Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Álgebra Lineal y su Didáctica

Guía didáctica

Facultad Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Sistemas de Conocimiento de Álgebra Lineal y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)	VIII

Autora:

Nora Esperanza Parra Celi

EDUC_4154

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Álgebra Lineal y su Didáctica

Guía didáctica

Nora Esperanza Parra Celi

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-39-586-3

Año de edición: septiembre, 2022

Edición: primera edición reestructurada en febrero 2025 (con un cambio del 25%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Comunicación oral y escrita.

1.3 Competencias del perfil profesional

1. Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física mediante la fundamentación teórico-práctico de los sistemas de conocimiento que, faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado.
2. Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

3. Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.
4. Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.
5. Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.
6. Elaborar, ejecutar y evaluar proyectos y/o procesos de investigación que conlleven la recopilación, organización y análisis de información en el ámbito de las matemáticas y la física enfocados a la generación de nuevos conocimientos, habilidades y actitudes que aporten a la solución de problemas prácticos de su comunidad.
7. Desarrollar, ejecutar y difundir proyectos pedagógicos y didácticos con metodologías activas e innovadoras, involucrando la matemática y la física, vinculados a la solución de problemas de la realidad y que apoyen la integración de los docentes con el entorno natural y social de la comunidad y del país en general.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

Se subestima la importancia de integrar el contexto en el análisis y aprendizaje del estudiante, especialmente en cuanto a la aplicabilidad de la asignatura para la resolución de problemas que exigen una adecuada toma de decisiones. Es fundamental fomentar el desarrollo de un pensamiento crítico, lógico y matemático que resalte la identidad de los estudiantes y sus interacciones con la familia y la sociedad, contribuyendo a consolidar su proyecto de vida basado en los principios de fraternidad, dignidad humana y libertad. Esto permitirá ampliar sus perspectivas y horizontes hacia futuros más inclusivos y diversos en distintos contextos. Sin embargo, persisten desafíos como el limitado dominio teórico, la falta de un enfoque didáctico que trascienda la simple transmisión de contenidos, y el escaso conocimiento en temas disciplinarios, junto con la aplicación de metodologías inadecuadas para la enseñanza efectiva.

2. Metodología de aprendizaje

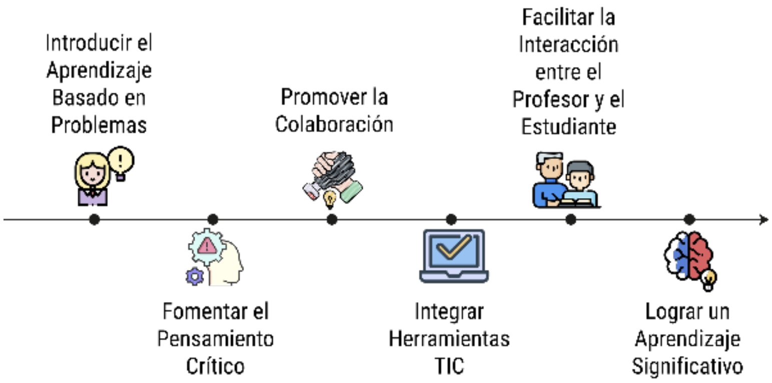
La asignatura "Sistemas de Conocimiento del Álgebra Lineal y su Didáctica" adopta una metodología innovadora y activa, diseñada para dotar a los estudiantes de herramientas que promuevan un aprendizaje profundo y significativo. Basada en el aprendizaje basado en problemas, esta estrategia pedagógica impulsa la investigación y la colaboración, conectando de manera efectiva la teoría con la práctica a través de la aplicación de conceptos matemáticos a la resolución de situaciones del mundo real.

Durante el curso, se presentarán desafíos y estudios de casos elaborados para estimular habilidades críticas, como el razonamiento lógico-matemático, el pensamiento analítico y la capacidad para trabajar en equipo. El objetivo es que, mediante proyectos tangibles, los estudiantes integren el conocimiento de forma activa, creando una base sólida y duradera para su desarrollo académico y profesional.

La incorporación de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) es clave para enriquecer el proceso de aprendizaje y potenciar las habilidades prácticas de los estudiantes. Esta interacción dinámica entre docente, estudiante y contenidos fomenta un entorno educativo que promueve la autonomía y el aprendizaje significativo, haciendo al estudiante protagonista de su propio desarrollo académico, que cada estudiante se convierta en el verdadero protagonista de su propio aprendizaje.

Figura 1

Proceso de la metodología activa



Nota. Parra, N., 2024, con Napkin.ia.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Aplica conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Este resultado les proporcionará herramientas esenciales para enseñar y aplicar conceptos como sistemas de ecuaciones, matrices y vectores, elementos fundamentales en el estudio del álgebra lineal. La asignatura "Sistemas de Conocimiento del Álgebra Lineal y su Didáctica" adopta un enfoque innovador, diseñado para promover un aprendizaje profundo y significativo. A través de la metodología de aprendizaje basado en problemas, los estudiantes se enfrentarán a desafíos que conectan la teoría con la práctica, aplicando conceptos matemáticos a la resolución de situaciones reales del entorno natural y social.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Durante el curso, los estudiantes desarrollarán habilidades críticas, como el razonamiento lógico-matemático y el trabajo en equipo, a través de proyectos y estudios de casos que reflejan problemas reales. Además, la incorporación de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) enriquecerá el proceso de aprendizaje, facilitando una comprensión más profunda y práctica de los conceptos. Este enfoque fomenta la autonomía y convierte al estudiante en el protagonista de su propio desarrollo académico.

Unidad 1. Sistemas de ecuaciones lineales

Es importante hacer hincapié en la historia de la necesidad que tuvieron las civilizaciones anteriores en el desarrollo de procesos matemáticos, tal es el caso de las expresiones algebraicas donde se incluye las ecuaciones lineales, que se tiene algunos basamentos de sus inicios y se explica en la siguiente figura.

Figura 2

Historia de la concepción de las ecuaciones

Nota. Parra, N., 2024, con Napkin.ia.

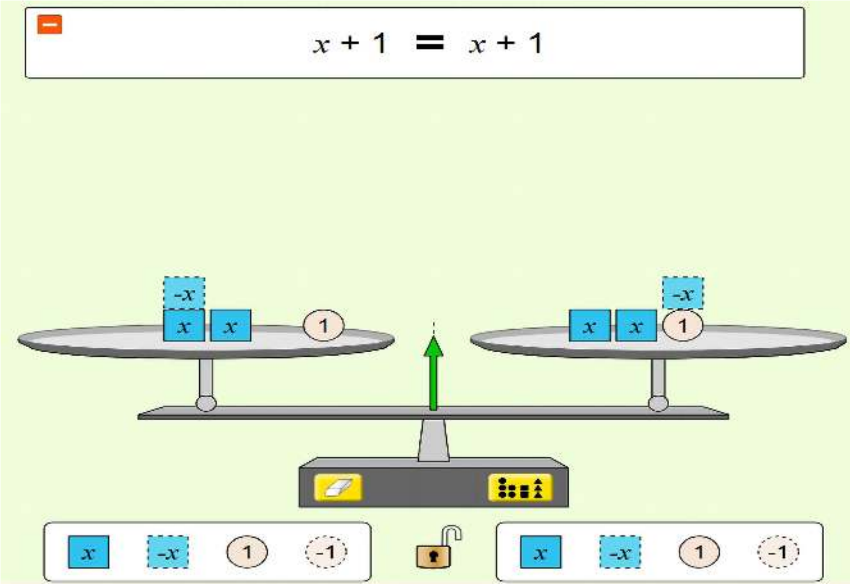
1.1 Ecuación lineal

Primero, es importante recordar el origen del término ecuación. Según Morales (2022), 'la palabra ecuación proviene de *aequus* (igual, liso, uniforme), raíz también de conceptos como igualdad, equitativo, equidad, entre otros' (p.12).

En matemáticas, una igualdad incluye incógnitas o variables, representadas por letras como x, y o z, generalmente las últimas del alfabeto. A diferencia de las constantes, cuyo valor permanece fijo, las variables pueden tomar distintos valores. Imaginemos una ecuación lineal como una balanza: las variables y constantes son los objetos que colocamos en cada lado, y para mantener el equilibrio, el peso total de ambos lados debe ser idéntico.

Figura 3

Concepción de una ecuación lineal

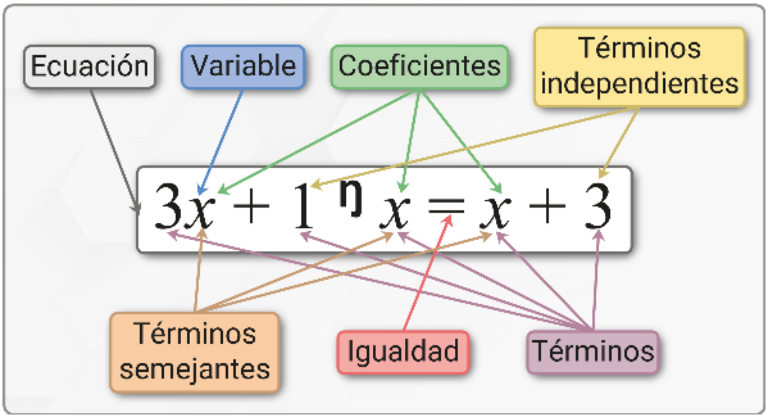


Nota. Adaptado de *Explorador de Igualdades* [Ilustración], por Universidad de Colorado Boulder, 2024, PhET, CC BY 4.0.

En la siguiente figura se identifican los elementos de una ecuación lineal.

Figura 4

Partes de una ecuación lineal



Nota. Parra, N., 2024.

Además, una ecuación puede ser verdadera o falsa, dependiendo de si las variables pueden adquirir uno o más valores que satisfagan la igualdad. Así, el valor de la ecuación depende de encontrar el equilibrio adecuado de sus componentes. Por ejemplo:

$1+3=4$ Es verdad.

$5=0$ Es falsa.

$x+3=0$ Es verdad, sólo si x toma el valor -3.

$y=5$ Es verdad, sólo si y toma el valor 5.

$y-y=0$ Es verdad para cualquier valor de y.

$7x-7x+1=0$ Es falsa para cualquier valor de x.

$2x-y=0$ Es verdad para un conjunto infinito de valores, siempre que el valor y sea el doble de x.

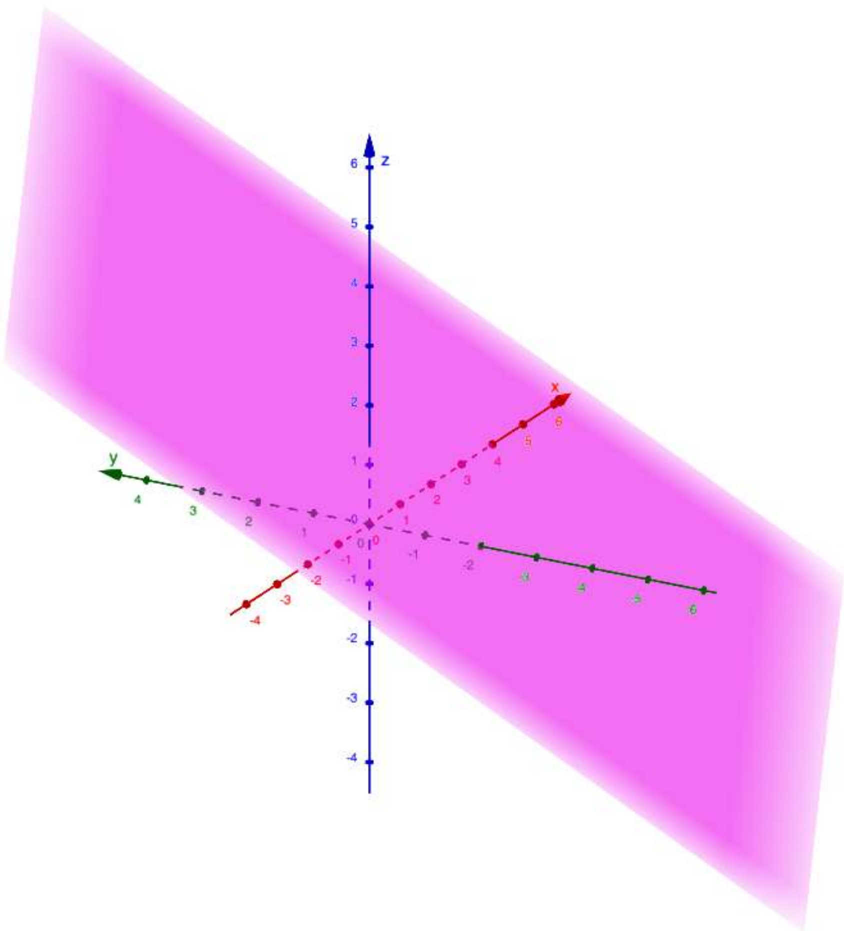
El exponente de las variables que pertenecen a una ecuación lineal corresponde a la primera potencia. Se presentan los siguientes tipos de ecuaciones.

Por ejemplo:

$x - 2y + 3z - 4 = 0$ es una ecuación lineal con tres incógnitas, representa **un plano.**

Figura 5

Ecuación Lineal con 3 incógnitas

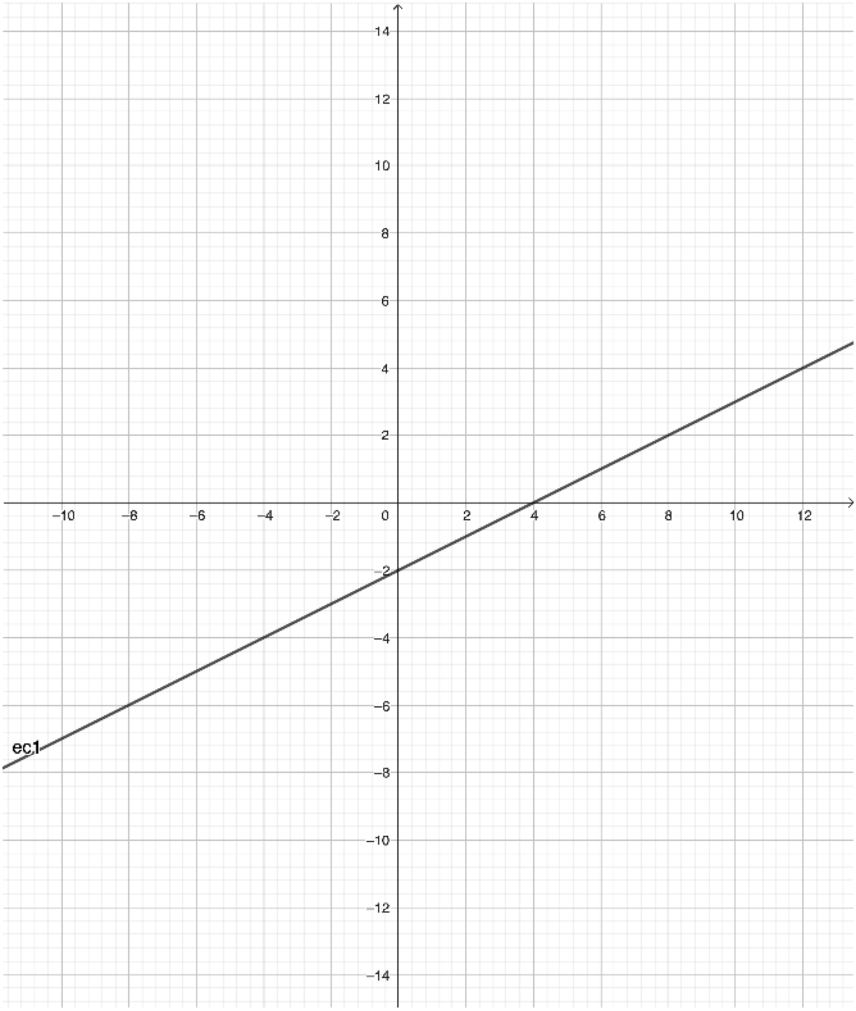


Nota. Adaptado de *Ecuación Lineal de 3 incógnitas*, de Parra,N, 2025, GeoGebra. CC BY 2.0

$x - 2y - 4 = 0$ es una ecuación lineal con dos variables

Figura 6

Ecuación Lineal con 2 variables

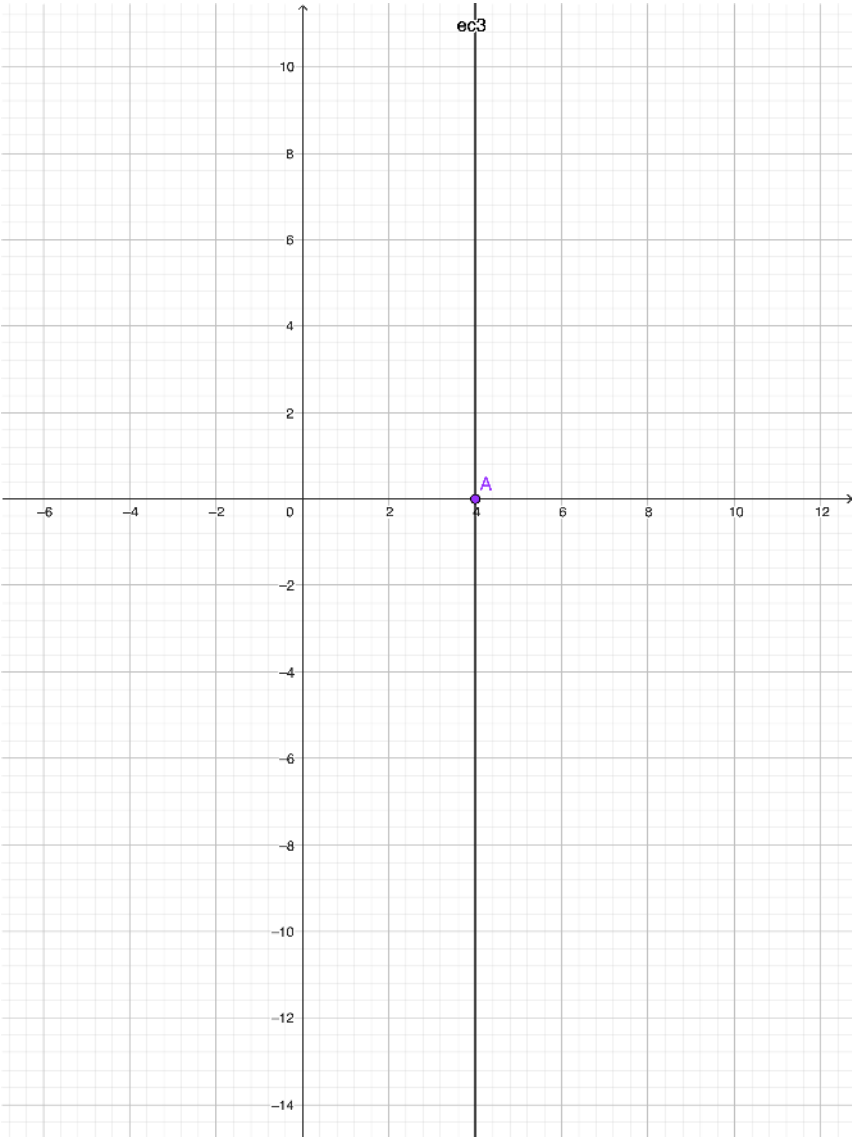


Nota. Adaptado de *Ecuación Lineal de 2 incógnitas*, de Parra,N, 2025, GeoGebra. CC BY 2.0

$x - 4 = 0$ es ecuación lineal de una incógnita

Figura 7

Ecuación Lineal de 1 variable



Nota. Parra, N., 2025.

1.2 Sistemas lineales

Un sistema de ecuaciones se forma cuando varias ecuaciones comparten las mismas incógnitas y soluciones. Si las incógnitas no tienen exponentes mayores a uno, se trata de ecuaciones lineales, aplicables en problemas cotidianos con precisión y simplicidad. Cada sumando es un término, y los términos con la misma parte literal son semejantes. Un sistema de dos ecuaciones lineales con incógnitas x e y, también llamado ecuaciones simultáneas de dos por dos, tiene la forma general:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son *coeficientes reales* y b_1, b_2, son *términos independientes*. En cada una de las ecuaciones, por lo menos uno de los coeficientes de las incógnitas es diferente de cero.

1.3 Solución de un sistema de ecuaciones lineales

La **solución de un sistema de ecuaciones** es el conjunto de valores que hacen que todas las ecuaciones se cumplan al mismo tiempo; esta solución puede ser única, infinita o inexistente. Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, existen varios métodos, como el de *reducción o (suma y resta), sustitución, igualación y el gráfico*, cada uno con pasos específicos. A continuación, se explicarán estos métodos:

1.3.1 Método de reducción, método de suma y resta o de eliminación

Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión del siguiente juego de relacionar.

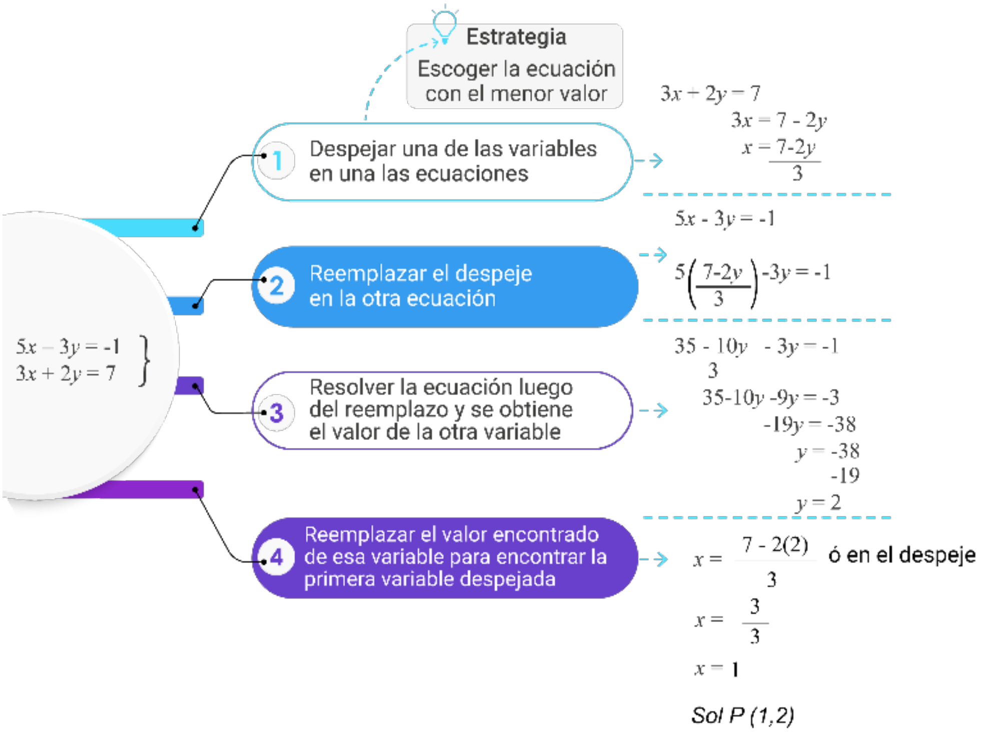
[Método de reducción, método de suma y resta o de eliminación]

1.3.2 Método de sustitución

A continuación, se describen los pasos del método de sustitución en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

Figura 8

Resolución de un sistema de ecuaciones por el método de sustitución



Nota. Se describen los pasos del método de sustitución en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Parra, N., 2024.

1.3.3 Método de igualación

Continuemos con el aprendizaje mediante la revisión del siguiente juego de relacionar.

[Método de igualación en sistemas de ecuaciones]()

1.3.4 Método gráfico

Para entender este método, se debe tener claro cómo es la ecuación de una recta. La ecuación de una recta en su forma explícita tiene esta forma.

$$y = mx + b$$

Este método se utiliza principalmente cuando contamos con soluciones aproximadas y no se recomienda para sistemas con más de dos incógnitas. Sin embargo, es una herramienta valiosa para prever la solución de un sistema y se emplea a menudo como complemento de otros métodos, tal como menciona Morales (2022). Por ejemplo, para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & \text{Ec. 1} \\ x - y = 2 & \text{Ec. 2} \end{cases}$$

Al graficar funciones lineales, buscamos determinar dos puntos en cada recta, aplicando uno de los postulados de Euclides que establece que una recta puede trazarse al conocer dos puntos. Para ello, podemos utilizar una tabla de valores: asignamos valores a la *variable independiente* x y y obtenemos el valor correspondiente de la *variable dependiente*. Como se ilustra a continuación:

Ec.1

x	y
0	$\frac{5}{3}$
$\frac{5}{2}$	0

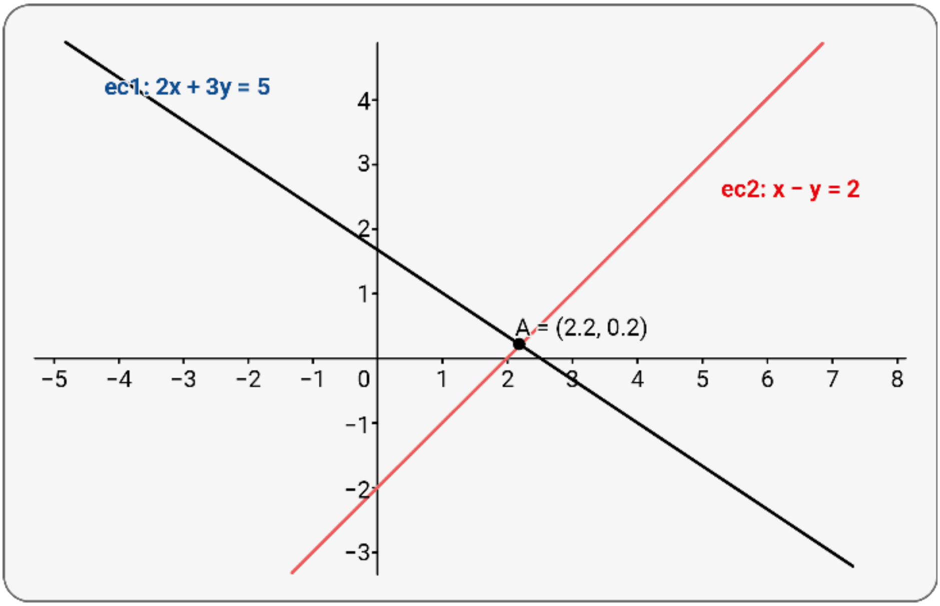
Ec.2

x	y
0	-2
2	0

Dichos valores de entrada y salida forman dos puntos de la primera y segunda ecuación, que serían $(0, \frac{5}{3})$, $(\frac{5}{2}, 0)$, $(0, -2)$ y $(2, 0)$ respectivamente.

Figura 9

Gráfica de la solución de un sistema compatible



Nota. Se muestra la gráfica de la solución de un sistema de ecuaciones realizado en Geogebra. Parra, N., 2024.

El punto de intersección entre las dos rectas graficadas en la Figura 9. Es la solución del sistema de ecuaciones planteado, es decir, se trata de un punto cuyas coordenadas corresponden a $P(x, y) = (2.2, 0.2)$ siendo, las coordenadas con valores aproximados.

Problema de un sistema de ecuaciones de tres variables y tres ecuaciones

Ejemplo:

En una fábrica de ropa se producen tres estilos de camisas que llamaremos 1, 2, 3. Cada prenda pasa por el proceso de cortado, planchado y empaquetado. Las camisas se elaboran por lote. Para producir un lote de camisas de:

- **Tipo I,** se necesitan 30 min, para cortarlas, 40 min para coserlas y 50 min para plancharlas y empaquetarlas.

- Para el **tipo 2**, 50 min para cortar, 50 min para coser y para 50min para planchar y empaquetar.
- Para el **tipo 3**, 65 min para cortar, 40 min para coser y 15 min para planchar y empaquetar.

¿Cuántos lotes se pueden producir si se trabajan 8 horas en cortar, 8 horas en coser y 8 horas en planchar y empaquetar?

Solución:

Como estrategia de planteamiento se utilizará una tabla de doble entrada para interpretar los datos del problema, para interpretar del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Tabla 1
Datos del problema

Tipo	Cortado	Cosido	Planchado y Empaquetado
I	30	40	50
II	50	50	50
III	65	40	15
	480	480	480

Nota. Parra, N., 2024.

El sistema de ecuaciones deducido es el siguiente:

$$30x + 50y + 65z = 480$$
$$40x + 50y + 40z = 480$$
$$50x + 50y + 15z = 480$$

Dividimos por 10 a todas las ecuaciones para simplificar los cálculos

$$3x + 5y + 6.5z = 48$$
$$4x + 5y + 4z = 48$$
$$5x + 5y + 1.5z = 48$$

Procedemos a resolver el sistema de ecuaciones por el método de reducción:

$$\begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \begin{cases} 3x + 5y + 6.5z = 48 \\ 4x + 5y + 4z = 48 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -12x - 20y - 26z = -192 \\ 12x + 15y + 12z = 144 \\ \hline -5y - 14z = -48 \quad a) \end{array}$$

$$\begin{matrix} -5 \\ 4 \end{matrix} \begin{cases} 4x + 5y + 4z = 48 \\ 5x + 5y + 1.5z = 48 \end{cases}$$

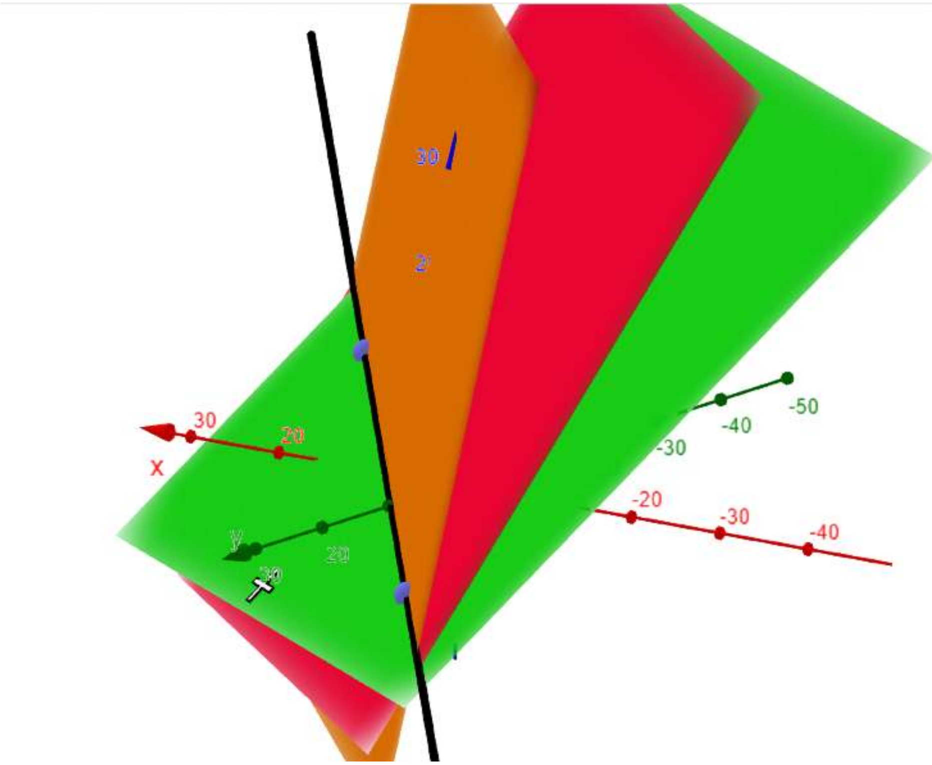
$$\begin{array}{r} -20x - 25y - 20z = -240 \\ 20x + 20y + 6z = 192 \\ \hline -5y - 14z = -48 \quad b) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5y - 14z = -48 \quad a) \\ -(5y - 14z = -48) \quad b) \\ \hline 0 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto, este sistema tiene soluciones infinitas, es un sistema compatible indeterminado. Al representar su solución de forma gráfica, se tiene:

Figura 10

Gráfica del sistema de ecuaciones



Nota. Parra, N., 2025.

1.3.5 Resolución por sustitución

El método de sustitución simplifica la resolución de sistemas de ecuaciones al despejar una variable en la ecuación más sencilla, sustituyéndola en las demás. Esto reduce progresivamente el número de variables, facilitando el camino hacia la solución. En el video Método de Sustitución - Sistema de Ecuaciones Lineales 3x3 presentado, se explica paso a paso cómo resolver un sistema 3x3 utilizando este método. Es esencial que el estudiante domine el despeje de variables para aplicar esta estrategia con éxito. ¡Descubre cómo este enfoque ordenado puede transformar tu aprendizaje!

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 & \quad 1) \\ 3x - 5y - z = -10 & \quad 2) \\ -x + 2y - 3z = -6 & \quad 3) \end{cases}$$

Después de revisar el video, resuelva el sistema de ecuaciones lineales de tres variables y tres ecuaciones que se muestran en la siguiente presentación interactiva.

Resolver un sistema de ecuaciones de 3x3 por el método de sustitución

1.3.6 Resolución por igualación

El método consiste en despejar una misma variable en las tres ecuaciones iniciales, reduciendo el sistema a uno con una variable menos. Este proceso se repite aplicando la lógica del despeje hasta determinar el valor de todas las variables. A continuación, puede explorar un video sobre el Método de igualación que muestra cómo resolver paso a paso un sistema de ecuaciones 3x3 utilizando el método de igualación.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ 3x - 5y - z = -10 \\ -x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

Para analizar la solución de este ejercicio, le invito a revisar la siguiente presentación interactiva.

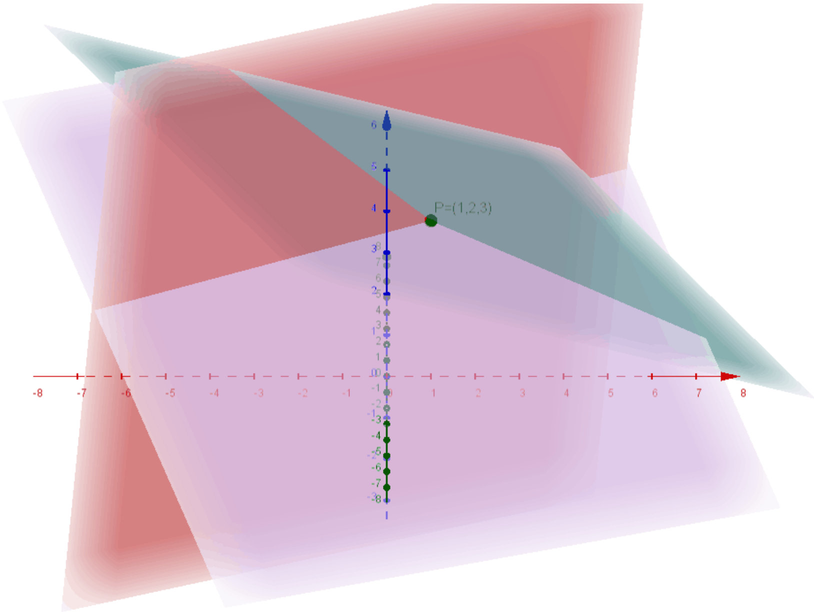
Resolver un sistema de ecuaciones de 3x3 por el método de igualación

Este sistema compatible determinado en el punto de intersección de cada ecuación lineal del sistema es el punto $P(1,2,3)$, es decir, el sistema es de solución única.

Cualquier método para resolver sistemas de ecuaciones lineales debe llevarnos a la misma solución. En este ejemplo, resuelto mediante sustitución e igualación, se verifica gráficamente que la intersección de los tres planos, correspondientes a las ecuaciones, se representa en el espacio tridimensional (R^3). A continuación, se presenta el gráfico que confirma la precisión de los resultados.

Figura 11

Gráfica de la solución de ecuaciones lineales de tres ecuaciones y tres variables



Nota. Representación de la solución de un sistema compatible determinado. Parra, N., 2024.

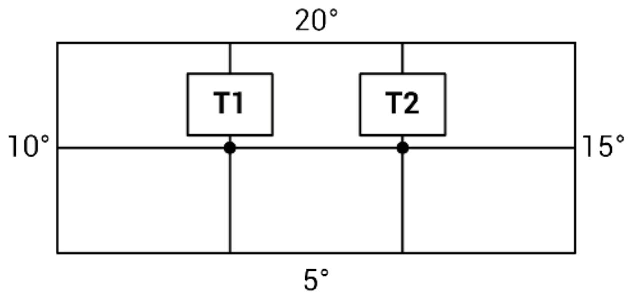
1.3.7 Aplicación de los sistemas de ecuaciones lineales en problemas del entorno

Ejercicio 1. Distribución de temperaturas en una placa

Consideramos una placa de metal donde aplican varias temperaturas, el objeto es encontrar la temperatura en un punto dado de la placa. Se supone que la distribución es uniforme, entonces la temperatura es el promedio. Suponga que la temperatura en un punto interior es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos que lo rodean: arriba, a la derecha, abajo y a la izquierda. ¿Se quiere estimar la temperatura del punto $T1$ y $T2$?

Figura 12

Distribución de calor en una placa metálica



Nota. Adaptado de *Problema de un Sistema de Ecuaciones, Distribución de Temperatura de una Placa* [Ilustración], por Manolomath, y esto es Matemática Bacana, 2011, Youtube (Problema de un Sistema de Ecuaciones, Distribución de Temperatura de una Placa).

Resolver el valor de la temperatura en los puntos $T1$ y $T2$ mediante un sistema de ecuaciones trasciende el aprendizaje mecánico: fomenta la interpretación del lenguaje natural hacia el matemático y conecta las matemáticas con la solución de problemas reales. Este desafío está diseñado para que el estudiante analice, reflexione y comprenda cómo los sistemas de ecuaciones son herramientas prácticas aplicables en contextos cotidianos. ¡Es una oportunidad única para integrar el pensamiento crítico con el conocimiento matemático!

En el video [Problema de un Sistema de Ecuaciones, Distribución de Temperatura de una Placa] se evidencia como los sistemas de ecuaciones ayudan a resolver un problema de distribución de calor de una placa dentro del área de la termodinámica.

Para afianzar sus habilidades y destrezas en la aplicabilidad de sistemas de ecuaciones, pueden buscar en la red con las siguientes palabras clave: *redes de tráfico, punto de equilibrio aplicando sistemas de ecuaciones.*

Actividades de aprendizaje recomendadas

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

1. Lectura comprensiva de la bibliografía básica y complementaria relacionada con el tema de Sistemas de Ecuaciones, incluyendo el análisis e interpretación de conceptos y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, según lo indicado en la guía didáctica.
2. Para comprender mejor el tema de esta semana, utilizar un graficador dinámico como GeoGebra, Desmos, Symbolab, para mejorar la comprensión gráfica de los sistemas de ecuaciones.
3. Practicar con los ejercicios planteados del apartado *Sistemas de Ecuaciones* en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

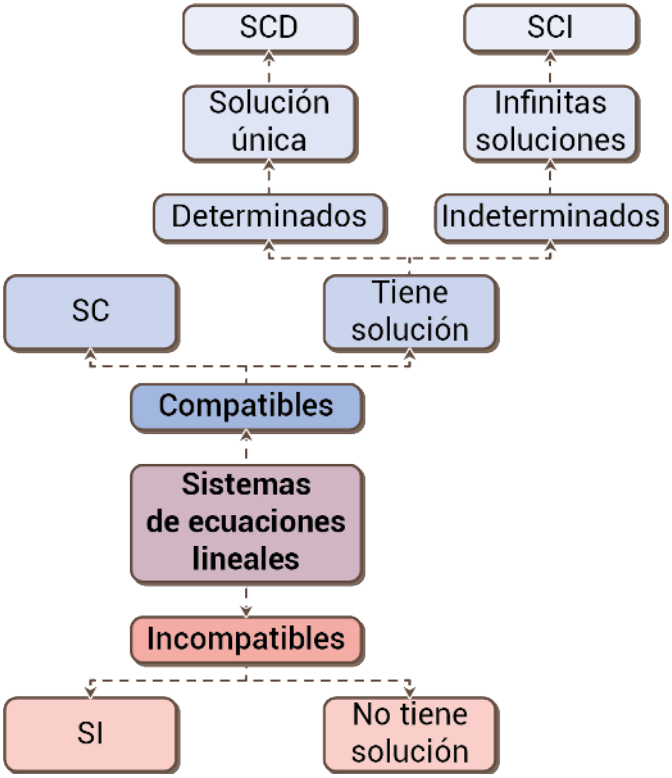
Semana 2

Unidad 1. Sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales representan relaciones entre variables y se clasifican en consistentes, con solución, o inconsistentes, sin solución. Los sistemas consistentes pueden ser determinados, con una única solución, o indeterminados, con infinitas soluciones. Su estudio es esencial para resolver problemas matemáticos y aplicados.

Figura 13

Tipos de sistemas lineales de acuerdo con su solución

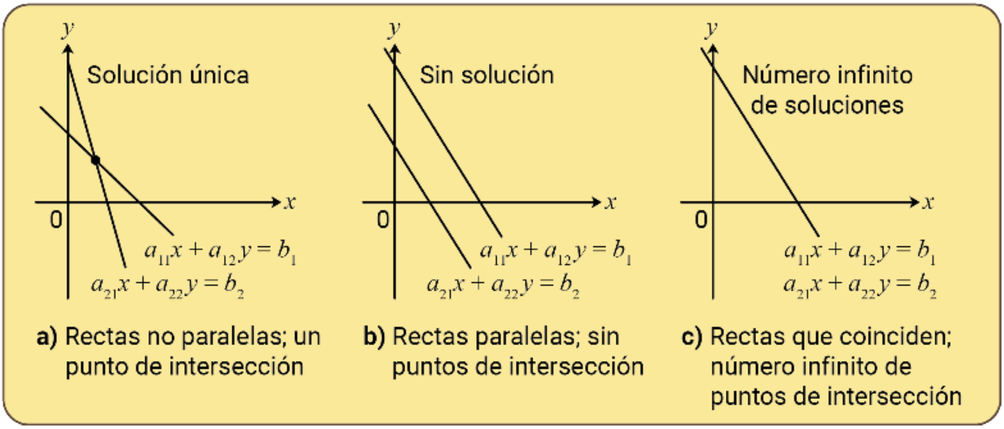


Nota. Se muestra un organigrama de la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales. Parra, N., 2024.

Un sistema de ecuaciones lineales puede presentar tres posibles escenarios: una solución única, infinitas soluciones o ninguna solución. En el caso de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, la solución será única si las ecuaciones son linealmente independientes. La figura 14 ilustra gráficamente cómo se resuelven estos sistemas, mostrando las distintas intersecciones posibles. Según el método aplicado, el resultado reflejará una de las tres alternativas mencionadas.

Figura 14

Representación gráfica de soluciones de sistemas de ecuaciones



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 3), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales de 2 incógnitas

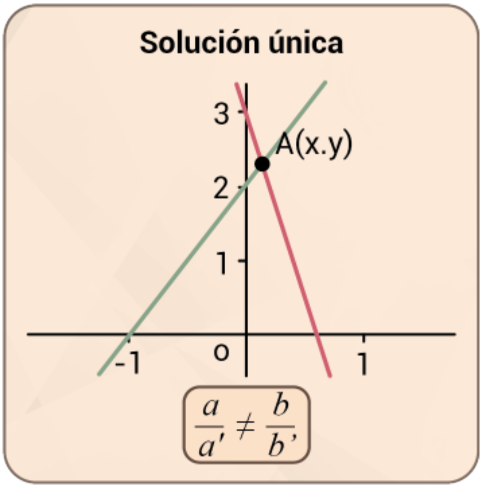
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

1.4 Sistema Compatible Determinado (SCD)

En la figura 15 podrá observar la interpretación gráfica de la solución única de un sistema de ecuaciones lineales.

Figura 15

Rectas secantes



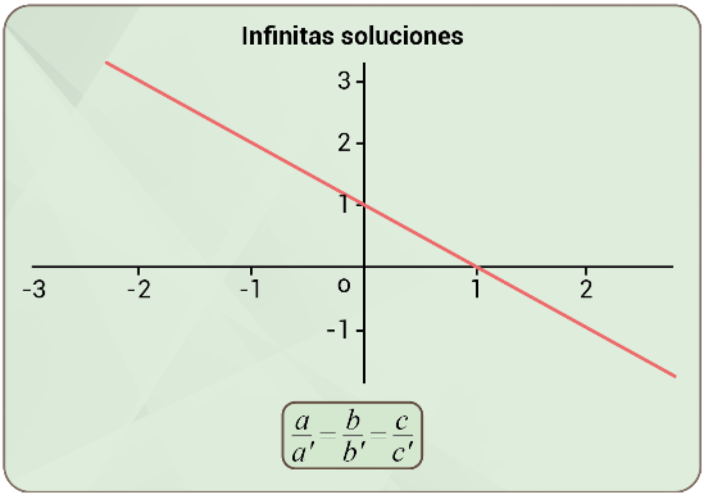
Nota. Interpretación gráfica de la solución única de un sistema de ecuaciones lineales. Parra, N., 2024.

1.5 Sistema Compatible Indeterminado (SCI)

A continuación, en la figura 16 se expone la interpretación gráfica de la solución infinita de un sistema de ecuaciones lineales.

Figura 16

Rectas coincidentes



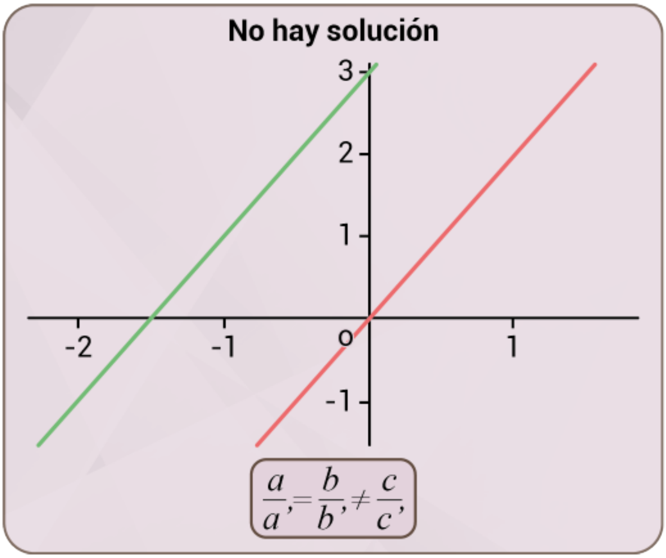
Nota. Interpretación gráfica de la solución infinita de un sistema de ecuaciones lineales. Parra, N., 2024.

1.6 Sistema Incompatible (SI)

En cuanto a los sistemas incompatibles, en la figura 17 se expone su interpretación gráfica de la no existencia de un sistema de ecuaciones lineales.

Figura 17

Rectas paralelas



Nota. Interpretación gráfica de la no existencia de un sistema de ecuaciones lineales. Parra, N., 2024.

Para que tenga mayor comprensión de sistemas de ecuaciones lineales, a continuación, se presentan algunas consideraciones de mejora:

- Utilizar los sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, para resolver situaciones del entorno, aplicando el método de solución que considere más adecuado.
- Tener en cuenta que, en la forma general de un sistema de ecuaciones en donde los $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$, son los coeficientes en las ecuaciones y los $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ son las variables, las cuales tomarán valores para cumplir la condición de igualdad.
- **Atención especial a la representación de soluciones:** es fundamental que pongas especial cuidado en de cómo representas el tipo de solución, de un sistema de ecuaciones. Esta habilidad no solo enriquecerá tus conclusiones, sino que también facilitará la toma de decisiones en los problemas propuestos y en situaciones del mundo real.

- **Revisión de estrategias de reconocimiento:** le invito a revisar las estrategias que hemos desarrollado para identificar diferentes tipos de sistemas de ecuaciones. A lo largo del curso, hemos trabajado en numerosos ejercicios y problemas que te ayudarán a fortalecer esta competencia. ¡Aprovecha esta oportunidad para consolidar tu aprendizaje!
- **Validación de soluciones con GeoGebra:** utiliza herramientas como GeoGebra, Desmos, Symbloab para confirmar tus soluciones en sistemas de ecuaciones lineales. Esta aplicación no solo te permitirá visualizar las soluciones de manera dinámica, sino que también te ayudará a comprender mejor los conceptos involucrados.
- Al enfocarse en estos aspectos, no solo mejorarás tus habilidades matemáticas, sino que también te sentirás más seguro en la resolución de problemas complejos. ¡Sigue adelante y aprovecha al máximo tu aprendizaje!

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

1. Lectura comprensiva de la bibliografía básica y complementaria relacionada con el tema de Sistemas de Ecuaciones, incluyendo el análisis e interpretación de conceptos y propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales, según lo indicado en la guía didáctica semana 1 y 2.
2. Practicar con los ejercicios planteados del apartado Sistemas de Ecuaciones en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica unidad 1 y 2.
3. Participar de las tutorías virtuales semanales, revisar videos y recursos propuestos en la guía didáctica.
4. El estudiante tiene la oportunidad de evaluar sus conocimientos para determinar si ha alcanzado el aprendizaje esperado en los temas relacionados con la solución de sistemas lineales. Para ello, se

presenta la siguiente autoevaluación, diseñada para ayudarle a verificar si su aprendizaje ha sido significativo. Tomado de Morales (2022).

Autoevaluación 1

Escriba en el paréntesis respectivo las letras V o F, según sean verdaderos o falsos los siguientes enunciados

1. ( ) Si tenemos las ecuaciones de dos rectas paralelas, ¿el tipo de sistema de ecuaciones que forman es incompatible?

2. ( ) Una ecuación de la forma $y = ax$ que expresa la variable y en función de la variable x y la constante a, dicha ecuación puede ser denominada ecuación lineal.

3. ( ) Sean las rectas $y = 3x$, $y = 3x + 1$, ¿El tipo de sistema de ecuaciones es incompatible?

4. ( ) En la ecuación $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$, los elementos $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ se denominan coeficientes.

5. ( ) Un sistema de ecuaciones lineales consistente siempre es determinado.

6. En las siguientes expresiones, la que corresponde a una función lineal es:

   a. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = b$

   b. $a_1x_1^2 + a_2x_2 + a_3x_3^3 = b$

c. $3x^2 + 5y + z = b$

7. Relacione las alternativas que gráficamente pueden presentar la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:

Tipos de solución	Descripción gráfica
Solución única	a. Las rectas no se intersecan, no existe punto común.
Sin solución	b. Las rectas no paralelas que se intersecan en un punto.
Infinitas soluciones	c. Las rectas coincidentes.

8. Relacione lo que corresponda al tipo de sistema lineal respecto según su solución:

Tipos de sistemas	Resolución
Consistente	a. El sistema no posee solución
Inconsistente	b. El sistema tiene una solución o infinitas soluciones
	c. El sistema siempre presenta infinitas soluciones

9. Indica cuál es la solución del sistema formado por el par de ecuaciones:

$$2x + y = 1$$

$$5x - 2y = -2$$

a. $x = -1, y = -1$

b. $x = 0, y = 1$

c. $x = -1, y = -1$

d. $x = 1, y = 0$

10. Resolver y determinar si los sistemas son consistentes o inconsistentes, indicar si el sistema tiene solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.

a. $$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \\ 5x + 4y = 5 \end{cases}$$

b. $$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 4y = 4 \end{cases}$$

c. $$\begin{cases} 2x - 3y - 5z = -19 \\ 3x - 4y + z = -2 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

d. $$\begin{cases} -2x + y = 3 \\ 2x - 3y = 2 \\ -x + 4y = 1 \end{cases}$$

11. Una tablet nueva cuesta \$3 500. Si su valor se deprecia linealmente \$245 por año. Elabora un modelo matemático que relacione su precio con el tiempo de uso.

Ir al solucionario

Retroalimentación

Es fundamental realizar una autoevaluación, ya que constituye una estrategia clave para fomentar la responsabilidad, desarrollar la capacidad de valorar y criticar constructivamente, y reflexionar sobre el proceso individual de enseñanza y aprendizaje en relación con los contenidos abordados durante la primera semana.

¡Felicidades! Has completado con éxito el primer reto: desarrollar la autoevaluación 1. Esta es la primera actividad que has logrado, y es un gran paso en tu proceso de aprendizaje.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 3

Unidad 2. Matrices

Comprender las matrices va más allá de dominar conceptos matemáticos; implica conectar fundamentos de sistemas lineales, operaciones aritméticas y representaciones geométricas. Pero, sobre todo, exige la capacidad de transformar ideas del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático. Esta unidad no solo le guiará en ese proceso, sino que también potenciará habilidades esenciales como el razonamiento lógico, la creatividad, la crítica constructiva y la autonomía. Porque aprender matrices no es solo adquirir conocimiento, es abrir la puerta a un aprendizaje significativo que transforma la forma en que entendemos el mundo.

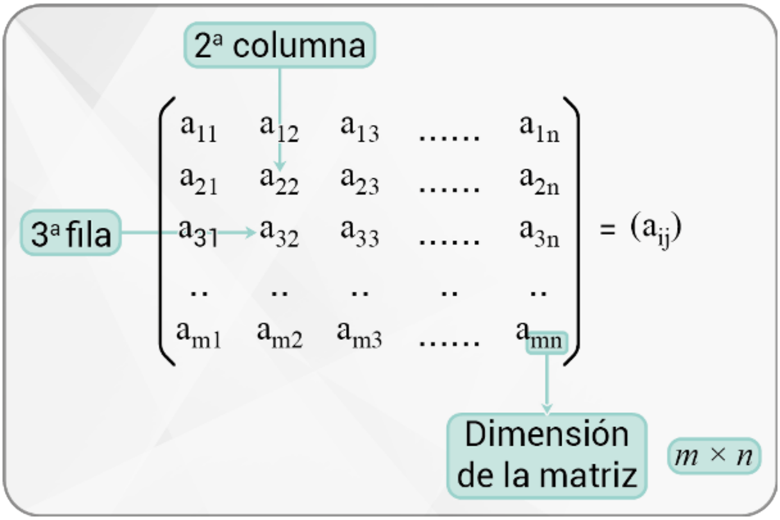
2.1 Conceptos básicos y definiciones

Se llama matriz a una disposición rectangular de números reales, los cuales se denominan elementos de la matriz. Cada elemento tiene dos subíndices, el primero indica la *fila y el segundo la columna, por ejemplo, los coeficientes de las variables* x_1, x_2, x_3 *de un sistema se pueden escribir como los elementos de una matriz* A, *llamada matriz de coeficientes del sistema.*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 26 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

Figura 18

Estructura general de una matriz



Nota. Definición algebraica de una matriz. Parra, N., 2024.

En el siguiente ejemplo se evidencia la interpretación del lenguaje natural al matemático:

Juan, Ana y Elena han ido a una tienda y han comprado lo siguiente:

1. Juan compró dos bocadillos, un refresco y un pastel.
2. Ana se llevó un bocadillo, un refresco y un pastel.
3. Elena compró un bocadillo y un refresco.

Para lograr la comprensión en la interpretación de los datos del problema se ha utilizado una tabla de doble entrada.

Tabla 2

Interpretación matemática del problema

	Bocadillos	Refresco	Pastel
Juan	2	1	1
Ana	1	1	1
Elena	1	1	0

Nota. Parra, N., 2024.

La matriz interpretada es: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El siguiente sistema de ecuaciones se encuentra en su forma matricial $Ax = b$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 8 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

Se obtiene en la siguiente matriz los coeficientes numéricos que acompañan a cada variable, quedando la siguiente matriz de coeficientes.

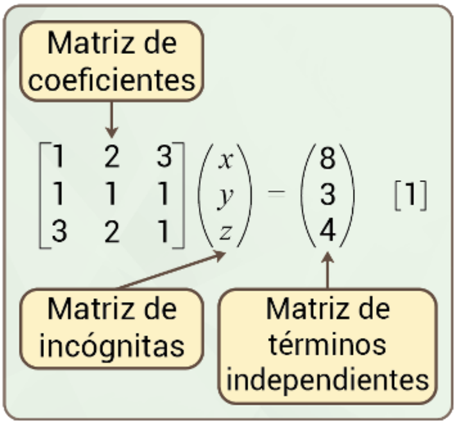
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

De allí, si queremos aumentar a esta *matriz de coeficientes los términos independientes, se tiene la matriz aumentada tal como se ve a continuación.*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & :8 \\ 1 & 1 & 1 & :3 \\ 3 & 2 & 1 & :4 \end{bmatrix}$$

Figura 19

Forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales



Nota. Representación de la forma matricial de un sistema de ecuaciones. Parra, N., 2024.

En la siguiente descripción se establecen las definiciones generales de la matriz de coeficientes, de incógnitas y de términos independientes.

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{pmatrix}$$

2.2 Operaciones básicas con matrices

Las operaciones básicas con matrices son suma, producto y producto de un número por una matriz, en los siguientes recursos se evidencian algunas actividades que apoyarán su aprendizaje.

En la presente herramienta sobre matrices se muestra algunas definiciones además de *suma y producto de matrices y un apartado para que el estudiante pueda poner en práctica su conocimiento del tema, además de otra herramienta de* producto de matrices *para que pueda practicar esta operación con una actividad en línea, además de otros conceptos relacionados con las operaciones con matrices..*

Suma de matrices

La suma de *dos matrices* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *de la misma dimensión, es otra matriz* $S = (S_{ij})$ *de la misma dimensión que los sumandos y el resultado es* $S = (a_{ij} + b_{ij})$. *Es decir, para sumar dos matrices simplemente sumamos los números que se encuentran en la misma ubicación de las matrices que se están sumando.*

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2x2} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}_{2x2}$$

Sin embargo $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$, no se pueden sumar.

Por tanto, para poder sumar dos matrices, estas **deben tener la misma dimensión**.

La diferencia de matrices A y B se representa por $A - B$, y se define como la suma de A con la opuesta de $B : A - B = A + (-B)$

Producto de un número por una matriz

Para multiplicar **un número real por una matriz**, se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por dicho número.

$$\text{Si } A = (a_{ij}), \text{ entonces } kA = (ka_{ij})$$

Para multiplicar una matriz por un escalar (número), multiplicamos cada elemento de la matriz por el número.

$$k \cdot A = k \cdot (a_{ij}) = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix} = (ka_{ij})$$

Cuando multiplicamos una matriz por el escalar -1 obtenemos el negativo de la matriz. Si sumamos una matriz con su negativo, obtenemos una matriz nula, formada exclusivamente por ceros.

Asimismo, dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si

- Son del mismo tamaño.
- Los elementos correspondientes de la matriz son iguales.

El siguiente ejemplo es tomado de Morales (2022), acerca del tema de producto de una matriz por un escalar y otras operaciones elementales.

$$\begin{pmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Determine a, b, c y d.

Si dos matrices son iguales, sus respectivos elementos son iguales, así que tendríamos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a+2b=4 \\ 2a-b=-2 \\ 2c+d=4 \\ c-2d=-3 \end{cases}$$

Note que las ecuaciones 1 y 2 tienen como incógnitas a y b; y las ecuaciones 3 y 4 tienen como incógnitas a c y d, por lo que podríamos descomponer el sistema de 4 ecuaciones en dos sistemas de dos ecuaciones.

El sistema de las dos ecuaciones iniciales sería

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 2a - b = -2 \end{cases}$$

Para eliminar b multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la sumamos a la primera

$$\begin{cases} a + 2b = 4 \\ 4a - 2b = -4 \end{cases}$$

Queda

$$5a = 0 \rightarrow a = 0$$

$$0 + 2b = 4 \rightarrow b = 2$$

Tomando las ecuaciones 3 y 4 tenemos

$$\begin{cases} 2c + d = 4 \\ c - 2d = -3 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2

$$\begin{cases} 4c + 2d = 8 \\ c - 2d = -3 \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones queda

$$5c = 5 \rightarrow c = 1$$

$$4(1) + 2d = 8 \rightarrow 2d = 8 - 4 = 4 \rightarrow d = 2$$

Otro ejercicio

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Determine

a. $A - 2B$
b. $2A - B + 2C$

Solución

a.
$$A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ -6 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -5 & -8 & 3 \\ -2 & 2 & 5 \\ 7 & -7 & -19 \end{bmatrix}$$

b.
$$2A - B + 2C = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 8 \\ -4 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

2.3 Producto punto y multiplicación de matrices

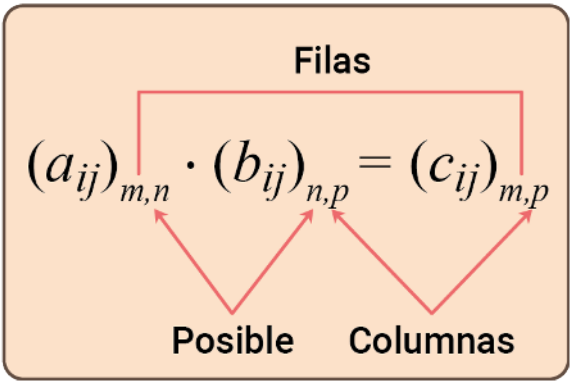
Dadas dos matrices A y B, *su producto es otra matriz* P *cuyos elementos se obtienen multiplicando las filas de* A *por las columnas de* B *(por lo que deben coincidir estas). De manera más formal, los elementos de* P *son de la forma:*

$$P_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \text{con} \quad k = 1, \ldots, n$$

Es evidente que el número de columnas de A debe coincidir con el número de filas de B. Es más, si A tiene dimensión $\mathbf{m\,x\,n}$ y B dimensión $\mathbf{n\,x\,p}$, la matriz P será de orden $\mathbf{m\,x\,p}$, así como se muestra a continuación:

Figura 20

Condición para el producto de matrices



Nota. Disposición de filas y columnas para el producto de matrices. Parra, N., 2024.

Cada elemento de la nueva matriz se obtiene multiplicando los elementos de la fila por los elementos de la columna en la que se encuentra la matriz.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$ *No es posible multiplicar*

Cuando es posible la multiplicación de matrices se procede de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} r & s \\ t & u \end{bmatrix}_{2x2} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}_{2x3} = \begin{bmatrix} ra_1 + sb_1 & ra_2 + sb_2 & ra_3 + sb_3 \\ t_1 + ub_1 & ta_2 + ub_2 & ta_3 + ub_3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Ejemplo:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule

$2A - BC$

Resolución:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2)(1) + (1)(0) + (4)(-1) & (-2)(2) + (1)(1) + (4)(0) & (-2)(-1) + (1)(-2) + (4)(3) \\ (3)(1) + (-1)(0) + (-2)(-1) & (3)(2) + (-1)(1) + (-2)(0) & (3)(-1) + (-1)(-2) + (-2)(3) \\ (1)(1) + (0)(0) + (0)(-1) & (1)(2) + (0)(1) + (0)(0) & (1)(-1) + (0)(-2) + (0)(3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -4 & 0 & 12 \end{pmatrix} + (-) \begin{pmatrix} -6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que se logre una respuesta de este ejercicio es necesario verificar que las dos matrices resultantes sean de igual orden, pero al analizar no cumple esta condición necesaria para la suma de matrices, por tanto, no tiene solución final.

Otro ejemplo al combinar suma, resta y multiplicación de matrices:

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Calcule

$A(BC)$

Resolución:

$$BC = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -7 & 29 \\ 15 & 12 & -27 \end{pmatrix}$$

Se puede efectuar la multiplicación de matrices por bloques. En el presente video se muestra paso a paso la resolución de multiplicación de matrices por bloques, revisar para complementar su aprendizaje de esta operación de matrices.

Aplicación del producto de matrices

El uso de pesticidas en la provincia de Loja es inevitable, en una siembra de maíz se usa cierta cantidad de pesticida. Luego, los animales herbívoros de la zona comen las plantas contaminadas y absorben los pesticidas. Para determinar la cantidad de pesticida absorbida por uno de esos animales, procedemos de la manera siguiente. Suponga que tenemos tres pesticidas y cuatro plantas. Sea a_{ij} la cantidad de pesticida i (en miligramos) absorbida por la planta j. Esta información puede representarse mediante la matriz, a través de una adaptación de un ejercicio de (Kolman, 2013, p.25)

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cccc} \text{Planta 1} & \text{Planta 2} & \text{Planta 3} & \text{Planta 4} \end{array}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Pesticida 1} \\ \text{Pesticida 2} \\ \text{Pesticida 3} \end{array}$$

Nota: Tomado de Álgebra Lineal Fundamentos y Aplicaciones (p. 25), por B. Kolman y D. Hill, 2013, Pearson.

Imaginemos ahora, que se tienen tres animales herbívoros, y sea b_{ij} la cantidad de plantas del tipo i que uno de ellos, de tipo j, come mensualmente. La información puede representarse mediante la matriz.

$$\begin{array}{cccc} & \text{Herbívoro 1} & \text{Herbívoro 2} & \text{Herbívoro 3} \end{array}$$

$$B = \left[\begin{array}{ccc} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{Planta 1} \\ \text{Planta 2} \\ \text{Planta 3} \\ \text{Planta 4} \end{array}$$

Nota: Tomado de Álgebra Lineal Fundamentos y Aplicaciones (p. 25), por B. Kolman y D. Hill, 2013, Pearson.

La entrada (i, j) de AB proporciona la cantidad de pesticida del tipo i que ha absorbido el animal j. Por tanto, al realizar el producto de dos matrices, tenemos como respuesta otra matriz con el número de filas de la primera y número de columnas de la segunda.

$$\begin{bmatrix} 364 & 165 & 161 \\ 376 & 170 & 174 \\ 448 & 199 & 187 \end{bmatrix}$$

En consecuencia, si $i = 2$ y $j = 3$, la entrada $(2, 3)$ de AB, es decir, es $3(8) + 2(15) + 2(10) + 5(20) = 174\,\mathbf{mg}$ de pesticida, 2 absorbidos por el herbívoro 3.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

1. Lea y analice la bibliografía básica y complementaria sobre matrices indicadas en la guía didáctica. Identifica conceptos clave, propiedades y aplicaciones prácticas, tomando notas claras y organizadas. Refuerza el aprendizaje utilizando herramientas tecnológicas e interactivas y prepara preguntas para la discusión en clase.
2. Practicar con los ejercicios planteados del apartado matrices en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la unidad 3.
3. Participar de las tutorías virtuales semanales, participar, revisar videos y recursos propuestos en la guía didáctica semana 3.
4. Revise el siguiente libro interactivo para afianzar los conocimientos adquiridos sobre el tema de operaciones de matrices: Matrices, Determinantes y Sistemas de ecuaciones . En este libro interactivo podrá revisar los temas abordados en esta unidad y además interactuar con él, muestra definiciones, reglas específicas para que el estudiante pueda asimilar mejor al momento de aleatorizar ejercicios propuestos.

Semana 4

Unidad 2. Matrices

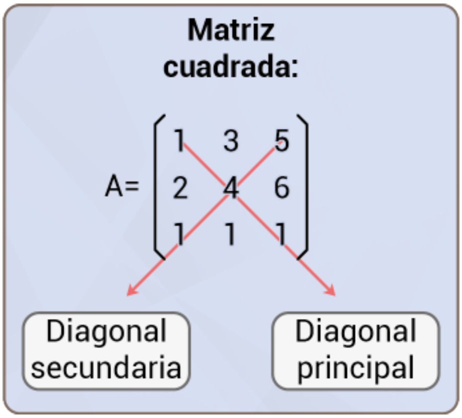
2.4 Propiedades de las operaciones con matrices

Cuando una matriz tiene igual número de filas y columnas, se dice que es una *matriz cuadrada.*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \text{ si } i = f$$

Figura 21

Diagonales de una matriz cuadrada



Nota. Representación matemática de una matriz cuadrada. Parra, N., 2024.

Matriz nula: es una matriz en la que todos los elementos son nulos.

$$\mathbf{O} = \underset{3 \times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \mathbf{O} = \underset{3 \times 2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Nota: Tomado de *Sistemas de conocimiento de Álgebra Lineal y su didáctica* (p. 42), por N. E. Parra, 2022, Ediloja Cía. Ltda.

Al multiplicar cualquier matriz por una matriz nula, el resultado es otra matriz nula.

Matriz diagonal: es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz escalar: es una matriz diagonal donde todos los elementos de ella son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz unidad o identidad: es una matriz escalar, cuya diagonal principal es 1.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos (siempre y cuando esto sea posible) cualquier matriz por la matriz identidad, el resultado es la matriz original. $A * I = A$; $I * B = B$.

Si en una matriz transformamos las filas en columnas y viceversa, tenemos dos matrices que son transpuestas la una de la otra, en el artículo sobre matriz transpuesta apartado 4, puede verificar la definición de transpuesta de una matriz y sus propiedades para una mejor comprensión del tema.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz transpuesta de la matriz A, denotada por A^T, es la siguiente matriz:

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces, la transpuesta de A, que se escribe A^T, es la matriz de $m \times n$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A = (a_{ij})$. En otras palabras

Sea $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ entonces

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Simplemente, se coloca el renglón i de A como la columna j de A^T y la columna j de A como el renglón jA^T. Tomado de (Grossman & Flores, 2012).

Es decir, más simplificadamente, la definición se resume en lo siguiente:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad B = [b]_{m \times m}$$

$$A^t = B$$

En el siguiente artículo de Geogebra, se puede evidenciar la definición y propiedades de la transpuesta de una matriz, además se puede navegar en otros enlaces a temas relacionados con los siguientes temas de la materia.

2.5 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales por Gauss y Gauss-Jordán

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales por eliminación Gaussiana en un inicio la transformamos en una matriz aumentada, misma que está compuesta por los coeficientes que acompañan a las incógnitas, separadas por una línea entrecortada que separa la columna de términos independientes, para resolver este sistema de ecuaciones las operaciones elementales que se utilizan son:

- Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero $R_i \to cR_i$.
- Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j

$$R_j \to R_j + cR_i$$

- Permutar (intercambiar) los renglones i y j

$$R_i \rightleftarrows R_j$$

Para comprender el empleo de la matriz aumentada remitirse la siguiente herramienta web y realizar una práctica sobre Método Matriz Ampliada Sistema de 2 ecuaciones, esto le permitirá definir la matriz aumentada a partir de un sistema de ecuaciones lineales para luego validar tu aprendizaje a través de una calificación.

La idea es ir transformando paulatinamente la parte izquierda de la matriz en una matriz escalonada por filas (método de Gauss) o en una matriz escalonada reducida por filas (método de Gauss-Jordán), se deben cumplir los siguientes pasos:

1. Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero, aparecen en la parte inferior de la matriz.
2. El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.
3. Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en renglón de arriba.
4. Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama pivote para ese renglón. (Grossman & Flores, 201212,)

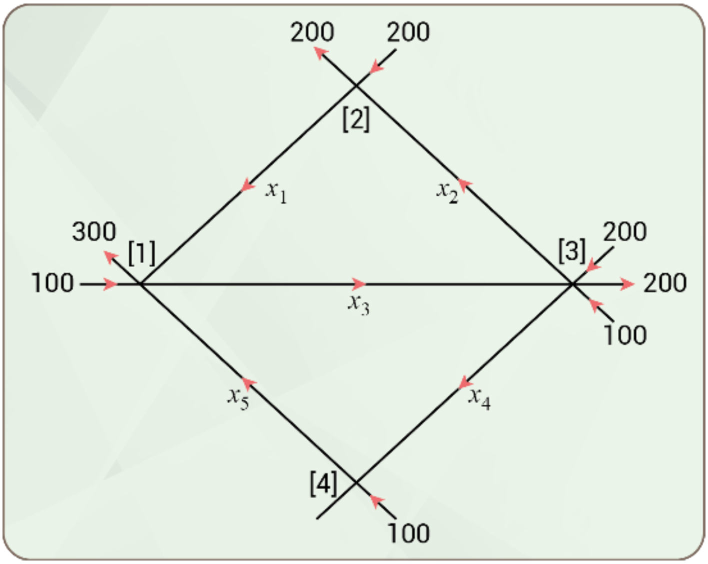
Podemos aplicar estas consideraciones en el planteamiento de un problema de *flujo de tráfico*, de allí que el estudiante podrá deducir el proceso de reducción de la matriz escalonada, y dar las conclusiones en función del resultado del sistema, a continuación, se considera el *problema* mencionado tomado de (Grossman & Flores, 2012, pp. 36).

Ejemplo problema de flujo de tráfico

Considere el siguiente diagrama de una malla de calles de un sentido con vehículos que entran y salen de las intersecciones. La intersección k se denota por $[k]$. Las flechas a lo largo de las calles indican la dirección del flujo del tráfico. Sea el número de vehículos/h que circulan por la calle i. *Suponiendo que el tráfico que entra a una intersección también sale*, establezca un sistema de ecuaciones que describa el diagrama de tráfico.

Figura 22

Representación del flujo de una red de tráfico



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 36), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

Solución

Partiendo de la condición ideal del problema, en la que el flujo que entra es igual al que sale, se deduce un sistema de ecuaciones que se formula para cada nodo o intersección de la gráfica.

[1]: $x_1 + 100 + x_5 = 300 + x_3$

[2]: $200 + x_2 = 200 + x_1$

[3]: $200 + 100 = 200 + x_2 + x_4$

[4]: $100 + x_4 = x_5$

Ordenamos y simplificamos

[1]: $x_1 - x_3 + x_5 = 200$

[2]: $x_1 = x_2$

[3]: $x_2 + x_4 = 100$

[4]: $x_4 = x_5 - 100$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 200 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_4 = 100 \\ x_4 - x_5 = -100 \end{cases}$$

Para establecer la matriz ampliada, donde no existe valor para alguna variable, se registra el valor de 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2 \to R2 - R1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix} \xrightarrow{R2 \to (-1)R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3 \to R3 - 1R2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix} \xrightarrow{R1 \to R1 - 1R3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R1 \to R1 - 1R4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -100 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 200 - x_5$

$x_2 = 200 - x_5$

$x_3 = 0$

$x_4 = -100 + x_5$

$x_5 = \text{libre}$

Tenemos 1 variable libre (x_5) que puede tomar cualquier valor a lo largo de los números reales, por tal razón x_5 puede renombrarse por $t(= t)$, que es un parámetro o número que puede tomar cualquier valor.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 - t \\ 200 - t \\ 0 \\ -100 + t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como vector en un sistema de cinco dimensiones nos quedaría $(200 - t, 200 - t, 0, -100 + t, t)$.

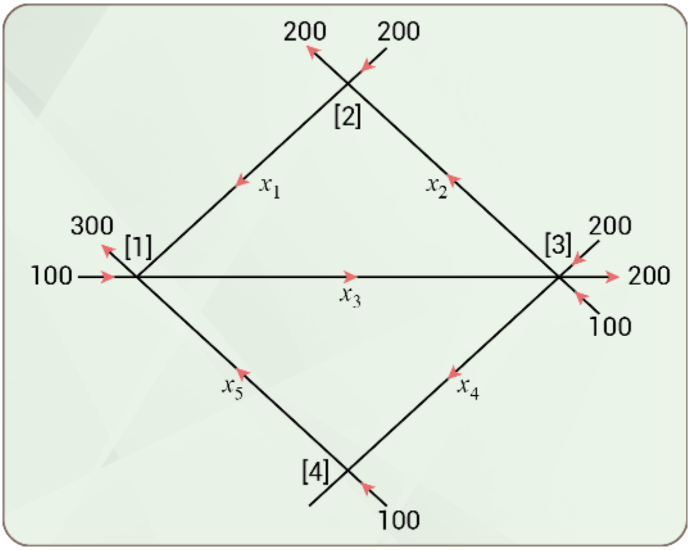
Conclusión

Se trata de un sistema compatible indeterminado de infinitas soluciones, de allí que al interpretar la solución del sistema deducido del flujo de tráfico, se da para varias respuestas a las siguientes preguntas del problema:

¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] (sin modificar los sentidos de tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

Figura 23

Representación del flujo de una red de tráfico, $x_3 = 0$.



Nota. Interpretación gráfica del primer literal del ejercicio propuesto cuando x_3 desaparece, es decir $x_3 = 0$. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 36), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

La pregunta con respecto a este problema dice lo siguiente. Suponga que la calle de [1] a [3] necesita cerrarse, es decir $x_3 = 0$.

$$x_1 = 200 - x_5$$

$$x_2 = 200 - x_5$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = -100 + x_5$$

$$x_5 = \text{libre}$$

De manera matemática podemos verificar que cuando $x_3 = 0$. El sistema sigue siendo de infinitas soluciones y todas las demás trayectorias dependen de x_5, por lo tanto, x_1 y x_2 no debe ser mayor que 200 $(x_5 \leq 200)$ porque el número de carros que pasan por x_1 y x_2 es negativo y, si se trata de "contar" estamos usando los números naturales.

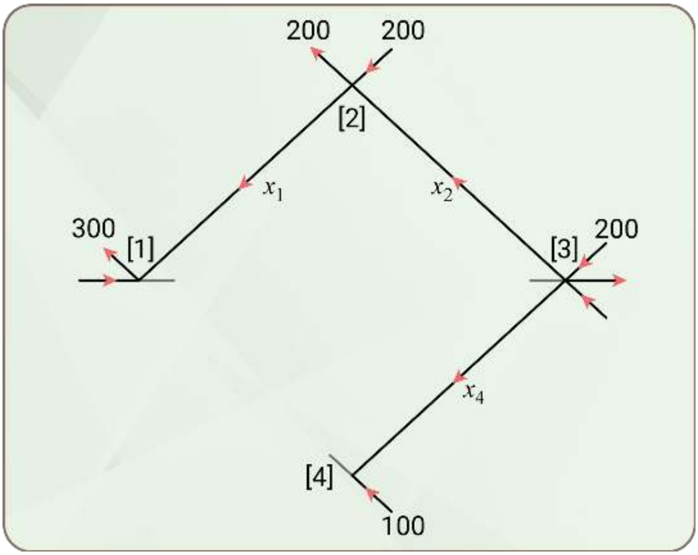
Para x_4: $x_5 \geq 100$ si ocurre lo contrario, a esta desigualdad se contaría con cantidades negativas, lo cual no es posible.

Otra pregunta del problema menciona que ¿Puede cerrarse también la calle de [1] a [4] $(x_5 = 0)$ sin modificar los sentidos de tránsito? Si no se puede cerrar, ¿cuál es la cantidad más pequeña de vehículos que debe poder admitir esta calle (de [1] a [4])?

Con respecto a esa pregunta, tenemos que el conjunto solución con $(x_5 = 0)$ nos da como resultado de un sistema compatible determinado de soluciones únicas.

Figura 24

Representación del flujo de una red de tráfico, $x_{1 \text{ y } 2} = 200$, $x_{3 \text{ y } 5} = 0$, $x_4 = -100$



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 36), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

Es decir, por cada una de las x_i circula una cantidad determinada de vehículos, pero x_4 debe cambiar de sentido según el signo que resultó del desarrollo matemático.

Sistema homogéneo

Un sistema homogéneo tiene la forma en el que $b_1, b_2, b_3 \ldots b_m$ de la forma matricial $(AX = b)$ con $b = 0$, si en un sistema cualquiera de las $b_1, b_2, b_3 \ldots b_m$ son diferentes de cero, el sistema no se lo considera homogéneo.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Para sistemas generales no homogéneos, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), estos poseen dos posibilidades: la **solución trivial** es la única solución o existe un **número infinito de soluciones.** Las soluciones distintas a la solución cero se llaman soluciones **no triviales.** Un ejemplo de sistema homogéneo es el siguiente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolución:

Trabajamos con la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R3\to R3-3R1]{R2\to R2-2R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R2\to R2/-6} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R3\to R3-4R2]{R1\to R1-R2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{R3\to\frac{3}{16}R3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R2\to R2+\frac{5}{6}R3]{R1\to R1+\frac{1}{6}R3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Como se puede observar el resultado del sistema planteado es una **solución trivial**.

A continuación, el siguiente ejercicio online permite que el estudiante pueda interactuar a través de la resolución de un sistema de ecuaciones de 3×3 y resolverlo por Gauss-Jordán.

2.6 Inversa de una matriz

En los números reales al multiplicar un número real por su inverso multiplicativo se tiene como resultado la unidad, pero si hablamos de matrices específicamente las matrices cuadradas tenemos una operación parecida, ya que las matrices se encuentran estructuradas por números reales; pero es diferente a la unidad en las matrices se habla de una matriz identidad $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ siendo este el caso de una matriz de 2×2. Para entender esta definición se propone el siguiente ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ por definición $AB = BA = I$, donde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times2}$, la matriz b se llama matriz inversa de A y se denota por A^{-1}. Es decir, si $B = A^{-1}$ entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Una matriz que no puede invertirse se denomina *matriz singular*, a aquella que si podemos hacerlo se la denomina *no singular*.

El siguiente video nos ayuda a comprender el proceso de cálculo de la [matriz inversa](#) por el método de Gauss – Jordán paso a paso, que al final podemos identificar el tipo de sistema de ecuaciones lineales, tipo de solución y si toda matriz posee una [matriz inversa](#).

Encontrar la inversa de una matriz cuadrada A por Gauss - Jordán

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a. Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b. Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A **no es invertible**. Por ejemplo, vamos a invertir la matriz.

Planteamos la matriz ampliada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz aumentada $(A|I) \to (I|B)$ *luego* $B = A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -12 & -2 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{R2\to R2-3R1\\ R3\to R3+2R1\\ R4\to R4+R1}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R2\to R2/-3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{R1\to R1+3R2\\ R3\to R3-4R2\\ R4\to R4-3R2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -2 & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3\to R3/-\frac{2}{3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[]{\substack{R1\to R1-2R3\\ R2\to R2-\frac{2}{3}R3\\ R4\to R4+R3}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R4\to R4/-\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 3 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R3\to R3+\frac{3}{2}R4]{\substack{R1\to R1-R4 \\ R2\to R2-R4}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa de la matriz A propuesta es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación

Se realiza el producto de matrices apoyándonos en la definición

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Al realizar el producto de las dos matrices, se tiene que:

$$I = A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se concluye que la matriz encontrada es efectivamente la matriz inversa, ya que al multiplicarlas se obtiene como resultado la matriz identidad. Asimismo, se observa que el producto de matrices bajo esta definición cumple con *la propiedad conmutativa*. Además, dado que esta matriz tiene inversa, se clasifica como una *matriz invertible o no singular*.

Ejemplos

Dadas las siguientes matrices, realice las operaciones indicadas: Tomado de (Morales, 2020, p. 46-49)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t C1 - 2B$$

Resolución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t C - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB - C_2)^{-1}$$

Resolución:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB - C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+F1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\to F3-2F2]{\to F1-F2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$(AB - C_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dada la función $f(x)$ y la matriz A, calcule en los siguientes ejercicios $f(A)$ y A^2

Sea $f(x) = 3x^2 - 4x + 8$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$f(A)=3A^2-4A+8I=3\begin{pmatrix}5&3&1\\-1&4&-4\\-3&-1&4\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}+8\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}19&13&-5\\5&20&-16\\-13&-11&20\end{pmatrix}$$

Otro ejercicio, encontrar la inversa de una matriz por Gauss-Jordán

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&3&1&1&0&0\\-1&4&-4&0&1&0\\-3&-1&4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F1\leftrightarrow F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&-4&4&0&-1&0\\5&3&1&1&0&0\\-3&-1&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&4&0&-1&0\\5&3&1&1&0&0\\-3&-1&4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+3F1]{F2-5F1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&4&0&-1&0\\0&23&-19&1&5&0\\0&-13&16&0&-3&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{F2}{23}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&4&0&-1&0\\0&1&-\frac{19}{23}&\frac{1}{23}&\frac{5}{23}&0\\0&-13&16&0&-3&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F3+13F2]{F1+4F2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{16}{23}&\frac{4}{23}&-\frac{3}{23}&0\\0&1&-\frac{19}{23}&\frac{1}{23}&\frac{5}{23}&0\\0&0&\frac{121}{23}&\frac{13}{23}&-\frac{4}{23}&1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{23F3}{121}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&\frac{16}{23}&\frac{4}{23}&-\frac{3}{23}&0\\0&1&-\frac{19}{23}&\frac{1}{23}&\frac{5}{23}&0\\0&0&1&\frac{13}{121}&-\frac{4}{121}&\frac{23}{121}\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F2+\frac{19F3}{23}]{F1-\frac{16F3}{23}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{12}{121}&-\frac{13}{121}&-\frac{16}{121}\\0&1&0&\frac{16}{121}&\frac{23}{121}&\frac{19}{121}\\0&0&1&\frac{13}{121}&-\frac{4}{121}&\frac{23}{121}\end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{12}{121} & -\frac{13}{121} & -\frac{16}{121} \\ \frac{16}{121} & \frac{23}{121} & \frac{19}{121} \\ \frac{13}{121} & -\frac{4}{121} & \frac{23}{121} \end{pmatrix}$$

Sea $f(x)=-x3-x-1$ y $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Resolución:

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$$

$$f(A)=-A^3-A-I=-\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 9 & -16 \end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F1/2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{1} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F2+3F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{2F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F1+\frac{3F2}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-2}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa posee algunas aplicaciones, por ejemplo, en el video Modelo de Insumo Producto Leontief se muestra el manejo de la demanda interna y externa de un país, es decir, para el cálculo de la cantidad de productos a exportar.

Además, la matriz inversa puede utilizarse para resolver sistemas de ecuaciones lineales, de acuerdo con las siguientes consideraciones.

Demostración

Partimos de la forma matricial de un sistema lineal

$$Ax = b$$

Si multiplicamos ambos miembros de la igualdad por A^{-1}, porque el objetivo es despejar la matriz de variables.

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$

Teniendo como deducción que, para calcular los valores de la matriz de variables, es necesaria la matriz inversa.

$$Ax = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$$

Por tanto, se puede mencionar que

Si A es invertible, el sistema $Ax = b$ tiene una solución única . Lo que implica que el valor de las incógnitas lo obtenemos multiplicando la inversa de la **matriz de los coeficientes** por la **matriz de los términos independientes** b.

A continuación, planteamos el siguiente problema:

En la ciudad de Loja desde el año 1997 se ejecuta el *proceso de clasificación de basura*, donde los ciudadanos deben sacar la basura de sus hogares de acuerdo con un calendario establecido desde la municipalidad, cada tipo de basura está asociado a un color de recipiente. Se proponen los datos del año 2005 de proyección de los años subsiguientes. Si a cada año se le asigna 160 ton que es la cantidad producida en la actualidad (2022), ¿cuánta cantidad de basura se obtendrá en cada sector? En la siguiente tabla se describen algunos datos por sectores y años.

Tabla 3

Producción actual y proyectada de basura (Toneladas/día)

Año	Urbana	Rural	Mercados	En la actualidad
2010	101,37	7,26	20,81	160[1]
2011	104,41	7,3021,44	21,44	160
2012	107,54	7,34	22,08	160

Nota. Adaptado de *La necesidad de implementar en el código municipal de higiene y abasto una norma legal que establezca el reciclaje y el tratamiento adecuado de la basura tecnológica en la ciudad de Loja* (pp. 1-176), por Chamba, R., 2011, Universidad Nacional de Loja.

Sistema deducido de la matriz de doble entrada

$$\begin{cases} 101.37x + 7.26y + 20.81z = 160 \\ 104.41x + 7.30y + 21.44z = 160 \\ 107.54x + 7.34y + 22.08z = 160 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 101.37 & 7.26 & 20.81 \\ 104.41 & 7.30 & 21.44 \\ 107.54 & 7.34 & 22.08 \end{pmatrix}$$

Encontramos la matriz inversa por el método de Gauss – Jordán iniciando con el planteamiento de la matriz aumentada.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 101.37 & 7.26 & 20.81 & 1 & 0 & 0 \\ 104.41 & 7.30 & 21.44 & 0 & 1 & 0 \\ 107.54 & 7.34 & 22.08 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Luego de las operaciones elementales aplicadas por el método de Gauss – Jórdan y se obtiene la matriz inversa $[A|I]->[A|A^{-1}]$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{381440}{15657} & \frac{-755540}{15657} & \frac{374140}{15657} \\ \frac{28480}{15657} & \frac{34220}{15657} & \frac{-60070}{15657} \\ \frac{-622420}{5219} & \frac{1222820}{5219} & \frac{-600520}{5219} \end{pmatrix}$$

Para encontrar la solución del sistema de ecuaciones con la inversa debemos recordar la siguiente definición

$$x=A^{-1}b$$

Como son tres variables x=sector urbano, y=sector rural y z=mercados entonces nuestra matriz columna de variables será:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{381440}{15657} & \frac{-755540}{15657} & \frac{374140}{15657} \\ \frac{28480}{15657} & \frac{34220}{15657} & \frac{-60070}{15657} \\ \frac{-622420}{5219} & \frac{1222820}{5219} & \frac{-600520}{5219} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 160 \\ 160 \\ 160 \end{bmatrix}$$

$$x=\frac{6400}{15657}=0.41$$

$$y=\frac{420800}{15657}=26.88$$

$$z=-\frac{19200}{5219}=-3.68$$

Lo que significa que $x=0.41$, $y=26.88$ y $z=-3.68$, se encontró que el *sector urbano* presenta un incremento proporcional del 0.41 % en la generación de residuos. Este crecimiento es moderado y puede atribuirse al aumento de la población urbana y al consumo en esta área, reflejando un patrón esperado en ciudades en expansión, *el sector rural* muestra un crecimiento del 26.88 %, mucho mayor que el urbano. Este incremento puede deberse a:

- Cambios en los patrones de consumo y hábitos en áreas rurales, probablemente influenciados por el acceso a tecnologías y productos modernos.
- Mayor densidad poblacional en áreas rurales cercanas a la ciudad, posiblemente debido a la expansión suburbana. En contraste, los mercados presentan una reducción del 3.68 % en la generación de residuos. Esto podría interpretarse como una mejora en la gestión de residuos orgánicos y reciclables en estos espacios, o una reducción en la actividad comercial en mercados tradicionales a medida que surgen nuevas formas de comercio como supermercados o comercio electrónico.

Conclusión general del sistema

El sistema de ecuaciones utilizado para proyectar estas cifras resulta compatible determinado, es decir, tiene una solución única y refleja las tendencias de crecimiento y cambio en la generación de residuos en Loja. Esto indica que el modelo es adecuado para analizar y proyectar los datos en función de la producción actual y las dinámicas específicas de cada sector.

Comprobación

$$101.37x + 7.26y + 20.1z = 160$$

$$104.41x + 7.30y + 21.44z = 160$$

$$107.54x + 7.34y + 22.08z = 160$$

$$101.37(0.41) + 7.26(26.88) + 20.1(-3.68) = 160$$

$$104.41(0.41) + 7.30(26.88) + 21.44(-3.68) = 160$$

$$107.54(0.41) + 7.34(26.88) + 22.08(-3.68) = 160$$

[1] González, G., & Muñoz Guayanay, J. F. (2013). *Estudio hidrológico correspondiente a las microcuencas del río Malacatos y las quebradas Amanda, Mónica y Santa Urcu para el abastecimiento de agua potable en la ciudad de Loja* [Universidad Nacional de Loja]. https://dspace.unl.edu.ec/jspui/handle/123456789/11485

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación de conceptos, definiciones, operaciones y propiedades de matrices en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 2.
2. Practicar con los ejercicios planteados del apartado matrices en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica de la semana 4.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
4. A continuación, se proponen algunos ejercicios y actividades respecto al tema de matrices, operaciones con matrices e inversa por el método de Gauss y Gauss - Jordán; esto le permitirá afianzar sus conocimientos. Adicionalmente. Actividad tomada de Morales (2022).

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es indispensable que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma cómo se resuelven paso a paso. Actividad tomada de Morales (2022).

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- En la multiplicación de matrices, no aplican la ley de cancelación ni la propiedad conmutativa, por lo que si $AB = AC$, no implica que $B = C$, y en general $AB \neq BA$, salvo que una matriz sea cuadrada.
- Si $AB = 0$, no necesariamente $A = 0$ ó $B = 0$; es posible obtener una matriz nula sin que alguna matriz sea nula.
- Recuerde aplicar correctamente la ley de los signos en operaciones con matrices para resolver problemas.

Autoevaluación 2

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. ( ) Un sistema lineal es el conjunto de ecuaciones lineales.

2. ( ) Resolver un sistema lineal es determinar los valores de las variables que al sustituirlos satisfacen en todas las ecuaciones.

3. ( ) Todos los sistemas lineales son consistentes.

4. ( ) Un sistema lineal puede tener una única solución, infinitas soluciones o no tener solución.

5. ( ) La matriz de orden mxn es aquella formada por n filas.

6. ( ) Una matriz es igual a otra cuando sus elementos de la diagonal principal son iguales.

7. ( ) El resultado de multiplicar una matriz fila $(1\,\mathrm{xm})$ por una matriz columna $(\mathrm{mx1}\ )$, resulta una matriz de orden mxm.

8. ( ) Según las propiedades de la multiplicación de matrices

$\mathrm{AB}{=}\mathrm{BA}$

9. ( ) Una matriz B es matriz inversa de A, si $\mathrm{AB}{=}\mathrm{A}$.

10. ( ) La forma escalonada por renglón implica transformar a 1, el elemento pivote de cada fila.

11. ( ) Un operación elemental por renglón implica sumar una constante diferente de cero a cada elemento de un renglón.

12. ( ) El método Gauss-Jordan implica transformar una matriz a una forma escalonada reducida.

13. ( ) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, no está en la forma escalonada por renglón debido a que el primer elemento diferente de cero en el segundo renglón no es 1.

14. ( ) Dado que $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}$, siendo $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, la matriz

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ es la inversa de A.

15. ( ) Si el último renglón de una matriz tiene todos sus elementos nulos luego de su transformación, significa que es una matriz no singular.

16. ( ) Una matriz equivalente no necesita haberle realizado previamente una operación fundamental de renglón.

17. Por eliminación de variables determine los valores de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$.

a.
$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 11 \\ 3x + 6y - 5z = 16 \end{cases}$$

18. Realice la multiplicación matricial $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ y $\mathbf{BC}$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

19. Por el método de Gauss-Jordán determine si es factible solucionar los siguientes sistemas lineales:

a.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ 4x + 8y - 6z = 2 \\ 6x + 12y - 10z = 0 \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} 3x + 6y - 6z = 9 \\ 2x - 5y + 4z = 6 \\ 5x + 28y - 26z = -8 \end{cases}$$

20. Determine la inversa de la matriz si existe.

a.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

b.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

21. Encontrar el siguiente modelo matemático de ajuste por el método de Gauss- Jordán con la siguiente información, relacionada con Estadística de precipitación de la estación agroclimática La Argelia

(mm) se muestra la siguiente tabla, se toma datos anuales:

Año	Anual [1]
2006	900.3
2007	1015
2008	1380.3

Año	Anual [1]
2009	911

Determinar:

a. El valor de la precipitación para el año 2030
b. ¿Cuál es la variación por año?
c. ¿Cuál es el modelo de ajuste utilizado para esta problemática?

Ir al solucionario

Ha desarrollado su segunda autoevaluación, seguro que lo realizó con éxito, ¡Felicitaciones!, con la misma dedicación y entusiasmo lo invito a continuar con el resto de las unidades.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 5

Unidad 3. Determinantes

El aprendizaje de estas estructuras matemáticas es fundamental para el ordenamiento de datos, destacando el determinante como un número real que se calcula exclusivamente sobre matrices cuadradas. Para abordar este tema, se emplearán su definición, propiedades, métodos de cálculo y aplicaciones en el álgebra de matrices, lo que permitirá una comprensión integral de su utilidad en diversas operaciones matemáticas y su relevancia en problemas prácticos.

3.1 Definición y propiedades

Según Morales (2022): Los determinantes aparecieron antes que las matrices modernamente, se considera que el determinante es propio de una matriz cuadrada. El nombre de determinante[2] aparece porque "determina" si un sistema de ecuaciones tiene o no una solución única. (p.57)

El determinante desempeña un papel crucial en el análisis de matrices y sistemas de ecuaciones lineales. Cuando el determinante de una matriz es igual a cero $det\,(A) = 0$, podemos concluir que el sistema no tiene inversa ni solución única, ya que se trata de un sistema linealmente dependiente con soluciones infinitas. Por el contrario, si el determinante es diferente de cero $det\,(A) \neq 0$, el sistema es linealmente independiente y posee una única solución.

La dependencia o independencia lineal se relaciona con la existencia de proporciones entre las filas o columnas de la matriz: si existe una relación proporcional, el sistema es dependiente; si no, es independiente. Este concepto es clave para comprender la estructura y solvencia de sistemas de ecuaciones lineales. Se representa un determinante por $det(A)$ **ó** $|A|$.

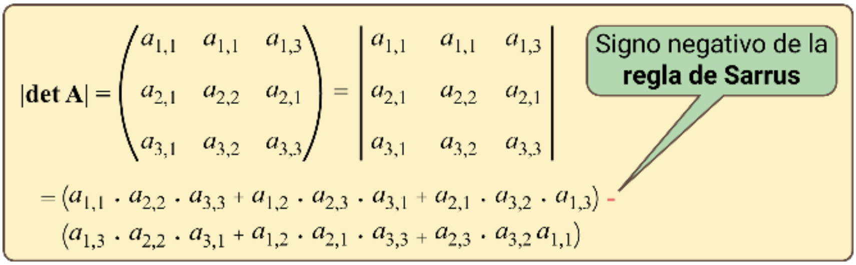
Cálculo de la determinante

Una de las aplicaciones del determinante es en el cálculo de áreas y volúmenes, para calcular el determinante utilizamos la Regla de Sarrus [3], sumando los productos de las diagonales principales y restar los productos de las diagonales secundarias. Sin embargo, esta regla no se aplica directamente a matrices de mayor dimensión.

Recordemos que, al calcular los productos positivos, debemos anteponer el signo negativo si los elementos tienen **sentido negativo**.

Figura 25

Elementos con signo negativo

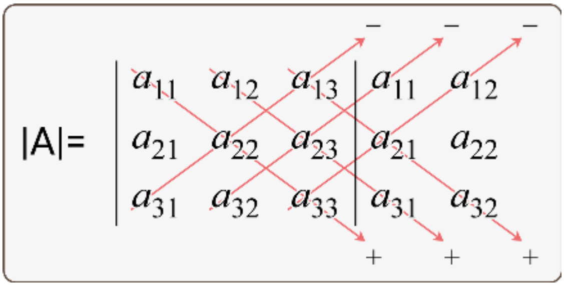


Nota. Adaptado de *Elementos con signo negativo* [Fotografía], por N. Parra, 2022, Sistemas de conocimiento de Álgebra Lineal y su didáctica. (p.66) (URL). CC BY 2.0.

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas o pueden ser las filas:

Figura 26

Otra disposición de los elementos de Sarrus



Nota. Adaptado de *Otra disposición de los elementos de Sarrus* [Fotografía], por N. Parra, 2022, Sistemas de conocimiento de Álgebra Lineal y su didáctica. (p.66) (URL). CC BY 2.0.

$$|A| = (a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,3} + a_{1,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,1} + a_{1,3} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,2}) - (a_{1,3} \cdot a_{2,2} \cdot a_{3,1} + a_{1,1} \cdot a_{2,3} \cdot a_{3,2} + a_{1,2} \cdot a_{2,1} \cdot a_{3,3})$$

A continuación, se calculan los seis productos, anteponiendo el signo menos antes de los productos de las diagonales secundarias, y se reducen términos semejantes, como se describe en la expresión antes mencionada de $|A|$.

Estrategias de la regla de 3×3

- Es posible añadir las dos primeras filas de la matriz 3×3 al final de las filas.
- Se pueden agregar las dos primeras columnas de la matriz 3×3 al final de las columnas.
- De esta manera, se forman las tres diagonales principales y las tres diagonales secundarias. Luego, se multiplican los elementos de cada diagonal y se resta el producto de las diagonales principales del producto de las diagonales secundarias para calcular el valor del determinante.

Ejemplo:

Calcular el determinante por la Regla de Sarrus

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Si seguimos la regla como se explica en la **Figura 26**. Se tieneº

$$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) \\ &\quad - [(-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5)] \\ &= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69 \end{aligned}$$

Nota: Adaptado de *Desarrollo por el método de Sarrus* [Fotografía], por N. Parra, 2022, Sistemas de conocimiento de Álgebra Lineal y su didáctica. (p.86) (URL). CC BY 2.0.

La regla **de Sarrus** no se utiliza para matrices de orden $n >= 3$, para ello se utiliza la regla de expansión o de cofactores o de Laplace.

3.2 Método de menores y cofactores

Definición

Sea una matriz cuadrada. El menor del elemento a_{ij} se denota como M_{ij} y es el determinante de la matriz que resulta después de eliminar el renglón i y la columna j de A.

El **Menor** M_{ij} Sea A una matriz nxn y sea M_{ij} la matriz $(n-1)\times(n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor ij** de A, es una submatriz.

$|M_{ij}|$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ Encuentre el M_{21}, M_{32}

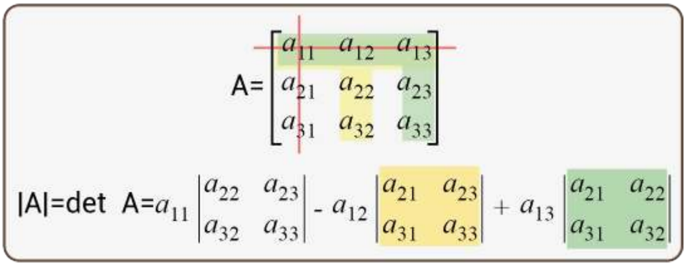
$$M_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

El **cofactor** de a_{ij} se denota por A_{ij} y está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Explicación:



Nota: Parra, N., 2025.

esta regla se llama expansión por cofactores, podemos definir de manera general en matrices $n \times n$ el método de cofactores.

Si A es de 3×3, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

Si A es de 4×4, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$

Si A es $n \times n$ de $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$

Esto es, el A_{ij} cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Se observa que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo:

Calcule el determinante por el método de cofactores

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0(-1) + 2(5) + 1(4) = 14$$

$$= 0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0(-1) - 3(2) + 4(5) = 14$$

Podemos concluir que sea por fila o columna de la matriz aplicando la regla de expansión de cofactores obtenemos el mismo valor del determinante, el determinante es único.

[2] **Parte II del libro virtual Proyecto Descartes en la sección 1,2 y 3** encontrará el tema de determinantes 2x2, 3x3, propiedades, método de cálculo y lo más importante puede interactuar con el recurso al resolver ejercicios de determinantes en línea, en donde se puede observar atractivamente la lógica de cálculo del determinante.

[3] Cameron, T. R. (2019). The determinant from signed volume to the Laplace expansion. *The American Mathematical Monthly, 126*(5), 437–447. https://doi.org/10.1080/00029890.2019.1577669

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con la finalidad de reforzar su aprendizaje, realice las siguientes actividades recomendadas.

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación de conceptos, definiciones, operaciones y propiedades de las matrices en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 3.
2. Practicar con los ejercicios planteados del apartado de determinantes en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la semana 5.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Semana 6

Unidad 3. Determinantes

3.3 Propiedades de los determinantes

El determinante de una matriz triangular superior o inferior es igual producto de sus componentes en la diagonal principal.

Ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 56 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0)$$
$$= 56$$

Nota: Parra, N., 2025.

El determinante del producto es el producto de sus determinantes

$$AB = \det A \ \det B$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 17 & 17 & 20 \\ 24 & 24 & 29 \end{vmatrix} = [(6 \cdot 17 \cdot 29) + (-1 \cdot 17 \cdot 24) + (8 \cdot 20 \cdot 24)]$$
$$-[(17 \cdot 24 \cdot -1) + (20 \cdot 24 \cdot 6) + (8 \cdot 17 \cdot 29)]$$
$$= 2958 - 408 + 3840 - (-408 + 2880 + 3944) = 6798 - 6824 = -26$$

Separadamente, cada determinante calculado por Sarrus

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

Se evidencia que al multiplicar lo resultante, nos da como resultado -26.

1. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta $\det A^t = \det A$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \\ |A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \end{array}\right\} \rightarrow |A| = |A^t|$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -2 \qquad |A^t| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2$$

2. Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces |A|=0.

   Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \frac{=0}{2{\cdot}0{\cdot}8} + \frac{=0}{0{\cdot}6{\cdot}7} + \frac{=0}{1{\cdot}0{\cdot}9}\,\frac{=0}{7{\cdot}0{\cdot}9} - \frac{=0}{2{\cdot}0{\cdot}6} - \frac{=0}{1{\cdot}0{\cdot}8} = 0$$

3. Si el renglón i o la columna j de A se multiplica por un escalar k, entonces el $\det(A)$ se multiplica por k.

   Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7k \\ 2 & 1 & 5k \\ -1 & 3 & 3k \end{vmatrix} = 9k + 42k - 5k - (-7k) - 45k - 6k = (9 + 42 - 5 + 7 - 45 - 6)k = (58 - 56)k = 2k$$

4. El intercambio de los renglones o columnas distintos de A, da como resultado el $\det(A)$ con signo contrario

   Vemos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 21 + 2 - 0 - 9 - 1 = 23 - 10 = 13$$

Intercambiamos las dos primeras filas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9 + 0 - 2 - 21 - 0 = 10 - 23 = -13$$

5. Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces el $\det A = 0$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 63 - 7 - (-7) - 63 - 3 = 3 + 63 - 7 + 7 - 63 - 3 = 0$$

6. Si un renglón o columna de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces el $\det A = 0$

Ejemplo: $|A| = \begin{vmatrix} 30 & 50 & 65 \\ 40 & 50 & 40 \\ 50 & 50 & 15 \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}
&= [(30)(50)(15) + (50)(40)(50) + (65)(40)(50)] - [(50)(50)(65) + (40)(50)(15) + (30)(50)(40)] \\
&= (22500 + 100000 + 130000) - (162500 + 30000 + 60000) \\
&= 252500 - 252500 \\
&= 0
\end{aligned}$$

7. Si se suma un múltiplo escalar a un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Supongamos la siguiente regla $R_3 = k \cdot R_1 + m \cdot R_2$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka + md & kb + me & kc + mf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ md & me & mf \end{vmatrix} = 0 + 0 = 0$$

8. Si en un determinante una (fila o columna) está descompuesto en sumas, podemos descomponer el determinante en suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a+b & c+d & e+f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & c & e \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b & d & f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. Si a una fila le sumamos otra línea proporcional multiplicada por una

   Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7+6+45-9-(-5)-42 = -7+6+45-9+5-42 = 56-58 = -2$$

   Aplicamos la siguiente regla elemental $R \rightarrow R_3 + 3R_1$

$$\det|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & 16 \end{vmatrix} = -16+60+0-0-(-50)-96$$

$$= -16+60+50-96 = 110-112 = -2$$

10. El determinante de la matriz identidad $|I| = 1$

$$\det|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1)(1) = 1$$

11. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su transpuesta $|A| = |A^t|$

    Este contenido fue recopilado de algunos trabajos de (Determinantes, 2022), (Grossman, 2012).

3.4 Matriz adjunta e inversa

La **matriz adjunta** de una matriz cuadrada A se define como la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto. (Matriz de cofactores)

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad \mathrm{Adj}(A)=B^t=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcule la matriz adjunta de A

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Empezamos por calcular el determinante para corroborar que la matriz A es invertible o posee una matriz inversa, siendo el valor del determinante diferente de cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}=(8+6+0)-(0+4+16)=-6$$

$$=-6$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-2, \quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1, \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-4, \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8, \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-10$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4, \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B^t=\mathrm{Adj}\ A=\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -4 \\ 1 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

A través de esta definición podemos calcular **la inversa** de la matriz A de acuerdo con la siguiente definición

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}(A)}{|A|}$$

Como se ha determinado el determinante de A y la Adjunta de A, procedemos a aplicar la definición de la inversa en función de la adjunta.

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & 10 & 2 \end{bmatrix}}{-6} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 1 & 8 & -4 \\ 1 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando la multiplicación de un escalar por una matriz

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Comprobación

Debemos comprobar la definición de $I = AA^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa encontrada está correctamente calculada.

Es necesario *identificar que el valor del determinante de A sea diferente de 0, pues en caso contrario no sería posible la división requerida en él.*

Otro método para calcular el determinante es el **método descubierto por Cramer**[4], sea A una matriz de $\mathbf{n \, x \, n}$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces, la solución única al sistema $Ax = b$ está dada por el mismo que se simplifica en la siguiente fórmula:

$$Ax = b \rightarrow x = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Este método nos sirve para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se debe cumplir que:

- La matriz $Ax = b$ debe ser cuadrada (igual número de ecuaciones e igual número de incógnitas).
- $|A| \neq 0$. Caso contrario, este método no procede.

Para establecer el valor de cada incógnita, se dispone los elementos de la matriz de la forma $Ax = b$, asignando a b en el lugar de cada variable a calcular, por ejemplo, si vamos a encontrar x la columna de b se reemplaza el lugar de x en la matriz, de igual manera, si se va a calcular x y z.

La determinante del denominador se mantiene en todas las permutaciones que **b** posea y pues, depende del número de variables que posea el sistema de ecuaciones lineales en su forma matricial.

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad \text{Forma Matricial de un sistema de ecuaciones lineales}$$

Permutaciones en Cramer

$$|A_x| = \frac{\begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \; |A_y| = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \; |A_z| = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \ldots X_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & p_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & p_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & p_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Establecemos el siguiente problema para solucionarlo pasando del lenguaje natural al lenguaje matemático.

En principio, verificamos si la matriz A posee inversa o es inversible.

Se requiere averiguar el precio unitario para poder venderlos de algunos productos en una tienda de abarrotes, un cierto día llegó el proveedor de Nestlé, dejó **10 frascos de Nescafé**,**8 cartones de La Lechera** y **5 cartones de Natura** y cobró un total de **72 dólares**. A la semana siguiente, dejó 6 **frascos de Nescafé**, 9 **cartones de La Lechera** y 4 **cartones de Natura** y cobró **49,85.** Y una semana después, dejó **5 frascos de Nescafé**,**7 cartones de La Lechera** y **10 cartones de Natura** y cobró un total de 50,25 dólares.

Solución

Se plantea el sistema de ecuaciones deducido del problema, quedando de la siguiente manera.

Datos

X: Costo unitario del cartón de Nescafé

Y: Costo unitario del cartón de la Lechera

Z: Costo unitario del cartón de Natura

Costo total= Costo unitario del cartón de Nescafe+ Costo unitario del cartón de la Lechera+ Costo unitario del cartón de Natura.

Tabla 4
Tabla de datos

	Nescafe	La Lechera	Natura	
Entrega 1	10x	8y	5z	72
Entrega 2	6x	9y	4z	49,85
Entrega 3	5x	7y	10z	50,25

Nota. Parra, N., 2024.

Sistema deducido del problema

$$\begin{aligned} 10x + 8y + 5z &= 72 \\ 6x + 9y + 4z &= 49.85 \\ 5x + 7y + 10z &= 50.25 \end{aligned}$$

Al resolver por la **Regla de Sarrus** el determinante tenemos que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 5 \\ 6 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot 9 \cdot 10 + 8 \cdot 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot 7 - 5 \cdot 9 \cdot 5 - 7 \cdot 4 \cdot 10 - 10 \cdot 6 \cdot 8 = 285$$

$|A| \neq 0$, por tanto, podemos concluir que este sistema es compatible con una solución única. Continuamos para encontrar la solución al sistema por la

Regla de Cramer

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 72 & 8 & 5 \\ 49.85 & 9 & 4 \\ 50.25 & 7 & 10 \end{vmatrix} = \frac{3135}{2} = 1562.5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 10 & 72 & 5 \\ 6 & 49.85 & 4 \\ 5 & 50.25 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1425}{4} = 356.25$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 10 & 8 & 72 \\ 6 & 9 & 49.85 \\ 5 & 7 & 50.25 \end{vmatrix} = 399$$

$$x_1 = \Delta_x / \Delta = \frac{\frac{3135}{2}}{285} = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$x_2 = \Delta_y / \Delta = \frac{\frac{1425}{4}}{285} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$x_3 = \Delta_z / \Delta = \frac{399}{285} = \frac{7}{5} = 1.4$$

Por tanto, por Regla de Cramer la solución es $P(x, y, z) = (5.5, 1.25, 1.4)$.

Interpretación del resultado

X: El costo unitario del cartón de Nescafé es **5.5** dólares.

Y: El costo unitario del cartón de la Lechera es **1.25** dólares.

Z: El costo unitario del cartón de Natura es **1.4** dólares.

3.5 Aplicaciones de determinantes

Podemos tener otra alternativa para calcular la ecuación de la recta en R^2 utilizando la definición del determinante y el sistema de ecuaciones lineales homogéneo, este razonamiento se ha tomado de Morales (2022).

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo, y tiene al menos una solución, la trivial, cuando $a = b = c = 0$, pero sabemos que debe haber infinitas soluciones, ya que una ecuación de la recta puede ser múltiplo de otra, por lo tanto, la matriz de los coeficientes es singular y su determinante es 0 (recuerde que en este caso las incógnitas son a, b y c), por lo tanto, la ecuación de la recta estará dada por

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como la tercera columna no afecta los resultados de las multiplicaciones, algunos autores simplifican la fórmula usando otro “determinante” que excluye esa tercera columna (p.98).

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplos

Use determinantes para calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4,2)$ y $(3,-1)$.

Resolución:

Debemos calcular el determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & -6 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6x + 3y + 4 + 18 - 4y - x = -7x - y + 22 = 0$$

La ecuación quedaría $-7x - y + 22 = 0$

Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(0,-2)$, $P_2(5,3)$ y $P_3(2,-6)$.

Resolución:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \\ 40 & 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 40 & -6 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 1 \\ 40 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 34 & 5 & 3 \\ 40 & 2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)(0-4-30-6+10+0) - x(12-80-204-120+68+24)$$
$$+ y(20+0+68-200-0-8) - (-120-136+0+400-0-24) = 0$$

$$-30(x^2+y^2) + 300x - 120y + 120 = 0$$

$$(x^2+y^2) - 10x + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y - 4 = 0$$

Calcule el wronskiano de las siguientes funciones x^2+x-1, $-x^2+2$, x^3-2yx^3+x-1 (el wronskiano es un determinante formado por las funciones y sus derivadas sucesivas).

Resolución: $w=\begin{vmatrix} x^2+x-1 & -x^2+2 & x^3-2 & x^3+x-1 \\ 2x+1 & -2x & 3x^2 & 3x^2+1 \\ 2 & -2 & 6x & 6x \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$

Restando a la columna 4 la columna 3

$$w=\begin{vmatrix} x^2+x-1 & -x^2+2 & x^3-2 & x+1 \\ 2x+1 & -2x & 3x^2 & 1 \\ 2 & -2 & 6x & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-6\begin{vmatrix} x^2+x-1 & -x^2+2 & x+1 \\ 2x+1 & -2x & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-6[0+2(-x^2+2)-2((2x+1)(x+1)+4x(x+1)-0+2(x^2+x-1))]$$

$$=-6(-2x^2+4-4x^2-6x+2+4x^2+4x+2x^2+2x-2)=-6(4)$$

$$=-24$$

[4] Proyecto Descartes Libro interactivo de la Institución Universitaria Pascual Bravo revisar el capítulo III sección 2.4 encontramos la definición de la Regla de Cramer y un ejercicio resuelto paso a paso de manera animada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de determinantes en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 3.
2. Revisión de **ejercicios resueltos** en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 6.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
4. Con el mismo ánimo le recuerdo valorar su aprendizaje realizando la siguiente autoevaluación, de seguro será positivo. Actividad tomada de Grossman (2022) y Morales (2022)

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante que desarrolle la autoevaluación haciendo una revisión de la literatura como de los ejercicios propuestos, los mismos que muestran con claridad la forma en cómo se resuelven paso a paso.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Recordar que una matriz cuadrada A es invertible sí y solo si determinante de $A \neq 0$
- En algunos ejercicios requerirá tener presentes las propiedades de los determinantes para poder contestar adecuadamente.
- El determinante de una matriz $1x1$ es:
- Si una matriz A tiene una fila de ceros, pues entonces $|A| = 0$

Autoevaluación 3

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. ( ) En una matriz de orden $1 \times_1$, el valor su determinante será el valor correspondiente a $a11$.

2. ( ) Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, el $\det(A) = a11a22 - a12a21$

3. ( ) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, el $\det(A) = \det(A^T)$

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es el resultado de intercambiar filas, entonces $\det(A) = \det(B)$

5. ( ) Si A es una matriz cuadrada que posee una fila nula, el valor del determinante no existe.

6. ( ) El cofactor de 3 en la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es -8

7. ( ) El cofactor A_{ij} de a_{ij} es definido como $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$

8. ( ) Si $\mathbf{A}$ tiene inversa, entonces aplicando determinantes y su adjunta es factible $A^{-1} = \frac{\det(A)}{Adj(A)}$

9. ( ) En un sistema lineal es factible obtener el valor de $\mathrm{x1}$, conociendo el determinante de la matriz de coeficientes (A) y el determinante de la matriz A_1 obtenida de reemplazar la columna de la variable $\mathrm{x1}$ en A por los términos independientes del sistema lineal (b).

10. ( ) Es factible utilizar la regla de Cramer cuando existe solución única del sistema de ecuaciones lineales.

11. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, determine para a_{11} y para a_{32}, sus respetivos menor (M) y cofactor.

12. Obtenga el valor del determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

    aplicando desarrollo de cofactores, obtenga la adjunta y finalmente obtenga la inversa.

13. Resuelva el sistema lineal aplicando la regla de Cramer

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 6 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -20 \end{cases}$$

Ir al solucionario

Ha realizado la tercera autoevaluación ¡Felicitaciones! Sigue adelante y cualquier inquietud que tenga no dude en comentar en la tutoría con el docente.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 7

Actividades finales del bimestre

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Revisar los recursos planteados en esta guía y además del plan académico de la asignatura.

2. Para complementar su estudio sobre matrices y determinantes, le recomiendo explorar otras bibliografías y recursos adicionales. Un excelente complemento es el siguiente video de GeoGebra sobre Determinante of 3x3 Matrices, donde se desarrollan ejercicios aleatorios mostrando paso a paso el cálculo del determinante por la Regla de Sarrus. Este video facilita la comprensión mediante un enfoque visual y guiado. Además, incluye un video explicativo que refuerza el aprendizaje de la Regla de Sarrus. La combinación de práctica interactiva y material audiovisual lo convierte en una herramienta invaluable para dominar este tema.
3. Recuerde que no cumplir la videocolaboración calificada debe realizar la actividad suplementaria.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Ahora, le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de las determinantes en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica Unidad 1 a la 3.
2. Revisión de **ejercicios resueltos** en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 6 y 7.
3. Desarrollar la evaluación presencial del bimestre correspondiente.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2:

Resuelve problemas aplicando los conceptos de espacios vectoriales.

Para alcanzar este resultado de aprendizaje, es fundamental comprender los conceptos clave de los espacios vectoriales y su aplicación en la resolución de problemas prácticos, desarrollando habilidades analíticas y de pensamiento crítico.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

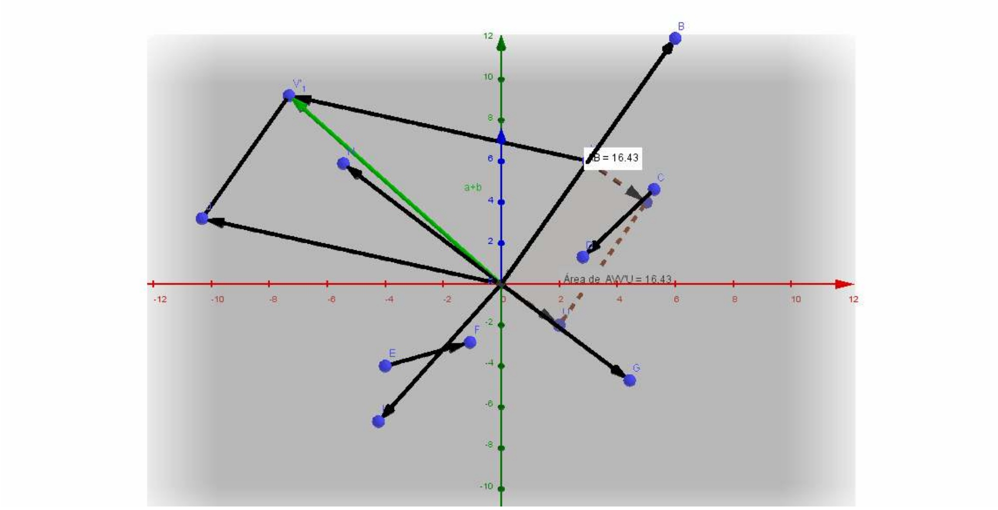
Semana 9

Unidad 4. Vectores

Inicialmente, empezaremos aprendiendo la notación de vectores, diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales, representación gráfica y matemática, se empezará con vectores en el plano $R2$, $R3$, producto escalar, producto cruz o vectorial se estudiará los vectores en el plano, ampliaremos estos conceptos a vectores de cualquier dimensión, especialmente los vectores en el espacio, además de las aplicaciones en la recta, plano, áreas y volúmenes del paralelepípedo.

Figura 27

Vectores en el espacio R^3



Nota. Representación gráfica de vectores en el espacio y vectores libres en Geogebra. Parra, N., 2024.

4.1 Vectores en R^2 y R^3

Un vector es la representación de una magnitud que tiene dirección y sentido. Un vector de R^n es un conjunto ordenado de n números reales, los cuales son llamados componentes. Lo denotaremos de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Por ejemplo, si nos referimos a vectores en R^2 poseen dos coordenadas que se representan de manera matemática como:

$$\vec{v} = (x_1, x_2)$$

Si nos referimos a vectores en R^3 poseerán tres coordenadas que se representan de manera matemática como:

$$\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$$

En matemática, la definición es un poco más general, es simplemente un conjunto ordenado de números, que es la posición que ocupan esos números, se suelen representar con los números entre paréntesis separados por una coma, en algunos casos se suele usar un punto y coma para separarlos.

Figura 28

Componentes de un vector

$$R^2 = \{ (\underbrace{x}_{\text{Primera componente}}, \underbrace{y}_{\text{Segunda componente}}) / \; x \in R \; , \; y \in R \}$$

Nota. Adaptado de *Vectores* [Ilustración], por Zapatero, A, s.f, Slideshare, CC BY 4.0.

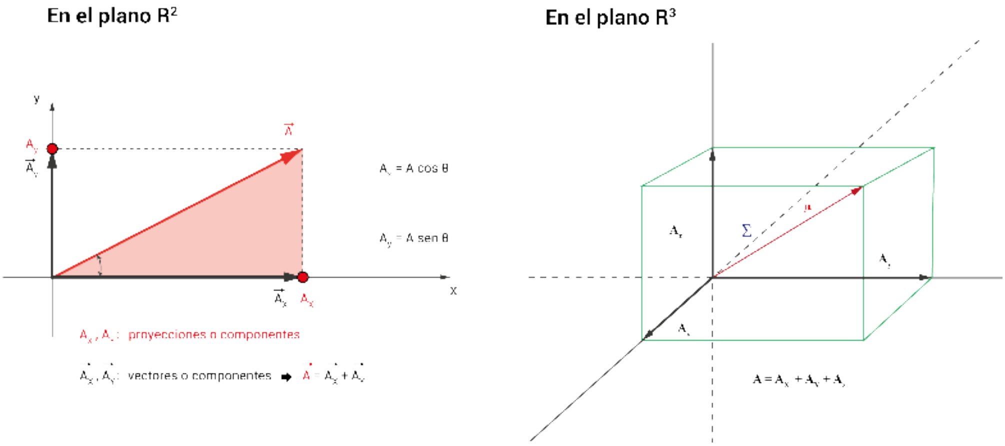
Al número de componentes que lo conforman se denomina *dimensión del vector*, depende de qué espacio vectorial pertenece a R^2 (plano cartesiano) o a R^3 (espacio tridimensional).

Inicialmente, trataremos con vectores de dimensiones 2 y 3 , en el video sobre vectores en 3 dimensiones se muestra las características de un vector en el plano tridimensional, la aplicación de operaciones elementales entre ellos y el análisis del resultado, si se trata de un vector o escalar..

Para representar un vector, necesitamos un sistema de coordenadas que nos permita ubicarnos en el espacio. Este sistema se basa en rectas perpendiculares que se cruzan en un punto común llamado origen. Normalmente, una de estas rectas es horizontal y se denomina eje de las x o abscisas, mientras que la otra es vertical y se conoce como eje de las y u ordenadas. En el espacio tridimensional (R3), añadimos un tercer eje, también perpendicular a los otros dos, llamado eje de las z. Juntos, estos ejes forman el sistema de coordenadas rectangulares, una herramienta fundamental para entender y trabajar con vectores en matemáticas y física. Según Morales (2022)

Figura 29

Representación de vectores en el plano R^2 y R^3



Nota. Adaptado de *Vectores* [Ilustración], por Zapatero, A, s.f, Slideshare, CC BY 4.0.

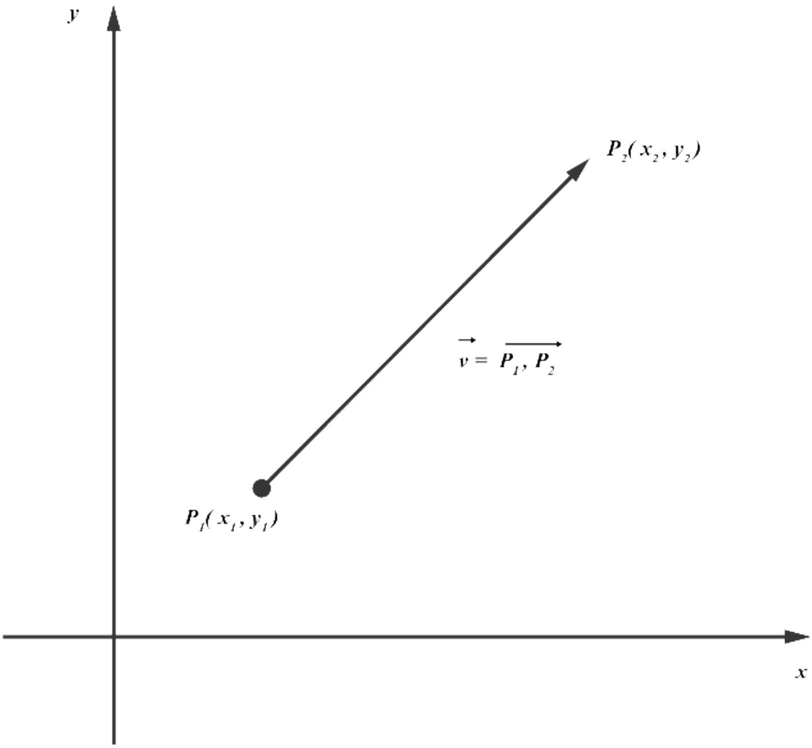
4.2 Cálculo de las coordenadas de un vector a partir de puntos en el plano

Cuando trabajamos en el plano o en cualquier tipo de espacio, es común que conozcamos las coordenadas de ciertos puntos, pero no directamente las de los vectores. Sin embargo, es posible calcular las coordenadas de un vector a partir de dos puntos, considerando el sentido que imaginamos para dicho vector. Sean los puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$. El sentido del vector va desde $\overrightarrow{P_1P_2}$. Se tiene que:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Figura 30

Vector entre dos puntos



Nota. Adaptado de *Vector* (p. 2), por Villena, M., s.f.

4.3 Subtema

Sea $\vec{v} = (x, y)$ un vector de R^2. La magnitud o norma de $\vec{v}$ denotada como $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad ó \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En R^3

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad ó \quad |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La dirección de $\vec{v} = (x, y)$ está definida por la inclinación de la línea de acción del vector, es decir, por el ángulo θ que se lo considera en sentido antihorario como positivo, cuya referencia es el eje de las abscisas. Su cálculo es a través de la siguiente definición matemática.

$\theta = \arctan \frac{y}{x}$

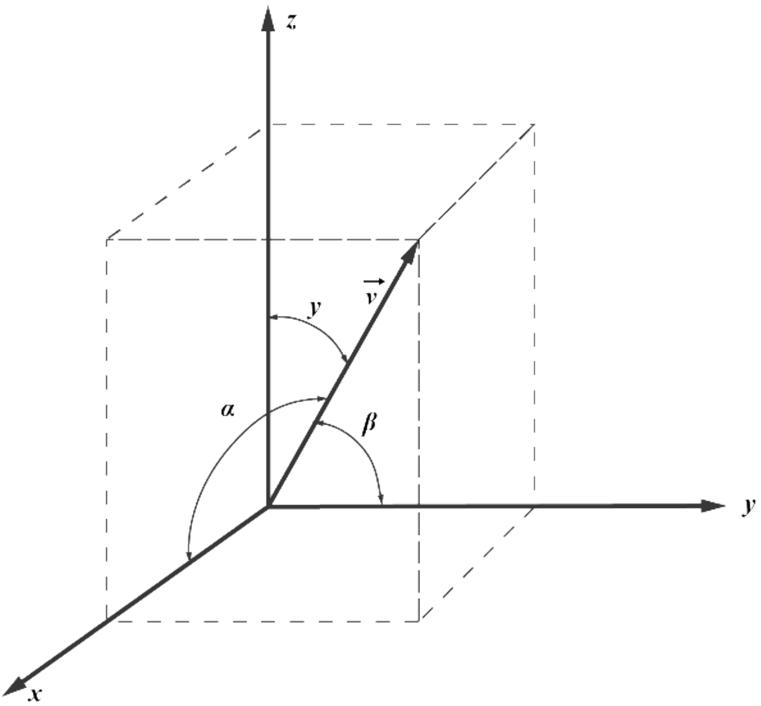
Si el vector se genera entre dos puntos, tendremos otras definiciones tales como:

$\vec{v} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y su tangente o inclinación $\theta = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

En el plano R^3, el cálculo de la dirección de un vector se lo trata a través de la definición de vectores directores, estos se definen por la medida de los ángulos que forman la línea de acción con los ejes x, y y z.

Figura 31

Ángulos directores de un vector en R^3



Nota. Adaptado de *Vector* (p. 3), por Villena, M., s.f

Para calcular la dirección de un vector en R^3 nos apoyamos en la definición de vector unitario.

$$\cos\alpha = \frac{x}{\|\vec{v}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\|\vec{v}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

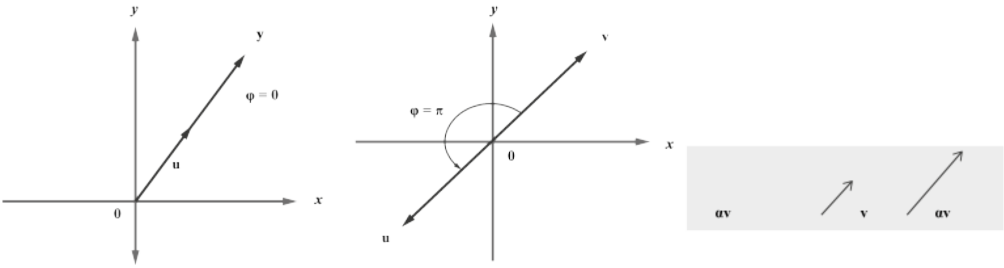
$$\cos\gamma = \frac{z}{\|\vec{v}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

En el caso del **sentido del vector,** se representa por la cabeza de flecha que hace que se diferencie de un segmento no dirigido y se nombra su sentido de acuerdo con los puntos cardinales, esto es más notorio en el área de la física.

Si se trata de analizar las posiciones relativas de dos vectores diferentes de cero u y v, **en el caso de que** sean **paralelos,** el ángulo entre ellos es **cero**. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

Figura 32

Vectores paralelos



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 248), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

Se suele definir una operación llamada **suma entre vectores**, usualmente como la suma de sus respectivas componentes, es decir, el vector suma de dos vectores (de la misma dimensión) es otro vector (de esa dimensión) de la siguiente manera:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x)\mathbf{i} + (u_y + v_y)\mathbf{j}$$

La resta entre vectores es la operación contraria a la suma y eso se nota en el signo negativo, donde el vector sustraendo cambia de sentido.

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_x - v_x)\mathbf{i} + (u_y - v_y)\mathbf{j}$$

Ejemplo:

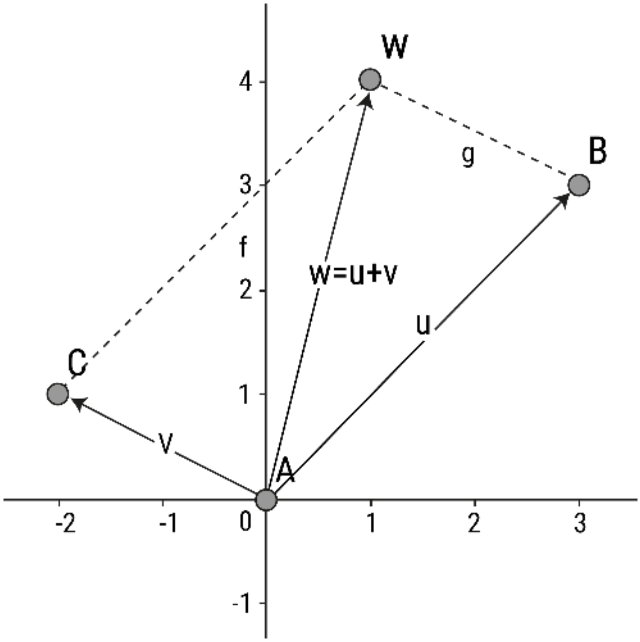
$\vec{u} = (2, 3, 4) + \vec{v} = (5, 7, 3) = \vec{w}(7, 10, 7)$ pertenece al espacio tridimensional R^3.

Enfoque geométrico

La gráfica de la suma de vectores por el método del paralelogramo en el que los vectores nacen desde el origen de los dos vectores, de acuerdo con su magnitud, dirección y sentido se construye el paralelogramo, con sus proyecciones y en la intersección de estas recae el punto final del **vector suma o vector resultante** R.

Figura 33

Representación gráfica de la suma de vectores



Nota. Elaboración de la representación gráfica en Geogebra. Parra, N., 2024.

Otra operación usual es el **producto de un vector por un escalar**, que se define como otro vector en el que cada componente es el producto del escalar por cada componente del vector original, $\vec{u} = k\vec{v}$. **Ejemplo**: 3*(2, 3, 4) = (6,9,12).

Morales (2022) Un escalar es un elemento de un conjunto llamado cuerpo, que debe cumplir propiedades como la asociatividad, conmutatividad, y la existencia de elementos neutros e inversos para suma y multiplicación. Además, la multiplicación debe ser distributiva respecto a la suma. Estas propiedades permiten operaciones algebraicas coherentes (Morales, 2022).

A veces se habla de vector, fila o columna como matrices cuya dimensión es 1, surge entonces la pregunta: ¿Un vector es una matriz?

Se podría decir que, si hay diferencias, con los vectores, porque hay operaciones de vectores que no se hacen con matrices, por ejemplo, el producto punto, producto cruz, hallamos la norma, encontramos vectores unitarios, etc., que se tratará más adelante.

Cuando los vectores, junto con las operaciones de suma y producto por un escalar, satisfacen ciertas propiedades, constituyen lo que se conoce como un espacio vectorial $V(+,.)$. (p.78)

Vector unitario

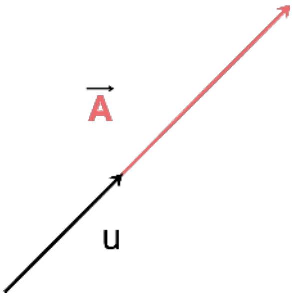
Es aquel vector que tiene una longitud de 1

$$U_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$$U_{\vec{u}} = \frac{\vec{v}}{\|\sqrt{x^2+y^2}\|}$$

Figura 34

Representación gráfica del vector unitario



Nota. Representación gráfica del vector unitario en Geogebra. Parra, N., 2024.

La característica de este vector es que es paralelo al vector principal, y se generan tanto en R^2, R^3 y R^n, nos ayuda a identificar la dirección y sentido del vector principal. En la siguiente herramienta de Geogebra, Vector unitario, se muestra cómo se genera un vector unitario a partir de un vector dado, el estudiante puede interactuar con esta actividad para comprender el concepto y utilidad de un vector unitario.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para reforzar sus conocimientos, realice las siguientes actividades recomendadas.

1. Lectura comprensiva, análisis, interpretación y aplicación de los conceptos y propiedades de los vectores en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 4.
2. Revisión de **ejercicios resueltos** en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 9.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Semana 10

Unidad 4. Vectores

4.4 Producto punto entre vectores

Hasta ahora hemos sumado dos vectores y multiplicado un vector por un escalar, de allí que surge la pregunta ¿es posible multiplicar dos vectores y su resultado ser útil? Tal producto, es el producto escalar que nos ayuda a calcular el Ángulo entre dos vectores, este video, nos muestra la deducción matemática del cálculo del ángulo entre dos vectores a partir de la Ley de Cosenos, dicha deducción recae en la aplicación del producto escalar, también muy importante la utilidad en vectores ortogonales para demostrar la posición relativa de los mismos.

Como el producto escalar hereda las propiedades de los números reales, por tanto, cumple algunas propiedades del producto punto, las cuales nos permiten realizar la aplicación de esta operación en cualquier área de la ciencia, específicamente, podemos decir en la enseñanza de la física, inteligencia artificial, robótica, ciencia de datos, etc.

En el video propuesto se explica el cálculo del producto escalar, por tanto, el producto punto, también conocido como **producto escalar**, es una operación que se realiza entre dos vectores del mismo espacio, es igual a la sumatoria entre el producto de las respectivas componentes, siendo u y v.

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

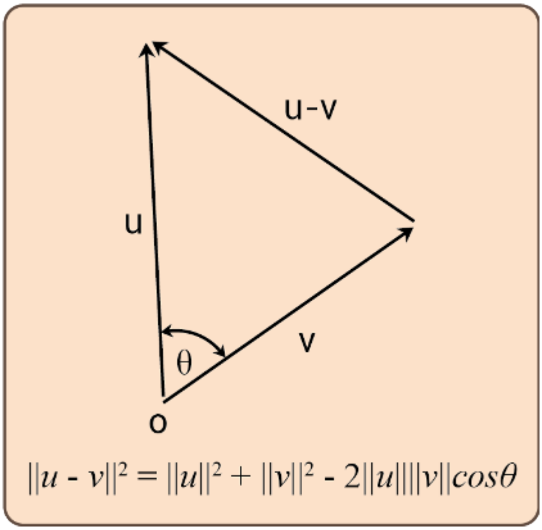
$$\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \square u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n \quad (1)$$

Si aplicamos la ley de los cosenos a la diferencia entre dos vectores obtendríamos

Figura 35

Regla de cosenos



Nota. Adaptado de *Regla de Cosenos* [Ilustración], por Walter Mora, 2018, Researchgate, CC BY 4.0.

Aplicamos las propiedades del producto escalar

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

$$-2\vec{u} \cdot \vec{v} = -2|\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

Simplificamos la ecuación y tenemos que el producto escalar en función del ángulo entre los dos vectores es

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta$$

Para calcular el valor del ángulo comprendido entre los vectores, tenemos despejando

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Podemos deducir de ello que dos vectores que no sean nulos son ortogonales si su producto escalar es 0.

Ejemplos:

Encontrar el producto escalar entre los siguientes vectores

Sean $\vec{v} = (8, -2, 1, 5)$ y $\vec{u} = (3, 5, 0, -5)$ estos vectores pertenecen a R^4. La definición matemática es la misma para cualquier vector en cualquier plano.

Resolución:

$$(8)(3) + (-2)(5) + (1)(0) + (5)(-5) = 24 - 10 + 1 - 25 = -10$$

Sean $\vec{v} = (0, -3, 2, 5, 1)$ y $\vec{u} = (6, -2, 1, 2, -5)$ calcular $4\vec{v} \cdot \vec{u}$

Resolución

$$4(0, -3, 2, 5, 1). (6, -2, 1, 2, -5) = (0, -12, 8, 20, 4). (6, -2, 1, 2, -5)$$

$$= 0 + 24 + 8 + 40 - 20$$

$$= 52$$

Calcular la norma del vector

$$|v|^2 = a^2 + b^2$$

$$v \cdot v = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |v|^2$$

Sea $\vec{v} = (1, 2, 3, -5)$ este vector pertenece a R^4

Solución

$$v \cdot v = (a, b) \cdot (a, b) = a \cdot a + b \cdot b = a^2 + b^2 = |v|^2$$

$$\vec{v} = (1, 2, 3, -5) \cdot (1, 2, 3, -5)$$

$|v|^2 = (1)(1) + (2)(2) + (3)(3) + (-5)(-5)$

El vector tiene una medida de $\vec{v} = \sqrt{39}u$

¿Para qué valor de x, el vector $(4, 2, \mathrm{x})$ tiene norma 5?

Resolución:

$v \cdot v = (4, 2, x) \cdot (4, 2, x) = (4)(4) + (2)(2) + (x)(x) = 20 + x^2 = |v|^2$

$|v|^2 = 20 + x^2$

$5^2 = 20 + x^2$

$25 = 20 + x^2$

$x^2 = 5$

$x = \sqrt{5}$

Verificar que el vector dado es unitario

Sea $\vec{v} = \frac{(2,-2,-1,1)}{\sqrt{10}}$

Solución

$$v \cdot v = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\vec{v} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2}$$

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$$

$\vec{v} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1$ el vector es unitario

Determinar un vector $\vec{v}$ de sentido opuesto al vector $\vec{u} = (2, 3)$, cuya norma sea igual a 2

Resolución:

El vector opuesto de $\vec{u}$ sería $-\vec{u} = (3, 5)$, pero este tiene norma de $|| - \vec{u}|| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$, para que la norma de $\vec{v}$ sea 2 hay que dividir a $-\vec{u}$ para $\sqrt{34}$ (se transforma en un vector unitario) y luego multiplicarlo por 2, entonces $\vec{v} = 2\vec{u} = \left(-\frac{6}{\sqrt{34}}, -\frac{10}{\sqrt{34}}\right)$.

Calcular la distancia entre p_1 y p_2; $p_1 = (0, 3, -1, 1)$, $p_2 = (2, 1, 1, 2)$

Solución

$$\overrightarrow{p_2 p_1} = \overrightarrow{0p_2} - \overrightarrow{0p_1} = (2, 1, 1, 2) - (0, 3, -1, 1) = (2, -2, 0, 1)$$

$$\vec{v} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2 + 1^2}$$

$$\vec{v} = \sqrt{9}$$

$$\vec{v} = 3$$

Sean $\vec{v} = (1, -3, 1, 0)$ y $\vec{u} = (5, -3, 1, 0)$, calcular el ángulo entre los vectores

Solución

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \cos^{-1} \frac{(5+9+1+0)}{\sqrt{1+9+1}\sqrt{25+9+1+0}}$$
$$= \cos^{-1} \frac{15}{\sqrt{11}\sqrt{35}} = \cos^{-1} \frac{15}{\sqrt{385}} = \cos^{-1}(0.7240) = 40.140°$$

(Se toma el ángulo menor de las posibles respuestas, en el primero o segundo cuadrante)

Obtener el producto punto entre los siguientes pares de vectores e indicar si son ortogonales.

Sea $\vec{u} = (-2, 2)$ y $\vec{v} = (3, 3)$

Solución

$\vec{u}.\vec{v} = (4,2,0).(-1,2,-3) = -4+4+0 = 0$ son ortogonales

Sea $\vec{u} = (2,-1,-2,5)$ y $\vec{v} = (-1,3,2,-2,1)$

Solución:

$\vec{u}.\vec{v} = (2,-1,-2,4,5).(-1,3,2,-2,1) = -2-3-4-8+5 = -12$ no es igual a cero.

No son ortogonales

Calcule el ángulo entre los siguientes vectores e indique si son ortogonales, paralelos u otros.

$\vec{u} = (4,6)$ y $\vec{v} = (3,-2)$

Solución

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \cos^{-1}\frac{(12-12)}{\sqrt{16+36}\sqrt{9+4}} = \cos^{-1}(0) = 90°$$

Son vectores ortogonales

$\vec{u} = (-1,2,3)$ y $\vec{v} = (-5,10,15)$

Resolución:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \cos^{-1}\frac{(5+20+45)}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{25+100+225}} = \cos^{-1}\frac{70}{\sqrt{14}\sqrt{350}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{70}{\sqrt{4900}} = \cos^{-1}(70/70) = \cos^{-1}(1) = 0°$$

Son vectores paralelos

$\vec{u} = (2,-1,3,5)$ y $\vec{v} = (-4,2,6,-10)$

Resolución:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \cos^{-1}\frac{(-8-2-18-50)}{\sqrt{4+1+9+25}\sqrt{16+4+36+100}} = \cos^{-1}\frac{-78}{\sqrt{39}\sqrt{156}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{-78}{\sqrt{6084}} = \cos^{-1}(-78/78) = \cos^{-1}(-1) = 180°$$

Son vectores opuestos (antiparalelos)

$\vec{u} = (3, -4, 5, -1, 0)$ y $\vec{v} = (2, -1, -1, 1, 1)$

Resolución:

$$\theta = \cos^{-1}\frac{(\vec{u},\vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \cos^{-1}\frac{(6+4-5-1+0)}{\sqrt{9+16+25+1+0}\sqrt{4+1+1+1+1}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{51}\sqrt{8}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{408}} = \cos^{-1}(0.198) = 78.6°$$

No es paralelo, antiparalelo ni perpendicular

4.5 Proyección de un vector sobre otro

La proyección de ese vector en la dirección del otro, en nuestro caso, llamaremos proyección de u en la dirección de v, simbolizándola $\text{Proy}_v u$.

a. v y $\text{Proy}_v u$ tienen la misma dirección si $u \cdot v > 0$.
b. v y $\text{Proy}_v u$ tienen direcciones opuestas si $u \cdot v < 0$.

Para encontrar la norma de esa proyección, multiplicamos la norma de $\vec{v}$ por el cos θ. Luego, para transformarla en un vector, la multiplicamos por el vector unitario de $\vec{v}$ $\text{Proy}_v u = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}||\vec{u}||\hat{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$

Como la suma de la parte paralela y la parte ortogonal de $\vec{u}$ dan como resultado $\vec{u}$ es fácil deducir que la parte ortogonal se calcula con $u - \text{Proy}_v u$ es ortogonal a v.

Ejercicio

Encontrar la proyección de $\text{Proy}_{\ v}u$ de $\vec{u} = (3, -8)$ y $\vec{v} = (-5, 1)$.

Solución

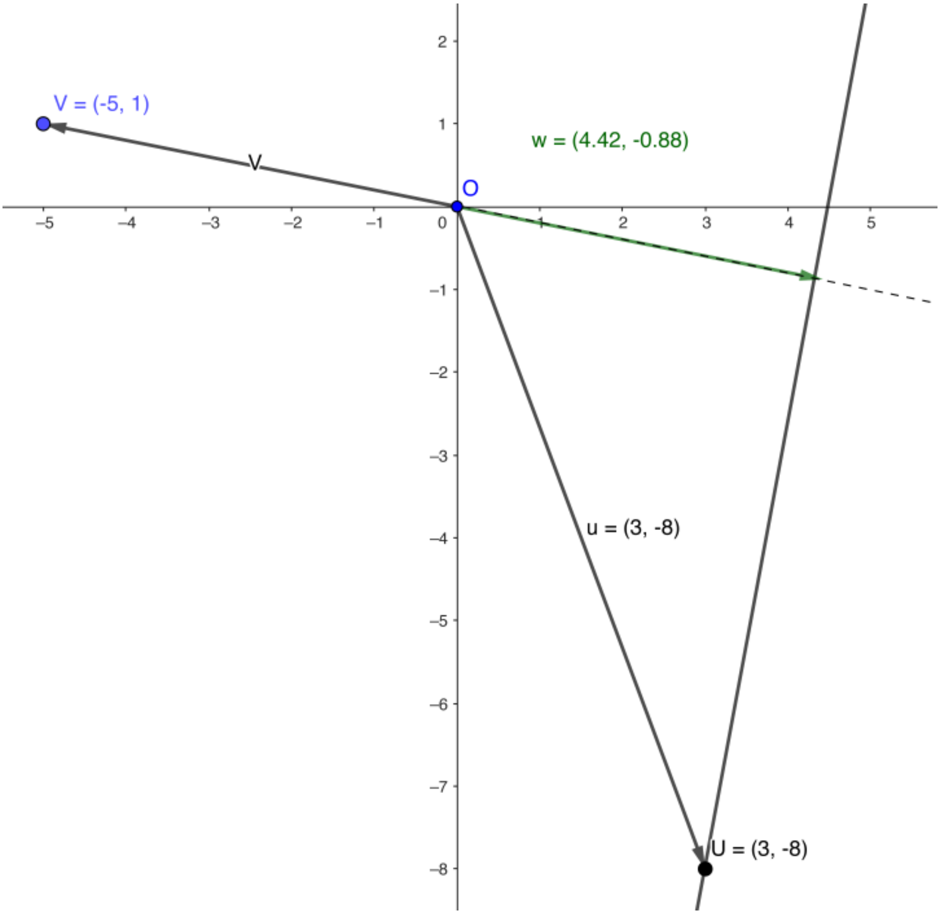
Parte paralela

$$\text{Proy}_v u = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \frac{(3)(-5)+(-8)(1)}{\sqrt{(-5)^2+1^2}}(-5, 1) = \frac{-15-8}{26} = \frac{-23}{26}(-5, 1)$$

$$= \left(\frac{115}{26}, \frac{-23}{26}\right) = (4.42, -0.88)$$

Figura 36

Gráfica de la proyección de un vector sobre otro



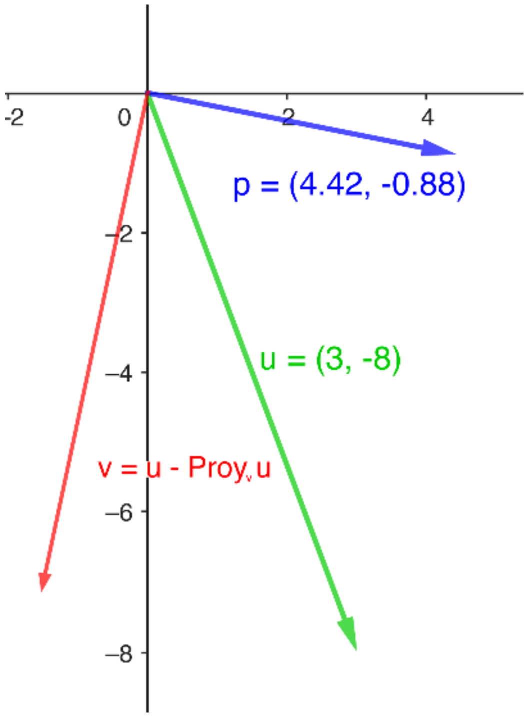
Nota. Parra, N., 2025

Parte ortogonal

$$\vec{u} - \text{Proy}_v u = (3, -8) - \left(\frac{115}{26}, \frac{-23}{26}\right) = \left(\frac{-37}{26}, \frac{-185}{26}\right)$$

Figura 37

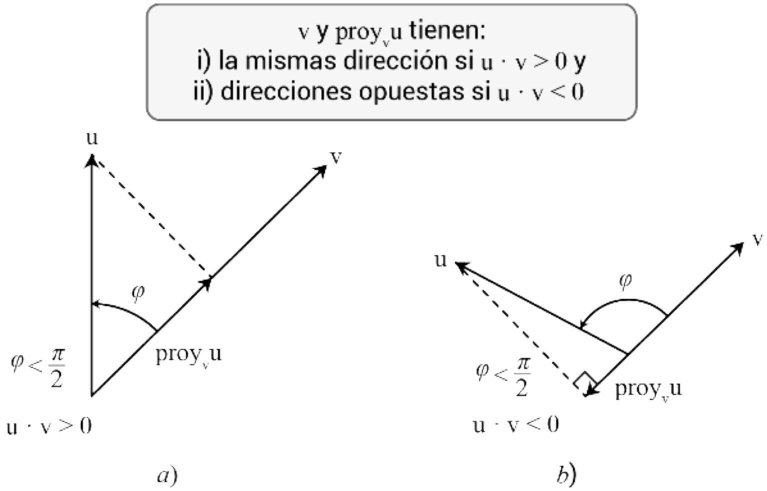
Parte ortogonal



Nota. Parra, N., 2025

Figura 38

Proyecciones de un vector sobre otro



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 251), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

En el presente video de [proyección de un vector](#) en la dirección del otro se muestra la proyección de un vector de manera gráfica y el cálculo de coordenadas del vector proyección resultante, llamaremos proyección de $\boldsymbol{u}$ en la dirección de $\boldsymbol{v}$, simbolizándola $\mathbf{Proy}\ _{v}\boldsymbol{u}$.

Para encontrar la norma de esa proyección, multiplicamos la norma de $\vec{u}$ por el cos $\boldsymbol{\theta}$. Luego, para transformarla en un vector la multiplicamos por el vector unitario de $\vec{v}$.

$$\mathbf{Proy}_{v}\boldsymbol{u} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}||\vec{u}||\hat{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$

Como la suma de la parte paralela y la parte ortogonal de $\vec{u}$ dan como resultado $\vec{u}$ es fácil deducir que la parte ortogonal se calcula con $\boldsymbol{u} - \mathbf{Proy}\ _{v}\boldsymbol{u}$ u es ortogonal a $\boldsymbol{v}$.

Ejercicio

Encontrar la proyección de $\mathbf{Proy}\ _{v}\boldsymbol{u}$ de $\vec{u} = (3, -6), \vec{v} = (-5, 1)$

Solución

Parte paralela

$$\text{Proy}_v u = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v} = \frac{(3)(-5)+(-6)(1)}{(\sqrt{-5^2+1^2})}(-5,1)$$

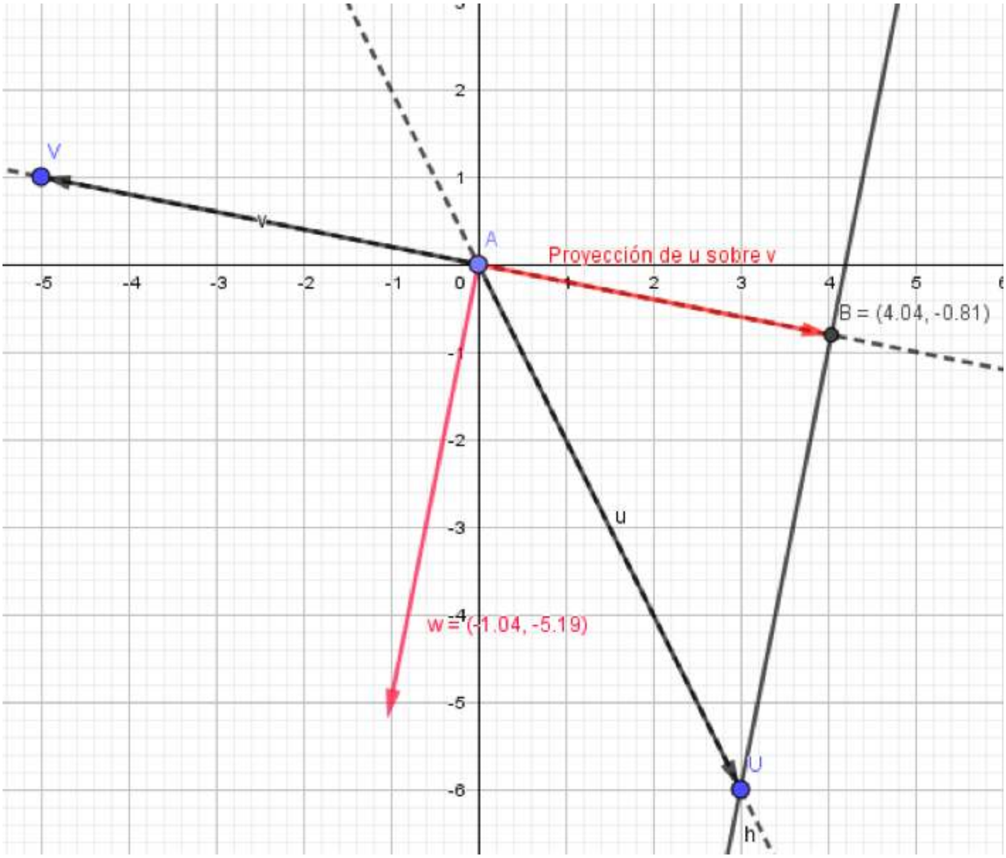
$$= \frac{-15-6}{26} = \frac{-21}{26}(-5,1) = \left(\frac{105}{26}, \frac{-21}{26}\right)$$

Parte ortogonal

$$\vec{u} - \text{Proy}_v u = (3,-6) - \left(\frac{105}{26}, \frac{-21}{26}\right) = \left(\frac{-27}{26}, \frac{-135}{26}\right)$$

Figura 39

Representación gráfica del ejercicio resuelto



Nota. Gráfica de proyección de vectores realizada en Geogebra 5.0. Parra, N., 2024.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación.

- Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de las determinantes en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 4.
- Revisión de **ejercicios resueltos** en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 10.
- Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 11

Unidad 4. Vectores

4.6 Producto cruz en R^3

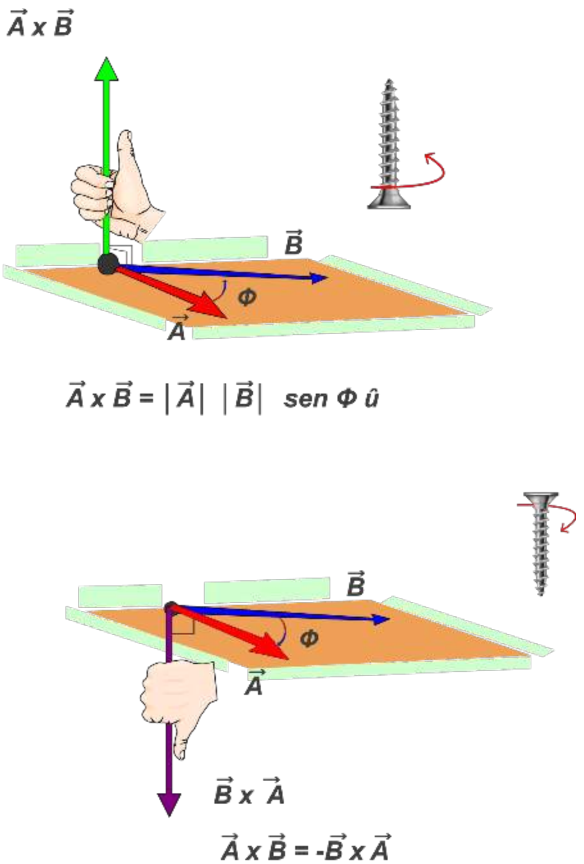
La operación llamada *producto vectorial* se desarrolla solamente en R^3 (porque el resultado es otro vector en R^3) o producto cruz para diferenciarla del producto punto o escalar.

El producto vectorial, también conocido como producto cruz, es una operación entre dos vectores en un espacio tridimensional que da como resultado un tercer vector perpendicular a ambos vectores originales. La magnitud del vector resultante es igual al producto de las magnitudes (normas) de los vectores originales multiplicado por el seno del ángulo que forman entre ellos.

La dirección del vector resultante se determina mediante la regla de la mano derecha: si el dedo índice apunta en la dirección del primer vector y el dedo medio en la dirección del segundo vector, el pulgar señala la dirección del vector resultante. Esta dirección se invierte si se cambia el orden de los vectores en la operación, lo que significa que el producto vectorial es anticonmutativo. Morales, (2022)

Figura 40

Sentido del producto vectorial



Nota. Sentido del producto cruz con la regla de la mano derecha. Parra, N., 2024.

Este artículo sobre el producto vectorial o producto cruz nos ayuda a comprender qué es el producto vectorial y cómo se determina la dirección del vector resultante utilizando la regla de la mano derecha. Además, explica la utilidad de esta operación y proporciona algunos ejemplos prácticos. Cabe destacar que, al realizar el **producto vectorial entre dos vectores que tienen la misma dirección, el resultado es cero**.

El **producto vectorial de Gibbs o producto cruz** es una operación binaria entre dos vectores en R^3. El resultado es un vector perpendicular a los vectores que se multiplican, y, por lo tanto, el vector resultante es la normal al plano que los contiene cuyo $u \times v = \| u \| \| v \| \, sen\theta$, siendo $u \times v$ un vector perpendicular a u y v según la regla de la mano derecha y el ángulo entre los vectores.

Para calcular el producto cruz utilizamos la definición del "determinante". La primera fila del determinante son los vectores unitarios i, j y k, la segunda fila son las componentes del primer vector, y la tercera fila son los componentes del segundo vector. Se puede calcular el vector resultante por **Sarrus** o por la **Regla de expansión de cofactores** que es la propuesta en la siguiente definición:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \check{\mathbf{i}} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \check{\mathbf{j}} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \check{\mathbf{k}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (b_1 c_2 - c_1 b_2)\check{\mathbf{i}} - (a_1 c_2 - c_1 a_2)\check{\mathbf{j}} + (a_1 b_2 - b_1 a_2)\check{\mathbf{k}}$$

La determinante es utilizada en ciencia, tecnología y matemáticas, en este curso veremos qué se puede aplicar, por ejemplo, para calcular el área de un triángulo y de un paralelogramo, el volumen de un paralelepípedo, la ecuación de una recta en R^2, de un plano en R^3, de una recta en , etc

Ejercicios

1. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 1, -2)$ y $\vec{v} = (4, 2, 0)$.

   a. Encontrar el vector $u \times v$
   b. Probar que $u \times v$ y u son ortogonales
   c. Probar que $u \times v$ y v son ortogonales

Resolución

a.
$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0\check{i} - 8\check{j} + 2\check{k} - (4\check{k} + 0\check{j} - 4\check{k}) = 4\check{i} - 8\check{j} - 2\check{k}$$

b. $(4, -8, -2) \cdot (1, 1, -2) = 4 - 8 + 4 = -8$, $\rightarrow$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$ son ortogonales

c. $(4, -8, -2) \cdot (4, 2, 0) = 16 - 16 + 0 = 0$, $\rightarrow$ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales

2. En cada una de las parejas de vectores anteriores, encuentre, si es posible, un vector ortogonal a ambos de magnitud 5.

Resolución:

a.
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (9\check{\mathbf{i}}, 3\check{\mathbf{j}}, 2\check{\mathbf{k}})$$

$$\mathbf{w} = 5\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{||\mathbf{u}\times\mathbf{v}||} = 5\frac{(9,3,2)}{\sqrt{81+9+4}} = \frac{(45,15,10)}{\sqrt{94}} = \left(\frac{45}{\sqrt{94}}, \frac{15}{\sqrt{94}}, \frac{10}{\sqrt{94}}\right)$$

3. Calcule el área del triángulo formado por los puntos $P_1 = (2\mathbf{i}, 5\mathbf{j}), P_2 = (2\mathbf{i}, -2\mathbf{j})$ y $P_3 = (-1, 1)$.

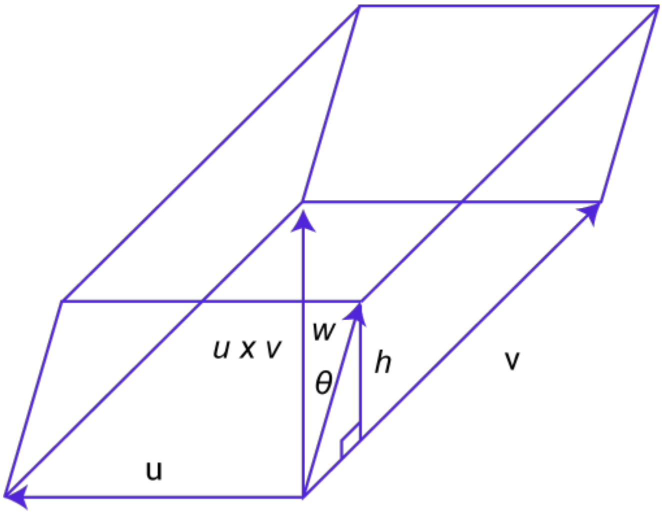
Resolución

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}|-4-5+2-2-10-2| = \frac{1}{2}|-21| = 10.5u^2$$

4. Hallar el volumen de un paralelepípedo sustentado por tres vectores

Figura 41

Área del paralelepípedo por el producto vectorial



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 273), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

$$h = \text{componente de } w \text{ en la dirección } u \times v = \frac{|w\cdot(u\times v)|}{||u\times v||}$$

Entonces

$$\text{Volumen del paralelepípedo} = \text{área de la base} \times \text{altura}$$

$$|u \times v| \left[\frac{|w\cdot(u\times v)|}{|u\times v|}\right] = |w \cdot (u \times v)|$$

Es decir, $= |(u \times v).\, w|$

Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por tres vectores por $P_1 = (1,1,2), P_2 = (0,5,1)$ y $P_3 = (-2,1,3)$.

Resolución:

$$\text{Volumen} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = |15 - 2 + 0 + 20 + 0 - 1| = |33| = 33u^3$$

5. Calcule el volumen del tetraedro que tiene como vértices a los puntos $P_1 = (3,4,1), P_2 = (1,1,-2), P_3 = (4,2,-2)$ y $P_4 = (-1,2,1)$.

Resolución:

Tomando la cuarta columna para calcular el determinante

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{6}|-(2+2-16-4-4+4)+(6+8+8+2-16+12)-(3+8+2+1-4+12)$$
$$+(-6-32+2-4+8+12)|$$

$$= \frac{1}{6}|(-16)+(20)-(22)+(-20)|$$

$$= \frac{1}{6}|16+20-22-20| = \frac{1}{6}|-6| = \frac{1}{6}(6) = 1$$

6. Sean $P_1 = (1,-1,0), P_2 = (2,3,1)$ y $P_3 = (-1,0,3)$ los vértices del triángulo, determinar sus ángulos interiores y perímetro.

Solución:

$$\underline{P_1P_2} = (1,4,1); \underline{P_2P_3} = (-3,-3,2); \underline{P_3P_1} = (2,-1,-3)$$

$$||\underline{P_1P_2}|| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$

$$||\underline{P_2P_3}|| = \sqrt{9+9+4} = \sqrt{22}$$

$$||\underline{P_3P_1}|| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\text{Perímetro} = \sqrt{18}+\sqrt{22}+\sqrt{14} = 12.67u$$

$$\cos\theta_1 = \frac{(1,4,1)\cdot(-3,-3,2)}{\sqrt{18}\sqrt{22}} = \frac{-3-12+2}{\sqrt{396}} = -\frac{13}{\sqrt{396}} = -0,6533 \to \theta_1 = 130.79°$$

$$\cos\theta_2 = \frac{(-3,-3,2)\cdot(2,-1,-3)}{\sqrt{22}\sqrt{14}} = \frac{-6+3-6}{\sqrt{308}} = \frac{-9}{\sqrt{308}} = -0,5128 \to \theta_2 = 120.85°$$

$$\cos\theta_3 = \frac{(1,4,1)\cdot(2,-1,-3)}{\sqrt{18}\sqrt{14}} = \frac{2-4-3}{\sqrt{252}} = \frac{-5}{\sqrt{252}} = -0,3150 \rightarrow \theta_3 = 108.36^\circ$$

4.7 Rectas y planos

Se puede trazar una recta conociendo dos puntos de ella, o bien un punto y la pendiente sobre ella. Pero R^3, si se conoce un punto y la dirección de la recta es posible encontrar su ecuación.

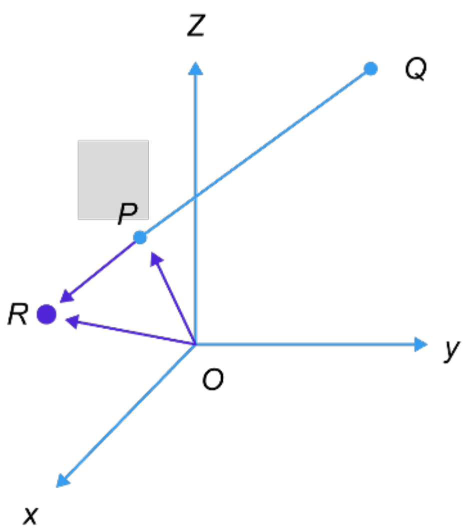
Si se tienen dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre la recta L. Un vector paralelo a la recta L, entonces $\overrightarrow{PQ}$ lo calculamos de los puntos conocidos, por tanto, las coordenadas del vector se definen de la siguiente manera:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

Este vector es paralelo a la recta L. Ahora, si tomamos un tercer punto $R = (x, y, z)$ sobre la recta, se puede notar que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a que es el $\vec{v}$.

Figura 42

Recta en el espacio



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal* (p. 279), por Grossman et al., 2012, McGrawHill.

$\overrightarrow{PR} = tv$

t es un escalar un número real que está contenido t veces en esa recta infinita. Si en la gráfica despejamos a que es igual $\overrightarrow{OR}$.

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$$

Al deducir esta ecuación, reemplazamos el valor de $\overrightarrow{PR}$ resultando lo siguiente

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\mathbf{v}$$

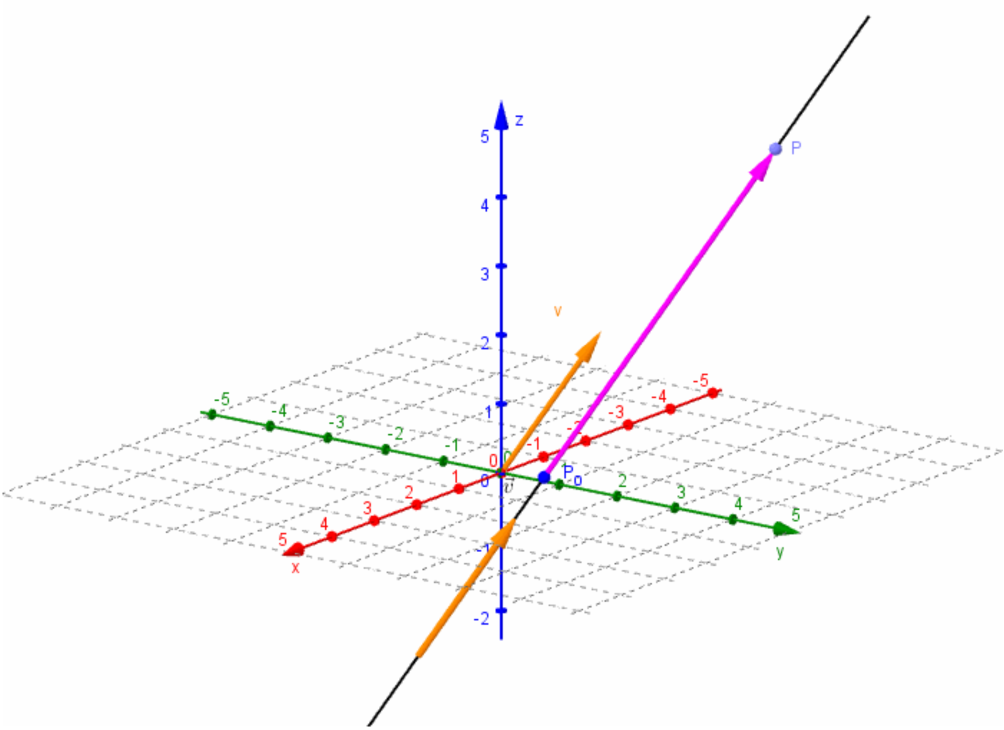
Siendo esta expresión la ecuación vectorial de la recta, de donde se derivan las siguientes ecuaciones:

$$xi + yj + zk = x_1 i + y_1 j + z_1 k + t(x_2 - x_1)i + t(y_2 - y_1)j + t(z_2 - z_1)k$$

Ecuación vectorial de la recta en función de sus coordenadas.

Figura 43

Recta en R^3 realizada en Geogebra



Nota. Recta graficada en el espacio R3 realizada en Geogebra. Parra, N., 2024.

De aquí se deducen las **ecuaciones paramétricas**

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Y de estas las **ecuaciones simétricas o cartesianas**

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \text{ con } a, b \text{ y } c \neq 0$$

Cualquier punto de la recta (x, y, z) será la suma de dos vectores: el punto inicial, de coordenadas (x_0, y_0, z_0) sumado al vector que da la dirección (a, b, c) multiplicado por una constante cualquiera t a la que llamaremos parámetro. En el video sobre la recta en el espacio, se explica la deducción de la ecuación vectorial de la recta, las ecuaciones paramétricas y finalmente las ecuaciones simétricas, permitiendo diferenciar los elementos necesarios para cada tipo de estas formas de ecuaciones de recta en el espacio.

Ejercicio

Determine las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por $A = (1, 2, 3)$ y $B = (2, 3, 1)$.

Resolución:

Determinamos el vector que da dirección a la recta restando las coordenadas de los puntos (en cualquier orden)

$\vec{v} = (2, 3, 1) - (1, 2, 3) = (1, 1, -2)$

Tomamos uno de los dos puntos (cualquiera)

$(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, -2)$ Ecuación vectorial de la recta

La ecuación en forma paramétrica quedaría

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Y en la forma simétrica

$x - 1 = y - 2 = \frac{3-z}{2}$

4.8 Plano en el espacio

En el siguiente video se explica el origen de la deducción de la ecuación de un plano en su forma vectorial, paramétricas e implícitas teniendo presentes algunas definiciones como determinante, regla de expansión de cofactores. Para encontrar la ecuación del plano en el espacio se requiere un vector normal. Sea $P=(x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $n=ai+bj+ck$. Si $Q=(x,y,z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ}=(x-x_0)i+(y-y_0)j+(z-z_0)k$. Como $\overrightarrow{PQ}\perp n$, tenemos que $\overrightarrow{PQ}\cdot n=0$. Pero esto implica que el producto punto con el vector normal (perpendicular) al plano sería igual a 0, con lo que tendríamos la ecuación:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

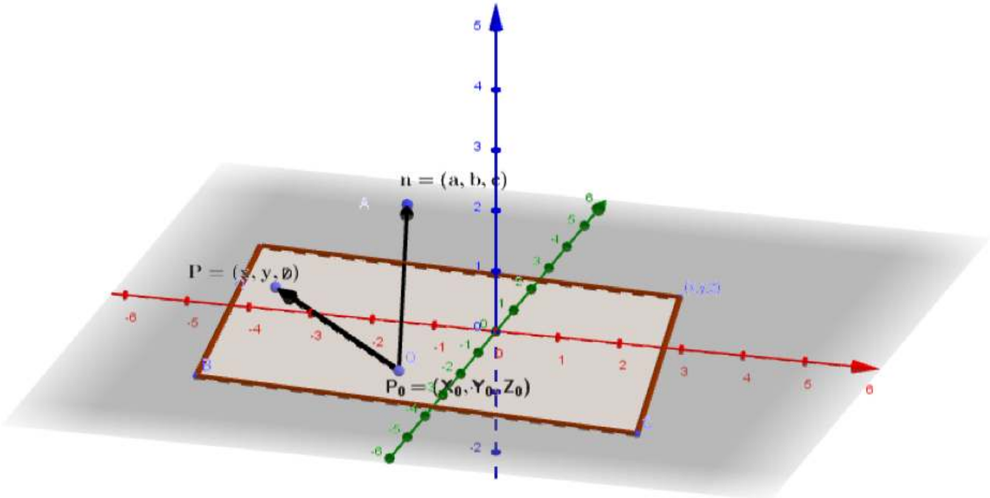
Constituyendo esta expresión matemática la ecuación cartesiana de un plano en su forma general o implícita

$$ax+by+cz=d$$

donde $d=ax_0+by_0+cz_0=\overrightarrow{OP}\cdot n$

Figura 44

Plano en el espacio



Nota. Deducción de la ecuación de un plano en el espacio en Geogebra. Parra, N., 2024.

Ejercicio

Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $A = (1, 2, -4), B = (2, 3, 7)$ y $C = (4, -1, 3)$.

Encontramos las coordenadas del vector el punto final menos el punto inicial

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 3, 7) - (1, 2, -4) = (1, 1, 11)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (4, -1, 3) - (1, 2, -4) = (3, -3, 7)$$

Aplicamos el producto vectorial para encontrar el vector normal $\vec{n} = (a, b, c)$ al plano

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & 1 & 11 \\ 3 & -3 & 7 \end{vmatrix} = \mathbf{7\check{i} + 33\check{j} - 3\check{k} - (3\check{k} + 7\check{j} - 33\check{i})}$$

$$\vec{n} = (a\check{i} - b\check{j} - c\check{k}) = 40\check{i} + 26\check{j} - 6\check{k}$$

$$= 40\check{i} + 26\check{j} - 6\check{k}$$

La definición de plano es

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Tomamos cualquiera de los puntos propuestos para determinar la ecuación del plano que lo contiene.

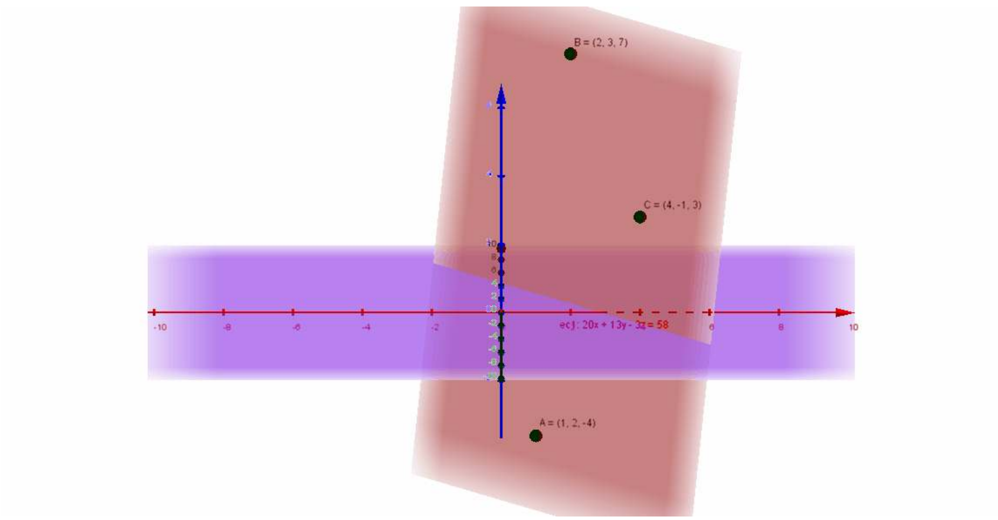
$$20(x - 1) + 13(y - 2) - 3(z + 4) = 0$$

$$20x - 20 + 13y - 26 - 3z - 12 = 0$$

$$20x + 13y - 3z - 58 = 0$$

Figura 45

Plano generado dado tres puntos



Nota. Plano generado dado tres puntos en Geogebra. Parra, N., 2024.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades.

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de los vectores en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 4 Revisión de **ejercicios resueltos** en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 11.
2. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
3. Estamos en la cuarta unidad, de seguro le resultará más fácil resolver los problemas planteados en la siguiente autoevaluación con el éxito esperado. Actividad retomada de Morales (2022)

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es importante revisar la literatura antes de realizar la autoevaluación, ya que comprenderá con mayor claridad el paso a paso de resolución de los ejercicios.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Un vector se forma cuando un punto se desplaza a una distancia y dirección dada.
- Se puede tener un vector $[0, 0]$ también llamado vector cero.
- Revisar las propiedades algebraicas (distributiva, asociativa, conmutativa) de los vectores en R^2, R^3, R^n, respectivamente, para resolver los ejercicios
- Cada vector en R^3 entonces, tendrá tres coordenadas en el plano del espacio
- Para resolver vectores en R^n hay que recordar la aritmética de los números reales, ya que no se podrán dibujar para las explicaciones.

Autoevaluación 4

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. ( ) El segmento de recta dirigido que se extiende desde el punto P al punto Q en R^2 es denotado por $\overrightarrow{PQ}$. (

2. ( ) Dos segmentos de rectas son equivalentes si tienen la misma magnitud y dirección.

3. ( ) Un vector v en R^2 , es un par ordenado de números reales (a, b), los números a y b se denominan componentes del vector v.

4. ( ) El vector cero en R^2 es el vector $(0, 0)$.

5. ( ) $v = (a, b)$, entonces $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

6. ( ) La adición de vectores $u = (1, -2, 5)$ y $v = (3, 2, -1)$ en R^3 se realiza operando $(u1 + v1, u2 + v2, u3 + v3)$, por lo que $u + v = (4, 0, 4)$.

7. ( ) Dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto escalar es cero.

8. ( ) La distancia entre los puntos $(1, 2, 3)$ y $(3, 5, -1)$ es

$\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$.

9. ( ) $(i + 3k – j) \times (k - 4j + 2i) = 9$.

10. ( ) $(i – j + 2k) \times (2i + 3j - 4k) = -2i + 8j + 5k$.

11. Si $a = (2, 3, 4)$, $b = (1, -2, 5)$ y el escalar $c = 2$ determine:

   a. $c. a =$

   b. $a + b =$

   c. $a. b =$

   d. $||a|| =$

   e. $a \times b =$

Ir al solucionario

Semana 12

Unidad 5. Espacios vectoriales reales

Para abordar espacios vectoriales reales es necesario conocer definiciones, postulados y propiedades de los espacios y subespacios vectoriales, estos conceptos son necesarios para comprender combinación lineal, espacio generado, dependencia e independencia lineal, culminando con los conceptos de rango, nulidad y su aplicación en la resolución de ecuaciones.

5.1 Espacios vectoriales

Es preciso revisar el siguiente video de espacio vectorial en el cual se nombra algunas propiedades de espacios vectoriales, la dimensión por cada tipo de espacio vectorial, esto con el fin de conocer la estructura de cualquier espacio vectorial tal como vector, matriz, polinomio, plano, recta, etc., necesitamos vectores, escalares y dos operaciones: suma entre dos vectores y el producto de un escalar por un vector $(V, +, \cdot)$.

Algunos conjuntos como matrices, funciones, polinomios, etc., dentro de la matemática tienen una estructura de espacio vectorial, pueden ser matrices, funciones, polinomios, producto punto, vectorial, etc.

A través del siguiente video podemos analizar una serie de demostraciones referentes a demostrar un espacio vectorial, a través de sus diez propiedades paso a paso, con ello el estudiante puede aplicar conceptos básicos de fundamentos matemáticos para lograr comprender la estructura de cualquier estructura vectorial. Un espacio vectorial es una terna $(V, +, \cdot)$, donde V es un conjunto no vacío y $+$,. Si tenemos al conjunto V de los vectores $(V, +, \cdot)$, al **campo** K se tiene que cumplir con las siguientes propiedades o axiomas, en este video se muestra la explicación de los axiomas de un espacio vectorial identificando la nomenclatura matemática, su interpretación, adicionalmente se complementa con la demostración de un ejemplo de un espacio vectorial.

Axiomas

i. $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (cerradura bajo la suma).
ii. Para x, y y $z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ Ley asociativa de la suma de vectores.
iii. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $\in V, x + 0 = 0 + x = x$ el **0** se llama **vector cero** o **idéntico aditivo.**
iv. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en $\in V$ tal que $x + (-x) = 0$, $-x$ se llama **el inverso aditivo de x.**
v. Si x y y están en V, entonces $x + y = y + x$ **Ley conmutativa de la suma de vectores.**
vi. Si $x \in V$ y α s un escalar, entonces $\alpha x \in V$ Cerradura bajo la multiplicación por un escalar.
vii. Si x y y están en V, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ **Primera Ley distributiva.**
viii. Si $x \in V$ y α y β, son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ **Segunda Ley distributiva.**
ix. Si $x \in V$ y α y β, son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ **Ley Asociativa de la Multiplicación por escalar.**
x. Para cada vector $x \in V, 1x = x$.

Ejercicios:

Comprobamos que el subconjunto $U = (x, y, z) \in R^3 \mid 2x - y + 5z = 0$ es un subespacio vectorial de R^3.

i. $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (cerradura bajo la suma).

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = 2x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + 5x_3 + y_3 = 0$$

$$= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) = 0$$

Demostramos que ambos vectores, a través de la primera propiedad cumplen con la restricción del conjunto propuesto, descomponiendo tenemos:

$$= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) = 0$$

$$= 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

en función de las coordenadas del primer vector pasa la restricción del conjunto y cumple la primera propiedad el vector x.

En este momento lo descomponemos al vector y

$$= 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 5(x_3 + y_3) = 0$$

$$= 2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0$$

se ha descompuesto esta expresión de vectores y se comprueba que el vector y pasa la restricción del conjunto cumpliendo con la primera propiedad o ley cerradura bajo la suma. Por tanto, los vectores x e y pertenecen al vector U.

ii. Para x, y y $z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ Ley asociativa de la suma de vectores.

Para demostrarla, partimos definiendo los vectores requeridos por esta propiedad, necesitamos tres vectores.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$z = (z_1, z_2, z_3)$$

$$x + (y + z) = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) + z_1, z_2, z_3) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3)$$

la pasamos por la restricción a nuestro vector suma y verificamos si cumple la propiedad.

$= (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2, x_3 + y_3 + z_3)$

$= 2(x_1 + y_1 + z_1) - (x_2 + y_2 + z_2) + 5(x_3 + y_3 + z_3) = 0$

$= 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$ *componentes del vector* $\mathbf{x}$

$= 2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0$ *componentes del vector* $\mathbf{y}$

$= 2z_1 - z_2 + 5z_3 = 0$ *componentes del vector* $\mathbf{z}$

Se ha descompuesto el resultado de la suma con las tres variables de manera individual por cada vector y pasa la restricción del conjunto, y cumple la propiedad asociativa de la suma de vectores.

Los vectores x, y y z pertenecen a U.

iii. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $\in V, x + 0 = 0 + x = x$ el **0** se llama **vector cero** o **idéntico aditivo.**

Definimos los vectores necesarios

$0 = (0, 0, 0)$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$x + 0 = 0 + x = x$

$(x_1, x_2, x_3) + (0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$(x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0) = (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3)$

El resultado de esta propiedad, la evaluación en la restricción del conjunto $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow 2x_1 - x_2 + 5x_3$ por tanto, pasa por la restricción y cumple esta tercera propiedad.

Tanto el vector x y 0 pertenecen a U.

iv. Si $x \in V$, existe un vector $-x$ en $\in V$ tal que $x + (-x) = 0$

Definimos los vectores necesarios para esta actividad.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$-x = (-x_1, -x_2, -x_3)$$

$$x + (-x) = (x_1, x_2, x_3) + (-x_1, -x_2, -x_3)$$

$$= (x_1 + (-x_1), x_2 + (-x_2), x_3 + (-x_3))$$

$$\hat{0} = (0, 0, 0)$$

Restricción

$$2(0) - (0) + 5(0)$$

El vector x pertenece al conjunto U

v. Si x y y están en V, entonces $x + y = y + x$.

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$y = (y_1, y_2, y_3)$$

$$x + y = y + x$$

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$$

$$(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$$

Restricción

$$2(y_1 + x_1) - (y_2 + x_2) + 5(y_3 + x_3) = 0$$

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$$

$$2y_1 - y_2 + 5y_3 = 0$$

El vector x y y pertenece al conjunto U

vi. Si $x \in V$ y α s un escalar, entonces $\alpha x \in V$

Definimos el vector necesario para nuestra propiedad que es el vector

$x = (x_1, x_2, x_3)$

α es un escalar o número real

$\alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$ este vector resultante se lo evaluará que pasa la condición del conjunto U

$2\alpha x_1 - \alpha x_2 - 5\alpha x_3 = 0$

$\alpha(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

$\alpha = 0$

$(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

El vector x pertenece al conjunto U

vii. Si x y y están en V, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$y = (y_1, y_2, y_3)$

$\alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \alpha(y_1, y_2, y_3)$

$= (\alpha x_1, \alpha x_(2,)\alpha x_3) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \alpha y_3)$

$= [\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \alpha(x_3 + y_3)$

$= 2\alpha(x_1 + y_1) - \alpha(x_2 + y_2) + 5\alpha(x_3 + y_3) = 0$

$= 2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 5\alpha x_3 = 0$

$= \alpha(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

$= \alpha = 0$

$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

$= 2\alpha y_1 - \alpha y_2 + 5\alpha y_3 = 0$

$= \alpha(2y_1 - y_2 + 5y_3) = 0$

$= \alpha = 0$

$= (2y_1 - y_2 + 5y_3) = 0$

El vector x y y pertenece al conjunto U

viii. Si $x \in V$ y α y β, son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

α y β pertenecen a los reales

$(\alpha + \beta)(x_1, x_2, x_3) = \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_1, x_2, x_3)$

$= \alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(x_1, x_2, x_3)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \alpha x_3 + \beta x_3)$

$= (\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2, (\alpha + \beta)x_3$

$= 2(\alpha + \beta)x_1 - (\alpha + \beta)x_2 + 5(\alpha + \beta)x_3 = 0$

$= (\alpha + \beta)(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

Restricción

$= (\alpha + \beta) = 0$

$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

El vector x pertenece al conjunto U

ix. Si $x \in V$ y α y β, son escalares, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

α y β pertenecen a los reales

$\alpha(\beta x_1, \beta x_2, \beta x_3) = (\alpha\beta)(x_1, x_2, x_3)$

$(\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \alpha\beta x_3) = 0$

Restricción

$= 2\alpha\beta x_1 - \alpha\beta x_2 + 5\alpha\beta x_3 = 0$

$= \alpha\beta(2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0.$

$= \alpha\beta = 0$

$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

El vector x pertenece al conjunto U

x. Para cada vector $x \in V, 1x = x$.

$x = (x_1, x_2, x_3)$

$1(x_1, x_2, x_3) = x_1, x_2, x_3$

Restricción

$= (2x_1 - x_2 + 5x_3) = 0$

El vector x pertenece al conjunto U

El conjunto U es un espacio vectorial

5.2 Subespacios

Se dice que un subespacio vectorial (H) es un espacio vectorial si H es un subespacio no vacío de V, y H es un subespacio vectorial, junto con las operaciones de **suma entre vectores y multiplicación** por un escalar definidas de V. Algunos ejemplos de espacios vectoriales como matrices, polinomios, funciones, rotaciones, traslaciones, etc., también necesitas un cuerpo o campo de números, a los que llamamos escalares, generalmente son los números reales, o complejos, o imaginarios.

Un subespacio es un subconjunto no vacío, en este video de subespacios se efectúa la demostración de un conjunto correspondiente a una expresión perteneciente a un plano, a través de los axiomas o propiedades, se analiza si se trata de un subespacio, es necesario que el estudiante ponga en práctica todo lo aprendido en fundamentos matemáticos como factores, propiedades de números reales, manejo de funciones, etc., *las propiedades* que deben cumplir para que sea un subespacio vectorial son las siguientes:

i. $o \in H$
ii. $x \in H$ y $\in H$, entonces $x + y \in H$ (cerradura bajo la suma).
iii. Si $\in H$, entonces $\alpha x \in H$ para todo escalar α (cerradura bajo la multiplicación)

Cabe recalcar que es muy importante verificar de qué el elemento cero (i) pertenece a un subespacio vectorial a demostrar, sino ocurre, se puede concluir que no es un subespacio vectorial. Además, si una estructura matemática cumple que es un subespacio vectorial, a la vez, se concluye que es un espacio vectorial (V). Algunos ejemplos de (Morales, 2022) de subespacio y espacios vectoriales.

Ejercicios:

Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & 3a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\} \subseteq M_{22} = V$ ¿es un subespacio vectorial?

Resolución:

Sean $A_{22} = \begin{pmatrix} a_1 & 3a_1 - b_1 \\ b_1 & a_1 + b_1 \end{pmatrix}$ y $B_{22} = \begin{pmatrix} a_2 & 3a_2 - b_2 \\ b_2 & a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

La suma $A_{22} + B_{22} \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3a_1 - b_1 + 3a_2 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3a_1 + 3a_2 - b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 3(a_1 + a_2) - (b_1 - b_2) \\ b_1 + b_2 & (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \end{pmatrix}$ que también pertenece a H

Veamos ahora el producto por un escalar:

$$\alpha \begin{pmatrix} a & 3a - b \\ b & a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha(3a - b) \\ \alpha b & \alpha(a + b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & 3\alpha a - \alpha b \\ \alpha b & \alpha a + \alpha b \end{pmatrix}$$

Vemos que el producto por un escalar también pertenece a H, por lo tanto, cumple con las dos propiedades de la cerradura y, como es un subconjunto de un espacio vectorial, también es espacio vectorial.

Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

$$V = R^2; H = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Para demostrar que el conjunto H es un subespacio vectorial debe cumplir tres propiedades:

i. Que el $\breve{0} \in H$

$$(0, 0); 0^2 + 0^2 \leq 1$$

$$0 \leq 1$$

El vector 0 pertenece al conjunto H

ii. $x \in H$ y $\in H$, entonces $x + y \in H$

$$x = (x_1, x_2)$$

$$y = (y_1, y_2)$$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

Restricción

$(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \leq 1$

Si analizamos las entradas de esta desigualdad al darle valores a estas componentes del vector suma siempre vamos a obtener valores mayores a cero, es decir positivos, además los valores que podemos tomar es a lo largo de los números reales, por tanto, no se va a llegar a tener el universo de número menores que 1, sino mayores.

Los vectores x y y no cumplen con la propiedad de cerradura de la suma y no pertenecen a H

El conjunto H no es un Subespacio

Para concluir con esta semana, le invito a revisar la siguiente temática

5.3 Espacio generado e independencia lineal

Si todos los vectores de un espacio vectorial V, son generados por una combinación lineal es preciso hacer una revisión del video Conjunto generador de un espacio vectorial en el cual nos muestra un análisis de un espacio generador, cumpliendo estrictamente su definición, en tanto que emplea otras definiciones como combinación lineal y aplicando los conceptos básicos de fundamentos matemáticos. Sabemos que cualquier vector se expresa en sus vectores unitarios de manera general, por ejemplo, un vector en R^3. La combinación lineal está inmersa en todas las expresiones matemáticas de matrices, funciones, polinomios, etc.

$v = ai + bj + ck$

Esta expresión es una primera combinación lineal de $\check{i}$, $\check{j}$, $\check{k}$ con a, b y c que vendrían a ser números o escalares que son números reales.

Combinación Lineal (CL)

Sean $v_1, v_2 \ldots v_n$ es un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Donde a_1, a_2 y a_n son números reales o escalares, se denomina una combinación lineal de $v_1, v_2 \ldots v_n$.

Bajo esta definición universal podemos definir cómo debe ser un **conjunto generador,** el cual se define cuando los vectores $v_1, v_2 \ldots v_n$ es un espacio vectorial V que **genera** si todo vector en V se puede expresar en combinación lineal. Es decir, para todo $v \in V$ existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

vemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}

Espacio generado por un conjunto de vectores

Sea $v_1, v_2 \ldots v_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2 \ldots v_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $v_1, v_2 \ldots v_k$. Es decir

$$ge\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} = \{v : v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots, +a_kv_k\}$$

Donde a_1, a_2 y a_k son escalares arbitrarios. Los vectores $e1 = i = (1, 0)$ y $e2 = j = (0, 1)$, generan a R^2.

Ejercicios

En $R^2, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Demostrar si estos tres vectores generan el espacio al que pertenecen

Solución

Sea $(x, y) \in R^2$. Se debe verificar si todo vector se puede expresar en combinación lineal, es decir, que existen escalares a_1, a_2, a_3 para todo $(x, y) \in R^2$ tal que

$$a_1(01) + a_2(34) + a_3(-1-2) = (xy)$$

Entonces

$$a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a_2 \\ 4a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1a_3 \\ -2a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a_2 - a_3 \\ a_1 + 4a_2 - 2a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Construimos la matriz ampliada y la resolvemos por Gauss -Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & x \\ 1 & 4 & -2 & y \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & y \\ 0 & 3 & -1 & x \end{array}\right)$$

$$\tfrac{1}{3}F_2 \rightarrow F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & x \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{x}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - 4F_2 \rightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{3y-4x}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{x}{3} \end{array}\right)$$

Entonces

$$a_1 - \tfrac{2}{3}a_3 = \frac{3y-4x}{3}$$

$$C_2 - \tfrac{1}{3}C_3 = \frac{x}{3}$$

El sistema tiene infinitas soluciones. Entonces, existen dos escalares a_1, a_2, a_3 tal que $a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ por tanto los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ no generan al espacio R^2.

Sea $v_1 = (2, -1, 4)$ y $v_2 = (4, 1, 6)$. Se desea conocer si estos dos vectores propuestos general a R^3.

Desarrollo

$x = 2a_1 + 4a_2$

$y = -a_1 + a_2 3$

$z = 4a_1 + 6a_2$

Se deduce un sistema de ecuaciones lineales y lo transformamos a una matriz de la siguiente manera y de acuerdo con la definición de espacio generado. Las dos incógnitas son los escalares a_1, a_2.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x + 2y \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6} R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & \frac{x+2y}{6} \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{x}{6} - \frac{2y}{3} \\ 0 & 1 & \frac{x}{6} + \frac{y}{3} \\ 0 & 0 & \frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3+z} \end{array}\right)$$

Se evidencia que posee solución única solo si $\frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3+z} = 0$, quitamos del denominador z $\frac{-5x}{3} + \frac{2y}{3} + z = 0$ y ahora multiplicamos por 3, nos queda $5x - 2y - 3z = 0$ que corresponde a la ecuación de un plano que pasa por el origen.

Dependencia e independencia lineal

Un grupo de vectores $v1, v2, \ldots, vk$ en un espacio vectorial V, son, linealmente independientes o no, en el video [Cómo saber si los Vectores son Linealmente Independientes o Dependientes] se evidencia la demostración de tres vectores si son o no linealmente independientes, Es fundamental comprender la definición de independencia lineal, ya que sobre esta se basa el análisis utilizando los conceptos básicos de los fundamentos matemáticos necesarios. Además, se requiere la aplicación de métodos de solución de ecuaciones, como el método de Gauss-Jordán, junto con los demás temas tratados previamente en la materia. El objetivo de la demostración es si existen n escalares todos cero tales que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

Si no cumplen esta condición al menos un escalar es diferente de cero es linealmente dependientes, y lo contrario son linealmente independientes si la ecuación $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$, es decir de cumple $a_1 = a_2 \ldots a_n = 0$, otra estrategia de verificación de linealmente independiente es el utilizar el determinante, este debe ser diferente de cero.

Ejemplo:

Determine cuál es el espacio vectorial generado por los vectores $u = (2, -1, -2, 4, 5)$ y $v = (-1, 3, 2, -2, 1)$ tomado de (Morales, 2022, p. 114)

Resolución:

Planteamos el sistema de ecuaciones

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix}$$

Planteamos la matriz amplificada y escalonamos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & x \\ -1 & 3 & y \\ -2 & 2 & z \\ 4 & -2 & u \\ 5 & 1 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & y \\ 2 & -1 & x \\ -2 & 2 & z \\ 4 & -2 & u \\ 5 & 1 & w \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1=-R_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -y \\ 2 & -1 & x \\ -2 & 2 & z \\ 4 & -2 & u \\ 5 & 1 & w \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2=R_2-2R_1 \\ R_3=R_3+2R_1 \\ R_4=R_4-4R_1 \\ R_5=R_5-5R_1}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -y \\ 0 & 5 & x+2y \\ 0 & -4 & z-2y \\ 0 & 10 & u+4y \\ 0 & 16 & w+5y \end{array}\right) \xrightarrow[R_2=R_2/5]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -y \\ 0 & 1 & (x+2y)/5 \\ 0 & -4 & z-2y \\ 0 & 10 & u+4y \\ 0 & 16 & w+5y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1=R_1+3R_2 \\ R_3=R_3+4R_2 \\ R_4=R_4-10R_2 \\ R_5=R_5-16R_2}]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -y+3/5(x+2y) \\ 0 & 1 & (x+2y)/5 \\ 0 & 0 & z-2y+4/5(x+2y) \\ 0 & 0 & u+4y-2(x+2y) \\ 0 & 0 & w+5y-16/5(x+2y) \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & (3x+y)/5 \\ 0 & 1 & (x+2y)/5 \\ 0 & 0 & z+2/5(2x-y) \\ 0 & 0 & u-2x \\ 0 & 0 & w-(16x+7y)/5 \end{array}\right)$$

Este sistema tiene solución múltiple solo cuando

$z=-2/5(2x-y); u=2x; w=(16x+7y)/5,$

que puede transformarse en

$x=u/2;$

$w=(8u+7y)/5y=(5w-8u)/7=5/7w-8/7u;$

$$z = -2/5(u - (5w - 8u)/7) = -2/5u + 2/7w - 16/35u = 2/7w - 6/7u;$$

por lo que, y haciendo a $u = t_1$ y $w = t_2$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ w \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -8/7 \\ -6/7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 5/7 \\ 2/7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar si dos vectores son linealmente independientes o dependientes se propone los siguientes vectores:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolución: Siguiendo la definición de linealidad se tiene que

$$a_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollando el producto de un escalar por una matriz se tiene que

$$\begin{pmatrix} -1a_1 \\ 1a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a_2 \\ 0 \\ 1a_2 \\ 1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Realizando la suma de vectores se tiene

$$\begin{pmatrix} -a_1 - 2a_2 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformamos a un sistema de ecuaciones

$$-a_1 - 2a_2 = 0$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_2 = 0$$

Por tanto, $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$ y los vectores que son combinados de estos escalares existen, los vectores son linealmente independientes.

Determinar si los vectores son LI y LD.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los ponemos los vectores en combinación con los escalares

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores son linealmente independientes, los escalares existen cada uno es igual a cero.

$a_1 = 0$

$a_2 = 0$

$a_3 = 0$

Determinar si dos vectores son linealmente independientes o dependientes se propone los siguientes vectores:

$V_1 = (1, 2, -1)$

$V_2 = (1, -2, 1)$

$V_3 = (-3, 2, -1)$

$V_4 = (2, 0, 0)$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ -a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ -2a_2 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3a_3 \\ 2a_3 \\ -a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 \\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$C_1 - C_3 + C_4 = 0$

$C_2 - 2C_3 + C_4 = 0$

Por Gauss Jordán, lo resolvemos y notamos que el sistema tiene infinitas soluciones, por consiguiente, los vectores son linealmente dependientes.

Los siguientes vectores $\{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$ son ¿L.I o L.D?

Calculamos el determinante para comprobar si los tres vectores son linealmente independientes.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$$

Por lo tanto, los tres vectores si generan a R^3.

Determine un conjunto de vectores que genere el espacio solución de $Ax = 0$ (Morales, 2022, p.123)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

Resolvemos el sistema de ecuaciones usando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-2F_1 \\ F_4-F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{F_3-2F_2 \\ F_4-F_2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Encontramos que

$$x_1 + x_3 = 0 \to x_1 = -x_3$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 0 \to x_2 = -x_3$$

$x_4 = 0$

$$x = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ genera al espacio solución.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las siguientes actividades recomendadas:

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades de los Espacios y Subespacios vectoriales en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 5.
2. Revisión de los ejercicios propuestos en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 12.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Semana 13

Unidad 5. Espacios vectoriales reales

5.4 Bases y dimensión

El conjunto finito de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ es una base de V si, y solo son

1. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ es linealmente independientes y
2. $v_1, v_2, \ldots, v_n$ genera el espacio vectorial V

Morales (2022). La base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ Se denomina base natural, estándar o canónica a la base cuyos vectores tienen la forma $ei = (0, 0 \ldots, 1..., 0)$ donde el único 1 se encuentra en la posición i y el resto de los componentes son ceros. Todos los elementos de esta base son unitarios y perpendiculares entre sí, es decir, son ortonormales.

Un espacio vectorial es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de V que es una base para V; caso contrario, dicho espacio es de dimensión infinita. Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces cada elemento de V se puede escribir de una sola forma como combinación lineal de los elementos de S.

Sea $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto de vectores no nulos de un espacio vectorial V, y sea $W = \text{gen}\, S$. Entonces algún subconjunto de S es una base de W.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, y $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$, es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces $r \leq n$.

Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $T = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ son bases de un mismo espacio vectorial, entonces $n = m$.

Dimensión de los espacios vectoriales

Ejemplo: la dimensión de R^n

Con n vectores linealmente independientes (LI) en R^n constituyen una base, se observa que

$dim\, dim\, R^n = n$

Ejemplo: la dimensión de P_n

Los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen una base en P_n. Entonces $diP_n = n + 1$

Ejemplo: la dimensión de M_{mn}

En M_{mn} sea A_{ij} la matriz de mxn con uno en la posición ij como n vectores y cero en otra parte. Es sencillo demostrar que las matrices A_{ij} $para\, i = 1, 2, \ldots, m\, y\, j = 1, 2, \ldots, n$ forman una base para M_{mn}. Así, $dim\, dim\, M_{mn} = mn$.

Ejercicios

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^2?

$\{(1, 3), (1, -1)\}$

Resolución

Como son 2 y son linealmente independientes (ninguno es múltiplo del otro), si es una base para R^2.

$\{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$

Resolución

Al ser 3, no pueden ser linealmente independientes, no constituyen una base para R^2, además uno de ellos es el vector nulo, que no puede formar parte de una base, los otros dos son múltiplos entre sí.

Sean el siguiente conjunto de vectores, comprobar si son LI $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$

Son tres vectores, falta comprobar la independencia lineal calculando el determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2-3=-5$$

Como el determinante es diferente de cero, los 3 vectores son linealmente independientes, conforman, por lo tanto, una base en R^3.

Sean el siguiente conjunto de vectores, comprobar si son LI $\{(1,0,0),(0,2,-1),(3,4,1),(0,1,0)\}$

Resolución:

Al ser 4 vectores, no son linealmente independientes y, por lo tanto, no conforman una base.

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^4?

$$V=\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$$

Al ser 4 vectores, necesitamos solamente comprobar su independencia lineal, usaremos la reducción a la forma escalonada (alternativa al uso del determinante).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que se conservan las cuatro filas, por lo tanto, los vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, conforman una base en R^4.

$$U=\{(0,0,1,1),(-1,1,1,2),(1,1,0,0),(2,1,2,1)\}$$

Resolución:

Al ser cuatro vectores, podrían formar una base en R^4, solo falta comprobar si son linealmente independientes, utilizaremos la reducción a la forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\quad]{\substack{F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para P^2?

$$V = \{-t^2 + t + 2, 2t^2 + 2t + 3, 4t^2 - 1\}$$

Como P^2 es de dimensión 3 y tenemos 3 vectores en el conjunto, podría ser una base de P^2, hace falta comprobar su independencia lineal, lo haremos comprobando el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 12 - 16 + 2 = 0$$

Como el valor del determinante es cero, los tres vectores no son linealmente independientes y, por lo tanto, no constituyen una base en P^2.

$$S = \{t^2 + 2t - 1, 2t^2 + 3t - 2\}$$

Resolución:

El conjunto tiene dos vectores, y el espacio necesita 3, por lo tanto, no constituye una base.

$$H = \{t^2+1, 3t^2+2t, 3t^2+2t+1, 6t^2+6t+3\}$$

Resolución:

Hay cuatro vectores en el conjunto, no puede ser una base de P^2.

Demuestre que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ forman una base del espacio vectorial de todas las matrices cuadradas M_{22}.

La dimensión del espacio vectorial y el número de matrices coinciden, hace falta ver si son linealmente independientes, para ello las escribimos en forma de vectores verticales y formamos una matriz, luego la reducimos a la forma escalonada.

La dimensión del espacio vectorial y el número de matrices coinciden, hace falta ver si son linealmente independientes, para ello las escribimos en forma de vectores verticales y formamos una matriz, luego la reducimos a la forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 - F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como la forma escalonada conserva 4 filas, las cuatro matrices son linealmente independientes y el conjunto de cuatro matrices forma una base del espacio vectorial de todas las matrices cuadradas M_{22}.

Determine cuál de los subconjuntos dados forma una base para R^3. Luego exprese el vector $(2,1,3)$ como combinación lineal de los vectores en cada conjunto que sea una base.

$$Z = \{(1,1,1),(1,2,3),(0,1,0)\}$$

Resolución:

Al ser tres vectores podrían formar una base, debemos comprobar antes que son linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3 = -2$$

Al ser el determinante diferente de cero, confirmamos que los tres vectores son linealmente independientes y forman una base en R^3.

$$\{(1,2,3),(2,1,3),(0,0,0)\}$$

Resolución:

Al ser uno de los vectores del conjunto el vector cero, este no puede ser una base.

$$\{(2,1,3),(1,2,1),(1,1,4),(1,5,1)\}$$

Resolución:

Son 5 vectores, por lo tanto, no pueden ser una base de R^3.

$$\{(1,1,2),(2,2,0),(3,4,-1)\}$$

Resolución:

Como son 3 vectores, podrían, si son linealmente independientes, conformar una base para R^3, vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 16 - 12 + 2 = 4$$

Si forman una base en R^3, vamos ahora a expresar el vector $(2, 1, 3)$ como una combinación lineal de los vectores de esta base, para ello conformamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema utilizando el método de Cramer

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4+24-18+2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-1+16+9-6+2-12}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$c = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6+4-8-6}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Aplicamos estos valores y comprobamos

$$1(1,1,2) + 2(2,2,0) - 1(3,4,-1) = (1+4-3, 1+4-4, 2+1) = (2,1,3)$$

Determine si los subconjuntos dados forman una base para P^2, si ello ocurre, exprese $5t^2 - 3t + 8$ como combinación lineal de los vectores en cada subconjunto que sea una base.

$$A = \{t^2 + t, t - 1, t + 1\}$$

Resolución:

Resolveremos el sistema por la forma escalonada reducida, así reencontraremos los valores para la combinación lineal al tiempo que averiguamos si los vectores son linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, se puede expresar $5t^2 - 3t + 8$ como

$$5(t^2 + t) - 8(t - 1) + 0(t + 1) = 5t^2 + 5t - 8t + 8 = 5t^2 - 3t + 8$$

$$B = \{t^2 + 1, t - 1\}$$

Resolución:

Al ser solo dos vectores, no pueden ser una base para P^2.

$$C = \{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$$

Resolución:

Al ser tres vectores podrían conformar una base en R^3, lo comprobaremos al tiempo que encontramos los coeficientes de la combinación lineal usando operaciones elementales de fila para reducir la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1-F_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&1&8\\0&0&1&8\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&0\\0&0&1&8\end{array}\right)$$

Como si fuera una base, utilizamos los coeficientes encontrados para comprobar la combinación lineal.

$$-3(t^2+t)+0(t^2)+8(t^2+1)=-3t^2-3t+8t^2+8=5t^2-3t+8$$

$$A=\{t^2+1,t^2-t+1\}$$

Resolución:

Necesitamos al menos tres vectores en la base, por lo tanto, el conjunto dado no puede ser base de P^2.

Considere el siguiente subconjunto de $\mathrm{P3}:S=\{t^3+t^2-2t+1,t^2+1,t^3-2t,2t^3+3t^2-4t+3\}$. Determine una base para el subespacio de $W=\mathrm{gen}\,S$. ¿Cuál es $\dim W$?

Resolución:

Usamos la reducción a la forma escalonada para comprobar si los 4 vectores son linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&1&0&3\\-2&0&-2&-4\\1&1&0&3\end{pmatrix}\xrightarrow[F_4-F_1]{\substack{F_2-F_1\\F_3+2F_1}}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{3\leftrightarrow4}\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Como se conservan 3 renglones no nulos, tenemos solo 3 vectores linealmente independientes, conservamos los tres primeros (podríamos tomar tres cualquiera de los cuatro).

$$B=t3+t2-2t+1,t2+1,t3-2t$$

La dimensión del subespacio es 3.

Determine una base para los vectores de la forma $(a+c, a-b, b+c, -a+b)$

Resolución:

El vector general de este subespacio se puede expresar de la forma:

$$(a+c, a-b, b+c, -a+b) = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Para ver si los tres vectores involucrados $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes, formamos una matriz y la transformamos a la forma reducida.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-F_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Vemos que solo 2 de los 3 vectores son linealmente independientes, podemos tomar dos cualquiera de ellos, por ejemplo, el tercero y el primero.

$$\text{Base} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 11y - 17z = 0 \right\}$. Entonces $dim\, H = 2$

Solución:

Despejamos

$2x = 17z - 11y$

$x = \frac{17z-11y}{2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17z-11y}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11y}{2} \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17z}{2} \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores encontrados son $\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independientes, la dimensión está dada por el número de vectores L.I, por tanto, la $dim = 2$.

Ahora le invito a continuar con el estudio de esta unidad con los siguientes apartados.

5.5 Sistemas homogéneos

Un sistema lineal homogéneo $Ax = b$ es aquel en el que el vector b es el vector nulo, quedando $Ax = 0$. Todo sistema lineal homogéneo tiene al menos una solución, a la que llamamos trivial, en otras palabras, todas las incógnitas son iguales a cero.

Si A es una matriz de orden mxn, llamaremos (nulidad de A) a la dimensión del espacio nulo de A. En el enlace al video seleccionado se explica el tema de nulidad, teniendo presente su definición y la intervención de otros temas como kernel, base, dimensión y rango a través del método de Gauss – Jordán.

Para comprender mejor la definición de un sistema lineal homogéneo es necesario revisar el presente artículo, en este material se muestra la teoría necesaria del tema complementando con un video explicativo de los tipos de soluciones que se puede tener con un sistema homogéneo, también trata de la relación del número de ecuaciones y variables, rango de ese sistema, además se usa matrices y el método de Gauss-Jordan para llegar a una matriz escalonada reducida.

Ejercicios

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas tomado de Morales (2022)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

Aplicando el método de Gauss -Jordán la solución del sistema es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & -20 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el sistema planteado es un sistema compatible indeterminado, con soluciones infinitas, $r = 2$ y $n = 4$, tenemos $n - r = 4 - 2 = 2$ variables libres,

$$\begin{cases} x_1 = 13x_3 + 18x_4 \\ x_2 = 20x_3 + 29x_4 \end{cases}$$

Tanto x_1 y x_2 dependen x_3 y x_4.

Determine una base para el espacio nulo de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Llevamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3+2F_2 \\ F_4+F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Que, cuando $z = t$ y $w = s$ equivale a las ecuaciones

$x = 5t - 3s$

$y = 2s - 4t$

Que vectorialmente se pueden expresar así:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que una base de este espacio vectorial sería:

$$\text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determine una base para el espacio solución del sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)x = 0$ para cada escalar λ y matriz A.

$$\lambda = 1, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolución

Calculamos

$(\lambda I_n - A)$

$$1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & -2 \\ -1 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego resolvemos el sistema $(\lambda I_n - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1/2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que nos queda la ecuación

$$x + y = 0 \rightarrow x = -y; y = t$$

En forma vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{Dim} = 1$$

Determine todos los números reales λ tales que el sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)x = 0$ tiene una solución no trivial.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Calculamos $\lambda I_n - A$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0 para que el sistema tenga múltiples soluciones.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

Encontramos que hay dos soluciones:

$$\lambda = 3; \lambda = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Calculamos $\lambda I_n - A$

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & -4 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a 0 para que el sistema tenga múltiples soluciones.

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 3 \\ 0 & -4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-5) + 12(\lambda+2) = 0$$

$$(\lambda+2)[(\lambda+2)(\lambda-5)+12] = 0$$

$$(\lambda+2)[\lambda^2 - 3\lambda + 2] = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

Con lo que el conjunto solución es:

$$\lambda \epsilon - 2, 1, 2$$

Resuelva el sistema lineal

$$\begin{cases} x + 2y - z - w = 3 \\ x + y + 3z + 2w = -2 \\ 2x - y + 4z + 3w = 1 \\ 2x - 2y + 8z + 6w = 8 \end{cases}$$

Y escriba la solución x como $x = xp + xh$, donde xp es una solución particular del sistema dado y xh es una solución del sistema homogéneo asociado.

Resolución:

Transformamos el sistema a la forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 8 & 6 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-2F_1]{\substack{F_2-F_1\\F_3-2F_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & -5 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & 10 & 8 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 6 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & 10 & 8 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+6F_2]{F_3+5F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32 \\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-F_3/14} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -16/7 \\ 0 & 0 & -14 & -10 & 32 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4+14F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5/7 & -16/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si las columnas representan a las incógnitas x, y, z y w, y hacemos $w = t$, encontraremos (de abajo hacia arriba)

$$z = -\tfrac{16}{7} - \tfrac{5}{7}t$$

$$y = 5 + 4\left(-\tfrac{16}{7} - \tfrac{5}{7}t\right) + 3t = -\tfrac{29}{7} + \tfrac{1}{7}t$$

$$x = 3 - 2\left(-\tfrac{29}{7} + \tfrac{1}{7}t\right) + \left(-\tfrac{16}{7} - \tfrac{5}{7}t\right) + t = 9 - t$$

Esta respuesta se puede expresar vectorialmente como:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 - t \\ -\frac{29}{7} + \frac{1}{7}t \\ -\frac{16}{7} - \frac{5}{7}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{29}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{7}\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{29}{7} \\ -\frac{16}{7} \\ 0 \end{pmatrix}$$ sería la solución particular y $$\begin{pmatrix} -7t \\ t \\ -5t \\ 7t \end{pmatrix}$$ la solución homogénea.

Estos últimos ejercicios son tomados de la guía de (Morales, 2022, p.144)

5.6 Rango de una matriz

Para encontrar el rango de una matrizpor determinantes en el video se explica claramente las características para calcular el rango de una matriz no necesariamente cuadrada, también trata los conceptos de linealidad (proporcionalidad), se utiliza el ***determinante como el método de cálculo del rango***, , el valor del determinante diferente de cero determina el tipo de sistema, por otro lado otro método de cálculo del rango (es Gauss) en el video Cómo Calcular el RANGO de una MATRIZ se muestra paso a paso cómo calcular el rango de una matriz cuadrada y no cuadrada, la cual se debe escalonar la matriz a su forma reducida por Gauss - Jordán y contamos el número de filas no nulas, aquel número es el rango de una matriz.

Como manifiesta Morales (2022). Si A es una matriz mxn, entonces rango A + nulidad A=n, una matriz es no singular si, y solo si, rango $A = n$, esto equivale a decir que el rango de $A = n$ si, y solo si, $|A| \neq 0$. Otras definiciones equivalentes son: el sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única si, y solo si, rango $A = n$; un conjunto de vectores es linealmente independiente si, y solo si, el determinante formado por los mismos no es igual a 0; un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas con n incógnitas tiene una solución no trivial si, y solo si el rango $A < n$; un sistema lineal $Ax = b$ tiene solución si, y solo si, el rango $A = \text{rango}\,(b)$ (p.144).

Por tanto, *la dimensión es el máximo número de vectores independientes que podemos tener en el espacio o subespacio*. En otras palabras, es el máximo rango que puede tener un conjunto de vectores. Es también el rango de cualquier sistema generador de dicho espacio.

Ejercicio:

Sea $S = \{v1, v2, v3, v4, v5\}$, donde $v1 = (1, 4, 6, -2)$, $v2 = (3, 2, 5, 1)$, $v3 = (4, 6, 1, 0)$, $v4 = (0, 0, 10, -1)$ y $v5 = (7, 8, 6, 1)$.

Determine una base para el subespacio de $R4$, $V = \text{gen}\, s$.

Transformamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 7 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-3F_1 \\ F_3-4F_1 \\ F_5-7F_1 \\ F_4\leftrightarrow F_5}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & -2 \\ 0 & -10 & -13 & 7 \\ 0 & -10 & -23 & 8 \\ 0 & -20 & -36 & 15 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2/-10 \\ F_4+20F_2 \\ F_3+10F_2 \\ F_1-4F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 13/10 & -7/10 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_3/-10 \\ F_5-10F_3 \\ F_4+10F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 13/10 & -7/10 \\ 0 & 0 & 1 & -1/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos las filas no nulas y estas forman la base pedida

$$\text{Base} = (5, 0, 4, 4), (0, 1, 13, -7), (0, 0, 1, -1)$$

$$\text{Rango} = 3$$

$$\text{Nulidad} = 2$$

$$\text{Dim} = 3$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las siguientes actividades recomendadas:

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades Bases y dimensión en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica en la Unidad 5.
2. Revisión de los ejercicios propuestos de bases y dimensión en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 13. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 5. Espacios vectoriales reales

5.7 Cambio de base

Morales (2022) En una base ordenada $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial V. Si un vector v, del espacio vectorial V se puede expresar como $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ con $c_1, c_2, \ldots, c_n$ números reales, se dice que $[v]S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ son las coordenadas de v en la base S. (Poole, 2017)

Un mismo vector puede tener diferentes representaciones en bases diferentes, en ese contexto, la matriz de transición de la base T a la base $S(P_{S\leftarrow T})$ es una matriz formada por los vectores en columna de los elementos de la base T en la base S.

Para trasladar las coordenadas de la base T a la base S hay que multiplicar la matriz de transición de la base S por las coordenadas del vector en la base $T \cdot [v]S = P_{S \leftarrow T}[v]_T$

La matriz de transición de la base S a la base T es la inversa de la matriz de transición de la base T a la base S. $P_{TS} = (P_{ST})^{-1}$

Ejercicios

Sean $\vec{a}_1 = (1, -2, -5)$, $\vec{a}_2 = (2, 5, 6)$ y $\vec{b} = (7, 4, -3) \in R^3$. Determina si $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$. En caso afirmativo, obtén los escalares x_1, x_2 tales que $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$. Realiza lo mismo para $\vec{c} = (7, 4, -4)$.

Comenzamos escribiendo la definición de combinación lineal

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 \\ -5x_1 + 6x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, hemos de resolver el sistema lineal: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ -2x_1 + 5x_2 = 4 \\ -5x_1 + 6x_2 = -3 \end{cases}$

Resolvemos el sistema transformando la matriz ampliada a la forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es compatible, por tanto, $\vec{b}$ es c.l. del conjunto $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. La solución, y por tanto los coeficientes, son $x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. Es decir, $3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

Sean $S = \{(1,2),(0,1)\}$ y $T = \{(1,1),(2,3)\}$ bases para R^2. Sean $v = (1,5)$ y $w = (5,4)$ tomado de Morales (2022).

a. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a la base T.
b. ¿Cuál es la matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S?
c. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a S utilizando $P_{S \leftarrow T}$.
d. Determine directamente los vectores de coordenadas de v y w con respecto a S.
e. Determine la matriz de transición $Q_{T \leftarrow S}$ de la base S a la base T.
f. Determine los vectores de coordenadas v y w con respecto a T utilizando $Q_{T \leftarrow S}$. Compare las respuestas con las de a).

Resolución:

a. Establecemos dos sistemas de ecuaciones, uno para cada vector, los podemos resolver simultáneamente por el método de Gauss-Jordán de la siguiente manera (recuerde que usamos los vectores de la base T):

$$\left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F_2 - F_1} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \left\langle \begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \end{array} \right\rangle$$

Con lo que obtenemos

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}_T$$

y

$$w = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}_T$$

b. Para la matriz de transición debemos expresar los vectores de T en función de la base S, usamos un procedimiento similar.

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F_2-2F_1} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right\rangle$$

Con lo que la matriz de transición nos queda

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c. Para determinar los vectores dados en la base S utilizamos la matriz de transición.

$$v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix}_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$$

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}_T = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S$$

d. Ahora calculamos directamente estos vectores en S

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F_2-2F_1} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \end{array} \right\rangle$$

Resultando los vectores $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_S$ y $w = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S$

e. Hallamos ahora $Q_{T \leftarrow S}$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F_2-F_1} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{F_1-2F_2} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

Con lo que

$$Q_{T\leftarrow S} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

f. Utilizamos esta matriz para calcular las coordenadas de los vectores v y w

$$v = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}_T$$

y

$$w = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Que resultan ser las mismas respuestas encontradas en a)

Sean $S = \{v1, v2\}$ y $T = \{w1, w2\}$ bases para R^2, donde $v1 = (1,2)$, $v2 = (0,1)$ si la matriz de transición de S a T es , determine los vectores de la base T. Tomado de Morales (2022)

Resolución:

Es suficiente aplicar la matriz de transición a los vectores de la base S para obtener los vectores de la base T.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_T$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_T$$

5.8 Bases ortonormales

Un conjunto de vectores es ortogonal,_en el presente video se muestra ¿qué significa ortogonal? Se incluyen algunos ejemplos que demuestran el uso del producto escalar para determinar si dos vectores son perpendiculares. Una colección de vectores se considera ortonormal si todos son mutuamente ortogonales y tienen norma 1. Es decir, una base ortonormal está compuesta por vectores unitarios que son ortogonales entre sí, asegurando que el producto escalar entre cualquier par de vectores distintos sea cero y que la norma de cada vector sea igual a uno. (Hernández Pérez, 2018)

La base canónica es un conjunto ortonormal cuyos vectores tienen casi todos sus componentes iguales a cero, excepto uno que aparece en diferentes posiciones sucesivamente. Un conjunto de vectores ortogonales (ortonormales) no nulos es linealmente independiente.

Un vector v se puede expresar en una base ortonormal $\{u1, u2, \ldots, u_n\}$ como $v = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$, donde $ci = v.\, u_i$

Un vector v se puede expresar en una base ortogonal $\{u1, u2, \ldots, u_n\}$ como $= c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$, donde $C_i = \frac{v \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$

Todo subespacio no nulo de R_n tiene una base ortonormal.

Construya una base ortonormal en R^3 comenzando con la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Solución

Se tiene $|v_1| = \sqrt{2}$, , entonces $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces

$$v_2' = v_2 - (v_2 \cdot u_1)u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como $|v_2'| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$

Continuando, se tiene $v_3' = v_3 - (v_3 \cdot u_1)u_1 - (v_3 \cdot u_2)u_2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, una base ortonormal en R^3 es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Construir una base ortonormal en R^2 comenzando con la base $\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Solución

$V_1 = (1, -3) \quad V_2 = (3, 0)$

Aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt

Primer vector

$U_1 = V_1 = (1, -3)$

$u_1 = (1, -3)$

Segundo vector

$U_2 = V_2 - \frac{V_2 \cdot U_1}{\|U_1\|^2} U_1$

$$U_2 = (3,0) - \frac{(3,0)\cdot(1,-3)}{\|(1,-3)\|^2}(1,-3)$$

$$U_2 = (3,0) - \frac{3}{10}(1,-3)$$

Al resolver las operaciones pertinentes, nos da como resultado

$$U_2 = \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

Normalizamos los vectores u_1 y u_2

$$\omega_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,-3)}{\|(1,-3)\|}$$

$$\omega_1 = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}; \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$w_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \frac{\left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)}{\left\|\left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)\right\|}$$

$$w_2 = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

Entonces, una base ortonormal en R^2 es

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right), \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$$

El proceso de Gram-Schmidt se utiliza para determinar una base ortonormal. Como se observa, el video muestra paso a paso el cálculo de bases ortonormales, se parte desde una base ortogonal y luego se convierte en ortonormal por el proceso de Gram-Schmidt es decir, a los vectores se los va a normalizar (además de ser ortogonales su norma es igual uno), por ejemplo, se tiene el subespacio de R^4 con base $\{(1,1,-1,0),(0,2,0,1),(-1,0,0,1)\}$ tomado de (Morales, 2022).

Resolución:

Como primer vector podemos tomar cualquier vector de la base, por ejemplo, el primero: $(1,1,-1,0)$

Para el segundo vector, los vectores de la base, y le quitamos su proyección en la dirección del primero.

$$v_2=(0,2,0,1)-\frac{(0,2,0,1)\cdot(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0)=(0,2,0,1)-\frac{2}{3}(1,1,-1,0)$$

$$=(0,2,0,1)-\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},0\right)=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{2}{3},1\right)$$

Podemos eliminar los denominadores, nos interesa por ahora solamente la dirección del vector, que quedaría:

$$v_2=(-2,4,2,3)$$

Para el vector restante, tomamos el que queda y le quitamos sus componentes en la dirección de los anteriores.

$$v_3=(-1,0,0,1)-\frac{(-1,0,0,1)\cdot(1,1,-1,0)}{3}(1,1,-1,0)-\frac{(-1,0,0,1)\cdot(-2,4,2,3)}{33}(-2,4,2,3)$$

$$v_3=(-1,0,0,1)+\frac{1}{3}(1,1,-1,0)-\frac{5}{33}(-2,4,2,3)=\frac{1}{11}(-4,-3,-7,6)\rightarrow(-4,-3,-7,6)$$

Transformamos ahora los vectores ortogonales en ortonormales, haciéndolos vectores unitarios

$$\hat{v}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1,0)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$$

$$\hat{v}_2=\frac{1}{\sqrt{33}}(-2,4,2,3)=\left(-\frac{2\sqrt{33}}{33},\frac{4\sqrt{33}}{33},\frac{2\sqrt{33}}{33},\frac{\sqrt{33}}{11}\right)$$

$$\hat{v}_3=\frac{1}{\sqrt{110}}(-4,-3,-7,6)=\left(\frac{-2\sqrt{110}}{55},\frac{-3\sqrt{110}}{110},\frac{-7\sqrt{110}}{110},\frac{3\sqrt{110}}{55}\right)$$

La base ortonormal de R^3 $S=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}},0,\frac{2}{\sqrt{5}}\right),\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right),(0,1,0)\right\}$. Escriba el vector $(2,-3,1)$ como combinación lineal de los vectores en S.

Resolución:

Recordemos que si tenemos una base ortonormal formada por vectores $\hat{u}_1$, cualquier vector $\vec{v}$ se puede expresar como $\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$, donde $c_i = \vec{v} \cdot \vec{u}_i$.

Aplicando esto al problema tenemos

$$c_1 = (2, -3, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5} - 0 + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$c_2 = (2, -3, 1) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{5} - 0 + \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$c_3 = (2, -3, 1)(0, 1, 0) = 0 - 3 + 0 = -3$$

Con lo que

$$(2, -3, 1) = \frac{4\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{3\sqrt{5}}{5}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 3(0, 1, 0)$$

Ahora le invito a continuar con el estudio de la unidad 5 mediante los siguientes apartados

5.9 Complemento ortogonal

Sea W un subespacio vectorial de R^n. En el video sobre [complemento ortogonal](), se evidencia algunas definiciones tales como complemento ortogonal, espacio columna, nulidad, transpuesta y espacio trivial, en este sentido el estudiante debe profundizar estos conceptos para poder obtener un complemento ortogonal de W denotado por $W^{\perp}$. (Poole, 2017), está dado por

$$W^{\perp} = \{x \in R^n : x \cdot h = 0\,\text{para toda}\,h \in H\}$$

Necesito

$$B = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_k\} \in W$$

$\vec{v} \in W^{\perp}$, implicaque $\vec{v} \cdot \vec{w}_i = 0 \forall i = 1, \ldots, k$

El complemento ortogonal es la solución al sistema homogéneo dado por la matriz de coeficientes cuyas filas son una base del subespacio.

Si A es una matriz mxn los espacios fundamentales asociados a A satisfacen las siguientes propiedades de ortogonalidad:

$$(Col(A))^{\perp} = Nul(A^T)(Nu(A))^{\perp} = Co(A^T) = Re(A))$$

Propiedades

Si W es un subespacio de R^n, entonces

i. $W^{\perp}$ es un subespacio de R^n
ii. $W \cap W^{\perp} = 0$
iii. $diW^{\perp} = n - diW$

Para una matriz:

El espacio nulo de la matriz es el complemento del espacio fila de la misma y el espacio nulo de la matriz transpuesta es el complemento del espacio columna de dicha matriz.

De acuerdo con el método de Gram-Schmidtlas proyecciones de un vector sobre un subespacio vectorial tienen algunas propiedades muy útiles que pueden aprovecharse de diferentes maneras, como veremos:

Si W es un subespacio de R^n con una base ortonormal $\{w1, w2, \ldots, wn\}$ y v es un vector de R^n, entonces la proyección ortogonal de v sobre W, denotada por la v esta dada por

$$\mathbf{proy}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k$$

Se observa que $\mathbf{proy}_W \mathbf{v} \in W$.

Podemos calcular la distancia de v a W usando $||v - \mathbf{proy}_W V||$. En otras palabras, el vector en W más cercano a v es $-\mathbf{proy}_W V$ o, lo que es lo mismo, $||v - w||$ es mínima cuando $w = -\mathbf{proy}_W V$.

Ejercicios

Hallar el complemento ortogonal de la variedad en R^4, resultado de la intersección de los planos:

$$A=\left\{(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,\begin{matrix}x+5y-2z=0\\ x+y-z+u=0\end{matrix}\right\}$$

Necesitamos:

- Una base de A.
- Un producto escalar: el euclídeo.

$$A=\left\{(x,y,z,u)\in\mathbb{R}^4\,\middle|\,\begin{matrix}x+5y-2z=0\\ x+y-z+u=0\end{matrix}\right\}$$

Despejando y encontramos los parámetros

$$\left.\begin{matrix}x+5y-2z=0\\ x+y-z+u=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}x+5y & =2\lambda\\ x+y & =\lambda-\mu\\ z & =\lambda\\ u & =\mu\end{cases}$$

$$\left\{\begin{matrix}x+5y=2\lambda\\ x+y=\lambda-\mu\\ z=\lambda\\ u=\mu\end{matrix}\right\}\overset{\substack{f_2-f_1\\ -\frac{1}{4}f_2\\ f_1-5f_2}}{\Rightarrow}\begin{cases}x=-\frac{7}{4}\lambda-\frac{5}{4}\mu\\ y=\frac{3}{4}\lambda+\frac{1}{4}\mu\\ z=\lambda\\ u=\mu\end{cases}$$

Entonces una base de A es

- Una base de $AB=(-7,3,4,0),(-5,1,0,4)$
- Un producto escalar: el euclídeo.

Los vectores base se pueden multiplicar por cualquier otro vector por su transpuesto y nos debe dar 0.

$$A^{\perp} = \left\{ (x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 \begin{matrix} (-7, 3, 4, 0)(x, y, z, u)^t = 0 \\ (-5, 1, 0, 4)(x, y, z, u)^t = 0 \end{matrix} \right\}$$

El ortogonal de un plano es otro plano.

Sea $W = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Encontrar una base para W.

Solución $W = \text{Col}(A), A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Para encontrar el $= \text{Nul}(A^T)$ determinamos la A^t, y deducimos un sistema homogéneo quedando de la siguiente manera:

$W^{\perp} = (\text{col}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A^T)$

Para encontrar el $= Nul(A^{\top})$ determinamos la A^t, y deducimos un sistema homogéneo quedando de la siguiente manera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Regresamos a un sistema de ecuaciones $-y + 2z = 0, y = 2z$

$x + y - z = 0, \quad x + 2z - z = 0$

$x = -z$

$W^{\perp}$ contiene los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$W^{\perp} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Por tanto, una base para $W^{\perp}$ es $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sea W un subespacio de R^3 con base $\{w1, w2\}$, donde $w_1 = (1,0,1)$ y $w_2 = (1,1,1)$. Exprese el vector $v = (2,2,0)$ como suma de un vector en W y otro vector en $W^{\perp}$, tomado de Morales (2022)

Resolución:

Tomemos un vector $u = (a,b,c) \in W^{\perp}$, este vector será perpendicular a cualquier vector de W, en particular a los de la base

$$(a,b,c)(1,0,1) = a + c = 0 \rightarrow a = -c$$

$$(a,b,c) \cdot (1,1,1) = a + b + c = b = 0$$

Si $c = t$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que podemos afirmar que

$$\text{Base de } W = (-1,0,1)$$

De acuerdo a lo solicitado en el problema:

$$(2,2,0) = \text{vector en } W + \text{vector en } W$$

$$(2,2,0) = [d(1,0,1) + e(1,1,1)] + f(-1,0,1)$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y lo transformamos mediante operaciones elementales de fila

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$f = -1$

$e = 2$

$d + e - f = 2 \rightarrow d = 2 - e + f = 2 - 2 + (-1) = -1$

$(2,2,0) = -1(1,0,1) + 2(1,1,1) - 1(-1,0,1) = (1,2,1) + (1,0,-1)$

Donde $(1,2,1)$ pertenece al subespacio W y $(1,0,-1)$ pertenece a $W^{\perp}$, puede además comprobar que los dos vectores son ortogonales.

Sea W un subespacio de R^3 generado por el vector $\vec{w} = (2,-3,1)$. Determine una base para $W^{\perp}$. Tomado de Morales (2022)

Resolución:

Sea (a,b,c) un vector de $W^{\perp}$, este vector será perpendicular a cualquier vector de W, en especial a $(2,-3,1)$.

$$(a,b,c)\cdot(2,-3,1) = 2a - 3b + c = 0; \quad c = t; \quad a = r \rightarrow 3b = 2r + t \rightarrow b = \tfrac{1}{3}(2r+t)$$

Expresamos paramétricamente el vector (a,b,c)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \frac{1}{3}(2r+t) \\ t \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Podemos concluir que

$\text{Base } W^{\perp} = (0,1,3),(3,2,0)$

Podríamos añadir que el subespacio W es la recta que pasa por el origen y por $(2, 3, -1)$ y $W^{\perp}$ es el plano perpendicular a esa recta que también pasa por el origen tomado de Morales (2022)

Calcule los cuatro espacios vectoriales asociados con $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ y compruebe que el espacio nulo de A es el complemento del espacio fila de A y que el espacio nulo de A^T es el complemento ortogonal del espacio columna de A.

Resolución:

Transformamos la matriz A para encontrar el espacio fila y el espacio nulo de A.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 - F_1]{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 + F_2]{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos $z = t; s = r$

Tomamos la ecuación de la segunda fila (igualando a 0) y despejamos y

$$-3y + 7z - 2s = 0 \rightarrow y = \frac{7t - 2r}{3}$$

Tomamos la ecuación de la primera fila (igualando a 0) y despejamos x

$$x + y - 2z + 3s = 0 \rightarrow x = -\frac{7t - 2r}{3} + 2t - 3r = \frac{-t - 7r}{3}$$

De donde

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -t-7r \\ 7t-2r \\ 3t \\ 3r \end{pmatrix} = \frac{t}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{r}{3}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos que $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$es una base para el espacio nulo de A.

Y

$T = (0,-3,7,-2),(1,1,-2,3)$

Es una base para el espacio fila de A.

Se puede verificar que los vectores de S y T son ortogonales entre sí.

Nos toca ahora trabajar con A^T para el espacio columna.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & -2 & -9 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & -2 & -9 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2-2F_1 \\ F_3-3F_1 \\ F_4-4F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -14 & 7 & 21 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\substack{F_3+3F_2\\F_4+7F_2}}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & -4\\0 & 2 & -1 & -3\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Encontramos que para el espacio nulo de A^T (y haciendo $z = t$ y $s = r$):

$$y = \frac{t+3r}{2}$$

$$x = -3y + t + 4r = -3\frac{t+3r}{2} + t + 4r = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}r$$

Con lo que queda

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\s\end{pmatrix} = \frac{t}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{r}{2}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\end{pmatrix}$$

Con lo que una base del espacio nulo de A^T será:

$$S' = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

Y la base del espacio columna será:

$$T' = \left\{\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

Se puede comprobar que cada vector de S' es perpendicular a cada vector de T', con lo que concluimos que el espacio nulo de A^T es complemento ortogonal del espacio columna de A.

Determine la $-\text{proy}_W V$ para el vector $v = (3, 4, -1)$ y el subespacio de R^3 con base $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$. Tomado de Morales (2022).

Resolución:

La fórmula de la proyección para vectores ortonormales es:

$$\text{Proy}_W v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$$

Reemplazando

$$\text{Proy}_W v = (3, 4, -1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (3, 4, -1) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{Proy}_W v = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{7}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{Proy}_W v = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{14}{5}, 0, \frac{7}{5}\right)$$

$$\text{Proy}_W v = (3, 0, -1)$$

Determine la $-\text{proy}_W V$ para el vector $v = (-5, 0, 1)$ y el subespacio de R^3 con base $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right\}$. Tomado de Morales (2022)

Resolución:

Aplicamos nuevamente la fórmula

$$\text{Proy}_W v = (v \cdot u_1)u_1 + (v \cdot u_2)u_2$$

Reemplazando

$$\text{Proy}_W v = (-5, 0, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-5, 0, 1) \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{Proy}_W v = -\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{11}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\text{Proy}_W v = (-5, 0, 1)$$

Note usted que $\mathbf{proy}_W V$, esto sucede debido a que v está en W; podría suceder también que la proyección sea 0, en este caso se debería a que v es ortogonal a W.

Determine la distancia del punto $(2,3,-1)$ al plano $3x-2y+z=0$ tomado de Morales (2022)

Resolución:

Como ese plano pasa por el origen, constituye un subespacio en $R3$, determinaremos una base ortonormal del mismo.

Despejamos z

$$z=2y-3x$$

Un punto cualquiera del plano sería

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Con lo que una base para el plano sería

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

Pero esta base no es ortogonal, para hacerla tomamos cualquiera como primer vector, por ejemplo $(0,1,2)$, el segundo vector será (quitándole su proyección en la dirección de W)

$$(1,0,-3)-\frac{(1,0,-3)\cdot(0,1,2)}{5}(0,1,2)$$

$$(1,0,-3)+\frac{6}{5}(0,1,2)$$

$$\left(1,\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)\rightarrow(5,6,-3)$$

Una base ortogonal sería

$$\{(1,0,-3),(5,6,-3)\}$$

Y la base ortonormal sería

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right),\left(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}}\right)\right\}$$

La proyección del vector $(2,3,-1)$ en el plano sería

$$\text{Proy}_W v=(v\cdot u_1)u_1+(v\cdot u_2)u_2$$

$$=(2,3,-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$+(2,3,-1)\cdot\left(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}}\right)$$

$$=\frac{5}{\sqrt{10}}\left(\frac{1}{\sqrt{10}},0,-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)+\frac{31}{\sqrt{70}}\left(\frac{5}{\sqrt{70}},\frac{6}{\sqrt{70}},-\frac{3}{\sqrt{70}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2},0,-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{31}{14},\frac{93}{35},-\frac{93}{70}\right)$$

$$=\left(\frac{19}{7},\frac{93}{35},-\frac{18}{7}\right)$$

El vector ortogonal sería

$$(2,3,-1)-\left(\frac{19}{7},\frac{93}{35},-\frac{198}{70}\right)=\left(-\frac{5}{7},\frac{12}{35},-\frac{268}{70}\right)$$

$$=\left(-\frac{50}{70},\frac{24}{70},-\frac{268}{70}\right)$$

La norma de este vector sería la distancia del punto $(2,3,-1)$ al plano $3x-2y+z=0$

$$\vec{n}=(a,b,c)=(3,-2,1)$$

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = d(P,\Pi) = \frac{|3\cdot 2-2\cdot(3)+1(-1)|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{14}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14} = 0.27\, u$$

5.10 Mínimos cuadrados

El tipo de solución inconsistente en un sistema matricial $Ax = b$, es decir no tiene una solución que satisfaga todas las ecuaciones, por tanto, es necesario encontrar $A\hat{x} = \mathrm{proy}_w v$ que sería la solución más próxima a todas las ecuaciones dadas.

Si nos planteamos $A\hat{x} - b = 0$ y lo multiplicamos por A^T tenemos:

$A^T(A\hat{x} - b) = 0 \rightarrow A^T A\hat{x} = A^T b$ (solución por mínimos cuadrados de $Ax = b$), en el video propuesto se muestra la explicación paso de la aplicación de conceptos de matriz transpuesta, inversa, producto de matrices para obtener los elementos del modelo lineal para llegar a la forma $y = ax + b$ para ajustar a un modelo lineal.

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T b}$$

Este procedimiento se utiliza mucho para encontrar el ajuste de una recta (en general de un polinomio) a un grupo de datos que supera el necesario para tener una solución exacta del problema.

Ejercicio

Hallar la recta que mejor se ajusta a los puntos $(1, 5)$; $(2, 9)$; $(3, -1)$; $(6, 4)$

Solución

Hallar la matriz A y B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(A^\top A)^{-1} A^\top$ y B

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 50 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 50 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 50 & 0 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{4} R_1 \to R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 12 & 50 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_2 \to R_2 - 12R_1 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 14 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{14} R_2 \to R_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/14 & 1/14 \end{array}\right)$$

$$F_1 \to F_1 - 3F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 25/28 & -3/14 \\ 0 & 1 & -3/14 & 1/14 \end{array}\right)$$

Entonces

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} 25/28 & -3/14 \\ -3/14 & 1/14 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos $(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot y$

$$(A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot B = \begin{pmatrix} 25/28 & -3/14 \\ -3/14 & 1/14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 19/28 & 13/28 & 1/4 & -11/28 \\ -1/7 & -1/14 & 0 & 3/14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A) A^T B = \begin{pmatrix} 23/4 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}$$

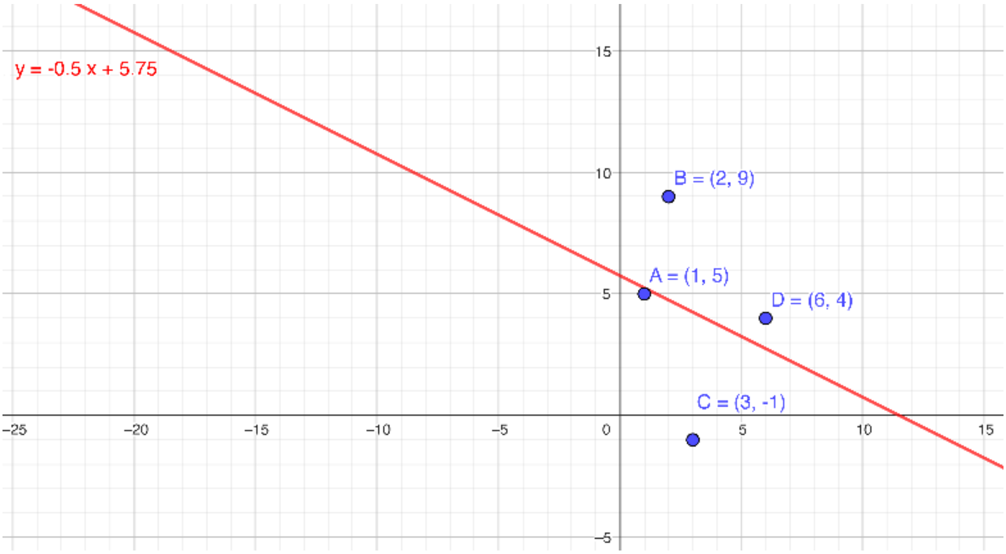
La recta que mejor de ajusta es:

$$y = \frac{23}{4} - \frac{1}{2}x$$

$$y = 5,75 - 0,5x$$

Figura 46

Solución para mínimos cuadrados



Nota. Parra, N., 2025.

Encuentre la recta que da el mejor ajuste para los datos $\{(1,2),(2,3),(3,5),(4,7)\}$.

Solución:

En este caso la matriz A es dada por:

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix} \quad y \quad b=\begin{bmatrix}2\\3\\5\\7\end{bmatrix}$$

Obteniendo los demás elementos se tiene:

$$A^T=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}$$ y $$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix}$$ entonces

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&10\\10&30\end{bmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\5\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\51\end{bmatrix}=z$$ luego

$(A^TA)^{-1}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}30&-10\\-10&4\end{bmatrix}$ y la solución es

$$x=(A^TA)^{-1}bz=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}30&-10\\-10&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}17\\51\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{34}{20}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1.7\end{bmatrix}$$

Luego $y=0+1.7x$, $y=1.7x$ es la recta que mejor aproxima estos cuatro puntos.

Una empresa pequeña lojana ha mantenido su negocio durante cuatro años y ha registrado ventas anuales (en decenas de miles de dólares) de la siguiente manera:

Ventas anuales

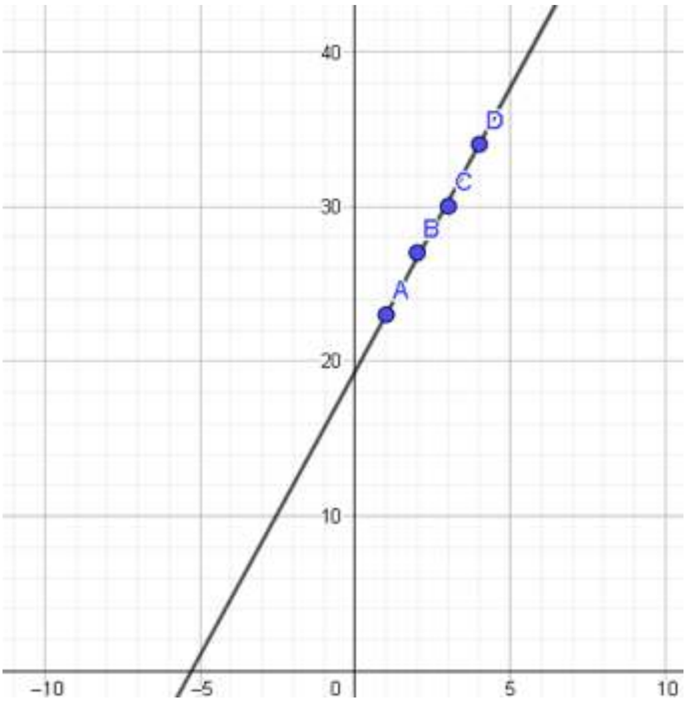
Año	1	2	3	4
Ventas	23	27	30	34

Nota: Parra, N., 2025.

De acuerdo, a los puntos de la tabla se tiene la siguiente gráfica de acuerdo con el siguiente modelo $f(t) = \alpha + \beta t$ que mejor encaja los datos en el sentido de mínimos cuadrados:

Figura 47

Gráfica modelo $f(t) = \alpha + \beta t$



Nota. Parra, N., 2025.

En este caso la matriz A es dada por

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix}\quad y\quad b=\begin{bmatrix}23\\27\\30\\34\end{bmatrix}\quad y\quad x=\begin{bmatrix}\alpha\\3\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\\1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&10\\10&30\end{bmatrix}$$

$$A^Tb=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\27\\30\\34\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}114\\203\end{bmatrix}$$

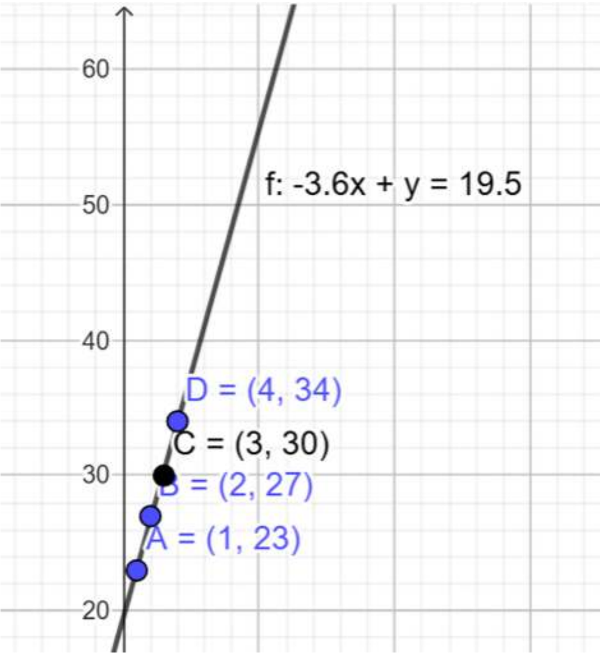
La solución es:

$$x=(A^TA)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}114\\203\end{bmatrix}=\frac{1}{20}\begin{bmatrix}30&-10\\-10&40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}114\\203\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19.5\\3.6\end{bmatrix}$$

Por lo que se predice que las ventas en el año t serán. Por ejemplo, las ventas para el año cinco son 375000. El modelo matemático calculado se muestra en la siguiente figura:

Figura 48

Solución modelo matemático



Nota. Parra, N., 2025.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades:

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades, bases ortonormales y complemento ortogonal, en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y en la guía didáctica semana 14.
2. Revisión de los ejercicios propuestos de bases ortonormales y complemento ortogonal en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 14.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

4. Es aconsejable autoevaluarse para verificar su nivel de conocimientos y competencias adquiridas respecto a la unidad estudiada. Tomada de Morales (2022)

Retroalimentación general para la solución de la autoevaluación

Es fundamental realizar una autoevaluación, revisando tanto la literatura como los ejercicios propuestos, los cuales explican de manera clara y detallada cada paso del proceso de resolución.

A continuación, algunas consideraciones para la resolución de los ejercicios.

- Las propiedades que se deben tomar en cuenta para los espacios vectoriales serían: Cerradura, conmutativa, asociativa y distributiva.
- Recuerde que las propiedades que definen un espacio vectorial son las mismas que se aplican directamente a los números reales.
- Puede resumirse los espacios vectoriales de la siguiente manera:
- $R =$ conjunto de todos los números reales.
- $R^2 =$ conjunto de todos los pares ordenados.
- $R^3 =$ conjunto de todas las tercias ordenadas.
- $R^n =$ conjunto de todas las n-adas ordenadas.
- Para la solución de los ejercicios de aplicación cabe señalar que es importante tener en cuenta el producto por un escalar y este debe cumplir con las propiedades para ser un espacio vectorial.

Autoevaluación 5

Indique con una V (verdadero) o F (falso) las siguientes expresiones:

1. (   ) Un espacio vectorial real es un conjunto de vectores que cumple propiedades de la suma y multiplicación por escalar entre ellos.

2. ( ) Si u y v son elementos cualesquiera de V, dado que $u \oplus v$ está en V, dicha característica constituye la propiedad de cerradura en Å.

3. ( ) Si V es un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V que no cumple las operaciones de suma y multiplicación por escalar, W es subespacio de V.

4. ( ) Todo espacio vectorial tiene el subespacio {0}.

5. ( ) Un subespacio cumple las condiciones de la operación $\oplus$ y $\odot$ en un espacio vectorial.

6. ( ) Un espacio vectorial V no puede ser expresado con un conjunto finito de vectores contenidos en V.

7. ( ) Cada vector de un espacio vectorial V puede ser generado por un conjunto de vectores del espacio vectorial V, por lo que el conjunto de vectores no se puede denominar generador de V.

8. ( ) Para establecer si un conjunto de vectores generan al espacio vectorial V, se selecciona un vector arbitrario v en V, luego se determina si v es una combinación lineal de los vectores dados.

9. ( ) Un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, son linealmente dependientes si existen constantes todas iguales a cero tal que al ser multiplicadas por los vectores mencionados el resultado sea 0.

10. ( ) Un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, forman una base para V, si generan a V y son linealmente independientes.

11. ( ) Un espacio vectorial es de dimensión finita si existe un subconjunto finito de V que es una base para V.

12. ( ) El número de vectores en una base para V, es la dimensión de un espacio vectorial.

13. ( ) La dimensión del espacio fila de A se denomina rango fila de A y la dimensión del espacio columna de A se denomina rango columna de A.

14. ( ) El rango fila y el rango columna de una matriz $A = (a_{ij})$ de $\mathbf{mxn}$ no son iguales.

15. ( ) Para obtener el rango de una matriz A, se debe llevar a su forma escalonada reducida por filas, el número de las filas no nulas constituye el rango..

16. $V = \{(x, y)/y = 2x + 1, x \in R$, es decir V, es el conjunto de puntos en R^2 que están sobre la recta $y = 2x + 1$, suponga 2 puntos para las operaciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2), los cuales están en V.

17. V, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y), donde $x > 0$ y $y > 0$; donde las operaciones están definidas como: $(x, y) \oplus (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$ y $c \odot (x, y) = (cx, cy)$

18. Determine si el conjunto W, formado por todos los puntos de R^2, que tiene la forma (x, x), es una línea recta y si puede ser considerado un subespacio.

19. Determine si los vectores $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, 1)$ y $v_3 = (1, 6, 2, 0)$ son linealmente independientes.

20. Sea $S = v1, v2, v3, v4$, donde $v1 = (1, 2, 2)$, $v2 = (3, 2, 1)$, $v3 = (11, 10, 7)$, y $v4 = (7, 6, 4)$.

21.

Determine el rango y nulidad de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 15

Actividades finales del bimestre

Le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Lectura comprensiva, análisis e interpretación, conceptos y propiedades, sistemas homogéneos, rango de una matriz, bases ortonormales y complemento ortogonal, en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y en la guía didáctica semana 14.
2. Revisión de los ejercicios propuestos de sistemas homogéneos, rango de una matriz, bases ortonormales y complemento ortogonal en la bibliografía básica, así como en la bibliografía complementaria y la guía didáctica semana 14.
3. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Le invito a reforzar sus conocimientos, desarrollando las siguientes actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Participar en las tutorías semanales, plantear inquietudes, sugerencias y observaciones.
2. Revisión de ejercicios resueltos y resolución de ejercicios propuestos en la bibliografía básica y complementario detallado en cada unidad del segundo bimestre.
3. Desarrollar la evaluación presencial.

4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	V	Si $y = mx$ tenemos una recta que pasa por el origen.
2	F	La representación gráfica de una ecuación lineal es una recta.
3	V	Si tenemos m ecuaciones con n incógnitas en total, tenemos un sistema de ecuaciones lineales.
4	F	$a1$, $a2$, $a3$, … son los coeficientes de la ecuación
5	F	Los sistemas lineales compatibles tienen solución única o infinitas soluciones.
6	a	En b y c tenemos incógnitas elevadas a una potencia distinta de uno.
7	1b, 2a,3c	Si las rectas se cortan en un solo punto tenemos una solución única, si las rectas coinciden tenemos infinitas soluciones, si las rectas no se cortan no tenemos solución.
8	1b, 2a	En los sistemas consistentes hay alguna solución (una o infinitas), en lo sistemas inconsistentes no hay solución.
9	c	Los puntos de intersección representan las soluciones del sistema.
10	a	Tiene solución única.
	b	Tiene solución única.
	c	No tiene solución.
	d	Tiene solución única.
11		$y = -245x + 3500$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	V	Un conjunto de ecuaciones lineales es un sistema lineal.
2	V	Resolver un sistema de ecuaciones lineales es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen todas las ecuaciones.
3	F	Algunos sistemas de ecuaciones lineales pueden no tener una solución, es decir, ser inconsistentes.
4	V	Las tres opciones que tiene un sistema lineal son: infinitas soluciones, solución única o no tener solución.
5	F	m representa el número de filas y n el de columnas.
6	F	Una matriz es igual a otra cuando todos sus elementos son respectivamente iguales.
7	F	El resultado es una matriz de orden 1x1
8	F	La multiplicación de matrices no tiene la propiedad conmutativa.
9	V	Dos matrices son inversas, la una de la otra, si su producto es igual a la matriz identidad.
10	V	En la forma escalonada el elemento pivote de cada fila es 1.
11	F	Las operaciones elementales por fila o renglón son: intercambio de filas, multiplicación de la fila por un número diferente de 0; y restar a una fila otra multiplicada por un número.
12	V	El método de Gauss-Jordan consiste en transformar la parte izquierda de la matriz ampliada a la forma escalonada reducida.
13	V	El primer elemento de cada fila diferente de 0 debe ser.
14	F	Los elementos de la segunda y tercera fila de la matriz producto no son iguales a los de la matriz identidad.
15	F	No necesariamente, depende del número de filas.
16	F	Para tener una matriz equivalente debemos haber realizado previamente una operación fundamental por renglón.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
17	a	$x = 1, y = 2, z = 3$ Se trata de un sistema compatible de solución única.
	b	$x = 3, y = 2, z = 1$ Se trata de un sistema compatible de solución única.
18		$AB = \begin{pmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 2 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 15 & 24 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}, \quad BC \quad \textbf{no se puede multiplicar}$ Las dimensiones de las matrices juegan un papel fundamental en la solución del producto de matrices.
19	a	$x = 1, y = 2, z = 3$. Se trata de un sistema compatible de solución única.
	b	$x = 2, y = -1, z = 3$. Se trata de un sistema compatible de solución única
	c	El sistema no tiene solución. Se trata de un sistema incompatible.
20	a	$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ Compruebe multiplicando la matriz original con su inversa, el resultado debe ser la matriz identidad
	b	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ Compruebe multiplicando la matriz original con su inversa, el resultado debe ser la matriz identidad
	c	No posee inversa. La segunda fila es el doble de la primera.
21	a	Para el año **2030** es aproximadamente **54.78 mm**.
	b	La variación promedio de precipitación por año es +3.57 mm/año.
	c	El modelo de ajuste lineal obtenido es $y = 39.74x - 79786.8$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	V	El determinante de una matriz con un único elemento será el valor de ese único elemento.
2	V	El valor del determinante es $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
3	V	El determinante de una matriz y el de su transpuesta son iguales.
4	F	Cuando intercambiamos una vez filas, el valor del determinante cambia de signo.
5	F	El valor del determinante es 0, existe.
6	F	El valor del cofactor es 8.
7	V	La fórmula enunciada es correcta.
8	F	La fórmula proporcionada está invertida.
9	V	Correcto, es parte del método de Cramer.
10	V	Correcto, es la condición (que tenga solución única)
11	$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16, \quad c_{11} = 16$ $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \quad c_{32} = -26$	Verifique.
12	$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 & 8 \\ 6 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$	Verifique multiplicando por A, el resultado debe ser la matriz identidad.
13	$x_1 = \frac{144}{55}, \quad x_2 = -\frac{61}{55}, \quad x_3 = \frac{46}{61}$	Verifique los valores.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	V	El sentido del vector es una característica indispensable en vectores.
2	V	La equivalencia de vectores es una estrategia en el análisis de vectores.
3	V	La representación gráfica de un vector nos ayuda a comprender el tema de vectores.
4	V	El elemento cero es parte también del conjunto de los reales.
5	V	La magnitud de un vector es una característica intrínseca de un vector la cual depende de sus componentes.
6	V	La suma de vectores se efectúa con vectores pertenecientes al mismo espacio vectorial.
7	V	Las leyes del producto escalar pueden ayudar a comprender la perpendicularidad entre vectores.
8	V	Tener claro la diferencia entre una magnitud escalar o magnitud vectorial.
9	V	El orden prevalece cuando calculamos el producto escalar entre vectores.
10	V	Es importante diferenciar el resultado entre producto escalar y el producto vectorial además del manejo de la regla de Sarrus.
11	$c.a=(4,6,8)$	Multiplicamos los componentes de $\boldsymbol{a}$ por 2
	$a+b=(3,1,9)$	Sumamos los respectivos componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$
	$a.b=16$	$(2)(1)+(3)(-2)+(4)(5)=16$
	$llall=\sqrt{29}$	$2^2+3^2+4^2=29$
	$axb=23i–6j-7k$	Verificamos aplicando un método diferente al usado para llegar a la respuesta.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 5

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	V	Para demostrar un espacio vectorial o subespacio necesitamos conocer los axiomas que rigen a los espacios vectoriales.
2	V	La propiedad clausurativa es muy importante porque permite verificar si estamos analizando los objetos matemáticos del espacio vectorial al que pertenece.
3	F	Para que sea un subespacio vectorial debería cumplir con la propiedad de cerradura de las operaciones suma y producto.
4	V	Es necesario verificar si el elemento cero si forma parte de ese espacio vectorial.
5	V	Un subespacio hereda las propiedades de un espacio vectorial.
6	F	Si existen los espacios vectoriales con finitos elementos, por ejemplo, los binarios.
7	F	Si cada vector de V puede ser generado por un conjunto de vectores, a este conjunto se lo denomina generador de V.
8	V	Para analizar un vector particular de un espacio vectorial evaluarlo mediante los diez axiomas con respecto a la suma y al producto, si cumple con estos diez axiomas.
9	F	El enunciado debería decir “diferentes” de cero.
10	V	Es importante para verificar si son base de un espacio vectorial resolverlo por Gauss- Jordán y al finalizar tener una respuesta única para que pueda concluirse de que si son LI y que generan al espacio al que pertenecen.
11	V	La definición de base es un conjunto finito de vectores que generan a un espacio vectorial.
12	V	Siendo una base un conjunto finito de vectores, el número de vectores que forman la base determina su dimensión.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
13	V	Se sabe que cada tipo de matriz posee dimensión y rango diferente.
14	F	El rango fila y el rango columna de una matriz son iguales.
15	V	El rango es el número de filas no nulas, se requiere que la matriz se reduzca a una matriz escalonada.
16	no constituye un espacio vectorial.	No contiene al vector (0,0)
17	no es un espacio vectorial	No contiene al vector (0,0)
18	Puede ser considerado un subespacio vectorial de R^2	Es parte del espacio vectorial R^2 y cumpla las propiedades de cerradura para la suma y el producto escalar.
19	Los vectores son linealmente independientes	Se puede comprobar a través de la definición.
20	Base posible v_1, v_2, $\mathbf{dimensi\acute{o}n=2}$	Solo dos de los vectores son linealmente independientes.
21	Rango=2, nulidad=2	Se reduce a la forma escalonada usando operaciones elementales de fila, solo hay dos filas no nulas.

Ir a la autoevaluación

5. Glosario

Determinante: Es una matriz A cuadrada, en donde se pueden combinar para encontrar un número real "determinante", y que luego se utiliza para resolver ecuaciones lineales simultáneamente

Ecuación: Es una igualdad algebraica que contiene números y letras que representan números, así por ejemplo se tiene que: $x+3y+6z=7$, es una ecuación.

Ecuación lineal: La ecuación de primer grado está representada por incógnitas que tienen una potencia 1, por ejemplo: $6(x-2)+3x=-3x$, para este caso se tiene una ecuación de primer grado o también definida como "lineal".

Espacio vectorial: Determinado por un conjunto de elementos definidos como vectores y un conjunto de números reales definidos como escalares; se puede realizar la adición vectorial y la multiplicación por un escalar.

Igualdad: Es una expresión matemática que contiene una igualdad "=".

Igualación: un tipo de método de resolución de sistemas lineales despeja una variable en ambas ecuaciones para igualar entre sí las expresiones obtenidas, finalmente se tiene una ecuación con una sola incógnita que se resuelve.

Identidad: Es una expresión algebraica que muestra evidencia ser verdadera.

Matriz cuadrada: Es una matriz A que tiene el mismo número de filas y columnas.

Matriz identidad: Es una matriz A de dimensión $m \times n$ en donde se tiene un valor de uno en la diagonal principal y cero en el resto de los elementos.

Matriz Inversa: Una matriz cuadrada A inversa cuando existe una matriz B con la propiedad de que $A \times B = 1$.

Matriz diagonal si todos los elementos que no están sobre la diagonal principal son cero

Matriz transpuesta: Una matriz cuadrada que responde a la definición

Reducción: Un tipo de método de resolución de sistemas lineales, en la que se promueve que una de las dos variables aparezca con coeficientes opuestos para que al realizar la adición entre las expresiones, se elimine, obteniendo una ecuación con una única variable. La otra variable se obtiene sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales, el valor de la variable conocida.

Sistema compatible: Sistema lineal que tiene solución.

Sistema compatible definido: Sistema que tiene una única solución.

Sistema incompatible: Sistema que no tiene ninguna solución.

Subespacio: Es un subconjunto W de un espacio vectorial V que es cerrado bajo la operación de la suma y la multiplicación por un escalar.

Sustitución: Un tipo de método de resolución de sistemas lineales, que despeja una las variables de una de las dos ecuaciones y sustituye la expresión algebraica resultante en esa misma variable, pero en la segunda ecuación.

Término: Es un sumando cualquiera utilizada en una expresión algébrica.

Vector: Es el nombre genérico para cualquier elemento de un espacio vectorial.

Vector unitario: Es un vector de longitud 1.

Proyección: Es la perpendicular que se proyecta de un vector sobre otro cuyo punto de intersección de la perpendicular es el punto final del vector proyección.

Matriz adjunta es aquella en la que cada elemento se sustituye por su **adjunto**

Menor queda después de borrar el renglón i y la columna j de A

Cofactor determina el signo del menor

Triangular superior si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son cero.

Triangular inferior si todos sus elementos arriba de la diagonal principal son cero.

6. Referencias bibliográficas

Grossman, S., & Flores, J. (2012). Álgebra Lineal. In *McGraw Hill*. https://www.academia.edu/10617474/%C3%81lgebra_Lineal_7ma_Edici%C3%B3n_Stanley_I_Grossman

Hernandez Perez, M. (2018). *Algebra lineal: ejercicios de practica*. Grupo Editorial Patria. https://elibro.net/es/lc/bibliotecautpl/titulos/40529

Kolman, B. /Hill, D. (2013). *Algebra Lineal, Fundamentos y Aplicaciones* (Primera, Vol. 1). Paerson. https://visorweb.utpl.edu.ec/reader/algebra-lineal-fundamentos-y-aplicaciones?location=41

Morales, G. (2022). *Álgebra Lineal* (pp. 1–198). Universidad Técnica Particular de Loja.

Poole, David. (2017). *Linear algebra : a modern introduction*. Cengage Learning.

Pérez, Mauricio. (2018). Álgebra Lineal Ejercicios de práctica. Primera Edición. Ciudad de México: Patria.

Poole, David. (2017). Álgebra Lineal: Una Introducción Moderna. Cuarta Edición

México D.F: Cengage Learning

Referencia de Recursos

Fresno.pntic.mec.es. 2022. *Algebra*. [online] tomado de: https://www.geogebra.org/m/uqbzx4ce [Accedido el 23 enero 2022].

GeoGebra. 2022. *Introducción Interactiva al Algebra Lineal*. [online] tomado de: https://www.geogebra.org/m/vmeqdn4u [Accedido el 23 enero 2022].

GeoGebra. 2022. *Matriz traspuesta o transpuesta*. [online] tomado de: https://www.geogebra.org/m/mafmgjpd [Accedido el 26 enero 2022].

Llopis, J., 2022. *SUMA DE MATRICES: EJEMPLOS Y EJERCICIOS RESUELTOS: BACHILLER*. [online] Matesfacil.com tomado de: https://www.matesfacil.com/matrices/resueltos-matrices-suma.html [Accedido el 26 enero 2022].

Es.liveworksheets.com. 2022. *Ejercicio de Método Matriz Ampliada Sistema de 2 ecuaciones*. [online] tomado de: https://es.liveworksheets.com/fr2111498bx [Accedido el 26 enerol 2022].

Es.liveworksheets.com. 2022. *Ejercicio de Inversa de matrices*. [online] tomado de: https://es.liveworksheets.com/gp1266932jz [Accedido el 26 enero 2022].

Amaguaña, N., 2022. *Ejercicio interactivo de Matriz Inversa*. [online] Es.liveworksheets.com tomado de: https://es.liveworksheets.com/ag1364123ju [Accedido el 26 enero 2022].

García, M., 2022. *Libro digital interactivo*. [online] Proyectodescartes.org tomado de: https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/AlgebraLinealBachillerato-JS/indexb.html [Accedido el 26 enero 2022].

Didactalia.net. 2022. *Vectores - Didactalia: material educativo*. [online] tomado de: https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/vectores/9bf65429-06b3-406f-b5f5-3a682a1c33a5 [Accedido el 26 enero 2022].

Didactalia.net. 2022. *Vectores en R3 - Didactalia: material educativo*. [online] tomado de: https://didactalia.net/comunidad/materialeducativo/recurso/vectores-en-r3/8e510412-4d1b-42df-8af1-a491bed91541 [Accedido el 26 enero 2022].

Matefacil, 2022. 33. *Ángulo entre vectores, demostración de fórmula | Cálculo vectorial*. [video] Available at: https://www.youtube.com/watch?v=5oUBDSi1q5k [Accedido el 26 enero 2022].

Youtube.com. 2022. 32. *Propiedades del producto punto. Con demostración | Cálculo vectorial*. [online] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=v13fgi4lDpQ [Accedido el 26 enero 2022].

Matefacil, 2022. *https://www.youtube.com/watch?v=cfe-IS-gNoU*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=cfe-IS-gNoU [Accedido el 26 enero 2022].

Matefacil, 2022. 48. *Producto punto de vectores*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=yEwXQm9GKtQ [Accedido el 26 enero 2022].

Geometria Analitica. 2022. *Cómo calcular el producto vectorial de dos vectores (ejemplos)*. [online] tomado de: https://www.geometriaanalitica.info/producto-vectorial-de-dos-vectores-cruz-formula-ejemplos-ejercicios-resueltos/ [Accedido el 23 enero 2022].

Mates con Andrés, 2022. *Cómo Obtener las Ecuaciones de la Recta en el Espacio (ecuación VECTORIAL, PARAMÉTRICA y CONTINUA)*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=2fb7SsAF1uk [Accedido el 26 de enero 2022].

Mates con Andrés, 2022. *Cómo Obtener las Ecuaciones de un Plano en el Espacio (ecuación VECTORIAL, PARAMÉTRICA e IMPLÍCITA)*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=RllkKTqIA58 [Accedido el 23 de enero 2022].

profesor10demates, 2022. *Espacios vectoriales 1 que es un espacio vectorial*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=q6IQJA8qvok [Accedido el 24 de enero 2022].

Morilloon, G., 2022. *Definición y Ejemplos de Espacios Vectoriales*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=UIsQir8CXas [Accedido el 25 de enero 2022].

Escuela Superior Politécnica del Litoral, 2022. *Problemas sobre espacios vectoriales - Sesión 12 - 2/12*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=QmnvV4M5wh0 [Accedido el 26 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. *SUBESPACIOS vectoriales ejercicios resueltos paso a paso - CURSO de Álgebra Lineal*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=faZnL8E6XEw&t=19s [Accedido el 25 de enero de 2022].

Matemáticas Javi, 2022. *Conjunto GENERADOR de un ESPACIO VECTORIAL*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=5F4UfNIE1oo [Accedido el 26 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. *Cómo saber si los Vectores son Linealmente INDEPENDIENTES o Dependientes*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=IwDDu1GzdLY [Accedido el 23 de enero 2022].

Matemáticas Profesor Luis Felipe, 2022. *Determinar si estos Vectores son Linealmente Dependientes o Independientes | Álgebra Lineal*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=0jJ5yf0Mxq0 [Accedido el 23 de enero 2022].

Ciencias.medellin.unal.edu.co. 2022. *Universidad Nacional de Colombia : Clase 5. Parte 2. Sistemas homogéneos*. [online] tomado de: https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/clases/8-clases/52-clase-5-parte2.html [Accedido el 26 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. *Cómo hallar el NÚCLEO y NULIDAD de una MATRIZ ejercicios resueltos Álgebra Lineal*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=6L3DQUs6kKA [Accedido el 26 de enero 2022].

unicoos, 2022. *RANGO de una matriz por determinantes*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=jHP6TdVUT5o [Accedido el 26 de enero 2022].

Mates con Andrés, 2022. *Cómo Calcular el RANGO de una MATRIZ | Método de Gauss*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=RjG6mGw41-8 [Accedido el 26 de enero 2022].

lasmatematicas.es, 2022. *Vectores ortogonales*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=NHnnLSoDEjI [Accedido el 25 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. *BASE ORTOGONAL y una BASE ORTONORMAL usando el Método de Gram Schmidt*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=VV1nRj7IQfY [Accedido el 25 de enero 2022].

Universidad Nacional de Colombia, 2022. *https://www.youtube.com/watch?v=Jpcc-iwjYso*. [video] tomado de: https://www.youtube.com/watch?v=Jpcc-iwjYso [Accedido el 25 de enero 2022].

Matemáticas Javi, 2022. *Aproximación por MÍNIMOS cuadrados ÁLGEBRA LINEAL*. [video] Available at: https://www.youtube.com/watch?v=uzIzgDr77L4 [Accessed 24 January 2022].