

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τηλεπικοινωνιών

ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΕΡΑΙΕΣ - ΣΥΝΘΕΣΗ ΚΕΡΑΙΩΝ

Σειρά Ασκήσεων 2: Ανάπτυξη Αλγορίθμων Μορφοποίησης Δέσμης
Στοιχειοκεραιών και Εκτίμησης Κατευθύνσεων Άφιξης

Φωτεινή Σαββίδου

AEM: 9657

sfoteini@ece.auth.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2021-2022

8^ο Εξάμηνο

Πίνακας περιεχομένων

1	Μελέτη Μορφοποιητή Απαραμόρφωτης Απόκρισης Ελάχιστης Διακύμανσης (MVDR).....	3
1.1	Υλοποίηση Κώδικα.....	3
1.1.1	Η συνάρτηση createAoA.....	3
1.1.2	Η συνάρτηση placeExtraNulls.....	3
1.1.3	Η συνάρτηση MVDRBeamformer.....	4
1.1.4	Η συνάρτηση calculateAoAdev_SINR_SLL.....	4
1.1.5	Το κύριο πρόγραμμα.....	5
1.2	Στατιστικά Στοιχεία για τον μορφοποιητή MVDR.....	5
1.3	Συμπεράσματα.....	6
1.3.1	Απόκλιση του κύριου λοβού από την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος.....	6
1.3.2	Αποκλίσεις των μηδενισμών από τις κατευθύνσεις των σημάτων παρεμβολής.....	7
1.3.3	Τιμή του SINR.....	7
1.3.4	Τιμή του SLL.....	7
2	Μελέτη μεθόδων εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης (MUSIC).....	10
2.1	Χωρικό φάσμα του εκτιμητή.....	10
2.2	Εύρεση ελάχιστης γωνιακής απόστασης των κατευθύνσεων άφιξης.....	11

1 Μελέτη Μορφοποιητή Απαραμόρφωτης Απόκρισης Ελάχιστης Διακύμανσης (MVDR)

1.1 Υλοποίηση Κώδικα

Για τη μελέτη των χαρακτηριστικών λειτουργίας του Μορφοποιητή Απαραμόρφωτης Απόκρισης Ελάχιστης Διακύμανσης (MVDR), υλοποιήθηκαν τέσσερις συναρτήσεις στο πρόγραμμα MATLAB (Έκδοση R2022a). Θεωρήθηκε στοιχειοκεραία 24 ιστροπικών στοιχείων που διατάσσονται στον z-άξονα, με το πρώτο στοιχείο της κεραίας τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = \frac{\lambda}{2}$. Στον μορφοποιητή εισέρχονται έξι σήματα· ένα επιθυμητό σήμα με γωνία άφιξης θ_0 και πέντε ανεπιθύμητα σήματα με γωνίες άφιξης $\theta_i, i = 1, 2, \dots, 5$ (πολικές γωνίες). Η γωνιακή απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών γωνιών ορίζεται ίση με δ , τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ως προς τα σήματα θορύβου, μηδενικής μέσης τιμής και ισχύος $1W$. Τα σήματα θορύβου είναι επίσης μηδενικής μέσης τιμής και ασυσχέτιστα. Η μελέτη της λειτουργίας του μορφοποιητή MVDR πραγματοποιήθηκε για διαφορετικές τιμές του SNR και της γωνιακής απόστασης δ . Στις παρακάτω ενότητες περιγράφονται οι συναρτήσεις που αναπτύχθηκαν.

1.1.1 Η συνάρτηση createAoA

Η συνάρτηση `createAoA()` δημιουργεί έναν τρισδιάστατο πίνακα με όλες τις δυνατές εξάδες των γωνιών $\theta_i, i = 0, 1, \dots, 5$. Οι γωνίες θ_i ανήκουν στο διάστημα $[30, 150]$ μοίρες και απέχουν απόσταση δ . Το σύνολο των εξάδων που δημιουργούνται είναι ίσο με $150 - 30 - 5\delta + 1$.

1.1.2 Η συνάρτηση placeExtraNulls

Η συνάρτηση `placeExtraNulls()` τοποθετεί επιπλέον γωνίες άφιξης πλασματικών σημάτων παρεμβολής (δηλαδή, επιπλέον μηδενικών στο διάγραμμα ακτινοβολίας) έτσι, ώστε το μέγιστο επίπεδο πλευρικών λοβών (SLL) να είναι τουλάχιστον $-20dB$ σε σχέση με τον κύριο λοβό. Η συνάρτηση δέχεται ως ορίσματα μία εξάδα γωνιών $\theta_i, i = 0, 1, \dots, 5$, την τιμή του SNR και τον αριθμό M των στοιχείων της κεραίας. Για $M = 24$ και $N = 6$ (πραγματικά σήματα), ο μέγιστος αριθμός πλασματικών μηδενικών που μπορούν να τοποθετηθούν είναι 18.

Για την εύρεση των γωνιών άφιξης των πλασματικών σημάτων, η συνάρτηση υπολογίζει τα βάρη τροφοδοσίας από τον μορφοποιητή MVDR, σχηματίζει το διάγραμμα ακτινοβολίας και τοποθετεί ένα νέο πλασματικό σήμα με γωνία άφιξης ίση με την γωνία στην οποία παρατηρείται το μέγιστο επίπεδο SLL. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται και σε κάθε επανάληψη, εισέρχονται στον μορφοποιητή MVDR τα έξι πραγματικά σήματα και τα πλασματικά σήματα που έχουν ήδη τοποθετηθεί. Μέσω δοκιμών, συμπεράναμε πως η προσθήκη ακριβώς 18 πλασματικών σημάτων δεν παρέχει το επιθυμητό μέγιστο επίπεδο πλευρικών λοβών, ενώ σε πολλές περιπτώσεις οδηγεί και σε μεγάλες αποκλίσεις του κύριου λοβού από την πραγματική γωνία άφιξης του επιθυμητού σήματος -οι αποκλίσεις ξεπερνούσαν και τις 100 μοίρες. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ικανοποιητικό SLL και μικρή απόκλιση του κύριου λοβού από την επιθυμητή γωνία, η διαδικασία

τοποθέτησης πλασματικών σημάτων τερματίζεται όταν το τρέχον μέγιστο επίπεδο SLL βρεθεί μεγαλύτερο από αυτό που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα του αλγορίθμου. Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση επιστρέφει τις έξι πραγματικές γωνίες άφιξης και όλες τις πλασματικές γωνίες που έχουν τοποθετηθεί εκτός από την τελευταία.

1.1.3 Η συνάρτηση MVDRBeamformer

Η συνάρτηση MVDRBeamformer() υπολογίζει τα βάρη τροφοδοσίας του μορφοποιητή MVDR με βάση τις γωνίες θ των εισερχόμενων σημάτων, την τιμή του SNR και τον αριθμό M των στοιχείων της κεραίας. Για τη γεωμετρία της στοιχειοκεραίας που μελετάμε, ο πίνακας οδήγησης δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \exp(j\pi\cos\theta_0) & \exp(j\pi\cos\theta_1) & \dots & \exp(j\pi\cos\theta_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j(M-1)\pi\cos\theta_0) & \exp(j(M-1)\pi\cos\theta_1) & \dots & \exp(j(M-1)\pi\cos\theta_N) \end{bmatrix}$$

Θεωρώντας πως κάθε εισερχόμενο σήμα έχει ισχύ 1W και πως δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε εισερχόμενων σημάτων, για τον πίνακα συσχέτισης θα ισχύει:

$$\bar{R}_{gg} = I_{N \times N}$$

Επιπλέον, ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων θορύβου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{R}_{nn} = \frac{1}{SNR} I_{M \times M}$$

Θεωρώντας πως δεν υπάρχει συσχέτιση μεταξύ οποιουδήποτε εισερχόμενου σήματος και σήματος θορύβου, προκύπτει:

$$\bar{R}_{xx} = \bar{A}\bar{R}_{gg}\bar{A}^H + \bar{R}_{nn}$$

Τα ζητούμενα βάρη υπολογίζονται από τη σχέση:

$$w_{MVDR} = \bar{R}_{xx}^{-1} \bar{a}_d,$$

όπου \bar{a}_d είναι το διάνυσμα οδήγησης του επιθυμητού σήματος, το οποίο είναι ίσο με την πρώτη (αριστερή) στήλη του πίνακα \bar{A} .

1.1.4 Η συνάρτηση calculateAoAdev_SINR_SLL

Η συνάρτηση calculateAoAdev_SINR_SLL() υπολογίζει τον λόγο-σήματος-προς-παρεμβολή-και-θόρυβο (SINR) και το διάγραμμα ακτινοβολίας για δεδομένες τιμές των βαρών και των γωνιών άφιξης των εισερχόμενων σημάτων. Από το διάγραμμα ακτινοβολίας, εκτιμάται η απόκλιση του κύριου λοβού και των μηδενικών από τις γωνίες άφιξης του επιθυμητού και των ανεπιθύμητων (πραγματικών) σημάτων, αντίστοιχα και το μέγιστο επίπεδο πλευρικών λοβών. Ο SINR δίνεται από τον τύπο:

$$SINR = \frac{\bar{w}^H \bar{R}_{dd} \bar{w}}{\bar{w}^H \bar{R}_{uu} \bar{w}}$$

όπου \bar{w} είναι τα βάρη του μορφοποιητή, \bar{R}_{dd} ο πίνακας συσχέτισης του επιθυμητού σήματος και \bar{R}_{uu} ο πίνακας συσχέτισης των ανεπιθύμητων (υπαρκτών) σημάτων.

Το διάγραμμα ακτινοβολίας κατασκευάζεται από τη σχέση:

$$AF(\theta) = \bar{w}^H \bar{a}(\theta),$$

όπου

$$\bar{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi \cos\theta) \\ \vdots \\ \exp(j(M-1)\pi \cos\theta) \end{bmatrix}$$

είναι το διάνυσμα οδήγησης που αντιστοιχεί στην τυχαία γωνία παρατήρησης θ .

1.1.5 Το κύριο πρόγραμμα

Το script *part1.m* (για δεδομένες τιμές SNR και γωνιακής απόστασης δ) δημιουργεί τις γωνίες άφιξης των πραγματικών σημάτων, προσθέτει πλασματικά σήματα παρεμβολής, υπολογίζει τα βάρη του μορφοποιητή MVDR, το διάγραμμα ακτινοβολίας, το SINR και τις αποκλίσεις του κύριου λοβού και των μηδενικών από τις γωνίες άφιξης του επιθυμητού και των ανεπιθύμητων σημάτων, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα αποθηκεύονται στο αρχείο *AoAdev_SINR_SLL.txt* και στη συνέχεια υπολογίζονται οι ζητούμενες στατιστικές παράμετροι των δεδομένων.

1.2 Στατιστικά Στοιχεία για τον μορφοποιητή MVDR

Το script *part1.m* εκτελέστηκε 42 φορές για τιμές $SNR = 0dB, 5dB, 10dB, 15dB, 20dB, 25dB$ και $30dB$ και τιμές γωνιακής απόστασης $\delta = 6^\circ, 8^\circ, 10^\circ, 12^\circ, 14^\circ$ και 16° . Οι στατιστικές τιμές που υπολογίστηκαν συνοψίζονται στον Πίνακα 1.2.1.

MVDR	Main Lobe Divergence $\Delta\theta_0$ [deg]				Null Divergence ($\Delta\theta_1, \Delta\theta_2,$ $\Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5$) [deg]				SINR [dB]				SLL [dB]			
SNR=0dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	4.400	0.300	0.610	0.000	2.300	0.186	0.336	10.697	13.763	13.390	0.451	-11.045	-1.429	-8.017	1.835
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.056	0.070	0.000	2.300	0.427	0.393	12.887	13.737	13.124	0.222	-15.538	-5.469	-12.140	2.444
$\delta = 10deg$	0.000	0.400	0.142	0.116	0.000	2.800	0.328	0.427	12.887	13.578	13.187	0.116	-14.837	-7.288	-11.483	1.331
$\delta = 12deg$	0.000	0.400	0.044	0.088	0.000	3.800	0.332	0.420	12.979	13.722	13.313	0.280	-13.576	-6.279	-10.167	2.939
$\delta = 14deg$	0.000	0.500	0.090	0.118	0.000	2.500	0.433	0.504	12.920	13.721	13.137	0.135	-15.047	-6.530	-12.110	1.233
$\delta = 16deg$	0.000	0.100	0.031	0.046	0.000	2.200	0.324	0.381	13.080	13.752	13.263	0.245	-13.170	-6.476	-11.087	2.429
SNR=5dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	5.200	0.327	0.740	0.000	3.700	0.103	0.304	15.037	18.762	18.346	0.597	-10.305	-1.221	-7.845	1.782
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.047	0.067	0.000	1.800	0.209	0.272	17.813	18.735	18.078	0.244	-15.892	-5.438	-12.203	2.542
$\delta = 10deg$	0.000	0.500	0.124	0.114	0.000	2.700	0.187	0.340	17.746	18.565	18.129	0.142	-16.384	-7.189	-11.546	1.584
$\delta = 12deg$	0.000	0.400	0.044	0.079	0.000	3.800	0.162	0.306	17.878	18.720	18.283	0.311	-13.710	-6.226	-10.142	3.056
$\delta = 14deg$	0.000	0.400	0.063	0.078	0.000	1.800	0.230	0.329	17.889	18.717	18.077	0.140	-13.542	-6.523	-12.085	1.242
$\delta = 16deg$	0.000	0.200	0.033	0.050	0.000	1.900	0.142	0.232	18.006	18.751	18.219	0.262	-13.453	-6.472	-11.208	2.461
SNR=10dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	5.700	0.242	0.643	0.000	0.700	0.011	0.049	19.401	23.761	23.426	0.510	-10.319	-1.152	-7.731	1.780
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.045	0.069	0.000	1.300	0.077	0.146	22.785	23.735	23.061	0.252	-15.932	-5.428	-12.214	2.559
$\delta = 10deg$	0.000	0.500	0.115	0.114	0.000	1.400	0.081	0.194	22.678	23.561	23.103	0.158	-16.485	-7.160	-11.546	1.648
$\delta = 12deg$	0.000	0.300	0.038	0.068	0.000	3.400	0.061	0.204	22.784	23.719	23.276	0.324	-13.797	-6.218	-10.118	3.114
$\delta = 14deg$	0.000	0.300	0.061	0.074	0.000	1.400	0.072	0.139	22.825	23.716	23.065	0.154	-13.605	-6.521	-11.968	1.381
$\delta = 16deg$	0.000	0.200	0.038	0.056	0.000	0.500	0.044	0.090	22.996	23.750	23.214	0.272	-13.633	-6.471	-11.123	2.516

MVDR	Main Lobe Divergence $\Delta\theta_0$ [deg]				Null Divergence ($\Delta\theta_1, \Delta\theta_2,$ $\Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5$) [deg]				SINR [dB]				SLL [dB]			
SNR=15dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	5.800	0.228	0.576	0.000	0.300	0.002	0.016	24.257	28.761	28.439	0.452	-10.317	-1.129	-7.720	1.789
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.043	0.068	0.000	1.100	0.024	0.074	27.776	28.734	28.056	0.255	-15.910	-5.425	-12.218	2.566
$\delta = 10deg$	0.000	0.500	0.109	0.112	0.000	0.900	0.027	0.092	27.651	28.559	28.097	0.163	-16.255	-7.151	-11.489	1.666
$\delta = 12deg$	0.000	0.300	0.036	0.062	0.000	2.100	0.021	0.133	27.738	28.719	28.274	0.330	-13.992	-6.216	-10.093	3.134
$\delta = 14deg$	0.000	0.300	0.058	0.067	0.000	0.900	0.023	0.065	27.793	28.716	28.062	0.159	-13.622	-6.520	-11.925	1.451
$\delta = 16deg$	0.000	0.200	0.038	0.056	0.000	0.300	0.012	0.040	27.987	28.750	28.209	0.274	-13.671	-6.470	-11.125	2.518
SNR=20dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	5.700	0.218	0.536	0.000	0.100	0.001	0.009	29.451	33.761	33.450	0.399	-10.317	-1.122	-7.720	1.791
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.042	0.068	0.000	0.500	0.005	0.034	32.774	33.734	33.054	0.256	-15.910	-5.424	-12.224	2.573
$\delta = 10deg$	0.000	0.500	0.106	0.112	0.000	0.600	0.009	0.041	32.642	33.559	33.094	0.166	-16.259	-7.148	-11.488	1.674
$\delta = 12deg$	0.000	0.300	0.034	0.061	0.000	1.900	0.008	0.078	32.720	33.719	33.272	0.331	-13.998	-6.215	-10.092	3.135
$\delta = 14deg$	0.000	0.300	0.057	0.067	0.000	0.300	0.002	0.019	32.781	33.716	33.060	0.160	-13.620	-6.520	-11.913	1.449
$\delta = 16deg$	0.000	0.200	0.039	0.057	0.000	0.200	0.003	0.020	32.985	33.750	33.207	0.275	-13.672	-6.470	-11.125	2.518
SNR=25dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	5.700	0.218	0.536	0.000	0.100	0.000	0.004	34.432	38.761	38.450	0.400	-10.317	-1.120	-7.720	1.792
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.043	0.068	0.000	0.300	0.002	0.017	37.773	38.734	38.053	0.256	-15.888	-5.423	-12.223	2.572
$\delta = 10deg$	0.000	0.500	0.104	0.112	0.000	0.300	0.002	0.018	37.642	38.559	38.093	0.167	-16.315	-7.147	-11.487	1.678
$\delta = 12deg$	0.000	0.300	0.033	0.060	0.000	0.800	0.003	0.032	37.714	38.719	38.271	0.332	-14.000	-6.215	-10.092	3.135
$\delta = 14deg$	0.000	0.300	0.057	0.067	0.000	0.200	0.001	0.010	37.777	38.716	38.059	0.161	-13.622	-6.520	-11.910	1.450
$\delta = 16deg$	0.000	0.200	0.039	0.057	0.000	0.100	0.001	0.012	37.984	38.750	38.207	0.275	-13.695	-6.470	-11.125	2.518
SNR=30dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	0.000	5.700	0.218	0.536	0.000	0.100	0.000	0.003	39.426	43.761	43.450	0.400	-10.317	-1.119	-7.720	1.792
$\delta = 8deg$	0.000	0.400	0.043	0.068	0.000	0.200	0.000	0.008	42.772	43.734	43.053	0.256	-15.887	-5.423	-12.223	2.572
$\delta = 10deg$	0.000	0.500	0.104	0.112	0.000	0.200	0.000	0.008	42.641	43.559	43.092	0.167	-16.328	-7.147	-11.487	1.679
$\delta = 12deg$	0.000	0.300	0.033	0.060	0.000	0.300	0.001	0.012	42.712	43.719	43.271	0.332	-14.001	-6.215	-10.092	3.135
$\delta = 14deg$	0.000	0.300	0.057	0.067	0.000	0.100	0.000	0.004	42.776	43.716	43.059	0.161	-13.622	-6.520	-11.909	1.450
$\delta = 16deg$	0.000	0.200	0.038	0.056	0.000	0.100	0.001	0.009	42.983	43.750	43.207	0.275	-13.696	-6.470	-11.125	2.519

Πίνακας 1.2.1: Στατιστικά στοιχεία για τον μορφοποιητή MVDR.

1.3 Συμπεράσματα

1.3.1 Απόκλιση του κύριου λοβού από την κατεύθυνση του επιθυμητού σήματος

Με την εφαρμογή του αλγορίθμου που υλοποιήθηκε για την προσθήκη πλασματικών μηδενικών στο διάγραμμα ακτινοβολίας, η απόκλιση του κύριου λοβού από τη γωνία άφιξης του επιθυμητού σήματος διατηρήθηκε σε χαμηλά επίπεδα. Ο μέσος όρος των μέσων τιμών της απόκλισης του κύριου λοβού προκύπτει ίσος με 0.091° , δηλαδή η γωνία που αντιστοιχεί στον κύριο λοβό αποκλίνει από την πραγματική κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος κατά λιγότερο από 0.1° . Επιπλέον, σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν επιτεύχθηκε ελάχιστη απόκλιση του κύριου λοβού από την επιθυμητή γωνία ίση με 0° . Για δεδομένη τιμή του SNR, η τιμή $\Delta\theta_0$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για γωνιακή απόσταση $\delta = 6deg$ και μειώνεται για αυξανόμενο δ . Αυτό συμβαίνει καθώς σε περίπτωση μικρής γωνιακής απόστασης μεταξύ επιθυμητού σήματος και σήματος παρεμβολής, ο αλγόριθμος προσπαθεί να ικανοποιήσει τον μηδενισμό στο διάγραμμα ακτινοβολίας, αλλά δεν επιτυγχάνει να αυξήσει γρήγορα το πλάτος και να οδηγήσει το μέγιστο στην επιθυμητή γωνία. Για δεδομένη τιμή της γωνιακής απόστασης δ και αυξανόμενο SNR, η ελάχιστη, η μέγιστη και η μέση τιμή, καθώς και η τυπική απόκλιση του $\Delta\theta_0$ παραμένουν σχεδόν σταθερά. Συνεπώς, η απόκλιση του κύριου λοβού από την κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος δεν επηρεάζεται από το SNR, αλλά επηρεάζεται σημαντικά από τη γωνιακή απόσταση δ μεταξύ επιθυμητού σήματος και σήματος παρεμβολής.

1.3.2 Αποκλίσεις των μηδενισμών από τις κατευθύνσεις των σημάτων παρεμβολής

Η μέση τιμή των αποκλίσεων των μηδενισμών του διαγράμματος ακτινοβολίας από τις κατευθύνσεις των σημάτων παρεμβολής κυμαίνεται σε χαμηλές τιμές. Ο μέσος όρος των μέσων τιμών των $\Delta\theta_i$, $i = 1, 2, \dots, 5$ προκύπτει ίσος με 0.1° . Για τιμές SNR μεγαλύτερες από $20dB$ και δεδομένη γωνιακή απόσταση δ , η ελάχιστη, η μέγιστη και η μέση τιμή καθώς και η τυπική απόκλιση των $\Delta\theta_i$ παραμένουν σχεδόν σταθερά. Για δεδομένη τιμή της γωνιακής απόστασης δ , η μέση τιμή της απόκλισης των μηδενισμών από τις πραγματικές κατευθύνσεις των σημάτων παρεμβολής παρουσιάζει σημαντική μείωση με την αύξηση του SNR.

1.3.3 Τιμή του SINR

Για δεδομένη τιμή του SNR, η μέση τιμή του SINR αυξάνεται με την αύξηση της γωνιακής απόστασης δ , καθώς μειώνεται η τιμή της απόκλισης $\Delta\theta_0$, δηλαδή ο κύριος λοβός προσεγγίζει καλύτερα την πραγματική κατεύθυνση άφιξης του επιθυμητού σήματος. Για δεδομένη τιμή της γωνιακής απόστασης δ , η μέση τιμή του SINR παρουσιάζει σημαντική αύξηση με την αύξηση του SNR. Αυτό συμβαίνει διότι, για αυξανόμενο SNR, η ισχύς του θορύβου μειώνεται (η ισχύς των εισερχόμενων σημάτων παραμένει σταθερή) και τα σημεία μηδενισμού στο διάγραμμα ακτινοβολίας προσεγγίζουν πιο αποτελεσματικά τις πραγματικές γωνίες άφιξης των σημάτων παρεμβολής, οπότε μειώνεται και η ισχύς τους.

1.3.4 Τιμή του SLL

Με τον αλγόριθμο τοποθέτησης πλασματικών σημάτων παρεμβολής που υλοποιήθηκε, δεν κατέστη δυνατή η επίτευξη μέγιστου επιπέδου πλευρικών λοβών μικρότερο ή ίσο από $-20dB$ σε σχέση με τον κύριο λοβό. Η καλύτερη τιμή του SLL που επιτεύχθηκε είναι περίπου ίση με $-16.5dB$ σε σχέση με τον κύριο λοβό, ενώ υπήρχαν και περιπτώσεις που το επίπεδο πλευρικών λοβών ήταν της τάξης του $-1dB$. Ο μέσος όρος των μέσων τιμών του SLL είναι περίπου ίσος με $-11dB$ σε σχέση με τον κύριο λοβό.

Παρατηρούμε, ακόμη, πως για δεδομένη τιμή της γωνιακής απόστασης δ , η μέση τιμή του επιπέδου των πλευρικών λοβών παραμένει σχεδόν σταθερή με την αύξηση του SNR. Δηλαδή, η τιμή του SLL δεν επηρεάζεται σημαντικά από τη μεταβολή του SNR. Για δεδομένο SNR, τα βέλτιστα επίπεδα SLL επιτυγχάνονται πάντα για γωνιακές αποστάσεις $\delta = 8^\circ, 10^\circ$ και η χειρότερη τιμή SLL εντοπίζεται στην περίπτωση της ελάχιστης γωνιακής απόστασης ($\delta = 6^\circ$) μεταξύ δύο εισερχόμενων σημάτων. Η περίπτωση $\delta = 6^\circ$ είναι η πιο δύσκολη, καθώς ο μορφοποιητής προσπαθεί να τοποθετήσει την κορυφή του κύριου λοβού ανάμεσα σε δύο κοντινά μηδενικά.

Προκειμένου να εκτιμηθεί η επίδοση του αλγορίθμου που υλοποιήθηκε για την τοποθέτηση πλασματικών σημάτων παρεμβολής, υπολογίστηκε η ελάχιστη, η μέγιστη και η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του SLL σε περίπτωση εφαρμογής ή μη εφαρμογής του αλγορίθμου. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 1.3.1.

MVDR	SLL (before) [dB]				SLL (after) [dB]			
SNR=0dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.254	-1.429	-7.297	1.695	-11.045	-1.429	-8.017	1.835
$\delta = 8deg$	-9.780	-5.469	-6.980	0.760	-15.538	-5.469	-12.140	2.444
$\delta = 10deg$	-7.632	-6.163	-6.494	0.366	-14.837	-7.288	-11.483	1.331
$\delta = 12deg$	-7.400	-6.011	-6.344	0.234	-13.576	-6.279	-10.167	2.939
$\delta = 14deg$	-6.787	-5.940	-6.511	0.238	-15.047	-6.530	-12.110	1.233
$\delta = 16deg$	-6.609	-6.011	-6.446	0.132	-13.170	-6.476	-11.087	2.429
SNR=5dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.305	-1.221	-7.302	1.741	-10.305	-1.221	-7.845	1.782
$\delta = 8deg$	-9.779	-5.438	-6.948	0.769	-15.892	-5.438	-12.203	2.542
$\delta = 10deg$	-7.586	-6.151	-6.478	0.357	-16.384	-7.189	-11.546	1.584
$\delta = 12deg$	-7.355	-5.993	-6.333	0.237	-13.710	-6.226	-10.142	3.056
$\delta = 14deg$	-6.790	-5.917	-6.507	0.247	-13.542	-6.523	-12.085	1.242
$\delta = 16deg$	-6.608	-5.993	-6.441	0.136	-13.453	-6.472	-11.208	2.461
SNR=10dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.319	-1.152	-7.302	1.756	-10.319	-1.152	-7.731	1.780
$\delta = 8deg$	-9.778	-5.428	-6.937	0.772	-15.932	-5.428	-12.214	2.559
$\delta = 10deg$	-7.570	-6.147	-6.473	0.354	-16.485	-7.160	-11.546	1.648
$\delta = 12deg$	-7.340	-5.987	-6.330	0.238	-13.797	-6.218	-10.118	3.114
$\delta = 14deg$	-6.791	-5.910	-6.506	0.249	-13.605	-6.521	-11.968	1.381
$\delta = 16deg$	-6.608	-5.987	-6.440	0.137	-13.633	-6.471	-11.123	2.516
SNR=15dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.317	-1.129	-7.303	1.760	-10.317	-1.129	-7.720	1.789
$\delta = 8deg$	-9.778	-5.425	-6.933	0.773	-15.910	-5.425	-12.218	2.566
$\delta = 10deg$	-7.565	-6.145	-6.471	0.353	-16.255	-7.151	-11.489	1.666
$\delta = 12deg$	-7.335	-5.985	-6.329	0.238	-13.992	-6.216	-10.093	3.134
$\delta = 14deg$	-6.792	-5.907	-6.506	0.250	-13.622	-6.520	-11.925	1.451
$\delta = 16deg$	-6.608	-5.985	-6.439	0.138	-13.671	-6.470	-11.125	2.518
SNR=20dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.317	-1.122	-7.303	1.762	-10.317	-1.122	-7.720	1.791
$\delta = 8deg$	-9.778	-5.424	-6.932	0.773	-15.910	-5.424	-12.224	2.573
$\delta = 10deg$	-7.564	-6.145	-6.470	0.353	-16.259	-7.148	-11.488	1.674
$\delta = 12deg$	-7.334	-5.984	-6.328	0.238	-13.998	-6.215	-10.092	3.135
$\delta = 14deg$	-6.792	-5.906	-6.506	0.250	-13.620	-6.520	-11.913	1.449
$\delta = 16deg$	-6.608	-5.984	-6.439	0.138	-13.672	-6.470	-11.125	2.518
SNR=25dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.317	-1.120	-7.303	1.762	-10.317	-1.120	-7.720	1.792
$\delta = 8deg$	-9.778	-5.423	-6.932	0.774	-15.888	-5.423	-12.223	2.572
$\delta = 10deg$	-7.563	-6.145	-6.470	0.353	-16.315	-7.147	-11.487	1.678
$\delta = 12deg$	-7.333	-5.984	-6.328	0.238	-14.000	-6.215	-10.092	3.135
$\delta = 14deg$	-6.792	-5.906	-6.506	0.251	-13.622	-6.520	-11.910	1.450
$\delta = 16deg$	-6.608	-5.984	-6.439	0.138	-13.695	-6.470	-11.125	2.518
SNR=30dB	Min	Max	Mean	Std	Min	Max	Mean	Std
$\delta = 6deg$	-10.317	-1.119	-7.303	1.763	-10.317	-1.119	-7.720	1.792
$\delta = 8deg$	-9.778	-5.423	-6.932	0.774	-15.887	-5.423	-12.223	2.572
$\delta = 10deg$	-7.563	-6.145	-6.470	0.353	-16.328	-7.147	-11.487	1.679
$\delta = 12deg$	-7.333	-5.984	-6.328	0.238	-14.001	-6.215	-10.092	3.135
$\delta = 14deg$	-6.792	-5.906	-6.506	0.251	-13.622	-6.520	-11.909	1.450
$\delta = 16deg$	-6.608	-5.984	-6.439	0.138	-13.696	-6.470	-11.125	2.519

Πίνακας 1.3.1: Στατιστικά στοιχεία για το μέγιστο SLL πριν και μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου που υλοποιήθηκε για την τοποθέτηση πλασματικών σημάτων παρεμβολής.

Παρατηρούμε πως ο μορφοποιητής MVDR, στην περίπτωση μη εφαρμογής του αλγορίθμου μας, επιτυγχάνει τη βέλτιστη τιμή SLL για γωνιακή απόσταση $\delta = 6^\circ$. Για αυτή τη γωνιακή απόσταση όμως, ο αλγόριθμος τοποθέτησης πλασματικών μηδενικών δεν επιτυγχάνει βελτίωση του SLL. Σε

ορισμένες περιπτώσεις ακόμη η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του SLL με εφαρμογή ή μη του αλγορίθμου συμπίπτουν, δηλαδή ο αλγόριθμος δεν τοποθέτησε κανένα πλασματικό σήμα παρεμβολής. Κατ' επέκταση, αυτό σημαίνει πως μετά την πρώτη επανάληψη του αλγορίθμου η μέγιστη τιμή SLL που επιτυγχάνεται είναι χειρότερη από το επίπεδο πλευρικών λοβών που πρόκυψε από τον μορφοποιητή MVDR και το πρώτο πλασματικό σήμα απορρίπτεται. Αν οριστεί διαφορετικό κριτήριο τερματισμού του αλγορίθμου, πιθανόν να είναι δυνατή η περαιτέρω μείωση της τιμής του SLL. Για τιμές της γωνιακής απόστασης μεγαλύτερες από 6° , ο αλγόριθμός μας επιτυγχάνει σημαντική μείωση του SLL, τόσο της μέσης όσο και της βέλτιστης τιμής. Η μείωση της βέλτιστης τιμής (η ελάχιστη τιμή στον παραπάνω πίνακα) είναι της τάξης από 6 έως $8dB$. Η μείωση της μέσης τιμής είναι ελαφρώς μικρότερη· περίπου 4 έως $6dB$. Παρατηρούμε ακόμη πως η τυπική απόκλιση στην περίπτωση μη εφαρμογής του αλγορίθμου είναι μικρότερη από αυτή που προκύπτει μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου, γεγονός που υποδηλώνει αδυναμία της μεθόδου να μειώσει αποτελεσματικά το SLL σε όλες τις περιπτώσεις κατανομής των γωνιών άφιξης θ_i στο διάστημα $[30^\circ, 150^\circ]$. Η μικρή τυπική απόκλιση του μέγιστου SLL πριν την εφαρμογή του αλγορίθμου, σημαίνει πως το ύψος των πλευρικών λοβών στον διάγραμμα ακτινοβολίας που προκύπτει από τον μορφοποιητή MVDR δεν εξαρτάται σημαντικά από τη σχετική τοποθέτηση των γωνιών άφιξης του επιθυμητού σήματος και των σημάτων παρεμβολής, για δεδομένη γωνιακή απόσταση δ .

2 Μελέτη μεθόδων εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης (MUSIC)

2.1 Χωρικό φάσμα του εκτιμητή

Για τη μελέτη της μεθόδου εκτίμησης κατευθύνσεων άφιξης MUSIC, υλοποιήθηκε η συνάρτηση `spatialspectrumMUSIC()`, η οποία υπολογίζει το χωρικό φάσμα του εκτιμητή. Θεωρήθηκε στοιχειοκεραία $M = 24$ ιστροπικών στοιχείων που διατάσσονται στον z -άξονα, με το πρώτο στοιχείο της κεραίας τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d = \frac{\lambda}{2}$. Στον εκτιμητή εισέρχονται $N = 13$ σήματα με γωνίες άφιξης $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 40^\circ$, $\theta_3 = 50^\circ$, $\theta_4 = 60^\circ$, $\theta_5 = 70^\circ$, $\theta_6 = 80^\circ$, $\theta_7 = 90^\circ$, $\theta_8 = 100^\circ$, $\theta_9 = 110^\circ$, $\theta_{10} = 120^\circ$, $\theta_{11} = 130^\circ$, $\theta_{12} = 140^\circ$ και $\theta_{13} = 150^\circ$ (πολικές γωνίες). Τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ως προς τα σήματα θορύβου, μηδενικής μέσης τιμής και ισχύος $1W$. Τα σήματα θορύβου είναι επίσης μηδενικής μέσης τιμής και ασυσχέτιστα μεταξύ τους. Ο λόγος σήματος-προς-θόρυβο (SNR) είναι ίσος με $10dB$.

Για τη γεωμετρία της στοιχειοκεραίας που μελετάμε, ο πίνακας οδήγησης για τα N εισερχόμενα σήματα θα έχει τη μορφή:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \exp(jpcos\theta_1) & \exp(jpcos\theta_2) & \dots & \exp(jpcos\theta_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \exp(j(M-1)pcos\theta_1) & \exp(j(M-1)pcos\theta_2) & \dots & \exp(j(M-1)pcos\theta_N) \end{bmatrix}$$

Εφόσον τα εισερχόμενα σήματα είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους και ισχύος $1W$, για τον πίνακα συσχέτισης θα ισχύει:

$$\bar{R}_{gg} = I_{NxN}$$

Επιπλέον, ο πίνακας συσχέτισης των σημάτων θορύβου θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{R}_{nn} = \frac{1}{SNR} I_{MxM}$$

Ο πίνακας \bar{R}_{xx} κατασκευάζεται θεωρητικά από τη σχέση:

$$\bar{R}_{xx} = \bar{A}\bar{R}_{gg}\bar{A}^H + \bar{R}_{nn}$$

Για τον εκτιμητή MUSIC, υπολογίζονται οι ιδιοτιμές του πίνακα \bar{R}_{xx} και τα $M - N$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις $M - N$ μικρότερες ιδιοτιμές. Το φάσμα ισχύος υπολογίζεται βάσει της σχέσης

$$P(\varphi, \theta) = \frac{1}{\bar{a}^H(\theta)\bar{U}_{M-N}\bar{U}_{M-N}^H\bar{a}(\theta)}$$

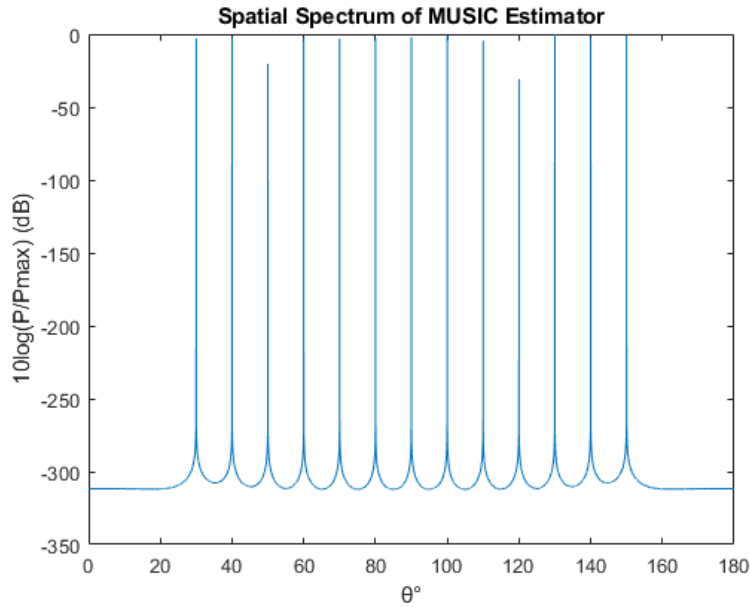
όπου

$$\bar{U}_{M-N} = [\bar{u}_{N+1} \quad \bar{u}_{N+2} \quad \dots \quad \bar{u}_M]$$

είναι ο πίνακας που περιέχει τα $M - N$ ιδιοδιανύσματα του υποχώρου θορύβου και

$$\bar{a}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(j\pi\cos\theta) \\ \vdots \\ \exp(j(M-1)\pi\cos\theta) \end{bmatrix}$$

είναι το διάνυσμα οδήγησης που αντιστοιχεί στην τυχαία γωνία παρατήρησης θ .



Εικόνα 2.1.1: Χωρικό φάσμα ισχύος εκτιμητή MUSIC για γωνίες άφιξης $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 40^\circ, \theta_3 = 50^\circ, \theta_4 = 60^\circ, \theta_5 = 70^\circ, \theta_6 = 80^\circ, \theta_7 = 90^\circ, \theta_8 = 100^\circ, \theta_9 = 110^\circ, \theta_{10} = 120^\circ, \theta_{11} = 130^\circ, \theta_{12} = 140^\circ$ και $\theta_{13} = 150^\circ$.

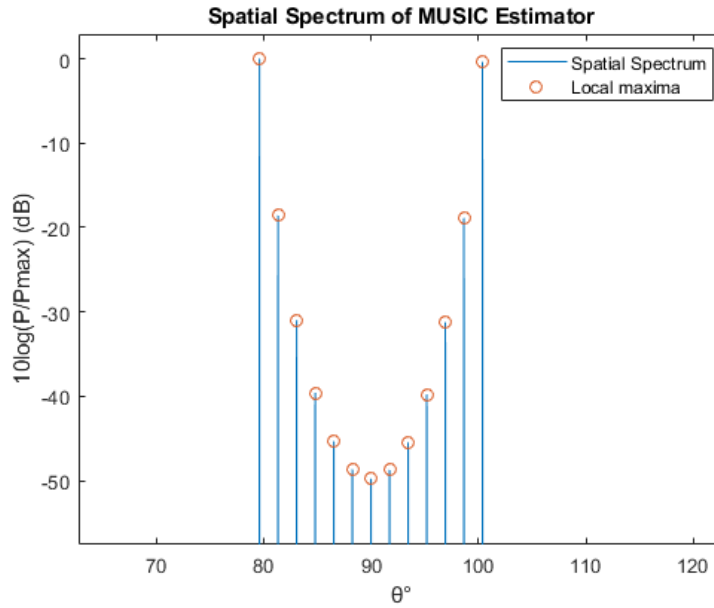
Παρατηρούμε πως στο χωρικό φάσμα του εκτιμητή MUSIC εντοπίζονται με ακρίβεια οι γωνίες άφιξης των εισερχόμενων σημάτων.

2.2 Εύρεση ελάχιστης γωνιακής απόστασης των κατευθύνσεων άφιξης

Στον εκτιμητή εισέρχονται $N = 13$ σήματα με γωνίες άφιξης $\theta_1 = 90^\circ - 6\delta, \theta_2 = 90^\circ - 5\delta, \theta_3 = 90^\circ - 4\delta, \theta_4 = 90^\circ - 3\delta, \theta_5 = 90^\circ - 2\delta, \theta_6 = 90^\circ - \delta, \theta_7 = 90^\circ, \theta_8 = 90^\circ + \delta, \theta_9 = 90^\circ + 2\delta, \theta_{10} = 90^\circ + 3\delta, \theta_{11} = 90^\circ + 4\delta, \theta_{12} = 90^\circ + 5\delta$ και $\theta_{13} = 90^\circ + 6\delta$ (πολικές γωνίες). Προκειμένου να υπολογιστεί η ελάχιστη γωνιακή απόσταση δ_{\min} των κατευθύνσεων άφιξης έτσι, ώστε να εμφανίζονται 13 διακριτά τοπικά μέγιστα στο φάσμα ισχύος του εκτιμητή και να είναι δυνατός ο προσδιορισμός των γωνιών άφιξης όλων των εισερχόμενων σημάτων, πραγματοποιήθηκε σάρωση της γωνιακής απόστασης δ στο διάστημα $[0^\circ, 15^\circ]$ με βήμα σάρωσης 0.01° . Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου, χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση `spatialspectrumMUSIC()` για τη δημιουργία του χωρικού φάσματος ισχύος του εκτιμητή και στη συνέχεια εντοπίστηκαν τα τοπικά μέγιστα.

Στον εκτιμητή MUSIC, υπάρχει πιθανότητα να προκύψουν «ψευδή» τοπικά μέγιστα, δηλαδή τοπικά μέγιστα σε κατευθύνσεις που δεν αντιστοιχούν σε πραγματικά εισερχόμενα σήματα. Το ύψος αυτών των τοπικών μεγίστων είναι αρκετά μικρότερο από το ύψος των τοπικών μεγίστων που αντιστοιχούν σε υπαρκτά σήματα. Προκειμένου να απορριφθούν πιθανά «ψευδή» τοπικά μέγιστα,

τέθηκε κατώφλι ύψους ίσο με $-50dB$ (δηλαδή, τοπικά μέγιστα με πλάτος μικρότερο από $-50dB$ απορρίπτονται). Η ελάχιστη γωνιακή απόσταση που υπολογίστηκε είναι ίση με $\delta_{min} = 1.73$ και το αντίστοιχο χωρικό φάσμα παρουσιάζεται στην *Εικόνα 2.2.1*.



Εικόνα 2.2.1: Χωρικό φάσμα ισχύος εκτιμητή MUSIC για γωνίες άφιξης $\theta_1 = 90^\circ - 6\delta$, $\theta_2 = 90^\circ - 5\delta$, $\theta_3 = 90^\circ - 4\delta$, $\theta_4 = 90^\circ - 3\delta$, $\theta_5 = 90^\circ - 2\delta$, $\theta_6 = 90^\circ - \delta$, $\theta_7 = 90^\circ$, $\theta_8 = 90^\circ + \delta$, $\theta_9 = 90^\circ + 2\delta$, $\theta_{10} = 90^\circ + 3\delta$, $\theta_{11} = 90^\circ + 4\delta$, $\theta_{12} = 90^\circ + 5\delta$ και $\theta_{13} = 90^\circ + 6\delta$, όπου $\delta = 1.73$.

Επιπλέον, παρατηρήθηκε πως αν το κατώφλι ύψους τεθεί ίσο με $-60dB$, τότε είναι δυνατός ο διαχωρισμός των σημάτων για ελάχιστη γωνιακή απόσταση $\delta_{min} = 1.46$. Ωστόσο, τα τοπικά μέγιστα που αντιστοιχούν στις 3 κεντρικές γωνίες άφιξης παρουσιάζονται αρκετά εξομαλυσμένα και το ύψος τους είναι μικρότερο από αυτό των τοπικών μεγίστων που αντιστοιχούν στα υπόλοιπα σήματα. Για αυτόν τον λόγο, το κατώφλι ύψους $-60dB$ απορρίφθηκε.