Algorithmiques : Travaux Dirigés 3

ENS S4 Mathématiques 2018-2019

EXERCICE 1 Dans le village d'Ambohipitiavana, il y a n hommes et n femmes qui cherchent à se marier. On suppose qu'il existe $k \leq n$ tel que

- dans n hommes, il y a k hommes bons et $n-k$ hommes mauvais
- dans n femmes, il y a k bonnes femmes et $n-k$ mauvaises femmes

Montrer que dans un couplage parfait et stable, un homme bon est toujours marié à une bonne femme.

Un mariage (h, f) est instable si il existe (h', f') tel que h aime f' plus que f, et f' aime h plus que h'

EXERCICE 2 Vrai ou Faux. Justifier

$$\begin{aligned} n^2 &= O(2^n) \\ 2^{n+1} &= \Theta(2^n) \\ 2^{2^n} &= O(2^n) \\ (x+y)^2 &= O(x^2+y^2) \end{aligned}$$

$f(n) = O(g(n))$ si $\lim \frac{|f(n)|}{|g(n)|}$ est bornée quand $n \to \infty$

$f(n) = \Omega(g(n))$ si $g(n) = O(f(n))$

$f(n) = \Theta(g(n))$ si $f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$

EXERCICE 3 Donner deux fonctions f et g, si elles existent, qui satisfont

1. $f(n) = o(g(n))$ et $f(n) \neq \Theta(g(n))$
2. $f(n) = \Theta(g(n))$ et $f(n) \neq O(g(n))$
3. $f(n) = \Omega(g(n))$ et $f(n) \neq O(g(n))$

La notation $f(n) = O(g(n))$ est un abus de notation, qui doit être comprise comme $f(n) \in O(g(n))$ car $O(g(n))$ est un ensemble de fonctions

$$g(n) = \{h(n) | \exists n_0, C > 0 \text{ telles que } \forall n > n_0, |h(n)| \leq C|g(n)|\}$$

EXERCICE 4 Pour les fonctions f et g suivantes, décider si $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ou $f(n) = \Omega(g(n))$ ou $f(n) = \Theta(g(n))$

1. $f(n) = \log(n^2)$ et $g(n) = \log(n) + 5$
2. $f(n) = (\log n)^2$ et $g(n) = \log(n)$
3. $f(n) = n + \log n$ et $g(n) = \sqrt{n}$

EXERCICE 5 (Expliquer en langage courant) On vous donne 12 pièces de monnaie et une balance. Une des 12 pièces est plus lourde que tous les autres, qui ont le même poids. Décrire comment vous aller découvrir la pièce lourde en faisant seulement 3 pesage.