Лабораторная работа «Исследование законов механических колебаний с помощью крутильного маятника Поля»

ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить понятие о резонансной частоте, колебаниях, вращательном движении, свободных и вынужденных колебаниях.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим движение твердого тела произвольной формы и размеров относительно связанной с ним закрепленной точки О (рис. 1). Точку крепления тела назовем точкой подвеса. Такое закрепленное в точке подвеса твердое тело представляет собой физический маятник. Опыт показывает, что физический маятник, будучи выведенным из положения равновесия, совершает колебательное движение.

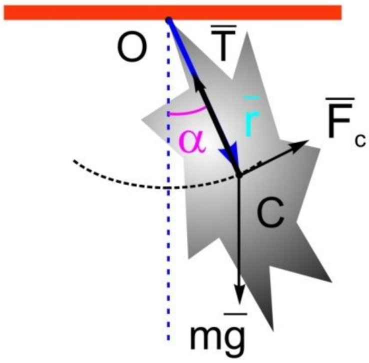

Рисунок 1 - Физический маятник и действующие на него силы.

Согласно основному закону динамики вращательного движения произведение момента инерции физического маятника на его угловое ускорение равно равнодействующему моменту внешних сил: силы тяжести $m\vec{g}$, силы сопротивления $\overrightarrow{Fc}$ и силы упругой деформации $\vec{T}$ твердого тела. Момент силы $\vec{T}$ равен нулю, поскольку деформация растяжения тела в любой момент времени параллельна радиус-вектору $\vec{r}$, определяющему положение центра масс тела относительно точки подвеса. Следовательно,

$$I\ddot{\vec{\alpha}} = \vec{M} + \vec{M}_c, \qquad (1)$$

где α(t) – угол отклонения маятника, отсчитываемый от положения равновесия;

$\vec{M}$ – момент силы тяжести, стремящийся возвратить систему в положение равновесия; $\vec{M}_c$– момент силы сопротивления.

Будем считать, что для случая малых колебаний момент силы тяжести, пропорционален углу отклонения маятника от положения равновесия, а момент силы сопротивления – скорости его движения, т. е.

$$M = -m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\alpha) = -k \cdot \sin(\alpha),$$

где M – проекция момента силы тяжести на ось вращения (для малых колебаний $M = -k \cdot \alpha$); $M_C = -h \cdot \dot{\alpha}$ – проекция момента сил сопротивления на ось вращения (выражение справедливо для малых скоростей).

Тогда, спроецировав уравнение (1) на направление оси вращения, получим:

$$I \cdot \ddot{\alpha} = M + M_C = -k \cdot \alpha - h \cdot \dot{\alpha}, \qquad (2)$$

где k и h – размерные константы; I – момент инерции маятника.

Поделив левую и правую части уравнения (2) на I и перенеся все слагаемые в левую часть, получим дифференциальное уравнение, описывающее динамику собственных затухающих колебаний физического маятника.

$$\ddot{\alpha} + 2\beta \cdot \dot{\alpha} + \omega_0^2 \cdot \alpha = 0, \qquad (3)$$

где β=h/2I – коэффициент затухания; $\omega_0=(k/I)^{1/2}$ – собственная частота колебаний маятника.

Решение уравнения (3) для случая малого сопротивления $\omega_0 > \beta$имеет вид:

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \qquad (4)$$

где$\omega=(\ \omega_0^{2\ 2})^{1/2}$ – частота свободных затухающих колебаний маятника.

Как видно из уравнения (4) амплитуда углового смещения □$_m$ будет уменьшаться (затухать) с течением времени по экспоненциальному закону:

$$a_m(t) = a_0 \cdot e^{-\beta t}, \qquad (5)$$

Коэффициент затухания определяет быстроту этого процесса. Он равен промежутку времени, по истечении которого амплитуда колебаний уменьшается в e = 2.73 раз.

Колебания при наличии затухания не являются гармоническими и даже периодическими. Условно, за период слабо затухающих колебаний можно принять минимальный промежуток времени между двумя ближайшими локальными максимумами или минимумами функции a(t) – углового смещения маятника относительно положения равновесия (Рисунок 2).

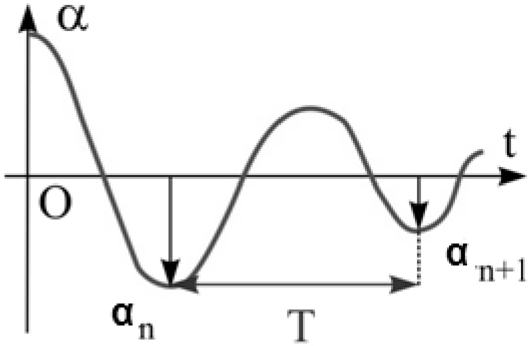

Рисунок 2 - Затухающие колебания при малом сопротивлении

Для характеристики интенсивности затухания используют понятие логарифмического декремента затухания. Пусть. T – условный период затухающих колебаний, α_n и α_{n+1} – амплитудные значения отклонения a маятника от положения равновесия для двух его соседних максимумов или минимумов (Рисунок 2). Величина *d*, равная

$$d = ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \qquad (6)$$

называется логарифмическим декрементом затухания.

Можно показать, что $d = \beta \cdot T$, а величина $1/d$ равна числу колебаний, по истечении которых их амплитуда уменьшается в e раз.

В случае большого трения, когда $\omega_0 = \beta$ решение уравнения (3) имеет вид

$$a(t) = (a_0(1 + \beta \cdot t) + \dot{\alpha}(0)\ t)e^{-\beta \cdot t}, \qquad (7)$$

где a_0 и $\dot{\alpha}(0)$– начальное угловое смещение и начальная угловая скорость соответственно.

Примерный вид зависимостей α(t) при разных начальных условиях для случая $\omega_0 = \beta$ приведен на Рис.3а. Особенностью таких колебаний, называемых критическими, является то, что описывающая их зависимость a(t) пересекает ось времени не более одного раза.

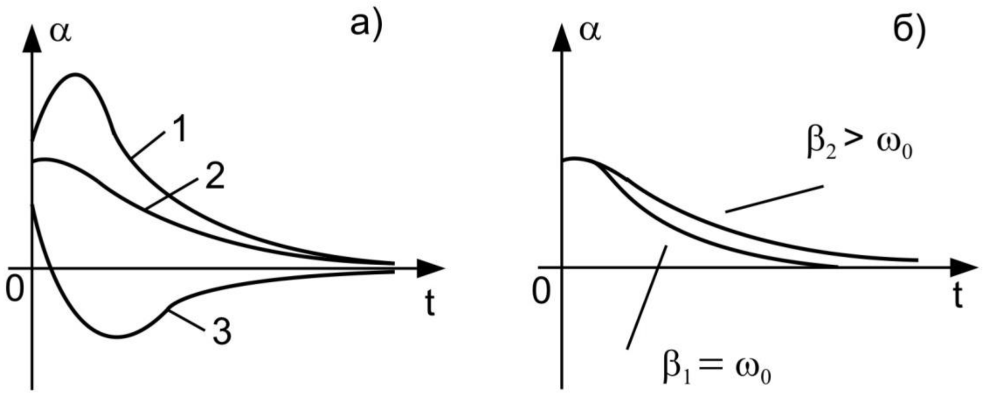

Рисунок 3- Вид критических и ангармонических колебаний
а) критические колебания при различных начальных условиях
б) критические и апериодические колебания при одинаковом начальном условии $\dot{\alpha}(0) = 0$

При очень сильном трении, когда $\beta > \omega_0$ решение уравнения (3) представляет собой сумму двух убывающих с течением времени экспонент. При этом система колебаний как таковых не совершает (Рисунок 3б). В целом, кинетика процесса затухания похожа на зависимость 2, приведенную на рис. 3а, однако, поскольку трение больше, чем в критическом режиме, то возврат к положению равновесия происходит медленнее. Другими словами, будучи выведенной из положения равновесия, система без осцилляций очень медленно возвращается в равновесное состояние. Такой режим колебаний называется апериодическим или закритическим.

Для возбуждения в системе незатухающих колебаний, необходимо за счет внешних сил скомпенсировать потери энергии, обусловленные наличием сопротивления среды. Колебания, которые совершает система под действием внешней периодической силы, называются *вынужденными*.

Характер движения системы при этом зависит от особенностей внешней силы. Наиболее важным является случай гармонической внешней силы, а в случае крутильных колебаний – гармонического момента сил. Пусть на физический маятник, кроме возвращающего момента и момента сил сопротивления действует момент внешней силы, изменяющийся по гармоническому закону

$$M = M_0 \cdot \cos(\omega \cdot t), \qquad (8)$$

где M_0 – амплитуда момента внешней силы; ω – частота изменения момента внешней силы.

Согласно основному закону динамики вращательного движения имеем:

$$I \cdot \ddot{\alpha} = -k \cdot \alpha - h \cdot \dot{\alpha} + M_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (9)$$

Общее решение уравнения (9) можно представить в виде:

$$\alpha(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos[(\omega_0^2 - \beta^2)^{1/2} \cdot t + \varphi] + \alpha_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \psi).$$

где A_0 и φ – постоянные величины, определяемые из начальных условий, т. е. начальных значений углового смещения и угловой скорости физического маятника; α_m, Ψ – постоянные величины (параметры вынужденных колебаний), которые определяются свойствами системы и внешним воздействием.

Первое слагаемое в выражении (10) описывает собственные затухающие колебания системы, а второе – гармонические колебания с амплитудой α_m, совершающиеся с частотой вынуждающей силы. Наложение этих колебаний создает результирующее движение, имеющее характер «биений». Биения проявляются в том, что колебания совершаются с изменяющейся амплитудой.

Графики биений имеют вид, представленный на Рисунке 4.

Поскольку первое слагаемое в уравнении (10) экспоненциально затухает с течением времени, то через определенный временной интервал, называемый временем установления колебаний, собственные колебания системы прекратятся. Колебания, которые устанавливаются в системе после затухания амплитуды собственных колебаний, называются установившимися вынужденными колебаниями.

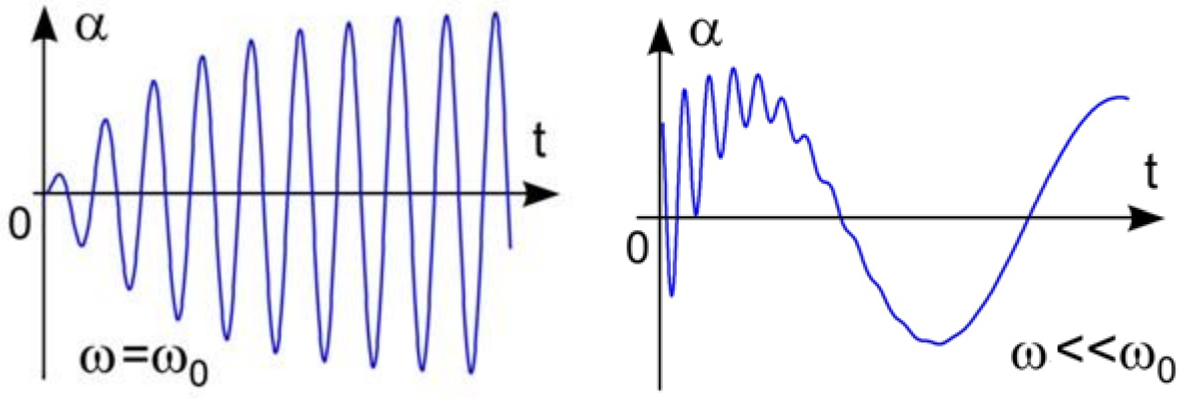

Рисунок 4 - Графики вынужденных колебаний для случаев $\omega = \omega_0$ и $\omega << \omega_0$

Установившиеся вынужденные колебания описываются уравнением:

$$a(t) = a_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \Psi) \qquad (11)$$

где □$_m$ – амплитуда установившихся вынужденных колебаний; □□ – сдвиг фаз между угловым смещением физического маятника и вынуждающей силой.

Из уравнения (8) и (11) следует, что движение физического маятника в установившемся режиме представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Параметры вынужденных колебаний определяются, исходя из следующих уравнений:

$$\alpha_m = M_0/(I\cdot((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\cdot\beta^2\cdot\omega^2)^{1/2}); \qquad (12)$$

$$tg\ \psi = -2\cdot\beta\cdot\omega/(\omega_0^2 - \omega^2). \qquad (13)$$

Амплитуда a_m и фаза вынужденных колебаний существенно зависят от соотношения между частотой w изменения внешнего момента сил $\vec{M}$ и собственной частотой ω_0 колебаний системы. На Рисунке 5 изображены зависимости амплитуды углового смещения от частоты вынуждающей силы, соответствующие разным значениям коэффициентов затухания β. Из Рисунке 5 видно, что при определенном значении частоты вынуждающей силы ω_p амплитуда вынужденных колебаний достигает своего максимального значения, равного ω_p. Такое явление называется резонансом, а частота, при которой оно происходит – резонансной частотой. Зависимость $a_m = f(\omega)$ называется амплитудной резонансной кривой или амплитудно-частотной характеристикой маятника.

Из уравнения (12) следует, что

$$\omega_p = (\omega_0^2 - 2\beta^2)^{1/2}, \qquad (14)$$

т. е. ω_p зависит от свойств среды, в которой совершаются колебания.

Если $\omega = 0$, то амплитуда вынужденных колебаний оказывается равной величине статистического углового смещения $a_{ст}$ системы под действием постоянного момента внешней силы. При частоте ω, стремящейся к бесконечности, все амплитудные кривые асимптотически приближаются к нулю, так как в данном случае система не успевает отреагировать на действие вынуждающего момента внешних сил и остается в состоянии равновесия.

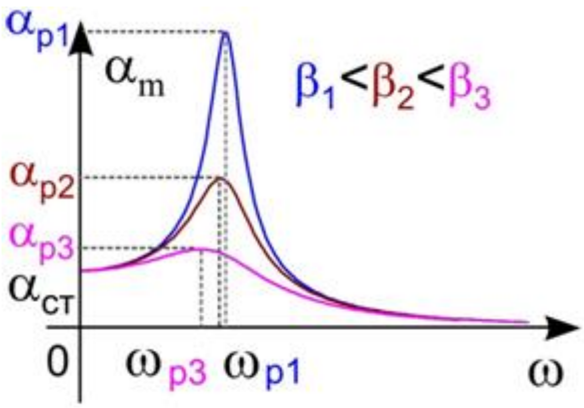

Рисунок 5 - Амплитудно-частотная характеристика
a_m - амплитуда, a_p - резонансная амплитуда

Приравняв производную выражения (12) к нулю $da_m/dw = 0$, получим, что при малом сопротивлении среды амплитуда углового смещения a_p в резонансе равна

$$a_p = M_0 \cdot/(2I\,\beta_0).(15)$$

Как следует из уравнения (13), сдвиг по фазе между силой и угловым смещением зависит от соотношения частот собственной и вынуждающей силы, а также от коэффициента затухания (Рисунок 6). При $\omega = \omega_0$ смещение отстает от силы на π/2. Это означает, что в момент времени, когда момент внешней силы достигает своего максимального значения, угловое смещение равно нулю.

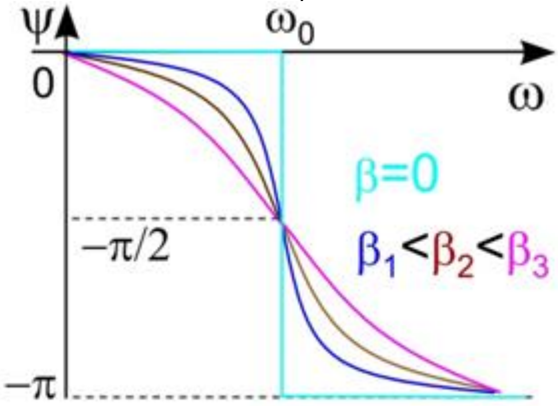

Рисунок 6 - Фазовые резонансные кривые маятника

С увеличением частоты изменения момента внешней силы отставание углового смещения от величины момента силы растет и при очень больших частотах ω приближается к □, т. е. момент силы и угловое смещение колеблются в противофазе.

Фазовые соотношения между угловым смещением и моментом внешней силы позволяют понять сущность явления резонанса с точки зрения энергетических соображений. Покажем, что при $\omega = \omega_0$ угловое смещение отстает по фазе от вынуждающего момента гармонической силы на π/2, т. е.

$$M = M_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t);\ a = a_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \qquad (16)$$

Согласно (16) зависимость угловой скорости физического маятника от времени имеет вид:

$$\dot{\alpha} = a_m \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \qquad (17)$$

Из соотношений (16), (17) видно, что скорость и внешняя сила колеблются в фазе. Следовательно, мощность, развиваемая внешней силой, положительна в любой момент времени, а энергия, передаваемая системе от внешнего источника максимальна (угловая скорость маятника при частоте вынуждающей силы, равной собственной частоте колебаний, максимальна). Работа внешнего момента сил в случае $\omega = \omega_0$ направлена на преодоление сил трения.

Описание установки

Симметричное тело (тонкий металлический диск)(2) скрепляется со спиральной пружиной(3). Диск отводится от положения равновесия, сжимая или растягивая пружину, после чего диск начинает совершать колебательное движение с периодом, зависящим от величины момента инерции диска и коэффициента затухания.

Вынужденные гармонические колебания диска создаются в системе путем соединения стрелки, на которую насажена пружина со скрепленным с ней диском, с двигателем(4) через штангу с валом, частоту оборотов которого можно изменять. (Рисунок 7).

Коэффициент затухания в системе изменяется путем пропускания постоянного электрического тока через катушки индуктивности, в зазоре между которыми перемещается маятник (металлический диск). При движении диска в магнитном поле в нем индуцируются токи Фуко, что в итоге приводит к появлению дополнительного тормозящего момента сил.

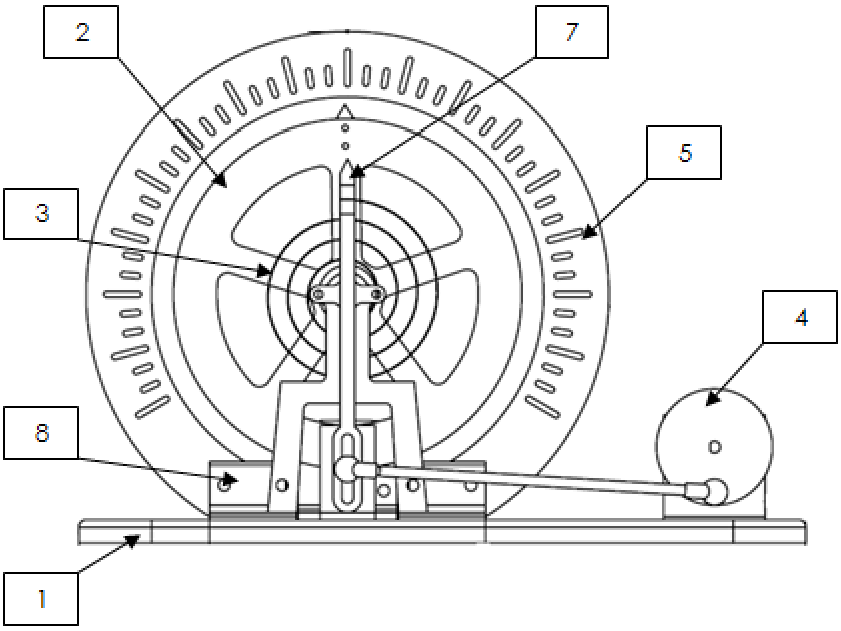

Рисунок 7 - Общий вид экспериментальной установки
1 – основание; 2 – колесо Поля;
3 – возвратная пружина; 4 –электродвигатель; 5 – линейка; 7 – стрелка; 8 – магниты

Ход работы и обработка результатов измерений

Упражнение 1

1. Соберите электрическую схему.
2. Не подключая источник питания к маятнику Поля, отклоните его на 10-20 делений (относительных единиц) шкалы транспортира, расположенного на установке, а затем отпустите диск маятника. Измерьте три раза период свободных колебаний маятника, а затем рассчитайте циклическую частоту затухающих колебаний.
3. Экспериментальным путем установите зависимость амплитуды углового смещения маятника от времени в режиме свободных колебаний. Для этого

измеряйте угловую амплитуду через промежутки времени, кратные периоду колебаний. Результаты измерений занесите в таблицу1.

Таблица 1

t	α_1	α_2	α_3	$\alpha_{ср}$	α_0	Т, с	$\frac{\alpha_{ср}}{\alpha_0}$	$ln\frac{\alpha_{ср}}{\alpha_0}$	$tln\frac{\alpha_{ср}}{\alpha_0}$	t^2
Т										
2Т										
3Т										
4Т										
5Т										

4. Постройте график зависимости $\alpha_{ср} = f(t)$.

5. Используя МНК, рассчитайте коэффициент затухания маятника Поля для случая минимального коэффициента сопротивления в системе (ток через катушку индуктивности не пропускается) по формуле:

$$\beta = \frac{-\sum_i t_i ln\frac{\alpha_{срi}}{\alpha_0}}{\sum_i t_i^2}.$$

6. Рассчитайте собственную частоту колебаний маятника по формуле: $\omega_0 = (\omega^2 + \beta^2)^{1/2}$.

7. Подключите катушки к источнику питания, пропустив через катушки индуктивности постоянный ток, соответствующий напряжениям на источнике питания 4 В, 6 В и 10 В, и повторите п.п. 1 – 5.

Упражнение 2

1. Соберите схему. Напряжение на катушки индуктивности пока не подавайте, тем самым обеспечивая самый малый коэффициент сопротивления в системе. На выходе DC (постоянный ток) источника питания установите напряжение 15 В.
2. Регулируя положение ручек грубой и плавной настройки потенциометров, установите минимальное напряжение на электродвигателе.
3. Выдержите паузу длительностью приблизительно в одну минуту и определите значение периода в режиме установившихся колебаний.
4. Измерьте амплитуду углового смещения, соответствующую данной частоте установившихся колебаний. Амплитуду измеряйте по шкале транспортира в относительных единицах.
5. Повторите п.п. 3-4 увеличивая напряжение на электродвигателе. Особенно часто (через 0.05 – 0.1 В) проводите измерения в области резкого изменения амплитуды углового смещения.
6. Постройте амплитудно-резонансную кривую.
7. Повторите п.п. 2 – 6 данного упражнения при напряжениях, подаваемых на катушки индуктивности, равных 4 В, 6 В и 10 В, устанавливая тем самым различные коэффициенты затухания.
8. Исходя из амплитудно-резонансных кривых определите резонансную частоту $\omega_р$ и значения амплитуды $a_р$ вынужденных колебаний при резонансе и статической амплитуды $a_{ст}$. Рассчитайте собственную частоту колебаний согласно формуле (14) и сравните ее со значением, полученным в упражнении 1.
9. Рассчитайте добротность системы по формуле $Q = \frac{\alpha_р}{\alpha_{ст}}$.
10. Используя формулу (13) рассчитайте сдвиг фаз Ψ между угловым смещением маятника и вынуждающей силой для каждого значения частоты ω.
11. Постройте фазовые резонансные кривые для различных коэффициентов затухания в системе.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются свободными?
2. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Проанализируйте его решение.
3. В чем заключается физический смысл коэффициента затухания?
4. Чем определяется собственная частота системы и частота затухающих колебаний?
5. Что такое критический и ангармонический режимы колебаний? Каковы их отличительные особенности?
6. Какие колебания называются вынужденными?
7. Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Проанализируйте его решение.
8. Что такое переходной и установившийся режим вынужденных колебаний?
9. От чего зависит время установления колебаний?
10. От чего зависят амплитуда и частота установившихся вынужденных колебаний?
11. В чем заключается явление резонанса?
12. Что такое резонансная частота? От каких физических величин она зависит?
13. Чему равно статическое смещение маятника?
14. Дайте определение добротности системы. Как она связана с резонансной амплитудой и статическим смещением?
15. Что представляют собой установившиеся вынужденные колебания, происходящие под действием внешней гармонической силы?
16. Объясните, чему равен сдвиг фаз между смещением и вынужденной силой при резонансе.