Apuntes de Estadística y Probabilidad

La **teoría de la probabilidad** es una rama de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios y estocásticos.

Los fenómenos aleatorios se contraponen a los fenómenos deterministas, los cuales son resultados únicos y/o previsibles de experimentos realizados bajo las mismas condiciones determinadas. Los fenómenos aleatorios, por el contrario, son aquellos que se obtienen de experimentos realizados, otra vez, bajo las mismas condiciones determinadas pero como resultado posible poseen un conjunto de alternativas en el resultado.

La teoría de probabilidades: asigna valor a número de sucesos de cada posible resultado en experimento aleatorio. Cuantifica el resultados y establece las probabilidades de cada suceso.

Los procesos reales que se modelizan mediante distribuciones de probabilidad corresponden a modelos complejos donde no se conocen a priori todos los parámetros que intervienen; ésta es una de las razones por las cuales la estadística, que busca determinar estos parámetros, no se reduce inmediatamente a la teoría de la probabilidad en sí.

Definición axiomática de la probabilidad: se parte de un espacio de medida normalizada $(\Omega, M, \boldsymbol{\mu}_P)$.

- donde Ω es un espacio de sucesos finito, numerable o no numerable.
- $M \subset P(\Omega)$, es un σ-álgebra, una familia no vacía de subconjuntos de Ω, cerrada bajo complementos, uniones e intersecciones contables. Las σ-álgebras se usan principalmente para definir medidas en Ω.
- $\boldsymbol{\mu}_{P:}\ M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una medida normalizada, o sea $\boldsymbol{\mu}_P(\Omega) = 1$)

Los sucesos posibles se consideran como subconjuntos S de eventos elementales posibles: $S \in M$, $S \subset \Omega$, y la probabilidad de cada suceso viene dada por la medida de dicho conjunto $P(S)= \boldsymbol{\mu}_P(S) \in [0,1]$.

Definición clásica de probabilidad: característica de un evento, que hace que existan razones para creer que éste se realizará. Varia entre 0(imposible) y 1(siempre). **h** es el número de ocurrencias de un suceso S.

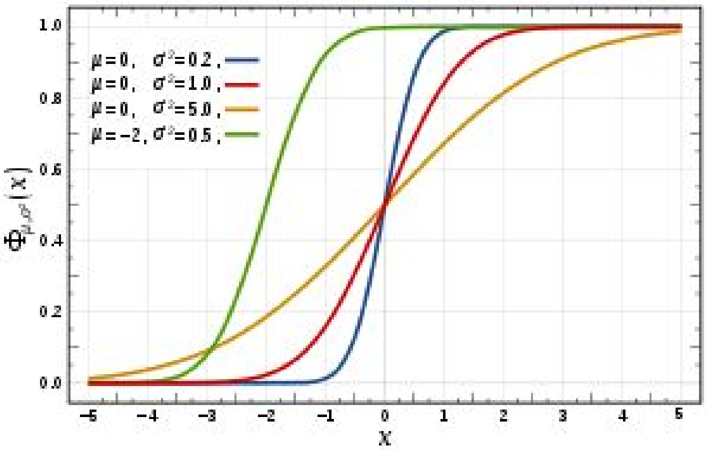
- probabilidad **p** de que suceda un evento S de total de **n**(casos posibles) = h/n
- probabilidad de no ocurrencia **q** de que no suceda un evento S del total **n**(casos posibles) = 1-(h/n)

Variable aleatoria: función medible $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, que da un valor numérico a cada suceso elemental. El dominio de dicha función es discreto si la cardinalidad del mismo es finita, o continuo si no lo es.

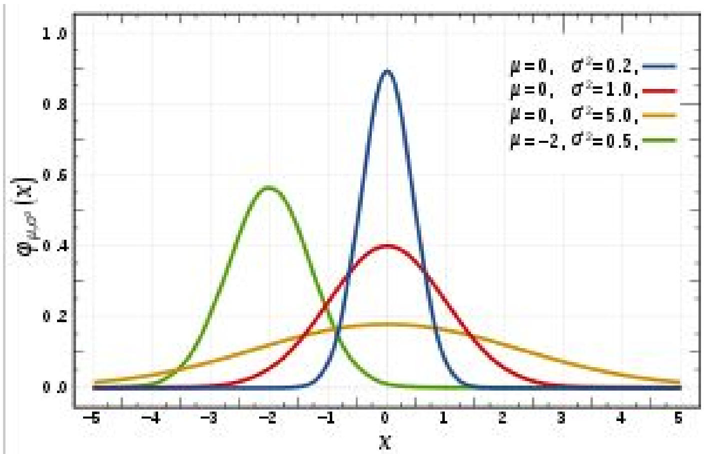
Distribución de probabilidad: función de distribución, que asigna a cada suceso, definido en el dominio de una variable aleatoria, la probabilidad de que suceda si la variable aleatoria es menor o igual que el resultado de dicho suceso(FDA). Describe cómo se espera que varíen los resultados, tiene relación con las distribuciones de frecuencia.

Si la variable aleatoria es discreta tendremos distribuciones de eventos independientes **binomiales** o **De Poisson**, o distribuciones de eventos dependientes **hipergeométricas**.

Si la variable es contínua Fi(x), tendremos **distribuciones normales** (**Gauss**ianas)



Otra función interesante relacionada con las distribuciones de frecuencia para una variable contínua es la característica densidad de probabilidad, a partir de la cual se obtiene la probabilidad de cada valor que toma la variable definida fi(x) = dFi(x)/dx, con lo que su integral es la distribución de probabilidad Fi(x).



Una variable aleatoria normalmente distribuida (Gaussiana), tiene una desviación normal. La funcion densidad de probabilidad(PDF) en una distribución normal viene dada por la siguiente función:

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ es la medida central o esperanza de la distribución.

σ es la desviación estándar. $\boldsymbol{\sigma}^2$ es la varianza.

Cada distribución normal es una versión de la general, en la que el dominio viene ajustado por la desviación estándar(σ), y trasladada por la medida central (μ). La densidad de probabilidad debe escalarse por 1/σ para que la integral siga siendo 1.

$$f(x \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad f(x) = e^{ax^2+bx+c}$$

Al mismo tiempo, cada distribución normal es la exponencial de una función cuadrática, donde $a < 0$, y $c= (b^2/4a)+(\ln(-a/\pi)/2)$. De esta forma el valor central μ es $-b/2a$, y la varianza σ^2 es $-1/2a$. Para una distribución normal estándar, con $\sigma = 1$, tendremos $a = -1/2$, $b = 0$, $c = -\ln(2\pi)/2$.

Ejemplos de distribuciones normales estandar con $\mu = 0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$\sigma^2 = 1$. $1/\sqrt{2\pi}$ asegura el area bajo curva es 1, exponente con factor ½ asegura que la varianza sea 1.

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$$

Estándar Gauss, $\sigma^2 = ½$

$$\varphi(x) = e^{-\pi x^2}$$

Estándar Stigler, $\sigma^2 = 1/2\pi$

Estimación de los valores en intervalos: