

Algorithmiques : Travaux Dirigés 3

ENS S4 Mathématiques 2018-2019

EXERCICE 1 Dans le village d'Ambhipitiavana, il y a n hommes et n femmes qui cherchent à se marier. On suppose qu'il existe $k \leq n$ tel que

- dans n hommes, il y a k hommes bons et $n - k$ hommes mauvais
- dans n femmes, il y a k bonnes femmes et $n - k$ mauvaises femmes

On suppose que dans les listes de préférences de tout le monde, les bons/bonnes sont toujours devant les mauvais/mauvaises. Montrer que dans un couplage parfait et stable, un homme bon est toujours marié à une bonne femme.

Un mariage (h, f) est instable si il existe (h', f') tel que h aime f' plus que f , et f' aime h plus que h'

EXERCICE 2 Vrai ou Faux. Justifier

$$\begin{aligned}n^2 &= O(2^n) \\ 2^{n+1} &= \Theta(2^n) \\ 2^{2^n} &= O(2^n) \\ (x + y)^2 &= O(x^2 + y^2)\end{aligned}$$

EXERCICE 3 Donner deux fonctions f et g , si elles existent, qui satisfont

1. $f(n) = o(g(n))$ et $f(n) \neq \Theta(g(n))$
2. $f(n) = \Theta(g(n))$ et $f(n) \neq O(g(n))$
3. $f(n) = \Omega(g(n))$ et $f(n) \neq O(g(n))$

$f(n) = O(g(n))$ si $\lim \frac{|f(n)|}{|g(n)|}$ est bornée quand $n \rightarrow \infty$

$f(n) = \Omega(g(n))$ si $g(n) = O(f(n))$

$f(n) = \Theta(g(n))$ si $f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$

EXERCICE 4 Pour les fonctions f et g suivantes, décider si $f(n) = O(g(n))$ ou $f(n) = \Omega(g(n))$ ou $f(n) = \Theta(g(n))$

1. $f(n) = \log(n^2)$ et $g(n) = \log(n) + 5$
2. $f(n) = (\log n)^2$ et $g(n) = \log(n)$
3. $f(n) = n + \log n$ et $g(n) = \sqrt{n}$

La notation $f(n) = O(g(n))$ est un abus de notation, qui doit être comprise comme $f(n) \in O(g(n))$ car $O(g(n))$ est un ensemble de fonctions

$$g(n) = \{h(n) | \exists n_0, C > 0 \text{ telles que } \forall n > n_0, |h(n)| \leq C|g(n)|\}$$

EXERCICE 5 (Expliquer en langage courant) On vous donne 12 pièces de monnaie et une balance. Une des 12 pièces est plus lourde que tous les autres, qui ont le même poids. Décrire comment vous aller découvrir la pièce lourde en faisant seulement 3 pesage.