增值为目的的投资，就必须牺牲现时的消费。因此，他要求得到推迟消费时间的报酬，这种报酬的量应该与推迟的时间成正比，货币的时间价值就是对暂

缓现时消费的补偿。

货币之所以具有时间价值，至少有四个方面的原因：①货币可用于投资获得收益，从而在将来拥有更多的货币量。②货币的购买力会受通货膨胀的影响，从而随着时间改变。③一般来说，未来的预测收入具有不确定性。④对于将来的消费而言，个人更喜欢即期的消费，因此必须在将来提供更多的补偿，才能让人们放弃即期的消费。

由于不同时间的资金价值不同，在进行价值大小的比较时，必须将不同时间的资金折算为同一时间的资金。举例来说，如果不进行折算，你将无法比较现在的 100 元和明年的 103 元何者具有更高的价值。因此，为了区分货币在不同时刻拥有不同的价值，并准确计算出货币的时间价值，需要明确两组概念：终值与现值；单利与复利。

终值（future value，FV）是指当前时刻的资金在未来某个时刻的价值；现值（present value，PV）是指未来某个时刻的资金折算到当前时刻的价值。联系终值与现值的两个重要因素：时间与利率。

单利和复利是利息的两种计算方式。按照单利计息，是指无论时间多长，只按本金计算利息，上期的利息不计入本金内重复计算利息。按照复利计息，是指除对本金计算利息外，也将期间所生利息一并加入本金计算利息，即所谓的“利滚利”。

2.1.1 终值的计算

2.1.1.1 单利终值计算

计算公式为：

$$FV = M(1+nr) \tag{2-1}$$

其中：FV ——单利终值；

M ——本金；

r ——每期利率；

n ——计息期数

【例 2-1】投资者将本金 1000 元按 3 年定期存入银行，年利率为 3.3%，到期本息共有多少？

解：FV=1000×(1+3×3.3%)=1099（元）

2.1.1.2 复利终值的计算

计算公式为：

$$FV = M \times (1+r)^n \tag{2-2}$$

其中：FV ——复利终值；

M ——本金；

r ——每期利率；

n ——计息期数

注：此处的每期利率可以是年利率，也可以是月利率。

【例 2-2】投资者将本金 1000 元按 3 年定期存入银行，年利率为 3.3%，到期本息共有多少？

解：与上例不同，此处按复利终值公式计算：

FV=1000×(1+3.3%)^3=1102.30（元）

可以看到，此处终值比上例多出 3.30 元，就是按复利计算的结果。

2.1.2 现值的计算

求现值的过程与求终值的过程正好相反。根据单利终值的计算公式，得到单利现值计算公式为：

$$PV = \frac{FV}{1+nr} \tag{2-3}$$

根据复利终值的计算公式，得到复利现值计算公式为：

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} \tag{2-4}$$

2.1.3 年金的终值与现值

2.1.3.1 年金的概念与种类

定义 2-1：所谓年金（annuity），是指某段时间内定期发生的一系列相同金额的现金流，例如分期偿还贷款、定期支付养老金等。按每次收付款项发生的时点不同，可以分为普通年金、即付年金、永续年金和递延年金等。

定义 2-2：普通年金(ordinary annuity)是指从第一期起，在一定时期内每期期末等额收付的系列现金流，又称后付年金或期末年金。

定义 2-3：预付年金（annuity due）是指从第一期起，在一定时期内每期期初等额收付的系列现金流，又称先付年金、即付年金或期初年金。其与普通年金

的唯一区别就在于付款时点的不同。

定义 2-4：递延年金（deferred annuity）则是指第一笔现金流不发生在第一期，而是隔若干期后才开始发生的系列等额现金流，它是普通年金的特殊形式。

定义 2-5：永续年金（perpetual annuity）是指无限期等额支付的年金，即期限趋于无穷的普通年金。

在实际应用中，年金的计算多为复利计算，因此，这里仅介绍年金终值和现值的复利计算方法。

2.1.3.2 年金终值的计算

（1）普通年金终值的计算

在图 2-1 中，年金终值为：

$$FV = F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_{n-2} + F_{n-1}$$

其中：A——每期期末收付的金额；

F_k——金额 A 在 k 期后的终值；

N——复利期数

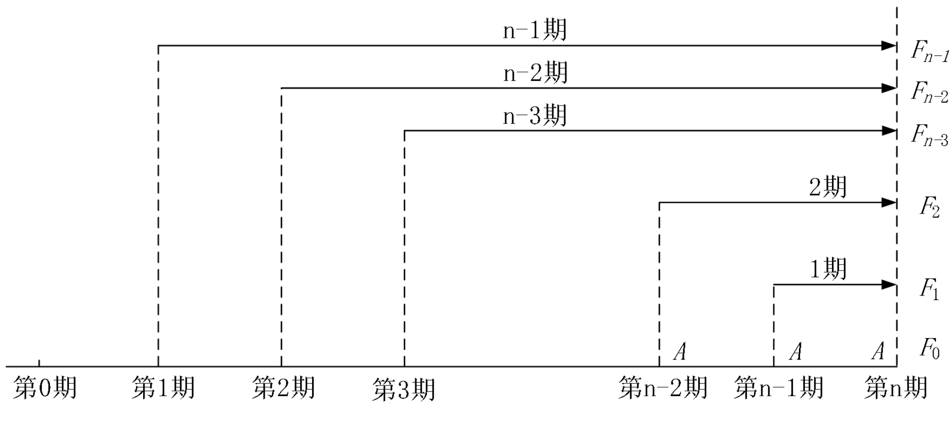


图 2-1 普通年金终值的计算

设 r 为每期利率，根据复利终值公式：

$$F_k = F_0(1+r)^k, k = 0,1,2,3,...n-1$$

而 $F_0 = A$，所以，

$$\begin{aligned} FV &= F_0 + F_1 + F_2 + ... + F_{n-1} \\ &= A + A(1+r) + A(1+r)^2 + ... + A(1+r)^{n-1} \qquad (2\text{-}5) \\ &= \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r} \end{aligned}$$

【例 2-3】投资者购买面值为 5000 元的 10 年期债券，年利率为 5%，每年末付息一次，第一次付息在一年之后。如果投资者持有该债券直至到期日，将每年得到的利息以年利率 4%进行再投资，10 年后他一共将获得多少资金?

解：这是一个求普通年金终值的问题。每年末利息收入为 5000×5%=250,正好构成一笔 10 年期的普通年金，即利息进行再投资的终值为普通年金的终值：

$$FV = 250 \times \frac{(1+4\%)^{10}-1}{4\%} = 3001.53\text{（元）}$$

投资者 10 年后获得的本息和为：

5000+3001.53=8001.53（元）

（2）预付年金终值的计算

预付年金是在每期期初收入或付出，它的终值与普通年金终值的推导过程大同小异。在图 2-2 中，A 表示每期期初收付的金额，F_k 为金额 A 在 k 期后的终值，n 为复利期数。

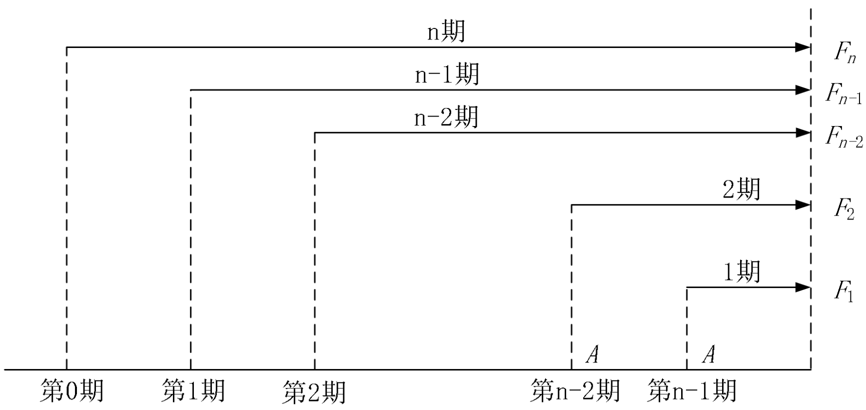


图 2-2 预付年金终值的计算

设 r 为每期利率，预付年金的终值是：

$$\begin{aligned} FV &= F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n \\ &= A(1+r) + A(1+r)^2 + \dots + A(1+r)^{n-1} + A(1+r)^n \qquad (2\text{-}6) \\ &= \frac{A[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)} \end{aligned}$$

实际上，预付年金的终值是在普通年金终值的基础上乘以$(1+r)$。

（3）递延年金终值的计算

递延年金终值的计算与普通年金的终值计算是一样的。递延年金只是年金的发生时间向后递延了，只需要从年金开始发生的那年开始计算，所以计算方法和普通年金终值的计算方法相同。

（4）永续年金终值的计算

永续年金是无限期等额收付的特种年金，是普通年金的特殊形式。由于永续年金持续期无限，没有终止时间，因此没有终值。

2.1.3.3 年金现值的计算

（1）普通年金复利现值的计算

普通年金现值指一定时期内每期期末收付的等额款项的复利现值之和。在图 2-3 中，A 表示每期期未收付的金额，P_k 为第 k 期金额 A 的现值， n 为复利期数。普通年金的现值是：

$$PV = P_1 + P_2 + \ \ldots \ + P_{n-1} + P_n$$

其中：A——每期期未收付的金额；

P_k——第 k 期金额 A 的现值；

n——复利期数

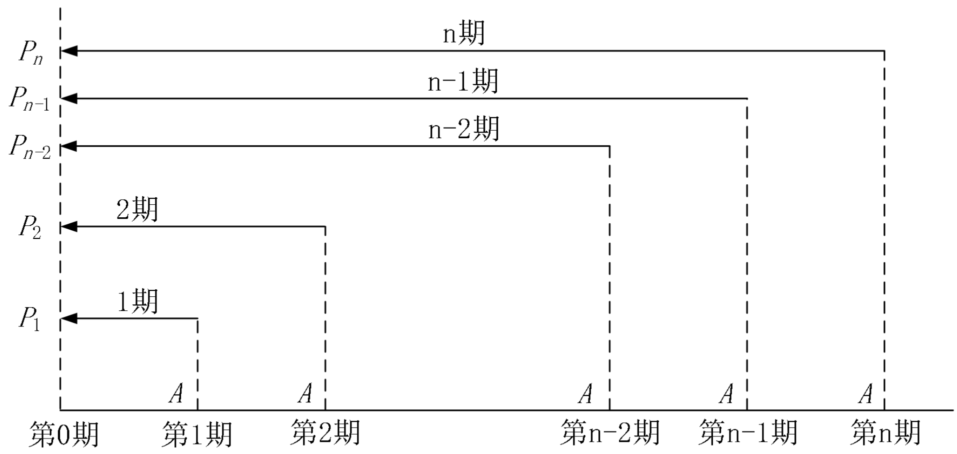


图 2-3 普通年金现值的计算

设 r 为每期利率，根据复利现值公式，有：

$$P_k = A(1+r)^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n$$

$$PV = A(1+r)^{-1} + A(1+r)^{-2} + \ldots + A(1+r)^{-(n-1)} + A(1+r)^{-n}$$

$$= \frac{A[1-(1+r)^{-n}]}{r} \qquad (2\text{-}7)$$

【例 2-4】银行同意向某客户提供一笔 200 万元的住房贷款，期限 30 年，每月月末的还款额相等（月供）。如果贷款年利率为 6%，问该客户每月需向银行还款多少？

解：银行希望获得的普通年金现值为 200 万元，每月收取还款意味着每年收取 12 次，年金收入的次数 n 为 30×12 = 360，调整后的每期利率 r 为 6% / 12 =

0.5%。运用普通年金现值的计算公式：

$$200=\frac{A\,[\,1-(1+0.5\%)^{-360}]}{0.5\%}$$

$$A=11991.01\text{（元）}$$

因此，该客户应当每月向银行还款 11991.01 元。

（2）预付年金复利现值的计算

预付年金现值的计算只要在普通年金现值推导的基础上稍作修改，我们可以推出预付年金现值的计算公式。如图 2-4 所示，预付年金的现值是：

$$PV=P_0+P_1+P_2+\ldots+P_{n-1}$$

设 r 为每期利率，根据复利现值公式，我们有：

$$PV=A+A(1+r)^{-1}+A(1+r)^{-2}+\cdots+A(1+r)^{-(n-1)}$$

$$=\frac{A[\,1-(1+r)^{-n}]}{r(1+r)} \qquad (2\text{-}8)$$

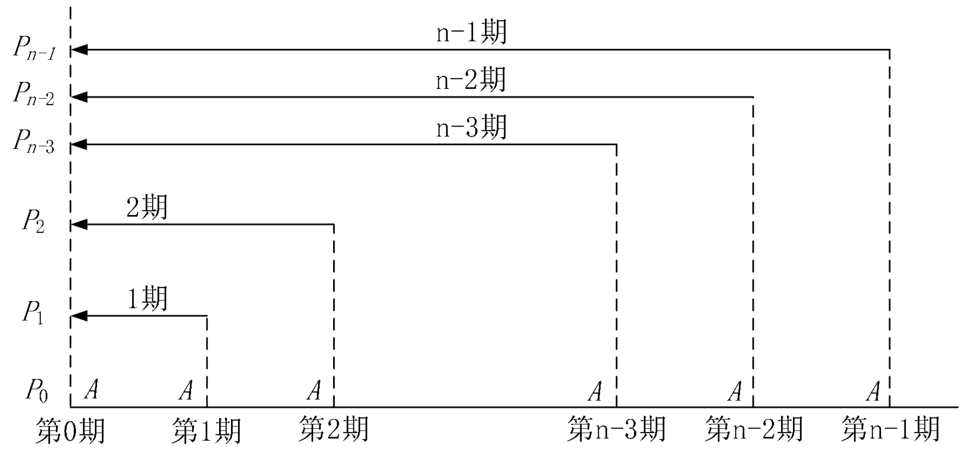


图 2-4 预付年金现值的计算

读者可以思考普通年金复利现值的计算公式和预付年金复利现值的计算公式之间的关系。

（3）递延年金复利现值的计算

递延年金现值的计算方法是把它视为 n 期普通年金，求出递延期末的现值，然后再把此现值调整到第一期初，此处的“调整”就是下一节的“折现”。

（4）永续年金复利现值的计算

永续年金是无限期定额支付的年金，永续年金现值的计算可以由普通年金现值的计算公式推导出来。

普通年金现值为：

$$PV = \frac{A[\,1\text{-}(1+\ r)^{-n}]}{r}$$

当 n 趋于无穷大时，$(1+r)^{-n}$趋近于 0。因此，永续年金的现值是：

$$PV = \frac{A}{r} \tag{2-9}$$

2.2 折现因子与利率

2.2.1 折现因子

今天收到与在 1 个月后或 1 年后收到 1 元钱，其价值是不一样的，人们更愿意在现在收到，而不是在未来。因为现在持有其不确定性低，你还可以选择怎么使用它。这种选择权本身是有价值的。如果我们同意今天的 1 元要比以后的 1 元更值钱，那么问题的关键就是这种价值差是多少。未来的 1 元在当下的价值，叫作折现因子，也称贴现因子。折现因子是固定收益证券领域的核心概念。

【例 2-5】 2021 年 7 月 26 日，财政部发行了 182 天短期贴现国债。市场发行价格是 99.069 元，每张面值 100 元。也就是说，2021 年 7 月 26 日投资者愿意用 99.069 元购买一张将在 2022 年 1 月 24 日以 100 元赎回的政府证券。本次发行的短期国债在到期之前不会支付其他任何现金。购买价和支付价格之间的比率为 0.99069。这个比率可看作发行日和到期日之间的市场折现因子，也就是说，市场参与者愿意用当下的 0.99069 元换取 6 个月后的 1 元。

定义 2-6：**折现因子**（discount factor）设时间 t 和 T，在时间 t 愿意用一定数量的资金换取未来时间 T 确定数量的资金，前者与后者的比，即为折现因子。我们把 t 与 T 之间的折现因子记为$Z(t,T)$。

在例 2-5 的日期中，t 为 2021 年 7 月 26 日，T 为 2022 年 1 月 24 日，折现因子为$Z(t,T)$=0. 99069。简单地说，折现因子体现的是时间 t 与 T 之间的时间价值。尽管它是一个值，但本质上讲，它是一个价格，描述了人们愿意在今天用多少钱去购买未来的 1 元。从这个意义上讲，折现因子的意义是明确的。相反，正如我们将看到的，与利率相关的概率不是那么简单明确，例如，它取决于复利频率。在下面的章节中，我们将更详细地描述它们的特点。

2.2.1.1 到期日的折现因子

定义 2-1 和例 2-5 强调了在 t 时刻的折现因子取决于到期日 T。如果到期日 T

更长或者更短，折现因子也会随之变化。事实上，处于同样的原因，投资者不仅认为当下的 1 元比 6 个月之后的更值钱，也会认为 3 个月之后的 1 元比 6 个月之后的 1 元更值钱。这一点，我们也可以通过我国的短期国债来印证。例如，我国 3 个月期国债收益率为 1.59%，6 个月期国债收益率为 1.80%，因此，3 个月后 1 元钱按照 1.59%进行折现，其现值高于 6 个月后的 1 元钱按照 1.8%的收益率进行折现。

【例 2-6】 2021 年 7 月 26 日，财政部发行了 91 天的短期国债，到期日为 2021 年 10 月 25 日，面值 100 元的短期国债发行价格为 99.578 元。结合例 2-5，即 t=2021 年 7 月 26 日，T_1=2021 年 10 月 25 日，T_2=2022 年 1 月 24 日，我们可以得到折现因子$Z(t,T_1)$=0.99578，这个值要比$Z(t,T_2)$=0.99069 高。

这个例子说明了折现因子的一个特性，这个特性反映了投资者更愿意在距当日更近的日期得到 1 元，而不是更远的未来。

在任何给定的时间 t 到期日，T 越长，折现因子越小。也就是说，有 T_1 和 T_2，且 $T_1<T_2$，则有下式成立。

$$Z(t,T_1) \geq Z(t,T_2)$$

2.2.1.2 随时间变化的折现因子

折现因子的第二个重要特征是它们随着时间的推移并不是固定的，即使保持到期日与今日时间间隔为固定不变的 T-t。随着时间的推移，货币的时间价值也随之变化。在绝大多数时间里，到期时间较短的折现因子总是高于到期时间较长的。其次，折现因子随时间的变化是相当显著的。为什么折现因子会随时间变化？这是因为预期通货膨胀率是折现因子的一个重要影响因素。直观理解也很简单：通货膨胀率正是决定货币时间价值的因素，因为它决定了货币能买到多少商品。预期通货膨胀率越高，这笔钱在未来能购买到的商品就越少，所以相比于今天，在未来收到这笔钱的吸引力就越小。

虽然预期通货膨胀是解释折现因子随着时间的推移而变化的最明显的原因，但它不是唯一的原因。因为折现率、利率变化与宏观经济的表现、预算赤字、央行的行动以及投资者的风险偏好也有关。这些宏观经济状况会影响国债的相对供给和需求，从而影响国债价格。

2.2.2 利率

利率是借款人（债务人）由于在一段时期内使用了贷款人（债权人）的资金而向贷款人支付的价格的一种度量。

借款人最初从贷款人处借到的资金总额为本金，为获得本金的暂时使用权而支付的价格就是利率，利率通常用单位时间内（通常为年）本金的百分比来表示。利率通常也被视为资金的价格。

利率的概念和折现因子的概念比起来，既复杂又简单。它简单的原因是，这个概念类似于生活中投资回报或者贷款费用的概念。举个例子，我以 5%的年利率投资了 100 元，1 年后我将收到 105 元。这 105 元是原始资本加上投资利息。同样的投资行为也能用来描述折现因子：这里的折现因子是 1 年后的 105 元与今天的 100 元的比率，即折现因子为 0.9524。这个数字其实与 5%的利率是等价的，但是并没有利率那么直观。然而，利率的概念也是复杂的，因为它取决于初始投资支付利息的频率。复利频率的定义如下。

应计利息的复利频率是指每年支付利息并将其计入再投资额的次数。

在一定程度上，只提及利率水平不能完整地描述投资回报率、贷款或抵押贷款的成本。复利频率是一个必须附在利率数字上的关键因素。

例如，在上面的例子中，其实有一个隐含假设，那就是只按 5%的利率在到期日付息一次。如果说每 6 个月计息一次的话，到期日收益为

$$100 \times \left(1+\frac{5\%}{2}\right) \times \left(1+\frac{5\%}{2}\right) = 105.0625\text{（元）}$$

这个数字要高于 105 美元。如果每月计息，那到期日收益为

$$100 \times \left(1+\frac{5\%}{12}\right)^{12} = 105.12\text{（元）}$$

这个值要比 105 元更高一些。这个例子说明：

事实 1：对于给定的利率（如 5%），付息频率越高，最终收益越高。

尝试从不同的角度看利率，就如我们之前的例子，考虑投资一个证券，今天的成本是 100 元，1 年后支付 105 元，此证券的利率是多少？直观的答案是 5%，因为我们投资 100 元并获得 105 元，因此回报率等于 5％。然而，正确的答案取

决于该证券的付息频率。如果利息每年支付一次，则 5%是正确答案。如果利息每半年支付一次，则正确答案是 r=4.939%。事实上，$100\times\left(1+\frac{4.939\%}{2}\right)^2=105$ 元，这是投资 100 元获得的回报。类似地，如果每月付息，则正确答案为 r=4.89%，因为 $100\times\left(1+\frac{4.89\%}{12}\right)^{12}=105$ 元。这个例子说明：

事实 2：对于给定的最终收益，更频繁的付息频率意味着更低的利率。

这种讨论也强调了投资回报率和利率之间的关键性差异，这些差异是相关却不同的概念。回报率的确是收益和初始投资之间的差额除以后者。在上例中，投资的回报率是 5%。利率是对应于复利期内投资的（年化）回报率，但与其他情况是不同的。例如，如果利率为 5%，每半年收益一次，那么在 6 个月内，投资回报率为 2.5%，即这 6 个月中的 100 元变为 102.5 元。如果我们对这个半年回报进行年化，我们得到 5%，这对应于利率。但是，请注意，利率和回报率在 1 年期内是有所不同的。在 1 年中，原投资将支付 105.0625 元，就像我们先前获得的，因此回报率为 5.0625%>5%。当期限更长时，年化利率与年投资回报率之间的差异也就越大。

2.2.2.1 折现因子、利率和复利频率

上面的例子说明了，一旦我们明确了复利频率、折现因子与利率密切相关，给定利率及其复利频率，我们便可以定义折现因子。反之，给定折现因子，我们可以定义利率及其复利频率。

两个混合频率特别重要：半年复利和连续复利。半年复利频率是基准，因为它与很多国家的中期国债和长期国债的息票支付频率相匹配。为了方便分析，下面定义的连续复利也很重要。正如我们将看到的，在投资的利息无限付息的假设下，公式和推导要简单得多，这当然是一个抽象但是有用的方法。

（1）半年复利

【例 2-7】令 t=2020 年 8 月 10 日，并且令 T=2021 年 8 月 10 日（1 年后）。考虑 1 年投资 100 元，半年复利利率 r=5%，为期 1 年。如前所述，这意味着 6 个月后，投资增长到 102.5 元，然后以相同的速率再投资 6 个月，得到 T 时刻的回报为

$$100\times\left(1+\frac{r}{2}\right)\times\left(1+\frac{r}{2}\right)=100\times\left(1+\frac{r}{2}\right)^2=105.0625\text{（元）}$$

考虑到初始投资是 100 元，期间没有现金流流向投资者，并且在 T 时的回报是无风险的，以 t（100 元）和 T（105.0625 元）之间的关系建立两个日期之间的折现因子，由下式给出

$$Z(t,T)=\frac{P_t}{F_T}=\frac{100}{105.0625}=\frac{1}{(1+\frac{r}{2})^2} \tag{2-10}$$

其中：P_t——t 时刻的初始投资；

F_T——T 时刻的回报

类似，我们可以得到更普遍的结论：

令$r_2(t,T)$表示 t 和 T 之间的（年化）每半年复利利率。然后以$Z(t,T)$来定义折现因子，则有

$$Z(t,T)=\frac{1}{\left(1+\frac{r_2(t,T)}{2}\right)^{2\times(T-t)}} \tag{2-11}$$

以每半年复利的利率$r_2(t,T)$定义一个 T 时刻的回报为

$$F_T=P_t\times[1+\frac{r_2(t,T)}{2}]^{2\times(T-t)} \tag{2-12}$$

其中：P_t——t 时刻的初始投资；

F_T——T 时刻的回报

由于 T 时刻的收益在 t 时刻是已知的，所以 t 时刻的投资与 T 时刻的收益之间的关系就定义了货币的时间价值$Z(t,T)$。类似地，给定折现因子$Z(t,T)$，我们可以获得每半年复利的利率。

令$Z(t,T)$为 t 时刻与 T 时刻之间的折现因子，那么每半年复利的利率$r_2(t,T)$可以由下面的公式算出

$$r_2(t,T)=2\times\left[\frac{1}{Z(t,T)^{\frac{1}{2\times(T-t)}}}-1\right] \tag{2-13}$$

（2）更高的复利频率

如果我们令 n 表示每年复利的次数（比如 n=2 对应每半年复利一次），我们就可以得到：

$$FV = A\left[1+\frac{r_n(t,T)}{n}\right]^{n\times(T-t)}$$

其中：A——初始投资额；

FV——该笔投资的终值；

$T-t$——投资期限；

$r_n(t,T)$——投资期内按年复利的年利率；

n ——每年复利频次

同时，有，

$$FV \times Z(t,T) = A$$

其中：$Z(t,T)$——相应的折现因子

因此，有

$$Z(t,T) = \frac{1}{[1+\frac{r_n(t,T)}{n}]^{n\times(T-t)}} \tag{2-14}$$

解出$r_n(t,T)$，我们可以得到

$$r_n(t，T) = n\times\left[\frac{1}{Z(t，T)^{\frac{1}{n\times(T-t)}}}-1\right] \tag{2-15}$$

（3）连续复利

连续复利的利率是通过增加复利的频率 n 到无穷大而得到的。然而，对所有以实用为目的而使用连续复利的情况来说，每天复利就已经很接近连续复利了。

【例 2-8】考查前面我们在 z 时刻投资 100 元并在 1 年后收到 105 元的例子。按年复利的利率为

表 2-1 利率与复利频率

复利频率	N	$r_n(t，t+1)$
每年	1	5.000%
每半年	2	4. 939%
每月	12	4. 889%
每半月	24	4. 883%
每周	52	4. 881%
每半周	104	4. 880%
每日	365	4. 879%
每半天	730	4. 879%
每小时	8 760	4. 879%
连续复利	∞	4. 879%

由表 2-1 可以看出，如果我们不断增加 n，那么每年 n 次复利的利率$r_n(t，t+1)$也会不断增加，只不过增加的速度会越来越慢。最终会非常接近一个数—4.879%。这就是连续复利的利率。注意在这个例子中，每天复利的利率（n=252）与更高频率（n>252）复利得到的利率没有区别，即我们可以在心里把连续复利当作每天复利。

从数学上讲，我们可以把连续复利表示为 n 增加到无穷时的计算公式。

事实 6：连续复利（continuously compounded interest rates）的利率$r(t,T)$，由 n 趋于无穷大的$r_n(t，T)$得到，它可以根据公式(2-14)得到，可表为

$$Z(t,T)=e^{-r(t,T)(T-t)} \tag{2-16}$$

解出$r(t,T)$得

$$r(t,T)=-\frac{ln\,[Z(t,T)]}{T-t} \tag{2-17}$$

2.2.2.2 折现因子和利率之间的关系

前面的公式显示，给定 t 时刻和 T 时刻之间的折现因子$Z(t,T)$，我们可以定义任何复利频率的利率。这意味着我们可以通过用这些等式里暗含的相等关系，从一个复利频率换算成另一个复利频率，我们有

$$r(t,T)=n\times ln[1+\frac{r_n(t,T)}{n}] \tag{2-18}$$

$$r_n(t,T)=n\times\left[e^{\frac{r(t,r)}{n}}-1\right] \tag{2-19}$$

这表明资金的时间价值可以通过折现因子等价表示，或者由有着适当的复利频率的利率形式表示。有时关注折现因子会很方便，其他时候关注利率会很方便，具体采用哪种形式取决于实际情况。我们应该时刻牢记，这两种形式是等价的。

【例 2-9】假定某商业银行对外的利率报价是 5%，按季度复利，其相对应的连续复利是多少？

$$r(t,T)=n\times\ln\left[1+\frac{r_n(t,T)}{n}\right]=4\times\ln\left(1+\frac{5\%}{4}\right)=4.969\%$$

【例 2-10】假定某商业银行对外的利率报价是 6%，该利率是连续复利利率，试计算等价的每月复利的复利利率。

$$r_n(t,T)=n\times\left[e^{\frac{r(t,r)}{n}}-1\right]=12\times\left(e^{\frac{6\%}{12}}-1\right)=6.015\%$$

2.3 收益率的度量

2.3.1 当期收益率

定义 2-7：当期收益率（current yield）是指债券年息票利息收入与债券市场价格的比值，也称本期收益率。可用公式表为：

$$y_c=\frac{C}{P}\times 100\% \tag{2-21}$$

其中：y_c——当期收益率；

C——息票利息；

P——债券的市场价格。

【例 2-9】有一偿还期为 5 年的债券，面值 100 元，票面利率 4%，每年付息一次，现在的市场价格为 97.16 元，则其当期收益率为：

$$y_c=\frac{100\times 4\%}{97.16}=4.12\%$$

如果债券一年付息多次，按照当期收益率的定义，仍然是用一年的利息除以债券市场价格，而不是用每次支付的利息额除以债券市场价格。比如，假设上例中的债券改为每半年付息一次，在其他条件不变的情况下，当期收益率仍然是 4.12%。

当期收益率可以用来反映债券每年利息收入的收益情况，衡量了债券所有人在某一期间所获得的现金收入相较于购买价格的比率，但没有考虑影响债券投资

者收益的其他收入的来源，如买卖债券的资本利得，更没有考虑买卖债券的总体收益情况。

从当期收益率的公式可以看到，若要提升当期收益率，最直接的方法不外乎一是提升息票利息；二是将购入债券的价格降低。另外，债券价格越接近债券面值，当期收益率就越接近到期收益率；反之，债券价格越偏离债券面值，当期收益率也就越偏离到期收益率。

2.3.2 实际年收益率

债券收益率有多种表示方法，如果两种债券收益率采用不同的表示方法，则这两种债券的收益率就无法比较。另外，即使两种债券收益率的表示方法相同，如果这两种债券的付息频率不同，这两种债券的实际收益率也不一样。

债券的收益率可以表示为每期收益率(rate for period)。例如 1 年期收益率、半年期收益率、季度收益率、月收益率或天收益率等。为了对不同债券的收益率进行比较，有必要计算债券的实际年收益率(effective annual rate, EAR)。实际年收益率与每期收益率的关系如下式所示：

$$EAR = (1 + APR)^m - 1 \tag{2-23}$$

其中：m——年付息次数；

EAR——实际年收益率；

APR——每期名义收益率；

【例 2-10】A 债券的月度收益率为 1%，B 债券的半年收益率为 6%，求这两种债券的实际年收益率。

解：由于 A 债券的收益率是月度收益率，即每期收益率为 1%。1 年共有 12 个月。所以，A 债券的实际年收益率为：

$$EAR = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12.68\%$$

$$EAR = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12.68\%$$

由于 B 债券的收益率是半年收益率，即每期收益率为 6%，1 年共有 2 个半年。所以，B 债券的实际年收益率则为：

$$EAR = (1 + 6\%)^2 - 1 = 12.36\%$$

$$EAR = (1 + 6\%)^2 - 1 = 12.36\%$$

由此可见，A 债券的实际年收益率高于 B 债券的实际年收益率。

2.3.3 内部收益率

定义 2-8：内部收益率(internal rate of return, IRR)是指资金流入现值总额与资金流出现值总额相等，即净现值（net present value, NPV）等于零时的折现率。

内部收益率在项目经济评价中有重要的作用，是一项投资可望达到的报酬率，该指标越大越好。显然，当净现值等于零时，在债券投资领域，到期收益率也就是内生收益率。项目的净现值与内部收益率的关系如下：

$$NPV=\sum_{t=1}^{n}\frac{A_{\mathrm{t}}}{(1+y_{IRR})^{t}}-P \tag{2-20}$$

其中：y_{IRR} ——内部收益率；

A_{t} ——每期现金流；

P ——项目初始投资额。

2.3.4 到期收益率

2.3.4.1 到期收益率的定义

在所有衡量债券收益率的指标中，到期收益率是应用最广泛的指标。

定义 2-9：到期收益率（yield to maturity）是使债券未来现金流的现值正好等于债券当前的市场价格（初始投资）的内部收益率。它是按复利计算的收益率，考虑了货币的时间价值，能较好地反映债券的实际收益。到期收益率计算公式为：

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{(1+y_{m})^{t}}+\frac{M}{(1+y_{m})^{n}} \tag{2-22}$$

式中：y_m——到期收益率

P——债券价格；

C——票面利息，M 为债券面值，T 为债券距到期的期限。；

M——债券面值；

T——债券距到期的期限。

显然，到期收益率相当于投资者按照当前市场价格购买投资债券并且一直持有到满期时可以获得的内部收益率，也为该债券的复利回报率。

债券的票面利率、当期收益率和到期收益率之间，有下述的关系：

①如果债券价格等于债券面值(平价)，则票面利率=当期收益率=到期收益率；

②如果债券价格低于债券面值(折价)，则票面利率<当期收益率<到期收益率；

③如果债券价格高于债券面值(溢价)，则票面利率>当期收益率>到期收益率。这些结论，读者可以从理论上给予证明。

上述的关系也可以定性地来理解：债券平价时，票面利率是等于到期收益率的。如果债券折价，那么到期投资者就会有资本利得，因此到期收益率会高于票面利率，而当期收益率只考虑利息收益，不考虑到期的资本利得，故比到期收益率低一些。如果债券溢价，那么到期投资者就会有资本损失，因此到期收益率会低于票面利率，而当期收益率同样只考虑利息收益，不考虑到期的资本损失，故比到期收益率高一些。

2.3.4.2 到期收益率的计算

【例 2-11】假设有一只期限为 5 年，面值为 100 元的债券，票面利率为 6%，每年付息一次，该债券当前的市场价格为 98.2 元。试求该债券的到期收益率。

解：计算债券到期收益率的方法很多，下面试图用 5 种方法分别计算：

（1）插值法

根据到期收益率的计算公式，有

$$98.2=\sum_{t=1}^{5}\frac{6}{(1+y_m)^t}+\frac{100}{(1+y_m)^5}$$

若债券为平价发行，则到期收益率应等于票面利率。该债券当前市场价格为 98.2 元，因此属于折价发行，其到期收益率应略大于票面利率 6%，不妨设为 7%。

当该债券到期收益率为 7%时，有

$$P=\sum_{t=1}^{5}\frac{6}{(1+7\%)^t}+\frac{100}{(1+7\%)^5}=95.9$$

因此，可利用插值法计算公式，有

$$\frac{100-98.2}{98.2-95.9}=\frac{6\%-y_m}{y_m-7\%}$$

解得：

$$y_m\approx 6.44\%$$

（2）公式法

到期收益率的计算，可以采用如下简便公式

$$y_m = \frac{I + \frac{M-P}{n}}{\frac{M+2P}{3}}$$

其中： y_m——债券到期收益率；I——每年的固定利息；M——到期归还的本金（面值）；P——债券的购买价格；n——债券距到期日的年数。

因此，根据上述公式，有

$$i = \frac{I + \frac{M-P}{n}}{\frac{M+2P}{3}} = \frac{6 + \frac{100-98.2}{5}}{\frac{100+2\times 98.2}{3}} \approx 6.44\%$$

（3）使用金融计算器计算

具体操作，其按键顺序为：5N，即给期数赋值为 5 期；100FV，给终值赋值为 100；6PMT，给每期现金流赋值为 6；-98.2PV，给现值赋值，即债券当前价格 98.2，由于金融计算器的自动平衡设定，现值应与终止符号相反，因此输入-98.2；CPT1/Y，CPT 为 computer（计算）英文单词的缩写，1/Y 为金融计算器中表示到期收益率的符号，得出答案：6.4324%。

（4）利用 Python 编程计算

通过等式求解y_m并非一件容易的事，然而运用 python 可以很方便的得到结果，即运用 SciPy 子模块 optimize 中的函数 fsolve，具体计算过程分两步：

第一步：通过 python 自定义一个计算债券到期收益率的函数，代码如下：

```
def YTM(C,M,T,m,P):
    '''构建计算债券到期收益率的函数
    C：债券的票面利率；
    M：债券的本金；
    T：债券的期限，用年表示；
    m：债券票面利率每年的支付次数；
    P：债券的市场价格。'''
    import scipy.optimize as so
    #导入 SciPy 的子模块 optimize
    import numpy as np
    def f(y):
```

```
        coupon=[]
        #建立一个初始的存放每一期票息现值的列表
        for i in np.arange(1,T*m+1):
            coupon.append(np.M*C/m/(1+y/m)^i)
        #计算每一期债券票息的现值并放入列表
        return np.sum(coupon)+np.M/(1+y/m)^T*m-P
        #相当于输出一个等于零的式子
    return so.fsolve(f,0.1)
```

第二步：运用第一步中自定义的计算债券到期收益率的函数 YTM，求解例题中的到期收益率，具体的代码如下：

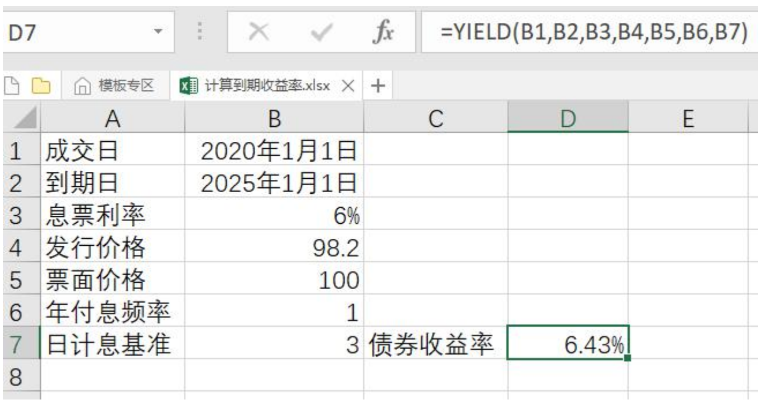
```
Bond_yield = YTM(C=0.06,M=100,T=5,m=2,P=98.2)
#得到的结果是一个列表
print('计算得到债券的到期收益率',np.round(Bond_yield,6))
```

通过以上的两步计算，最终得到了该债券的到期收益率等于 6.43%。感兴趣的同学也可以采用 Matlab 等软件编程计算。

（5）使用 Excel 计算

Excel 中通常使用 YEILD 函数计算定期付息债券的收益率。

具体语法为：YIELD（settlement,maturity,rate,pr,redemption,frequency,basis）其中：settlement 是债券的成交日，maturity 为债券的到期日，rate 为债券的年息票利率，pr 为面值为 100 元的债券的价格，redemption 为面值为 100 元的债券的清偿价值，frequency 为年付息次数，basis 为日计数基准类型(0 或省略为 30/360，1 为实际天数/实际天数，2 为实际天数/360，3 为实际天数/365，4 为欧洲 30/360)。



	A	B	C	D	E
1	成交日	2020年1月1日			
2	到期日	2025年1月1日			
3	息票利率	6%			
4	发行价格	98.2			
5	票面价格	100			
6	年付息频率	1			
7	日计息基准	3	债券收益率	6.43%	
8					

图 2-5　YIELD 函数计算到期收益率

从图 2-5 中 Excel 计算结果，可知该债券的到期收益率为 6.43%。

综上，此处给出了到期收益率的五种计算方法，得到该债券到期收益率大约为 6.43%。

2.3.4.3 到期收益率的优点

到期收益率的思想在收益率分析中应用非常广泛，这主要是因为：①该指标综合考虑了债券投资的三种未来现金收益：每一期的现金流（利息）；今天的投资价格与未来偿还的面值之间的资本利得；每一期现金流投资至期末的利息（利息的利息）。②到期收益率的计算显然要相对科学。③到期收益率与债券价格之间的一一对应关系也是它被广泛使用的原因之一。对于给定的债券，只要未来的现金流确定，债券价格与到期收益率之间存在着一一对应的关系，报出价格和报出到期收益率是等价的。

2.3.4.4 到期收益率的缺点

尽管同时考虑了债券投资的三种未来收益，到期收益率指标仍然只是一定条件下的承诺到期收益率(promised yield to maturity)，并不是预期收益率的精确指标。到期收益率的计算实际包含以下三个假定：①没有违约风险；②投资者持有到期；③每一期的现金流都按照恒定的到期收益率进行再投资。即使忽略违约问题，投资者购买债券时，也并不总是持有到期的，常常会提前变现，这样资本利得就不再等于购买价格与到期面值之差，而是不确定的。进一步看，即使忽略违约风险，并且假设投资者持有到期，真实的再投资利率也不可能总是y_m，一旦再投资利率发生变化，投资的真实收益率就会偏离到期收益率，这也是不确定的，这也是第 1 章中提到的再投资风险。

普通债券的到期收益率如此，复杂债券的到期收益率的准确性就更低了。例如，分期偿付债券由于本金分摊到每一期偿还，加上付息频率通常较高，而且存在提前偿付的可能，再投资风险就比一般的债券大得多。根据公式计算得到的现金流收益率与真实投资收益率的差异通常相当显著。对于可赎回债券和可回售债券来说，除了到期收益率计算时的三个假设外，在计算赎回收益率和回售收益率时还需要额外假设赎回日和回售日，其准确性会进一步降低。总之，到期收益率并不是预期收益率的精确指标。

2.3.4.5 到期收益率的应用

尽管到期收益率并非真实收益率的准确度量，但在实际中人们尚未发现更好的指标来完全取代它，因此到期收益率在债券分析中应用非常普遍。下面我们分别介绍其主要应用以及需要注意的问题。

（1）用于报价

对于给定的债券，只要未来的现金流确定，债券价格与到期收益率之间存在着一一对应的关系，报出价格和报出到期收益率是等价的。而投资者通常更关心投资的收益率而非绝对价格。此外，债券价格通常不可比而到期收益率在一定条件下是可比的，因此，报价成为到期收益率的一个重要用途。

（2）用于比较债券的投资价值

只要信用等级、剩余期限、本金偿付方式和利息支付这几个条件中的任意一个有所差异，债券的合理价格就会不同，债券价格本身是不可比的。但是，如果发行者信用等级、债券的剩余期限、本金偿还方式条件都相同，只是利息支付不同，债券价格内含的合理到期收益率应当比较接近，因此人们常常对其他条件相同，但利息支付不同的债券比较到期收益率，进而判断相对的投资价值。下面我们对此进行详细分析。

首先，如果发行者信用等级不同，到期收益率之间必然存在信用风险价差，因而无法直接通过简单比较到期收益率的大小来判断债券投资价值；其次，债券的剩余期限不同，到期收益率一定也是不可比的，只有剩余期限相同且等于投资期限时，到期收益率才有可能用于比较不同债券的投资价值；再次，如果本金偿还方式不同，即一个债券是分期偿付，另一个债券是到期一次性还本，即使两个债券都定价合理，两者的到期收益率也一定是不相等的，从而不能简单进行比较；最后，如果利息支付不同，严格来说，到期收益率也不可比。如果利息支付频率和每年支付的票面利息不同，到期收益率仍然是难以比较的。

在实际市场中，常见的情形是其他条件都相同，包括利息支付频率也相同，但票面年利息有所不同，这样的债券到期收益率应当相差不大。如果实际市场价格内含的到期收益率差异很大，就说明到期收益率较高的那个债券相对定价过低而到期收益率较低的债券相对定价过高。

（3）用于折现和定价

在债券定价中，人们经常用到期收益率折现，但也常常使用即期利率折现。

这两者的区别在下一节内容中给出。

2.3.5 即期收益率

2.3.5.1 即期收益率的定义

定义 2-10：即期收益率被称为即期利率（spot rate），是指对于未来只有一笔现金流的债券，使其未来现金流的现值等于债券当前市场价格的折现率。

由于即期利率对应的是一笔现金流，所以有时也称为零息票债券到期收益利率，也称零息利率，其计算公式为

$$y_s = \sqrt[n]{\frac{C+M}{P}} - 1 \tag{2-24}$$

其中：y_s——即期利率；

C——债券到期利息；

M——债券面值；

P——债券的市场价格；

n——债券剩余期限。

如果债券没有票面利率，贴现发行，则公式(2-24)中的 C 为零即可。

【例 2-12】有一只偿还期为 5 年的债券，面值 100 元，票面利率 4%，到期一次还本付息，现在的市场价格为 97.16 元，则其即期利率为：

$$y_s = \sqrt[5]{\frac{100 \times 4\% \times 5 + 100}{97.16}} - 1 = 4.31\%$$

即期利率的优劣特征是：即期利率针对的是未来只有一笔现金流收益的债券，所以对于零息债券比较适用，但对于还有多次利息支付的附息债券，就无法直接求得。

在债券市场上，通常即期利率不是一个能够直接观察到的市场变量，而是一个基于现金流折现法，通过对市场数据进行分析而得到的利率。在现代金融分析中，人们运用各种先进的数学模型与计算方法，能够科学准确地构造各种不同期限的即期利率，其构造方法将在第 5 章进行介绍。

2.3.5.2 即期收益率与到期收益率区别

在债券定价中，究竟应该用什么利率作为折现率？这是很多人为之困惑的问题。

首先，当投资产品是零息票债券时，其到期期限的即期利率就是对应的到期收益率。事实上，即期利率就常常被定义为期间没有现金流的一笔投资的到期收益率。当该投资是附息票债券时，即期利率和到期收益率就不再相等，因为此时到期收益率是期间有定期现金流入的投资的内含收益率。即期利率是到期收益率的一个特例。

因此，n 年期债券的到期收益率实际上可以看作 0 至 n 年的即期利率期限结构的某种加权平均，是投资至期末的总的年平均收益率。反过来，n 年期的即期利率可以视为 n 年期到期收益率的边际利率。因此，如果整条利率期限结构向上倾斜，长期的即期利率一定高于同样期限的到期收益率，因为要使得平均值趋于上升，边际值必须大于平均值。基于同样的道理，如果整条利率期限结构向下倾斜，长期即期利率一定低于同样期限的到期收益率。

最后，在为债券定价时，既可以用到期收益率，也可以用即期利率作为折现率，但应用时必须符合两者的内在含义。具体来说，如果用的是即期利率，其经济含义是每一笔未来的现金流都分别折现至今加总。对于每一笔现金流来说，从今天到该笔现金流之间都没有其他现金流发生，当然必须使用反映相应期限和相应风险的即期利率进行折现；如果用的是到期收益率，其经济含义是选择一个总的年平均收益率为所有现金流折现，这时就应使用反映相应期限、相应风险和相应现金流结构的到期收益率作为折现率。

值得注意的是，我们强调即期利率的选择必须符合相应期限和相应风险，到期收益率的选择除了相应期限和相应风险之外，还需符合相应的现金流结构。这是因为折现率本质上是人们投资时面对未来所要求的收益率，它是预期收益率或是要求收益率的概念，因此其选择必须与现金流的期限、风险和现金流结构相匹配。首先，人们对不同期限的投资，所要求的收益率显然是不一样的；其次，未来现金流风险不同，所要求的收益率显然也不一样；最后，对于到期收益率来说，如果计复利频率不同，则相同期限和相同风险的债券的到期收益率也是不同的。一般来说，应选择同样利息支付频率的平价到期收益率作为折现率。

2.3.6 远期收益率

定义 2-11：远期收益率又称远期利率（forward rate），是指从将来某个时点开始，到将来另一个更远时点结束之间的即期利率。

通常情况下，远期利率针对的是将来两个时点之间只有一笔现金流的债券，所以是将来两个时点之间的即期利率。从资金借贷角度看，远期利率是当前约定的未来借贷的均衡利率。远期利率的优劣特征是：远期利率在一定程度上可以反映人们对未来利率走势的看法，但它不能用来表示当期投资债券的收益情况。

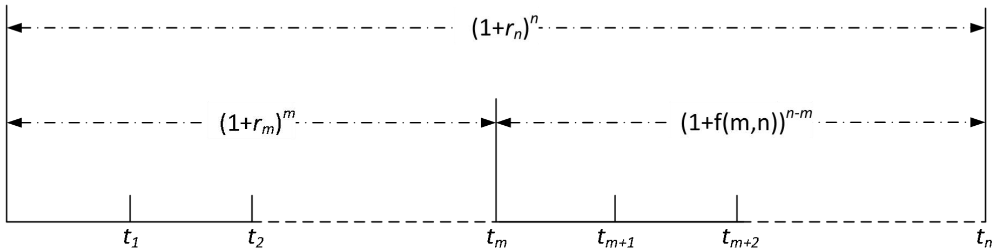


图 2-6 即期收益率和远期收益率的关系

图 2-6 显示了即期利率和远期利率的关系，t 表示时间(各时点用 t 加下标表示，其中 $n>m$)，r_m表示从现在开始的 m 期即期利率，r_n表示从现在开始的 n 期即期利率，$f(m,n)$表示从 m 时点开始到 n 时点为止的远期利率。

假设时间单位为年，投资者的投资期限是 n 年，则该投资者有两种选择：一种是按r_n的即期利率投资 n 年，期末价值为$(1+r_n)^n$；另一种是先按r_m的即期利率投资 m 年，期末价值为$(1+r_m)^m$，再按 $f(m,n)$的远期利率投资 n-m 年。在没有套利机会而达到均衡的情况下，两种投资方法的期末总值应该是一样的，故有

$$(1+y_n)^n=(1+y_m)^m(1+\ f_{(m,n)})^{n-m} \tag{2-25}$$

进一步可得

$$f(m,n)=[\frac{(1+r_n)^n}{(1+r_m)^m}]^{\frac{1}{n-m}}-1 \tag{2-26}$$

【例 2-13】假定有一个零息债券的剩余期限为 2 年，对应的即期利率为 3.12%，另一个零息债券的剩余期限为 5 年，对应的即期利率为 4.50%，试求从 2 年后开始至 5 年末的远期利率。

解：根据公式(2-26)，有

$$f(2,5)=\sqrt[3]{\frac{(1+4.50\%)^5}{(1+3.12\%)^2}}-1=5.43\%$$

2.3.7 赎回收益率

对于可赎回债券，发行人在到期之前有可能进行赎回，因此，就需要计算债券一旦被赎回的收益率。在这种情况下，可以按照公式(2-27)计算。

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{(1+y_r)^t}+\frac{P_r}{(1+y_r)^n} \tag{2-27}$$

其中：y_r——赎回收益率；

P——债券价格；

C——票面利息；

P_r——债券赎回价；

T 为债券距赎回的期限(一般用年表示)。

实际上，可赎回债券往往会设置首次提前赎回日以及随后的赎回日，因此可以分别计算未赎回的到期收益率、首次赎回收益率和随后的每次赎回收益率，并将其中最低的作为最差收益率。最差收益率对稳健型债券投资者有特别的参考意义。

2.3.8 持有期收益率

2.3.8.1 一期的持有期回报率

即使将债券持有至到期，投资者获得的实际回报率与事先计算出来的到期收益率也可能不相等。在投资期结束后，为了准确地计算债券的事后收益率，人们经常计算债券的持有期回报率(holding period return，HPR)。

定义 2-12：持有期回报率是债券在一定持有期内的收益（包括利息收入和资本利得或损失）相对于债券期初价格的比率，它是衡量债券事后实际收益率的准确指标。

根据定义，有

$$HPR=\frac{C+(P_1-P_0)}{P_0} \tag{2-28}$$

其中：HPR——一期的持有期回报率；

C——利息；

P_1——第一期期末的价格；

P_0——债券期初价格。

2.3.8.2 多期的持有期回报率

到期收益率是债券在整个生命期内实现的回报率。对于付息债券，我们必须

考虑利息的再投资，如果把利息的再投资收益计入债券收益，据此计算出来的收益率就被称作复利收益率。由此，我们可以总结出多期的持有期回报率 y，也就是复利收益率的计算方法：

$$P_0 \times (1+y)^n = FV$$

$$y = \sqrt[n]{\frac{FV}{P_0}} - 1$$

其中：FV——终值；

n——持有期数；

P_0——债券的期初价格。

实际上，债券经过 n 期后的终值(期末财富)包括三部分：债券在第 n 期的销售价格；发行人支付的利息；在这期间各次利息产生的利息。

注意，每次利息都将按照不同的利率进行再投资。例如，第一次支付的利息将按照当时的利率再投资 n-1 期，第二次支付的利息也将按照当时的利率水平再投资 n-2 期，依此类推。

在实际投资决策中，每次利息的再投资利率事先是未知的。到期前债券的销售价格也是未知的。只有持有至到期，债券价格才是已知的，等于债券面值。因此，复利收益率只有在投资期结束以后才能计算出来。所以说复利收益率是多期的持有期回报率，衡量的是债券的事后收益率。

2.3.9 总收益率

2.3.9.1 持有至到期的债券的总收益率

投资者在债券持有期内不仅可以把利息收入再投资，获取利息的利息，还能在市场上买卖债券，赚取价差。因此。债券的总收益除利息收入外，还包括利息再投资所生的利息和买卖盈亏差价，又称作资本利得(损失)。当期收益率只考虑了利息的支付，没有考虑利息的利息和资本利得(损失)。到期收益率考虑了利息和资本利得(损失)，也考虑了利息的利息，但是它假设利息可以按与到期收益率相等的利率进行再投资。与到期收益率一样，赎回收益率同样考虑了债券收益的三种潜在来源，同样做了利息以赎回收益率进行再投资的假设。

要计算债券的总收益，就要分别计算三部分收益的大小。运用年金的终值公

式，可以得到利息与利息再投资所获得的利息之和：

$$C+C'=C\times[\frac{(1+r)^{n}-1}{r}] \tag{2-29}$$

其中：C——债券利息；

C'——利息的利息

r——每期再投资利率；

n ——距到期日的期数。

其他条件一定时，债券的到期时间越长，利息所生的利息越多，占债券总收益的比重也越大：票面利率越高，利息所生的利息越多，债券总收益更大程度上依赖于利息再投资所获利息的多少。

计算到期收益率时，我们假设利息按到期收益率进行再投资，但是这个假设在现实中常常不成立。利息再投资利率不等于到期收益率时，债券的总收益率就不等于到期收益率，这时怎样计算总收益率的大小呢？其实，前面介绍过的复利收益率衡量的就是债券的总收益率，区别仅在于复利收益率是在投资结束后计算出的已实现的收益率。接下来，介绍的总收益率是事先计算的，再投资利率取决于投资者的预期。与复利收益率相仿，债券总收益率的计算步骤如下：

$$\text{债券的期末价值}=\text{总的利息}+\text{利息的利息}+\text{债券面值} \tag{2-30}$$

$$y=\sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}-1 \tag{2-31}$$

其中：y——每期收益率；

FV——期末价值；

PV——期初价值。

由于财务报告通常是以年度为基础的，另外，为了便于比较债券的收益率，要将债券的每期收益率转化成实际年收益率。

【例 2-14】某投资者用 950.53 元购买一种面值 1000 元的 8 年期债券。票面利率是 6%，半年付息一次，下一次付息在半年后。如果债券持有至到期日，再投资利率为 5%。求该债券的总收益率。

解：该债券 8 年后的期末价值：

$$\frac{30\times[(1+2.5\%)^{16}-1]}{2.5\%}+1000=1581.41\text{（元）}$$

所以，该债券半年期总收益率：

$$\left(\frac{1581.41}{950.53}\right)^{\frac{1}{16}}-1=3.23\%$$

对应的实际年收益率：$(1+3.23\%)^2-1=6.56\%$

我们可以求出该债券的到期收益率是 6.94%，由于再投资利率(5%)小于到期收益率，所以该债券每年的总收益率小于到期收益率。

如果再投资利率为 8%，情况有所不同。这时，

期末价值：

$$\frac{30\times[(1+4\%)^{16}-1]}{4\%}+1000=1654.74\text{（元）}$$

半年期总收益率：

$$\left(\frac{1654.74}{950.53}\right)^{\frac{1}{16}}-1=3.53\%$$

实际年收益率：

$$(1+3.53\%)^2-1=7.18\%$$

在这里，再投资利率（8%）大于到期收益率，所以债券每年的总收益率也大于到期收益率。

2.3.9.2 提前卖出的债券的总收益率

如果债券可能在到期日之前卖出，也就是投资期比到期时间短，此时总收益率的计算方法有所不同，上述计算步骤中需要做修正的只有第一步。

$$\text{债券的期末价值}=\text{至投资期末的利息}+\text{至投资期末利息所生的利息}+\text{投资期末的债券价格}$$

其中，投资期末的债券价格是事先未知的，取决于投资者对投资期末收益率的预测，我们可以运用债券定价公式预测出投资期末的债券价格：

$$P=\sum_{t=1}^{N}\frac{C}{(1+r)^t}+\frac{F}{(1+r)^N}$$

其中：P——投资期末的债券价格；

C——利息；

F——债券面值；

r——预期的投资期末每期收益率；

N——投资期末距到期日的期数。

【例 2-15】投资者平价购买一种 8 年期的债券，面值为 1000 元，票面利率

为 6%，每半年付息一次，下一次付息在半年后。投资者 5 年后将会把债券卖出，其预期 5 年中利息的再投资利率为每年 5.6%，5 年后的 3 年期债券的到期收益率为 6.5%。求该债券的总收益率。

解：该债券 5 年内的利息与 5 年内利息的利息的和为

$$\frac{30\times[(1+2.8\%)^{10}-1]}{2.8\%}=340.77\text{（元）}$$

预测的第 5 年末的债券价格为

$$\frac{30\times[1-(1+3.25\%)^{-6}]}{3.25\%}+\frac{1000}{(1+3.25\%)^{6}}=986.57\text{（元）}$$

所以，5 年后的期末价值为：

340.77+986.57=1327.34（元）

那么，半年期总收益率为：

$$\sqrt[10]{\frac{1327.34}{1000}}-1=2.87\%$$

该债券实际年收益率：

$$(1+2.87\%)^2-1=5.82\%$$

【例 2-16】在上例中，投资者的预期有所变化，其预期前 2 年利息的再投资利率为 5.6%，后 3 年的再投资利率为 6%，5 年后的 3 年期债券的到期收益率为 6.5%。求该债券的总收益率。

解：第 1、2 年的利息+利息的利息：

$$30\times\frac{(1+2.8\%)^4-1}{2.8\%}=125.13\text{（元）}$$

这是它们在第 2 年末的终值，到第 5 年末升值为：

$$125.13\times(1+3\%)^6=149.41\text{（元）}$$

第 3 年至第 5 年的利息+利息的利息：

$$30\times\frac{(1+3\%)^6-1}{3\%}=194.05\text{（元）}$$

预测的第 5 年末的债券价格为：

$$30\times\frac{1-(1+3.25\%)^{-6}}{3.25\%}+\frac{1000}{(1+3.25\%)^6}=986.57\text{（元）}$$

因此，第 5 年末的财富终值：125.13+194.05+986.57=1330.03（元）

半年期总收益率

$$\sqrt[10]{\frac{1330.03}{1000}}-1=2.89\%$$

实际年收益率：

$$(1+2.89\%)^2-1=5.86\%$$

2.3.9.3 可赎回债券的总收益率

如果债券在投资期内可以被发行人赎回，我们应当先计算出投资者在赎回日可以取得的总收入，包括赎回日以前的利息、利息再投资所生的利息，以及赎回价格。这笔收入将按再投资利率投资直至投资期结束为止。因此，在债券总收益率的计算步骤中，我们只需要修正第一步：

$$FV=(C+C'+P)\times(1+r)^N$$

其中：FV——期末价值；

C——赎回日前的利息；

P——赎回价格；

r——每期再投资利率；

N——赎回日距投资期末的期数。

【例 2-17】有一种 10 年期的可赎回债券，面值为 1000 元，票面利率为 7%，半年付息一次，下一次付息在半年后，市场价格是 950 元。假设在第 5 年时该债券可赎回，赎回价格为 980 元。投资期为 8 年，投资者预期这 8 年内利息的再投资利率为每年 8%。求该投资的总收益率。

解：该债券 5 年内的利息支付与 5 年内利息的利息之和为

$$35\times\frac{(1+4\%)^{10}-1}{4\%}=420.21（元）$$

第 5 年末债券被赎回时，投资者一共获得：

$$420.21+980=1400.21（元）$$

这笔收入到第 8 年末升值为：

$$1400.21\times(1+4\%)^6=1771.71（元）$$

即投资期末的财富终值为 1771.71 元。

因此，半年期总收益率为：

$$(1771.71\div950)^{\frac{1}{16}}-1=3.97\%$$

相应的实际年收益率为：

$$(1+3.97\%)^2-1=8.10\%$$

2.3.10 组合收益率

债券组合的收益率不是构成该组合的单个债券到期收益率的加权平均值，而是将债券组合看作是一个单一的债券，使该债券组合所有现金流的现值等于该债券组合市场价值的适当贴现率就是该债券组合的到期收益率，该收益率也被称为债券组合的内部回报率。下面通过例子来说明。

【例 2-18】有一个债券组合，由三种半年付息的债券 A、B、C 组成，下次付息均在半年后，每种债券的相关资料，如表 2-2。求该债券组合的到期收益率。

表 2-2 债券组合的基本信息

债券名称	票面利率	到期时间（年）	面值（元）	市场价格（元）	到期收益率（年率）
A	6.0%	6	1000	951.68	7.0%
B	5.5%	5	20000	20000.00	5.5%
C	7.5%	4	10000	9831.68	8.0%

该债券组合的总市场价值为 951.68+2000.00+9831.68=30783.36（元）

组合收益率的求解过程，如表 2-3 所示：

表 2-3 债券组合的到期收益率

期数	债券 A 的现金流（元）	债券 B 的现金流（元）	债券 C 的现金流（元）	债券组合的总现金流（元）	债券组合总现金流的现值（元）
1	30	550	375	955	$955\div(1+r)$
2	30	550	375	955	$955\div(1+r)^2$
3	30	550	375	955	$955\div(1+r)^3$
4	30	550	375	955	$955\div(1+r)^4$
5	30	550	375	955	$955\div(1+r)^5$
6	30	550	375	955	$955\div(1+r)^6$
7	30	550	375	955	$955\div(1+r)^7$
8	30	550	10375	10955	$955\div(1+r)^8$
9	30	550		580	$955\div(1+r)^9$
10	30	20550		20580	$955\div(1+r)^{10}$
11	30			30	$955\div(1+r)^{11}$
12	1030			1030	$955\div(1+r)^{12}$
		总市场价值			30783.36

通过下式求债券组合的到期收益率 r：

$$30783.36 = 955 \times \frac{1-(1+r)^{-7}}{r} + \frac{10955}{(1+r)^{8}} + \frac{580}{(1+r)^{9}} + \frac{20580}{(1+r)^{10}} + \frac{30}{(1+r)^{11}} + \frac{1030}{(1+r)^{12}}$$

r=6.35%

2.4 收益率曲线概述

在债券市场上，我们可以看到，对于具有不同到期期限的债券，它们的收益率经常是不一样的，也就是说债券的收益率和债券的到期期限有着紧密联系，通常使用收益率曲线来表示两者之间的关系。

2.4.1 收益率曲线的含义和类型

2.4.1.1 收益率曲线的含义

定义 2-13：所谓的收益率曲线，就是显示一组信用质量相同，但到期期限不同的债券或其他金融工具收益率的数量关系图。通常用纵轴表示收益率，横轴是距离债券到期的时间。

根据定义中提及的金融工具各种不同的收益率定义，有不同的收益率曲线类型。如图 2-7 为 2020 年 12 月 29 日的国债与国家开发银行债收益率曲线。

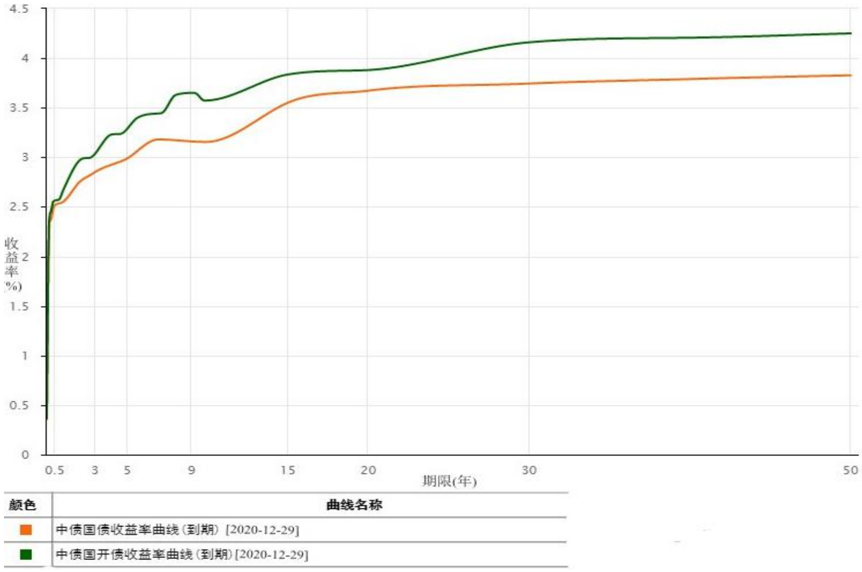


图 2-7 **2020 年 12 月 29 日的国债与国家开发银行债收益率曲线**

2.4.1.2 收益率曲线的类型

（1）到期收益率曲线

到期收益率曲线是根据一组相同类型债券的到期期限和到期收益率绘制的，是最常用的收益率曲线。

用来构建收益率曲线的各种债券距离赎回日的期限很少正好是整数年，然而

收益率曲线的横轴上所标注的通常是整数年，这是因为一个债券一旦被指应为某种期限的基准，它的收益率也就被当作代表性的收益率。到期收益率曲线之所以是最常见的收益率曲线，原因就在于到期收益率是最常用的报酬率指标。

（2）附息债券的收益率曲线

附息债券收益率曲线是根据一组具有相同票面利率债券的到期收益率与到期期限所绘制的收益率曲线。

一般而言，由于存在再投资风险以及税收问题，票面利率高的债券的价格较低。通常情况下，到期期限相同的债券收益率会因票面利率的不同而有很大的不同，票面利率相同的债券收益率，也会因到期期限不同而有很大差异。换句话说，不同的附息债券收益率曲线不仅收益率水平不同，收益率曲线的形状也不同。如果不考虑各种债券票面利率的不同，到期收益率曲线就会发生扭曲。因此，债券分析人员往往会通过根据赎回收益率绘制一条最佳拟合的曲线，因为一组债券的票面利率效应将导致所得到的曲线高低起伏。不过，由于现实中很难得到一组票面利率相同、到期期限各异的债券，这种收益率曲线非常少见。

（3）平价收益率曲线

平价收益率曲线是根据当前以面值交易的债券的到期收益率和到期期限绘制的。平价收益率曲线在二级市场的交易中不常使用，但发行市场或一级市场中的公司财务人员和其他相关人员经常使用这种收益率曲线。对那些以面值或接近面值的价格交易的债券来说，因为交易价格等于面值的债券的到期收益率就等于票面利率，所以其平价收益率等于该债券的票面利率。一级市场的参与者可按平价收益率确定按面值发行的新债券所需要的票面利率。投资者倾向于以不高于面值的价格购买新发行的债券，因此，债券的票面利率应与债券发行价格等于或稍低于债券面值相匹配。

当债券以面值或接近面值的价格交易时，可以根据债券的收益率绘制平价收益率曲线。如果市场中的债券价格严重偏离面值，所得到的曲线就会发生扭曲，这时，必须运用迭代法根据即期收益率曲线推导出平价收益率曲线，正如我们可能看到的，任何期限的债券的交易价格都很少等于面值。因此，债券市场通常利用实际的非平价普通债券收益率曲线推导出零息债券的收益率曲线，然后再假设债券以面值进行交易的情况下绘制假设的平价收益率曲线。

（4）即期收益率曲线

即期收益率曲线，也称为零息债券收益率曲线，又称为利率期限结构，是根据零息债券的收益率和到期期限绘制的曲线。

如果存在具有流动性的零息债券，市场可根据这些债券绘制零息收益率曲线。然而绘制零息债券收益率曲线并不必须一组零息债券，通常根据附息债券收益率曲线或平价收益率曲线推导出零息债券收益率曲线。实际上，在很多没有零息债券交易的市场中，可以根据传统到期收益率曲线构建即期收益率曲线。

即期收益率必须满足等式(2-32)，该等式假设债券每年支付一次利息，并且在付息日进行计算，因而应计利息为零。

$$P=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{(1+r_t)^t}+\frac{M}{(1+r_T)^T} \tag{2-32}$$

其中：P——债券当前价格;

r_t——到期期限为t年的债券的即期收益率;

C——每期利息;

M——债券面值。

理论上讲，某一到期期限债券的即期收益率等于具有相同到期期限的零息债券的收益率，这是一个重要的结论。正因为如此，我们可以根据市场中实际观察的零息债券的收益率推导出即期收益率，这也是即期收益率被称为零息收益率的原因。

零息债券收益率曲线在推导隐含远期利率和界定利率曲线结构时非常有用。零息债券收益率曲线也是确定债券相对价值的最好曲线，还是为新发行债券定价的最好曲线。然而，零息债券收益率曲线并不是平均市场收益率的绝对精确指标，因为用于绘制零息债券收益率曲线的大部分债券都不是零息债券。

（5）远期收益率曲线

在远期金融交易中，交易双方约定在未来某个时间按现在确定的价格用现金交换某个证券。因此，债券所适用的远期利率是债券在未来的即期收益率，也就是所购买的债券在未来某个时点结算时的零息债券的收益率。远期利率是现在根据当前的收益率曲线数据推导出来的，因此，认为远期利率是对未来即期利率的预测是不正确的。

远期利率可以根据即期利率推导，推导出的利率称为隐含远期利率，即为当前即期利率所隐含的利率。根据远期利率和到期期限关系可以绘制远期收益率曲线或远期对远期收益率曲线。远期利率满足等式(2-33)。

$$P=\frac{C}{(1+f(0,1))}+\frac{C}{(1+f(0,1))(1+f(1,2))}+\dots+\frac{M}{(1+f(0,1))\dots(1+f(T-1,T))}$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\frac{C}{\prod_{i=1}^{n}[1+f(i-1,i)]}+\frac{M}{\prod_{i=1}^{N}[1+f(i-1,i)]} \qquad (2\text{-}33)$$

其中：$f(i-1,i)$——隐含的一年期债券的远期利率或远期对远期利率；

T——该债券在T年到期。

将远期利率曲线看作利率的指示器是对该曲线的误用，远期利率的推导过程反映了所有当前已知的市场信息。在计算远期利率之后可能出现新的市场信息，而这些新的市场信息可能改变人们对未来利率的看法，并相应地引起远期利率曲线的变化。

（6）年金收益率曲线

寿险公司以及其他个人养老金公司常使用年金收益率曲线，该曲线根据年金收益率与到期期限绘制。年金收益率是按即期收益率为年金产品定价时所隐含的收益率。

即期收益率曲线和年金收益率曲线之间的关系，取决于市场利率水平。如果即期收益率曲线向上倾斜，年金收益率就在期末即期收益率曲线之下；如果即期收益率曲线向下倾斜，年金收益率曲线就位于即期收益率曲线之上。当票面利率较低时，债券的现金流的现值主要由最后的支付决定，年金收益率曲线与即期收益率曲线就比较接近；当票面利率较高时，这两条曲线就会逐渐分开。读者可以自行证明这些结论。

2.4.2 收益率曲线的形状和作用

2.4.2.1 收益率曲线的形状

在债券市场上，收益率曲线的走向有许多形状，其中比较典型的有四种正常、平坦、反向和拱形，如图 2-8。

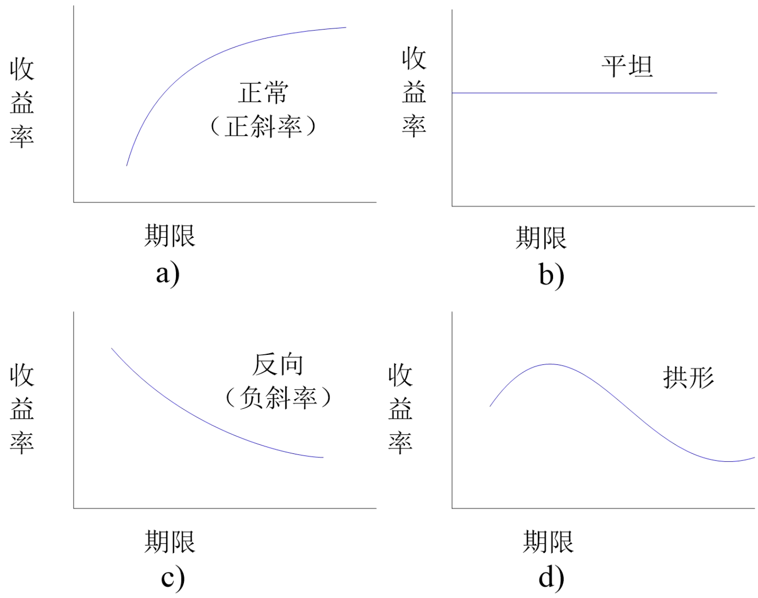


图 2-8 四种形态的收益率曲线

图 2-8 中 a)为向上的收益率曲线又称为正常的收益率曲线，表示到期期限越长，收益率越高。这种类型的收益率曲线在实际中最常见。正常的收益率曲线被认为是经济稳定的信号。

图 2-8 中 b)为向下的收益率曲线，也成为反向的收益率曲线，表示到期期限越长，收益率越低。这可能是因为投资者预期通货膨胀率长期而言要下降,或是债券的供给将大幅减少，这两种预期都会压低收益率。反向收益率曲线表明在某一时点上债券的投资期限越长，收益率越低，也就意味着社会经济进入衰退期。

图 2-8 中 c)为水平的收益率曲线，表示不同期限的收益率相等，呈水平型。水平的收益率曲线意味经济会出现不正常情况。水平的收益率曲线有时候被看做发生反向的早期征兆。

图 2-8 中 d)为拱形的收益率曲线又称为驼峰型收益率曲线，表示收益率先随着到期期限的增长而增加，然后达到一个顶点，随后又随着到期期限的增长而下降，呈拱形，继而又上升。

表 2-4 对上述几种收益率曲线形态做出部分解释。

表 2-4 收益率曲线的形态

收益率曲线形态	形态定义	形态解释
正常形态	期限越长，利率越高	这是利率期限结构的正常分布。期限越长，意味着风险越大（包括利率风险、信用风险、流动性风险），要求的利率回报也就越高。
平坦形态	长期限与短期限的利率水平基本	这种形态一般分两种情况： （1）长端收益率相对短端下降较多，导致收益率曲

	一致，期限利差很小	线向下变得平坦。这种情况一般反映投资者对债券牛市预期较强，做多长期限债券； （2）短端收益率较长端上行较多，导致收益率曲线向上变得平坦。当货币的资金变得紧张，导致货币市场利率急剧抬升时，往往会产生这种情况。
反向形态	短端收益率高于长端收益率	当流动性迅速收紧，甚至出现流动性枯竭时，货币市场利率急剧升高，超过了普通债券的收益率水平，可能会出现收益率曲线的反向形态，不过一般不会持续太长时间，如 2013 年的 6·20 事件后，国债的收益率曲线维持了一段时间的反向形态。
拱形形态	某个期限的收益率水平明显偏高，既高于左侧也高于右侧的收益率	可能与流动性溢价有关，如利率债的 7 年期债券流动性往往不佳，经常出现 7 年期利率高于 10 年期利率的情况。

当然，在极特殊的情况下，收益率曲线也会出现很诡异的形态。如在 2017 年 5 月 18 日，我国国债出现过 M 形的收益率曲线，3 年和 7 年的收益率较高，而 5 年与 10 年的收益率相对较低。实际金融市场中，影响短端利率和长端利率的因素比较复杂，简单讲“短端看资金，长端看预期”。短端利率受资金面松紧程度及货币市场利率影响较大，而长端利率则更多反映投资者对未来经济增长、通胀及利率走势的预期。

2.4.2.2 收益率曲线的作用

收益率曲线可以告诉我们，债券市场当前的交易价格还隐含有未来的交易价格，或者至少隐含了当前了市场对未来的预期。换句话说，收益率曲线是反映未来市场状况的一个很好的指标，与其他指标相比，收益率曲线要可靠得多，实证经验也很好的证明了这一点。债券资本市场的所有参与者都对收益率曲线的当前水平和形状以及他们所隐含的未来信息非常感兴趣，收益率曲线的主要作用可总结如下。

（1）确定所有债务市场工具的收益率

收益率曲线基本上确定了期限结构不同的各种债券的价格。不同期限的政府债券收益率为市场中其他债务工具的收益率设定了基准，因为其他所有债务工具都是根据政府债券的收益率定价的。举一个例子，如果 5 年期政府债券按 5.00%的收益率成交，则无论谁发行的所有其他五年期债券在发行时的收益率都会在 5.00%以上，高出 5.00%的这一部分称为利差。可见，债务工具的发行人是根据

收益率曲线为债券和所有其他债务工具定价的，因此，为新发行的证券定价时一般使用零息收益率曲线。

（2）作为未来收益率水平的指示器

收益率曲线的形状与市场对未来利率的预期相对应。债券市场参与者分析收益率曲线当前形状的目的就是为了获得收曲线中所隐含的有关市场利率未来走向的信息，这也许是收益率曲线最重要的一个功能。如何解释收益率曲线既是一门科学，也是一门艺术。不但债券交易商和基金经理会仔细审查收益率曲线所包含的信息，公司财务人员在进行项目评估时，也会考虑收益率曲线所披露的信息。此外，中央银行和政府财政部门也会分析收益率曲线，从中获得有关远期利率和通货膨胀水平的信息，并利用这些信息设定整个国家利率水平。

从现实来说，收益率曲线能帮助我们更好地计量金融市场中的利率风险；通过金融工程中的分解和组合技术可设计各种金融产品来满足不同风险偏好投资者的需要；通过发现市场上资产定价存在的不合理性，进行无风险套利，从而可提高金融市场的效率；为政府发行国债、加强国债管理、实施货币政策、调节利率、评价经济政策的效果提供重要的依据。

2.4.3 到期收益率曲线的形成和功能缺陷

2.4.3.1 到期收益率曲线的形成

如何得到到期收益率曲线？直接的办法就是根据债券的交易价格，算出其到期收益率。然后，将具有相同信用质量但剩余期限不同的债券的到期收益率在图上标示出来，就是一条到期收益率曲线。当然，这种办法还是比较粗糙。一是因为这样的线条其实不是光滑的曲线，而是连点描绘的折线；二是市场上如果存在错误定价的债券，则收益率曲线也会存在不合理的因素。因此，就有必要利用数学工具对市场实际债券的到期收益率数据进行处理，拟合出比较光滑的到期收益率曲线，具体数量方法和模型将在第 5 章进行详述。

2.4.3.2 到期收益率曲线的功能缺陷

到期收益率曲线并未区分各种债券因票面利率不同而造成的不同还本付息模式之间的差异。也就是说，与具有相同到期期限的债券相比，票面利率较低的债券在后期的现金流支付比例较大。收益率曲线还假设所有债券的现金流都是平均分布的。因此，在这种情况下，对收益率曲线构建时所使用的债券来讲，其现

金流并不是按恰当的折现率来折现的。债券收益率曲线的重要功能，在于给市场设置收益率标准并作为定价基础，其功能是有限的，既难于作为收益率标准，又无法合理用来定价。

从第一个方面来看，有两个信用质量完全相同的债券，它们的到期期限相同，但它们的到期收益率可能是不一样的。比如，有 A、B 两个国债，面值都是 100 元，到期期限都是 2 年，票面利率都为 10%，但 A 国债是到期一次还本付息，B 国债是每年付息一次。显然，在有效的市场上（假设 1 年期现金流折现率为 3.50%、2 年期现金流折现率为 4.50%），它们的到期收益率是不一样的，见表 2-5。

表 2-5 相同期限债券的到期收益率可能不同

时期	1 年	2 年	价格（元）	到期收益率
折现率	3.50%	4.50%		
A 国债现金流	0	120	109.89	4.50%
B 国债现金流	10	110	110.39	4.45%

从第二个方面来看，在实际定价时对多笔现金流折现采用统一的到期收益率并不合理。比如，有如下的到期收益率曲线：1 年期对应的到期收益率为 2%；2 年期对应的到期收益率为 3%；3 年期对应的到期收益率为 4%。假设现在财政部发行一个面值 100 元、每年付息一次的 3 年期债券，票面利率 5%。于是一个承销商可以按照 102.78 元购得，因为：

$$\frac{5}{1+4\%}+\frac{5}{(1+4\%)^2}+\frac{5+100}{(1+4\%)^3}=102.78\text{（元）}$$

然后该承销商自已发行三个贴现债券：A 债券期限 1 年、面值 5 元，B 债券期限 2 年、面值 5 元，C 债券期限 3 年、面值 105 元，其发行价分别为 4.90 元、4.71 元和 93.34 元，共得到 102.95 元。因为有：

$$\frac{5}{1+2\%}=4.9\text{（元）}$$

$$\frac{5}{(1+3\%)^2}=4.71\text{（元）}$$

$$\frac{5+100}{(1+4\%)^3}=93.34\text{（元）}$$

以后承销商自已发行的债券到期时，只需用财政部支付的债券利息和本金来分别偿付，结果可以无风险地获得利益 0.17 元。显然，这里存在用到期收益率曲线定价不合理的问题。

【本章小结】

本章介绍了货币的时间价值的含义，以及各种年金的计算方法，阐述了折现因子和利率之间的关系，给出了其之间的等价公式，并给出了常见的收益率的定义和度量方法，概述了收益率曲线的含义、类型和作用。

1. 所谓货币的时间价值，是指货币在不同的时点上具有不同的价值。具体是指当前持有的一定数量的货币比未来获得的等量货币具有更高的价值，是货币资金在周转使用中由于时间因素而形成的差额价值。

2. 年金是指某段时间内定期发生的一系列相同金额的现金流。按每次收付款项发生的时点不同，可以分为普通年金、即付年金、永续年金和递延年金等。

3. 折现因子通常指在时间 t 愿意用一定数量的资金换取未来时间 T 确定数量的资金，前者与后者的比，即为折现因子。它们随着时间的推移不断变化的。

4. 到期收益率（yield to maturity）是使债券未来现金流的现值正好等于债券当前的市场价格（初始投资）的内部收益率。

5. 到期收益率的三个优点：①综合考虑了债券投资的利息、资本利得和利息的利息；计算相对科学；到期收益率与债券价格之间是一一对应的。

6. 到期收益率的三个假定：没有违约风险；投资者持有到期；每一期的现金流都按照恒定的到期收益率进行再投资。

7. 所谓的收益率曲线，就是显示一组信用质量相同，但到期期限不同的债券或其他金融工具收益率的数量关系图。通常用纵轴表示收益率，横轴是距离债券到期的时间。通常收益率曲线的类型有：到期收益率曲线、付息债券收益率曲线、平价收益率曲线、即期收益率曲线、远期收益率曲线、年金收益率曲线。

8. 收益率曲线的走向有许多形状，其中比较典型的有四种正常、平坦、反向和拱形。

【关键词】

货币的时间价值（time value of money）

终值（future value）

现值（present value）

年金（annuity）

折现因子（discount factor）

连续复利（continuously compounded interest rates）

到期收益率（yield to maturity）

即期利率（spot rate）

远期利率（forward rate）

收益率曲线（yield curve）

【练习题】

1. 货币为什么会有时间价值？

2. 有一项年金，前 3 年无金额流入，后 5 年每年年初流入 300 万元，假设年利率为 6%，试计算其现值。

3. 假设你从 2022 年到 2027 年每年年初均在某银行存入 10000 元，若银行存款年利率为 3% ，每年复利一次，请计算该投资在 2022 年初的现值以及在 2027 年末的终值。

4. 一个债券期限为 5 年，票面利率为 5% ，面值为 100 元，1 年支付 1 次利息，目前的价格为 95.7876 元。求该债券的到期收益率。

5. 假设市场上只有债券 A 和债券 B，已知 A 为 1 年期零息债券，其收益率为 3%；B 为 2 年期附息债券，利率为 4%，每年付息一次，其面值为 100 元，现市场价格为 92.6 元，求市场上 2 年期的即期利率。

6. 某投资者签订了一份远期合同，根据约定 1 年后贷款 3000 元，3 年后偿还本息 3500 元。问 1 年后的 2 年期的远期利率为多少？

7. 假设某投资者在 2021 年 1 月 1 日购买了一张债券，面值为 1000 元，价格为 800 元，票面利率为 6% ，每半年支付 1 次。利息支付日为 1 月 1 日和 7 月 1 日。该投资者将这只债券于 7 月 1 日售出，价格是 803 元，则该债券持有收益率是多少？

8. 收益率曲线的形状有哪几种？为什么可能出现这些形态？

【思考题】

1. 有一种说法认为货币时间价值来源于人们认知心理的反映，你如何看待此观点?

2. 折现因子的影响因素有哪些？为什么金融危机期间，很多债券的价格会大幅度下跌？

参考文献

[1] 李磊宁,高言,戴韡. 固定收益证券[M].机械工业出版社,2014.

[2] 龚仰树,固定收益证券（第二版）[M].上海财经大学出版社,2017.

[3] 汤震宇、徐寒飞、李鑫.固定收益证券定价理论[M].复旦大学出版社,2004.

[4] 陈蓉,郑振龙.固定收益证券[M].北京大学出版社,2011.

[5] 姚长辉.固定收益证券[M].北京:北京大学出版社,2013.

[6] 张戡,徐晟.固定收益证券[M].北京:北京师范大学出版社,2011.

[7] 韩延伟.债券到期收益率简便计算公式的改进[J].上海管理科学,2006(06):6-8.