Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica

Guía didáctica

Facultad Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)	V

Autores:

Hernán Serafín Bustillos Ronquillo

Reestructurada por:

Nora Esperanza Parra Celi

Ricardo Patricio Blacio Maldonado

EDUC_3150

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica

Guía didáctica

Hernán Serafín Bustillos Ronquillo
Reestructurada por:
Nora Esperanza Parra Celi
Ricardo Patricio Blacio Maldonado

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-39-022-6

Año de edición: diciembre, 2020

Edición: primera edición reestructurada en enero 2025 (con un cambio del 25%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Comunicación oral y escrita.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Trabajo en equipo.
- Comunicación en inglés.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3 Competencias del perfil profesional

- Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física mediante la fundamentación teórico-práctico de los sistemas de conocimiento que, faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado.
- Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la

contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

- Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.
- Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.
- Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.
- Elaborar, ejecutar y evaluar proyectos y/o procesos de investigación que conlleven la recopilación, organización y análisis de información en el ámbito de las matemáticas y la física enfocados a la generación de nuevos conocimientos, habilidades y actitudes que aporten a la solución de problemas prácticos de su comunidad.
- Desarrollar, ejecutar y difundir proyectos pedagógicos y didácticos con metodologías activas e innovadoras, involucrando la matemática y la física, vinculados a la solución de problemas de la realidad y que apoyen la integración de los docentes con el entorno natural y social de la comunidad y del país en general.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

La limitada preparación de bachillerato en los conceptos básicos y fundamentos teóricos de la matemática dificulta el aprendizaje significativo de nuevos conocimientos disciplinares y, en consecuencia, impiden una formación integral enfocada a la modelización y resolución de problemas del entorno natural y social.

2. Metodología de aprendizaje

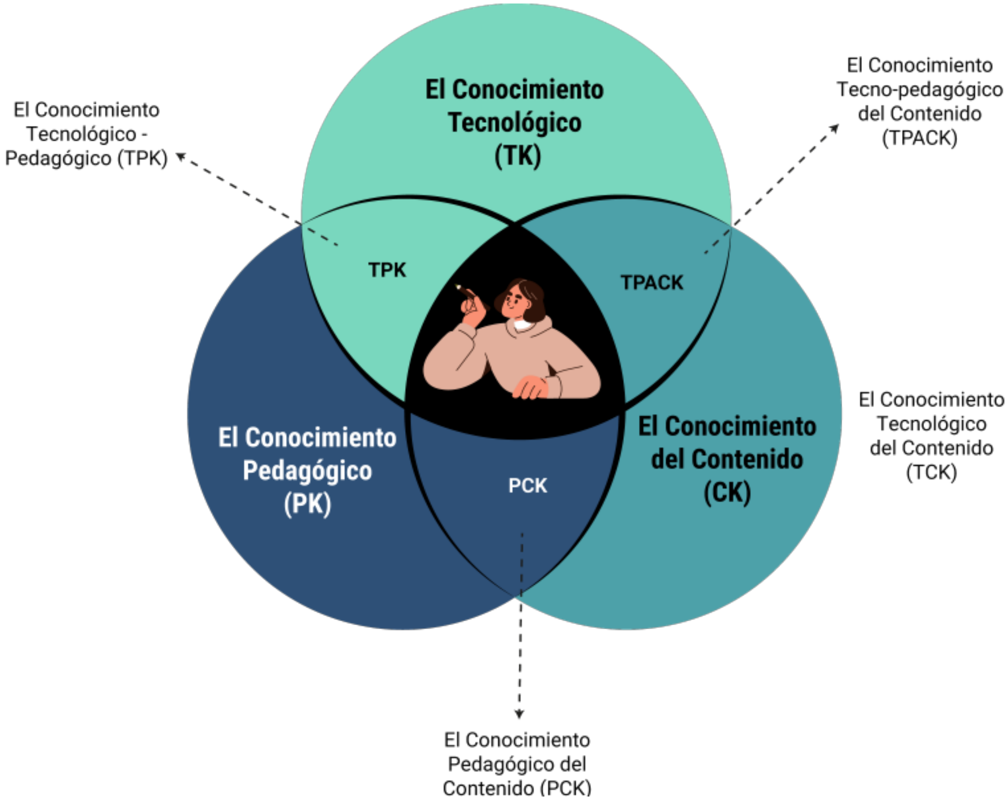
La geometría es un instrumento reflexivo, que permite resolver problemas de diversa índole y comprender a nuestro mundo que nos ofrece una amplia gama de variedades y formas geométricas en la naturaleza y en el escenario creado por el hombre, con este objetivo, el estudio de la asignatura Sistemas de Conocimiento de Geometría y su Didáctica, se convertirá en oportunidades de aprendizaje, donde los educandos participen activamente en el desarrollo de su conocimiento y se apropien de él (Hernández y Villalba, 2001), se diseñan actividades y estrategias fundamentadas con una metodología activa.

La metodología que aplicaremos a nuestra asignatura es Technology, Pedagogy and Content Knowledge (TPACK, Tecnología, Pedagogía y Contenido). Permitirá alcanzar un aprendizaje significativo, mejorar el rendimiento académico y cumplir con los resultados de aprendizaje propuestos, obteniendo un estudio activo que lleve al alumno a un aprendizaje autónomo.

El núcleo del enfoque TPACK parte de la compleja interacción de tres formas de conocimiento: Contenido (CK), Pedagogía (PK) y Tecnología (TK) para ir más allá, al enfatizar los tipos de conocimiento que se encuentran en las intersecciones, el conocimiento de contenido pedagógico (PCK), conocimiento de contenido tecnológico (TCK), conocimiento pedagógico tecnológico (TPK) para llegar al Conocimiento Tecno – Pedagógico del Contenido (TPACK)

Figura 1

TPACK.Technology, Pedagogy And Content Knowledge



Nota. Tomado de TPACK, por TPACK, 2018, TPACK. CC BY 2.0.

Para mayor información sobre la integración de la tecnología en su enseñanza, revise este enlace TPACK.

La conceptualización teórica se obtendrá viendo micro videos, accediendo a recursos planteados en el EVA y la representación de las figuras utilizando herramientas virtuales disponibles en la Web, las actividades en contacto con el docente será el taller de aplicación con un enfoque experimental para la consolidación de los aprendizajes, en las tutorías que serán grabadas, las mismas que estarán a disposición para revisar o para los estudiantes que no pudieron participar.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer Bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Aplica con pertinencia los postulados y principios de la geometría plana para la modelación y resolución de problemas.

Mediante el estudio de este bimestre, usted tendrá la capacidad de alcanzar el resultado de aprendizaje 1 y poder aplicar con pertinencia los postulados y principios de la geometría plana, la modelación y resolución de problemas.

Figura 2

Valencia España Calatrava Puesta Del Sol

Nota. Adaptado de Valencia España Calatrava Puesta Del Sol, por Papagnoc, Pixabay (Valencia España Calatrava Puesta Del Sol) CC BY 2.0

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Estimados estudiantes, esta asignatura facilitará el conocimiento a ustedes, como docentes en formación, de la Carrera Pedagogía de las Ciencias Experimentales — Pedagogía de las Matemáticas y la Física en el uso de los postulados y principios de la geometría en el plano, la modelación y resolución de problemas. La geometría es considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, dada su aplicación en diversos contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007); además, permite desarrollar en los estudiantes habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente, argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002).

Los contenidos que se estudiarán para cumplir los resultados de aprendizaje de la asignatura están estructurados en dos capítulos: Geometría plana y Geometría espacial, con siete unidades cada una, distribuidas en un capítulo por bimestre.

En el primer bimestre, Geometría plana, se estudia en la primera unidad las Relaciones entre rectas y ángulos, segunda unidad Rectas paralelas, tercera unidad Los triángulos y sus relaciones, cuarta unidad los Cuadriláteros y sus relaciones, quinta unidad los Círculos, ángulos y medidas de ángulos en el círculo, sexta unidad las Áreas de polígonos y círculos, postulados, perímetro y, en la unidad siete Superficies y Sólidos.

Para el estudio de los temas del primer bimestre, se utilizará el texto complementario Geometría, de los autores Alexander y Koeberlein. Este recurso permitirá ampliar y profundizar en las temáticas abordadas. El material está disponible en la biblioteca virtual de la Universidad.

En el segundo bimestre, Geometría espacial, se estudia en la unidad octava los Vectores tridimensionales, unidad novena, las Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, unidad décima las Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, unidad décima primera, la Posición relativa de dos planos en el espacio, unidad décima segunda, la Posición relativa de tres planos en el espacio, unidad decimotercera la Posición relativa de una recta y un plano en el espacio y, por último, la unidad decimocuarta los Ángulos y Distancias.

Con el objeto de mantener la atención y el interés, trataremos de dirigir la búsqueda de nuevos conocimientos y habilidades geométricas y las que se orientan a la aplicación creadora de los conocimientos y habilidades geométricas adquiridas, generando situaciones de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de formas lógicas del pensamiento, de la imaginación espacial, de la visión espacial, así como de la elaboración, formulación y argumentación de conjeturas.

Se plantean actividades calificadas y recomendadas, así como recursos externos que le permitirán ahondar en el tema.

¡Bienvenidos!

Iniciamos el estudio explorando las relaciones entre rectas y ángulos, con un enfoque en los siguientes aspectos: las propiedades de los ángulos y sus relaciones, una introducción a la demostración geométrica, las interacciones entre rectas perpendiculares y la demostración formal de un teorema. Se recomienda revisar el texto complementario “Geometría” de Alexander y Koeberlein (2013), el cual permitirá ampliar y profundizar los temas abordados durante este primer bimestre.

Unidad 1. Relaciones entre rectas y ángulos

Las relaciones entre rectas y ángulos son fundamentales en el estudio de la geometría, ya que permiten comprender cómo interactúan y se posicionan las rectas en el plano y cómo estas interacciones dan lugar a diferentes tipos de ángulos. A partir de definiciones básicas como punto, recta y plano, y utilizando postulados fundamentales, se pueden analizar conceptos como rectas perpendiculares, paralelas y los ángulos que se forman cuando una recta transversal corta a otras rectas. Estos ángulos, como los correspondientes, alternos internos y consecutivos, poseen propiedades específicas que se deducen a través del razonamiento lógico.

1.1. Los ángulos y sus relaciones

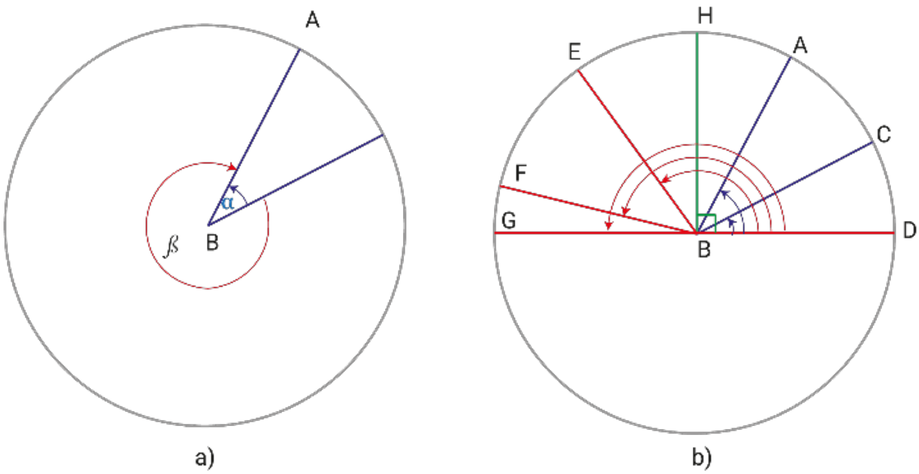
Definiendo a un ángulo como la unión de dos segmentos de recta que comparten un punto extremo común, que, para nuestro estudio, los segmentos de rectas serían los radios de la circunferencia. Además, de acuerdo al postulado del transportador, la medida de un ángulo es un número positivo único.

Con la utilización de una herramienta virtual de su experticia (recomiendo GeoGebra), en una circunferencia, tracemos un ángulo y sus partes (Fig. 3a) y en otra los tipos de ángulos (Fig. 3b)

En la figura 3, el ángulo lo simbolizamos con m ABC o CBA

Figura 3

Simbología de los ángulos.



En trigonometría, ángulo es la amplitud de rotación que describe un segmento de recta en torno a uno de sus extremos. El ángulo es positivo si gira en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo, en sentido de las manecillas del reloj.

Tipos de ángulos

- **Agudo**, menor a 90°, en la figura 3b los que están en el primer cuadrante, radios azules, formando ángulo con BD
- **Recto**, mide 90°, en la figura 3b es ∠ HBD
- **Obtuso**, mayor a 90° y menor a 180°, en la figura 3b los que están en el segundo cuadrante, radios de color café, formando ángulo con BD.
- **Llano**, mide 180°, en la figura 3b es ∠ GBD, es decir, está formado por radios opuestos.
- **Reflejo**, cuya medida está entre 180° y 360°, el ∠ β de la figura 3a

Además, es necesario indicar que el postulado ángulo-adición establece que, si un punto D se encuentra en el interior del ángulo *ABC*, entonces $\mathrm{m}\angle ABD + \mathrm{m}\angle DBC = \mathrm{m}\angle ABC$

Clasificación de pares de ángulos

La clasificación de pares de ángulos es respecto a las relaciones angulares que existen en un par de ángulos, clasificándose en: adyacentes, congruentes, opuestos y verticales, que se subdivide en internos, alternos internos, externos, alternos externos y correspondientes.

También, es necesario señalar que el bisector de un ángulo es el rayo que separa el ángulo dado en dos ángulos congruentes.

Con la ayuda de una herramienta virtual de su dominio (recomiendo GeoGebra), trazar ángulos adyacentes (Fig. 4) y congruentes (Fig. 5).

Dos ángulos son adyacentes si tienen un lado en común y no tiene puntos interiores comunes (Fig. 4)

Figura 4

Ángulos adyacentes.

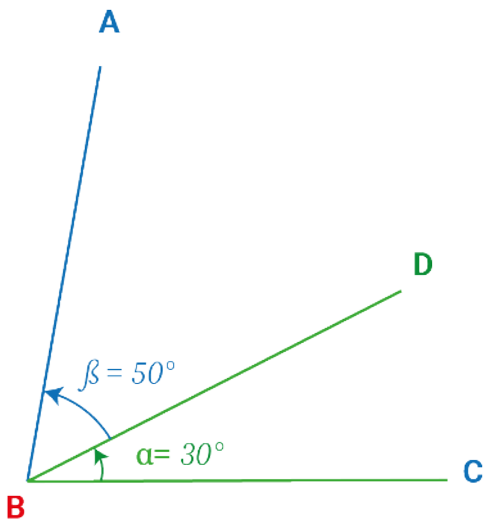
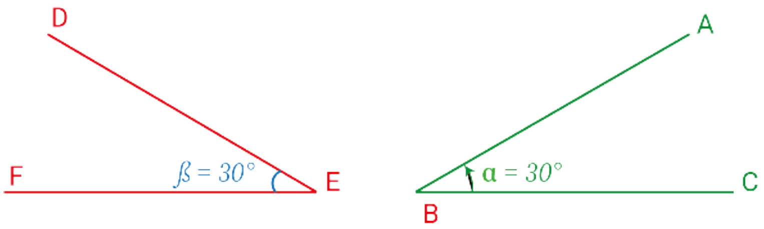


Figura 5

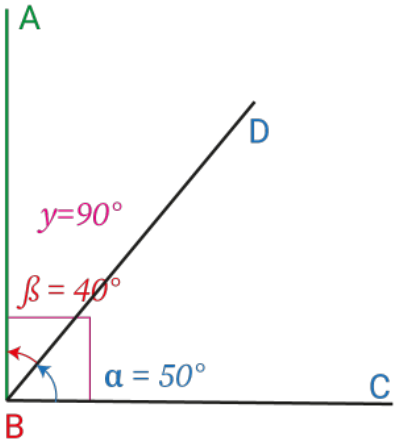
Ángulos congruentes



Dos ángulos son complementarios cuya suma de medidas es igual a 90° (π/2 rad). A cada ángulo se le llama complemento del otro. (Fig. 6), $\alpha + \beta = 90°$

Figura 6

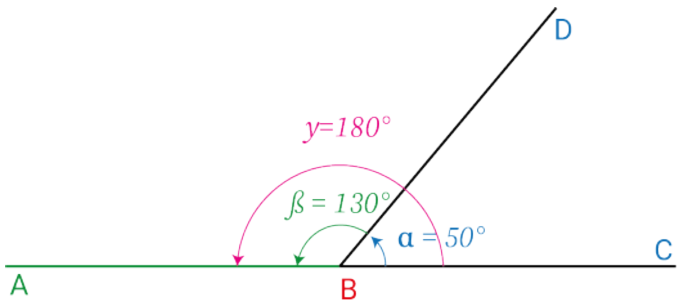
Ángulos complementarios



Dos ángulos son suplementarios cuya suma de medidas es igual a 180° (π/2 rad). A cada ángulo se le llama suplemento del otro. (Fig. 7), $\alpha + \beta = 180°$.

Figura 7

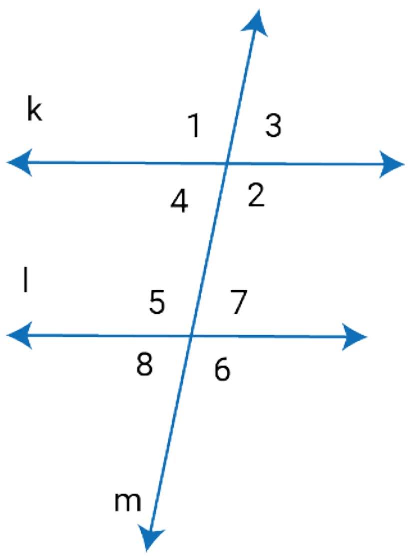
Ángulos suplementarios



Ángulos verticales, formados por dos rectas cortadas por una transversal, (Fig. 8).

Figura 8

Clasificación de la materia



Ángulos internos

2 4, 5, 7

Ángulos externos

1, 3, 8, 6

Ángulos alternos internos

2 y 5

4 y 7

Ángulos alternos externos

3 y 8

1 y 6

Ángulos correspondientes, en este caso, por ser k y l paralelas, son también congruentes

1 y 5, 3 y 7,

4 y 8, 2 y 6

Ejemplo 1.

Dado m $\angle \alpha = 50°$, encuentre: a) el complemento x y b) el suplemento y.

Solución (Fig. 6 y Fig. 7):

a. a. $x + 50° = 90°$, por tanto, el complemento $(x) = 40°$
b. b. $y + 50° = 180°$, por tanto, el suplemento $(y) = 130°$

Ahora, para determinar triángulos congruentes, revise el siguiente video titulado, Determinación de triángulos congruentes.

En este video se exponen las reglas para determinar si un triángulo es congruente mediante el desarrollo de un ejercicio para encontrar qué triángulos son congruentes.

Para reforzar el tema de la congruencia de triángulos, le invito a explorar el siguiente contenido: Repaso de congruencia de triángulos

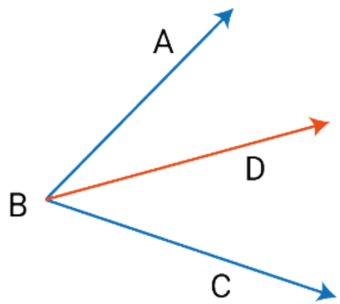
1.2. Introducción a la demostración geométrica

En la vida diaria, para creer algo se necesitannecesita pruebas, de forma similar, para creer ciertos principios geométricos es necesario tener una prueba, por tal motivo es necesario conocer algunas directrices para comprobar propiedades geométricas para lo cual se utilizarán ejemplos que ayuden a desarrollar demostraciones.

Por lo tanto, la demostración geométrica es un proceso lógico que valida propiedades y teoremas a partir de definiciones, postulados y teoremas previos. Su estructura común en dos columnas — enunciados y razones — facilita la claridad del razonamiento y conecta cada paso con su fundamento teórico. Este método fomenta habilidades como el razonamiento crítico y la precisión, integrando conceptos geométricos y algebraicos para resolver problemas. Más que un ejercicio académico, la demostración geométrica desarrolla competencias clave aplicables en diversas áreas del conocimiento.

A continuación, revise el siguiente ejemplo:

Tabla 1
Estrategia para una demostración

Ejemplo	**DEMOSTRACIÓN**	**DEMOSTRACIÓN**
Dado: biseca $\angle \mathrm{ABC}$ Demuestre: $\mathrm{m} \angle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2}(\mathrm{m} \angle \mathrm{ABC})$	Enunciados	Razones
	1. biseca $\angle \mathrm{ABC}$ 2. $\mathrm{m} \angle \mathrm{ABD} = \mathrm{m} \angle \mathrm{DBC}$ 3. $\mathrm{m} \angle \mathrm{ABD} + \mathrm{m} \angle \mathrm{DBC} = \mathrm{m} \angle \mathrm{ABC}$ 4. $\mathrm{m} \angle \mathrm{ABD} + \mathrm{m} \angle \mathrm{ABD} = \mathrm{m} \angle \mathrm{ABC}$ 5. $2\,(\mathrm{m} \angle \mathrm{ABD}) = \mathrm{m} \angle \mathrm{ABC}$ 6. $\mathrm{m} \angle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2}(\mathrm{m} \angle \mathrm{ABC})$	1. Dado 2. Si un ángulo se biseca, entonces las medidas de los ángulos resultantes son iguales 1. Postulado ángulo-adición 2. Sustitución 3. Sustitución. (Distribución) 4. Propiedad de multiplicación de la igualdad

Le invito a profundizar en el tema explorando ejercicios adicionales disponibles en el siguiente video: [Demostraciones a dos columnas en geometría]

1.3. Relaciones: rectas perpendiculares

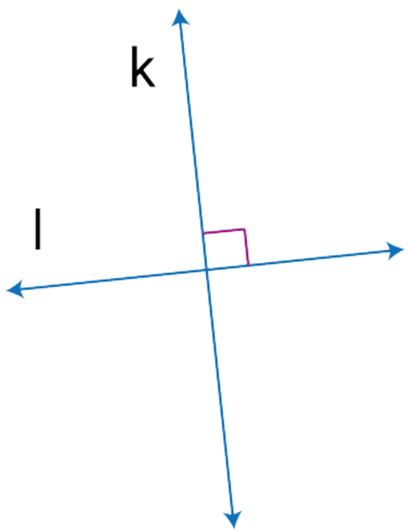
Las rectas perpendiculares, no necesariamente deben ser verticales y horizontales, son rectas que convergen para formar ángulos adyacentes congruentes.

Generalmente, se coloca un pequeño cuadro en la apertura de un ángulo formado por las dos rectas para indicar que son perpendiculares.

Es importante destacar que, en un plano, existe exactamente una recta perpendicular a una recta dada en cualquier punto de dicha recta; además, si dos rectas son perpendiculares, entonces convergen para formar ángulos rectos, como se puede observar en la siguiente figura.

Figura 9

Rectas perpendiculares



1.4. La demostración formal de un teorema

La demostración es un sistema de razonamientos, por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y de verdades antes demostradas.

La demostración debe estructurarse formalmente en varias partes para garantizar claridad y rigor. Estas partes incluyen (Alexander y Koeberlein, 2013):

- **Enunciado:** presentar el teorema o propiedad que se desea demostrar.
- **Esquema:** representar gráficamente la situación descrita en la hipótesis del teorema.
- **Dado:** describir la información inicial basada en la hipótesis.
- **Demuestre:** especificar lo que se busca probar según la conclusión del teorema.
- **Demostración:** enumerar una serie de enunciados lógicos con sus respectivas razones, partiendo de lo "Dado" y concluyendo con lo "Demuestre", asegurando un flujo deductivo coherente.

El proceso requiere identificar la hipótesis y la conclusión claramente, y algunos teoremas pueden necesitar reformularse para facilitar su comprensión. Es fundamental que la demostración mantenga un orden lógico y deductivo, y la última razón debe justificar el enunciado final

Recurso de aprendizaje

Para comprender mejor estos temas, fundamentales para su formación al constituir los fundamentos axiomáticos del curso, le invito a explorar el diverso material disponible en la nube, el cual, en su mayoría, sirve como guía para preparar material didáctico para nuestras clases.

Estudie la explicación detallada de las demostraciones y algunas ejemplificaciones, habilitando el video Introducción a las demostraciones geométricas

En este video se explica con claridad varios ejemplos que ayudarán a comprender las demostraciones geométricas, utilizando una tabla que describe cada paso, de las afirmaciones con sus respectivas razones.

Estimados estudiantes:

Es fundamental que dispongan de la aplicación GeoGebra para realizar los ejercicios, ya que esta herramienta les permitirá visualizar de forma dinámica las figuras geométricas y analizar sus posibles soluciones. Pueden optar por instalar GeoGebra en su equipo o trabajar directamente en su versión en la nube, según les resulte más conveniente.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de esta semana es plasmar dichos conocimientos, por ello propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio de las Relaciones entre rectas y ángulos y resuelva las interrogantes planteadas.

    - ¿Cuáles son los tipos de ángulos? Trate cada uno de ellos.
    - Enumere los ángulos según su clasificación. Trace cada uno de ellos.
    - ¿Qué es una demostración?
    - ¿Qué garantiza la verdad de las proposiciones obtenidas por deducción?
    - ¿Para qué hace falta la demostración?
    - ¿Cómo debe ser la demostración?

    Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Le invito a comprobar lo aprendido durante esta semana a través del siguiente quiz.
    [Relaciones entre rectas y ángulos]
3. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de Relaciones entre rectas y ángulos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 1

1. (   ) En el Postulado del transportador La medida de un ángulo es un número positivo único.

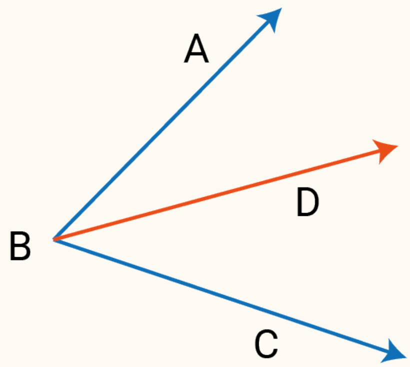
2. (   ) Un ángulo cuya medida es menor que 90° es un ángulo recto.

3. (   ) Si la medida del ángulo está entre 90° y 180°, el ángulo es obtuso.

4. (   ) un ángulo llano es aquel cuyos lados forman rayos opuestos.

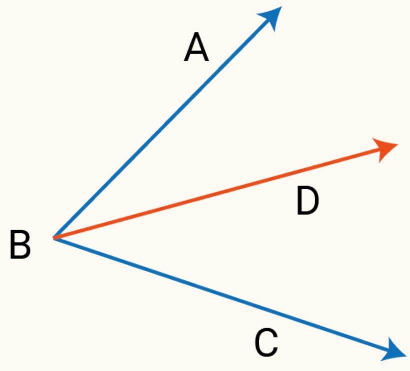
5. (   ) Un ángulo cuya medida es exactamente 270° es un ángulo llano.

6. Determine cuál es la parte real que está representando en el número complejo F en el plano complejo.



   a. A.73°.
   b. B.63°.
   c. C.38°.

7. En la figura encuentre m ∠ ABC si m ∠ ABD = x° y m ∠ BDC = (4x+5)°.



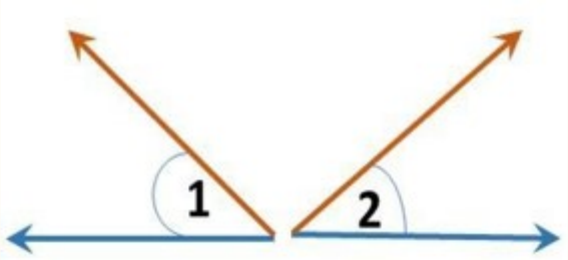
a. 5x+5)°.
b. 10x°.
c. 10°.

8. Dado $\angle 1 \cong \angle 2$.

M $\angle$ 1 = 4x + 20

M $\angle$ 2 = 6x + 4

Encuentre x:



a. 16°.
b. -16°.

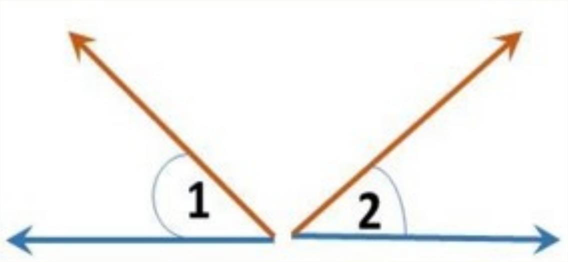
c. 24°.

9. Dado $\angle 1 \cong \angle 2$.

M $\angle$ 1=8x - 25

M $\angle$ 2= 4x + 2

Encuentre x:



a. 23°.
b. 25°.
c. 4x.

10. Dado que m $\angle$ = 41°, encuentre el complemento y el suplemento.

a. 41° y 139°.
b. 139° y 49°.
c. 49° y 139°.

Ir al solucionario

Semana 2

Estimado estudiante, en esta semana, estudiaremos lo relacionado con las rectas paralelas, los postulados y ángulos especiales, continuaremos con la Demostración indirecta y la Demostración del paralelismo de rectas.

Unidad 2. Rectas paralelas

2.1. Postulado paralelo y ángulos especiales

Las rectas paralelas son dos o más rectas en un plano que nunca se interceptan. Existen muchos ejemplos de rectas paralelas como los rieles del tren, las veredas de una calle, los lados opuestos del marco rectangular de un espejo y los estantes de un librero.

Además, es necesario indicar que, a través de un punto exterior a una recta, existe exactamente una única recta que es paralela a la recta dada. Asimismo, cuando dos rectas paralelas son intersectadas por una transversal, los ángulos correspondientes resultantes son congruentes.

Utilizaremos GeoGebra para realizar las construcciones geométricas. Trazar dos rectas perpendiculares similares a la figura 10.

Figura 10

Rectas perpendiculares a = 90°

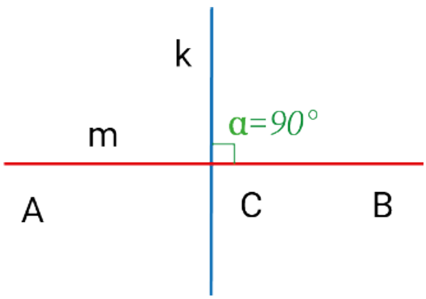
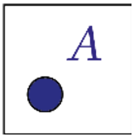
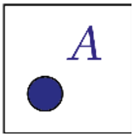
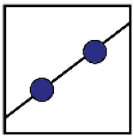
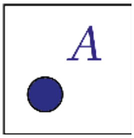
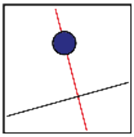
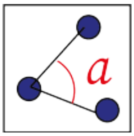


Tabla 2
Procedimiento para trazar rectas perpendiculares.

Nº	Nombre	Ico...	Descripción		Valor
1	Punto A				A = (1, 4)
2	Punto B				B = (6, 4)
3	Recta f		Recta A B	Recta(A, B)	f: y = 4
4	Punto C		Punto sobre f	Punto(f)	C = (3.52, 4)
5	Recta g		Recta que pasa por C	Perpendicular f)	g: x = 3.52
6	Ángulo α		Ángulo entre f, g	Ángulo(f, g)	α = 90°

Con estos pasos se han trazado dos rectas perpendiculares k y m

2.2. Demostración indirecta

Cuando no es posible o es difícil, utilizando el método directo para probar un teorema, se utiliza el método indirecto o demostración por reducción al absurdo.

Estimado estudiante, le sugiero para conocer los pasos de las demostraciones indirectas visitar el blog de Ola Mageo,(s.f). Demostración indirecta, en este sitio se puede analizar varios ejemplos, que en forma didáctica explican cada paso del desarrollo de la demostración indirecta.

2.3. Demostración del paralelismo de rectas

Realizaremos un repaso de los postulados y teoremas importantes, tomando como hipótesis "Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal".

A continuación, revise el siguiente ejemplo.

Tabla 3
Demostración geométrica.

Enunciado	DEMOSTRACIÓN	DEMOSTRACIÓN
Dado: $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$ Demuestre: $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$	Enunciados	Razones
	1. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$ 2. $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$ 3. $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{DC}$	1. Dado 2. Si dos rectas son || a una tercera recta, entonces esas rectas son || entre sí

Estimado estudiante, para contestar la pregunta ¿cómo se determina si dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas?, le invito a ver el video Relación entre rectas. En este video usted aprenderá a determinar cuándo dos rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 2 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio de las Relaciones rectas paralelas y resuelva las interrogantes planteadas.

   - ¿Qué es una demostración indirecta?
   - ¿En qué consiste la Ley de inferencia negativa (contraposición)?

   Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de Rectas paralelas, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 2

1. (   ) A partir de un punto fuera de una recta hay exactamente más de una recta perpendicular a la recta dada.

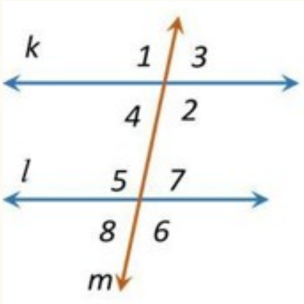
2. (   ) Las rectas paralelas son rectas en el mismo plano y no se intersecan.

3. (   ) A través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.

4. (   ) Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son planos.

5. (   ) Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.

6. En la figura k || / y m ∠ 5 = 127. Encuentre m ∠ 1, m ∠ 2 y m ∠ 8.



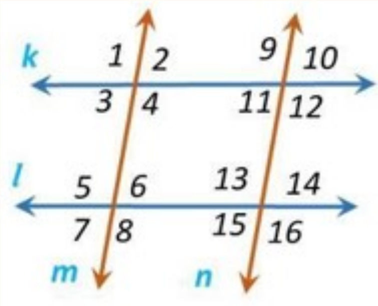
a. 53°, 53°, 127°.
b. 127°, 53°, 53°.
c. 127°, 53°, 127°.

7. Dado m ∠ n con transversal a l.

m ∠ 7= x2 +2x - 6

m ∠ 14= 2x + 6

Encuentre x y el m ∠ 14:



a. 9 y 78°.
b. 42 y 6°.
c. 6 y 42.

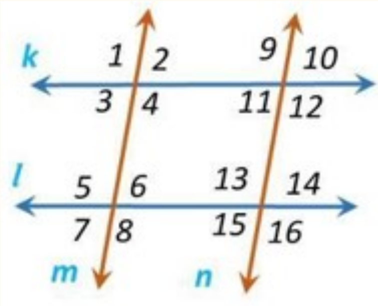
8. Dado k ∠ l con transversal a m.

m ∠ 11 = 3x +2y

m ∠ 13 = 9x + 3y

m ∠ 14 = 12x + 5y

Encuentre x, y, m ∠ 13 y m ∠ 14:



a. 5, 15, 72° y 108°.
b. 4, 12, 72° y 108°.
c. 4, 12, 65° y 115.

9. En un triángulo OPQ, m ∠ O = 40° y m ∠ P = 69°, encuentre ∠ Q.

a. 71°.
b. 140°.
c. 45°.

10. El ∠ P es un ángulo recto en el triángulo OPQ, m ∠ O = 52°,

a. 38°.
b. 90°.
c. 45°.

Ir al solucionario

Semana 3

"El conocimiento se obtiene de la experiencia mediante la intuición y culmina en la abstracción por el poder de la razón humana".
Aristóteles

Ahora bien, sigamos con la misma dedicación y en especial con el interés por aprender, en esta semana corresponde estudiar la Unidad 3. Los triángulos y sus relaciones, que abarca a los triángulos congruentes, los triángulos isósceles y finalizamos con las desigualdades en un triángulo.

Unidad 3. Los triángulos y sus relaciones

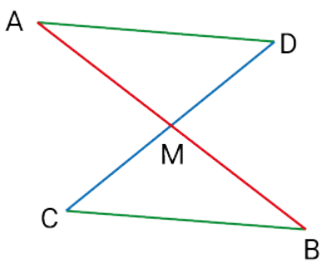
3.1. Triángulos congruentes

Dos triángulos son congruentes si se cumple que son exactamente iguales en tamaño sus elementos, es decir, si sus lados y sus ángulos respectivos tienen igual medida, aunque su posición y orientación sean distintas.

Estimado estudiante le sugiero, para conocer los métodos que se utiliza para demostrar la congruencia de triángulos ver el siguiente video Determinación de triángulos congruentes.

En el video se mira cómo aplica los postulados LLL, LAL, ALA y AAL para encontrar triángulos congruentes, de una manera muy didáctica, que se puede utilizar, como ejemplo, para la creación de material didáctico.

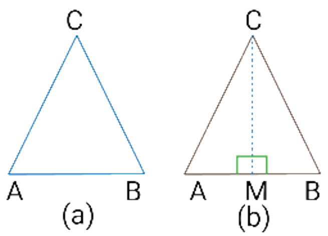
Tabla 4
Determinación de triángulos congruentes

EJEMPLO 3.1	DEMOSTRACIÓN	DEMOSTRACIÓN
DADO: AB y CD se bisecan entre sí en M $\mathrm{AC} \cong \mathrm{DB}$ DEMUESTRE: $\triangle\mathrm{AMC} \cong \triangle\mathrm{BM}D$	Enunciados	Razones
	1. AB y CD se bisecan entre sí en M 2. $AM \cong MB$ $CM \cong MD$ 3. $AC \cong DB$ 4. $\triangle\mathrm{AMC} \cong \triangle\mathrm{BMD}$	1. Dado 2. Si se biseca un segmento, los segmentos formados son $\cong$ 3. Dado 4. 4. LLL

3.2. Triángulos isósceles

Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales, llamados catetos, y un tercer lado, la base. Los ángulos en la base son congruentes, y el bisector del ángulo del vértice divide el triángulo en dos triángulos congruentes, destacando su simetría.

Tabla 5
Demostración gráfica del teorema

EJEMPLO 3.2. Demostración gráfica del teorema: ***"Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a esos ángulos también son congruentes".***	
	DADO: $\triangle\ \mathrm{ABC}$ con $\angle\ \mathrm{A} \cong \angle\ \mathrm{B}$ [(Fig. 3.2 (a)] DEMUESTRE: DEMOSTRACIÓN: trace [fig. 3.2 (b)], se observa que $\triangle\ \mathrm{CMA} \cong \triangle\ \mathrm{CMB}$ (por LLL). Ahora (por. Las partes correspondientes de triángulos congruentes son congruentes. PCTCC)

3.3. Desigualdades en un triángulo

La desigualdad del triángulo o desigualdad de Minkowski es un teorema de la geometría euclidiana, que permite conocer si se puede trazar un triángulo con tres segmentos de determinada longitud. La teoría establece que en todo triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.

De esta manera, si a, b y c representan las longitudes de los lados de un triángulo, se cumplirán las siguientes desigualdades:

1. a + b>c
2. a + c>b
3. b + c>a

Ejemplo 3.3.1, con los segmentos a, b y c, de medidas 4,5 y 3 respectivamente, ¿será posible construir un triángulo?

Tabla 6
Verificación de Desigualdades Triangulares: Caso Válido

Desigualdad	Cálculo	Resultado
a + b>c	4 + 5 > 3, 9 > 3	Cumple
a + c>b	4 + 3 > 5; 7 > 5	Cumple
b + c>a	5 + 3 > 4; 8 > 4	Cumple
Si es posible, porque cumple las tres desigualdades		

Ejemplo 3.3.2, con los segmentos a, b y c, de medidas 3,6 y 9 respectivamente, ¿será posible construir un triángulo?

Tabla 7

Verificación de Desigualdades Triangulares: Caso No Válido

Desigualdad	Cálculo	Resultado
a + b>c	3 + 6 > 9, 9 = 9	No Cumple
a + c>b	3 + 9 > 6; 12 > 6	Cumple
b + c>a	6 + 9 > 3; 15 > 3	Cumple
No es posible, porque no cumple las tres desigualdades		

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a leer el siguiente contenido: Propiedades del triángulo isósceles, que, con la ayuda de GeoGebra, realice la demostración y podrá deducir las siguientes propiedades de los triángulos isósceles: a) Los ángulos adyacentes a la base son congruentes; b) La altura y la mediana, referidas a la base, son congruentes, y c) La bisectriz se divide en partes congruentes al ángulo formado por los lados congruentes.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 3 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio de las desigualdades en un triángulo y resuelva las interrogantes planteadas:

    - ¿Qué establece la teoría de las desigualdades en un triángulo?
    - ¿Qué son los lemas (teorías de apoyo)? Describa cada uno de ellos.
    - ¿Qué son los corolarios? Describa cada uno de ellos.

    Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de las desigualdades en un triángulo, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 3

1. (   ) Dos triángulos son congruentes si dos partes del primer triángulo son congruentes con las dos partes correspondientes del segundo triángulo.

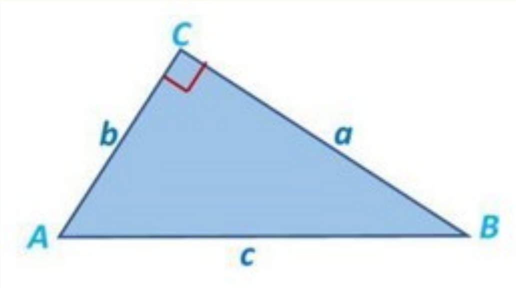
2. (   ) Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LLL).

3. (   ) Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LAL).

4. (   ) En este contexto identidad es la razón que se cita cuando se comprueba que un segmento de recta (o un ángulo) es congruente consigo mismo; también se le conoce como propiedad de congruencia inversa.

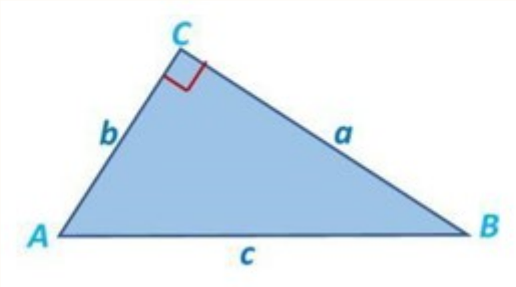
5. (   ) Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (ALA).

6. Encuentre la longitud lado **c** del triángulo rectángulo ACB, si a = 3 y b = 4.



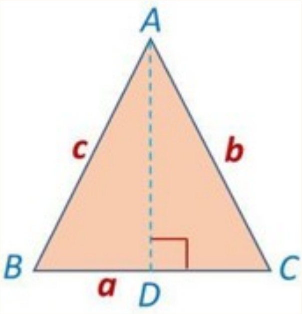
a. 5.
b. 5°.
c. 6.

7. Encuentre la longitud lado a del triángulo rectángulo ACB, si c = 10 y b = 8.



a. 5.
b. 5°.
c. 6.

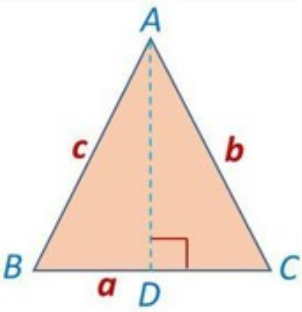
8. Encuentre la medida de cada ángulos del triángulo isósceles si m $\angle$ A = 34°.



a. 45°, 45°.
b. 73°, 73°.
c. 34°, 73°.

9. En el triángulo isósceles los m ∠B = m ∠C, c = 4.47 y a = 4.0.

   Encuentre el perímetro y la longitud de b



a. 12.40, 4.7.
b. 12.70, 4.0.
c. 13.40, 4.7.

10. En un triángulo ABC se conoce la longitud de sus tes lados, AB = 4, BC = 6.72 y AC = 7.36, ordene los ángulos por su tamaño.

a. ∠B, ∠A, ∠C.

b. $\angle A, \angle B, \angle C$.

c. $\angle C, \angle A, \angle B$.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 4

"La matemática es el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo".
Galileo Galilei

En la cuarta semana, corresponde estudiar la Unidad 4. — Los cuadriláteros y sus relaciones, estudiaremos las propiedades de un paralelogramo, el rectángulo, el cuadrado y el rombo para finalizar con el trapezoide.

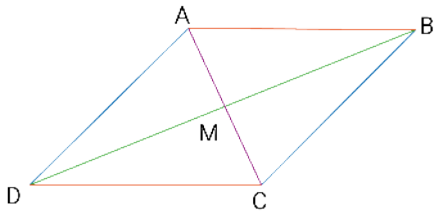
Unidad 4. Los cuadriláteros y sus relaciones

En esta unidad se consideran numerosos tipos de cuadriláteros, entre ellos el paralelogramo, el rombo y el trapezoide. Además, la descripción y las propiedades para cada tipo de cuadrilátero.

4.1. Propiedades de un paralelogramo

El paralelogramo es un cuadrilátero, es decir, un polígono que tiene cuatro lados, con los lados opuestos, paralelos e iguales, y sus diagonales se bisecan entre sí.

Tabla 8
Corolarios del paralelogramo

Grafico	Resolución
	Lados iguales $\underline{AB} \cong \underline{DC}$. $\underline{AD} \cong \underline{BC}$. Diagonales bisecan $\underline{AM} \cong \underline{MC}$. $\underline{DM} \cong \underline{MB}$ Ángulos iguales $\angle A \cong \angle C$ $\angle B \cong \angle D$

4.2. El rectángulo, el cuadrado y el rombo

El rectángulo, el cuadrado y el rombo son cuadriláteros con propiedades únicas (Alexander y Koeberlein, 2013):

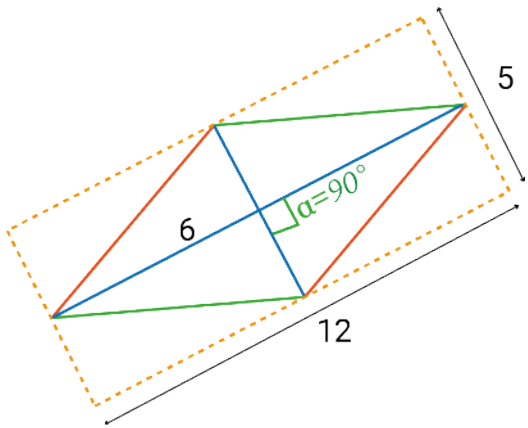
- **Rectángulo:** es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos. Sus diagonales son congruentes y se bisecan entre sí. Además, todos los lados opuestos son paralelos y congruentes
- **Cuadrado:** es un caso especial de rectángulo y rombo. Tiene cuatro lados congruentes y cuatro ángulos rectos. Sus diagonales son congruentes, perpendiculares y se bisecan entre sí, formando ángulos rectos
- **Rombo:** es un paralelogramo con cuatro lados congruentes. Sus diagonales son perpendiculares, se bisecan entre sí y dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos congruentes. Además, las diagonales bisecan los ángulos internos

Estos cuadriláteros comparten propiedades comunes de los paralelogramos, como lados opuestos paralelos y congruentes, pero también tienen características específicas que los distinguen.

Ejemplo 4.2. ¿Cuál es la longitud de cada lado de un rombo, cuyas diagonales miden 5 y 12 cm?.(Vea la figura 11)

Figura 11

Longitud de rombo



Solución: Las diagonales de un rombo son bisectores perpendiculares entre sí. Por tanto, las diagonales separan el rombo que se muestra en cuatro triángulos rectángulos congruentes con catetos de longitudes 2.5 y 6 cm. Para cada triángulo, $c^2 = a^2 + b^2$ se transforma en $c^2 = 2.5^2 + 6^2$, o $c^2 = 6.25 + 36$. Entonces $c^2 = 42.25$, por tanto, $c = 6.5$. La longitud de cada lado es de 6.5 cm.

4.3. El trapezoide

El trapezoide es un cuadrilátero, es decir, un polígono que tiene cuatro lados y solo dos lados opuestos son paralelos.

Además, en un trapezoide isósceles, los catetos son congruentes, y los ángulos base de cada lado de una misma base son iguales.

Investigue la aplicación de la geometría en el mundo real, con la utilización de figuras trapezoides isósceles como en la elaboración de las lámparas.

Teorema: la mediana de un trapecio es paralela a las bases y su medida es la mitad de la suma de las medidas de las bases.

Ejemplo 4.3. Dado el trapecio ABCD con mediana $\overline{EF}$, encuentre el valor de x.

Figura 12

Determinación del valor de x de un trapecio

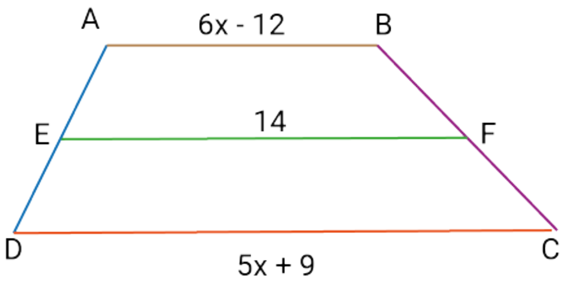


Tabla 9

Demostración del Teorema de la Media de un Trapecio

Afirmaciones	Razones
1. EF **=** ½ (AB + DE)	Por el teorema de la media de un trapecio
2. 14 = ½ (6x – 12 + 5x + 9)	Por sustitución o remplazando valores
3. 14 = ½ (11x - 3)	Simplificando términos
4. 28 = 11 x – 3	Propiedad de igualdad de multiplicación
5. 11x = 28 + 3	Simplificando términos semejantes
6. X = 31/11	Despejando x
7. AB= 4.91	Remplazando valores
8. **DE = 23.10**	Remplazando valores

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a ver el siguiente video: Introducción a los cuadriláteros.

En el video aprenderá a resolver diferentes ejercicios básicos de los cuadriláteros, su clasificación con sus características.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 4 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio del trapezoide y resuelva las interrogantes planteadas.

    - ¿Qué es el trapezoide? Grafique uno.
    - ¿Qué significa que los ángulos base de un trapezoide isósceles son congruentes? Grafique un ejemplo.
    - ¿Qué significa que los ángulos base de un trapezoide isósceles son congruentes? Explique gráficamente.

    Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad del trapezoide, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 4

1. (   ) Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los dos pares de lados opuestos no son paralelos.

2. (   ) Dos rectas paralelas son equidistantes dondequiera.

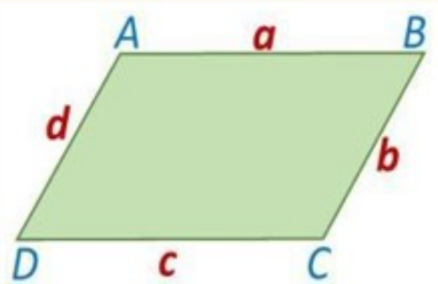
3. (   ) Una bisectriz de un paralelogramo lo separa en dos triángulos congruentes.

4. (   ) La **altura** de un paralelogramo es un segmento de recta desde un vértice que es perpendicular a un lado no adyacente (o a una extensión de ese lado).

5. (   ) En un paralelogramo con pares de ángulos consecutivos desiguales, la diagonal mayor se encuentra opuesta al ángulo obtuso.

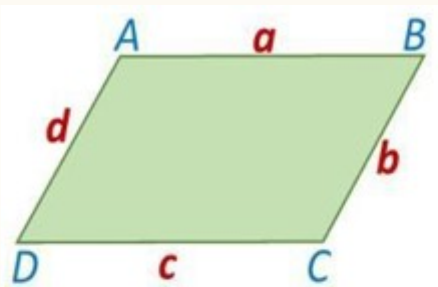
6. En el paralelogramo ABCD, la m ∠ B = 42°, b = 5.3 cm y c = 8.1cm.

Encuentre la medida de los ∠ C y ∠ D y el perímetro.



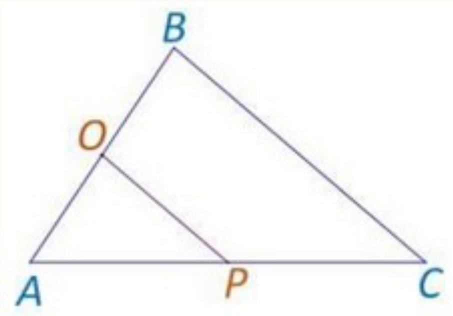
a. 138°, 42°, 36.8 cm.
b. 148°, 32°, 26.8 cm.
c. 138°, 42°, 26.8 cm.

7. En el paralelogramo ABCD, la m ∠ D = 2x + 20 y ∠ A = 3x-10. Determine la diagonal mayor.



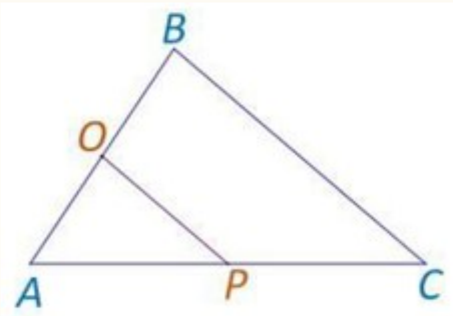
a. AC.
b. DB.

8. En el triángulo ABC, O y P son puntos medios de AB y AC, respectivamente, encontrar la longitud de OP, si BC = 9.22 y encontrar la longitud de BC, si OP = 6.53.



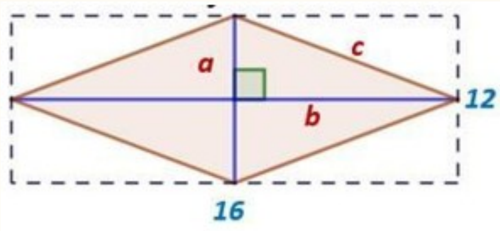
a. 4.61 y 13.06.
b. 5.61 y 13.06.
c. 4.61 y 9.22.

9. En el triángulo ABC, O y P son puntos medios de AB y AC, respectivamente, encontrar la longitud de OP y AC, si OP = 6x + 3; AC = 15x - 3.



a. 21 y 42.
b. 9 y 18.
c. 20 y 40.

10. ¿Cuál es el perímetro del rombo, cuyas diagonales miden 12 y 16 cm?



a. 56.
b. 40.
c. 32.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 5

"La matemática es abstracta, pero más abstractoes el mundo y más aún... Dios".

Muy bien, estimado estudiante, estamos avanzando en forma ordenada y correcta. En esta quinta unidad, que corresponde a esta semana, se presenta la terminología relacionada con el círculo, algunos métodos de medición y propiedades del círculo.

Unidad 5. Círculos

5.1. Círculos, segmentos y ángulos relacionados

El círculo es una figura geométrica fundamental, definida como el conjunto de puntos equidistantes de un punto central. Sus elementos clave incluyen el radio, el diámetro, las cuerdas y los arcos, cada uno con propiedades que permiten analizar sus relaciones internas y con líneas externas, como las tangentes y secantes. A continuación, revise el siguiente recurso que explica los conceptos básicos del círculo: Glosario de círculos

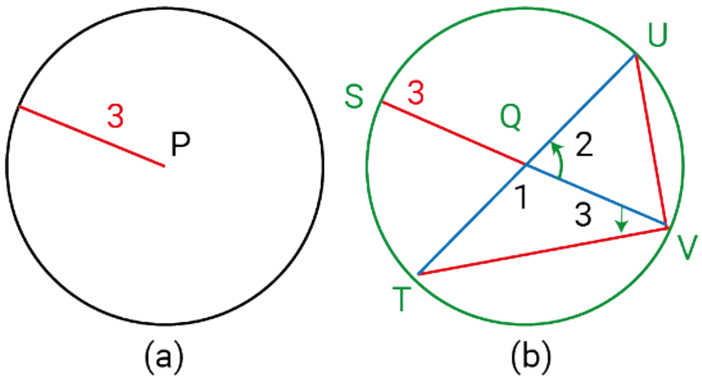
Ejemplo 5.1

En la figura 13, SV y UT se intersecan en Q, el centro del círculo.

Nombre:

Figura 13

Segmentos y ángulos dentro del circulo



a. Los círculos congruentes.
b. Los cuatro radios (que se muestran).
c. Ambos diámetros (que se muestran).
d. Las cuatro cuerdas (que se muestran).
e. Un ángulo central.
f. Un arco menor.
g. Un semicírculo.
h. Un arco mayor.
i. El arco intersecado de ∠ SQU.
j. El ángulo central que interseca a UV

Solución:

a. P y Q (tienen radio de igual medida, 3).

b. $\underline{SQ}$, $\underline{QV}$, $\underline{UQ}$, $\underline{QT}$.
c. $\underline{SV}$ y $\underline{UT}$.
d. $\underline{\mathrm{SV}}$, $\underline{\mathrm{UT}}$, $\underline{\mathrm{TV}}$, $\underline{\mathrm{UV}}$.
e. ∠ SQU (son posibles otras respuestas).
f. $U\hat{V}$ (son posibles otras respuestas
g. $S\hat{U}V$ (son posibles otras respuestas).
h. $S\hat{T}U$ se puede llamar $ST\hat{V}U$ (se puede llamar (son posibles otras respuestas).
i. $S\hat{U}$ (se encuentra en el interior de ∠ SQU).
j. ∠ UQV (también llamado /2).

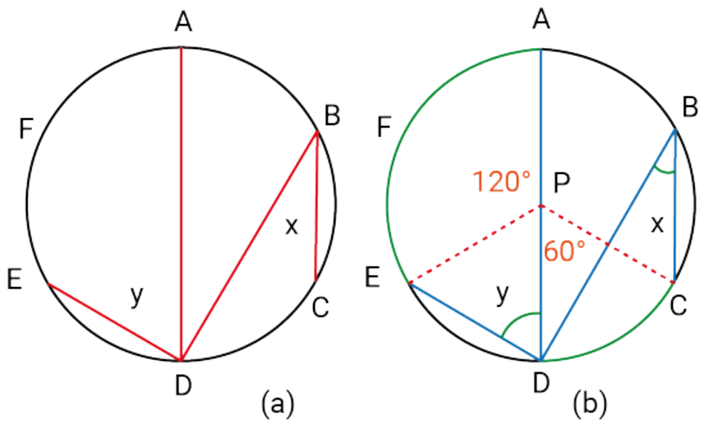
5.2. Relaciones de recta y segmento en el círculo

Las relaciones de rectas y segmentos en el círculo se establecen mediante varias propiedades clave. Si una recta pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, dicha recta biseca tanto la cuerda como su arco correspondiente. Cuando dos cuerdas se intersecan dentro de un círculo, el producto de las longitudes de los segmentos de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra. Además, si se trazan dos secantes desde un punto externo al círculo, los productos de las longitudes de cada secante y su segmento externo son iguales.

Desarrollo de un ejemplo sobre la propiedad: en ángulos inscritos de igual medida subtienden arcos de igual medida, y recíprocamente dos arcos de igual medida tienen ángulos de igual medida.

Figura 14

Relación de recta y segmento en el circulo.



Solución:

a. Cada arco es = 1/6 de 360°, porque son 6 arcos. = 60°.
b. Cada ángulo central = 60°.
c. Como ∠ y = ∠ ADE.
d. Como ∠ APE = 2 ∠ ADE.
e. Entonces ∠ ADE = ½ ∠ APE.
f. Entonces y = 60°
g. Como ∠ CPD = 2 ∠ CBD.
h. Entonces ∠ CBD = ½ ∠ CPD.
i. Como ∠ CPD = 60°.
j. Entonces x = 30°

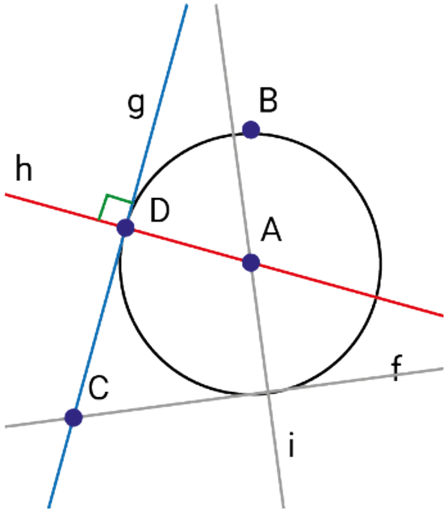
5.3. Algunas construcciones y desigualdades para el círculo

Conocemos, que el radio trazado hasta una tangente en el punto de contacto es perpendicular a la tangente en ese punto, en esta sección se demostrará: la recta que es perpendicular al radio de un círculo en su punto extremo en el círculo es una tangente al círculo.

Utilizando GeoGebra tracemos las tangentes f con su perpendicular h y g con su perpendicular i, ver figura 15.

Figura 15

Ejemplo en GeoGebra de construcciones y desigualdades para el círculo



Proceso

a. Utilice el ícono Circunferencia y trace el círculo (c) que pasa por B con centro A.
b. Marcar el Punto C.
c. Trazar la Tangente (f) a c que pasa por C. Automáticamente GeoGebra traza la Tangente (g) a c que pasa por C.
d. Trazar la Recta (h) que pasa por A perpendicular a g (Intersección de c, g).
e. Marcar Ángulo entre las rectas g, h.
f. Trazar la Recta (i) que pasa por A perpendicular a f.

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a ver el siguiente video, Ejercicios básicos de circunferencia-geometría.

En el video aprenderá a resolver diferentes ejercicios básicos de la circunferencia, aplicando las diferentes propiedades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 5 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio de los Círculos y resuelva las interrogantes planteadas.

    - ¿Qué es un círculo? Grafique uno.
    - ¿Qué son los círculos congruentes? Grafique un ejemplo.
    - ¿Qué son los círculos concéntricos? Grafique un ejemplo.
    - ¿Qué es el diámetro, cuerda, semicírculo? Grafíquelos en un círculo.
    - ¿Qué son los arcos? Grafíquelos en un círculo.
    - ¿Qué es un ángulo central y un inscrito? Grafíquelos en un círculo.

    Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de los Círculos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 5

1. (   ) Un círculo es el conjunto de todos los puntos en un plano que están una distancia fija de un punto dado conocido como centro del círculo.

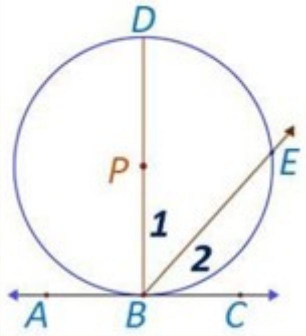
2. (   ) Los **círculos congruentes** son dos o más círculos que tienen radios congruentes.

3. (   ) En un círculo o círculos congruentes los **arcos congruentes** tienen medidas diferentes.

4. (   ) Un **ángulo inscrito** de un círculo es un ángulo que tiene su vértice en un punto en el círculo y sus lados son cuerdas del círculo.

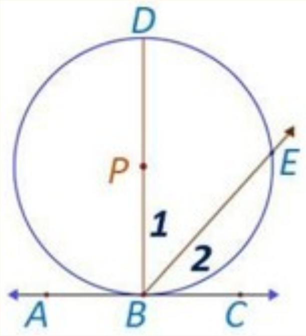
5. (   ) Una **tangente** es una recta que interseca un círculo en exactamente un punto; el punto de intersección es el **punto de contacto** o **punto de tangencia.**

6. En el círculo P de la figura, con un arco DE = 82°, encuentre el m ∠ DBA y m ∠ EBA.



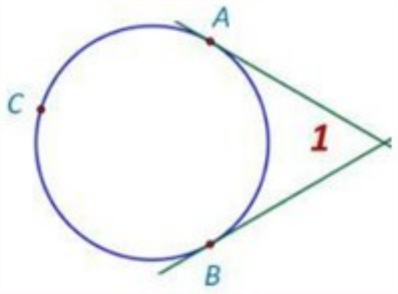
a. 41° y 48°.
b. 48° y 41°.
c. 45° y 45°.

7. En el círculo P de la figura, con un arco DE = 82°, encuentre el m ∠ 1 y m ∠ 2.



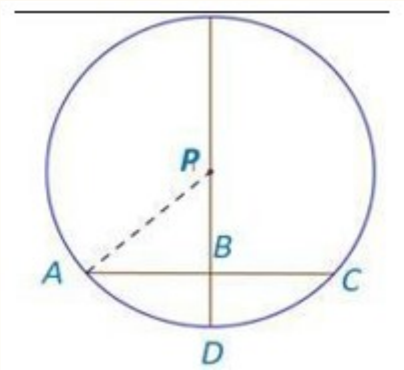
a. 131° y 90°.
b. 90° y 131°.
c. 41° y 48°.

8. Encuentre las medidas de los arcos AB y ACB si m $\angle$ 1= 48°.



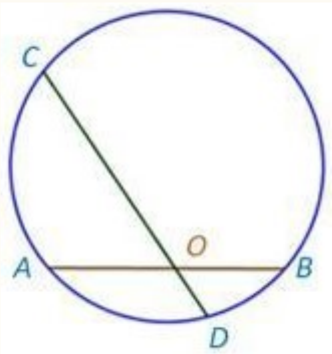
a. A. 216° y 144°.
b. B. 134° y 226°.
c. C. 132° y 228.

9. Encuentre la longitud de la cuerda AC si el círculo tiene un radio de 10 y PD $\angle$ AC en B y PB = 6



a. 14.
b. 12.
c. 16.

10. Encuentre la longitud de OD si, AO = 5, OB = 4 y CO = 8.



a. 2.0.
b. 2.5.
c. 1.0.

Ir al solucionario

Semana 6

"No te preocupes por tus dificultades en matemáticas. Te puedo asegurar que las mías son aún mayores".
Albert Einstein".

Estimado estudiante, avanzando en nuestro estudio, en la semana sexta corresponde a la Unidad 6, se estudiará lo relacionado con el área de lugares planos acotados, de formas regulares e irregulares, utilizadas en construcción, agricultura, bienes raíces y más. Las unidades para utilizar serán la inglesa y las del Sistema Internacional de Unidades

Unidad 6. Áreas de polígonos y círculos

6.1. Perímetro y área de polígonos

Es importante comprender estos dos conceptos, perímetro y área; para ello, revise el siguiente video, Perímetro y área

Como se puede observar en el vídeo, el perímetro es la distancia alrededor de una figura o forma, en cambio, el área mide el espacio dentro de una figura. Para conocer el perímetro y área específica de polígonos, lea el siguiente artículo web: Perímetro y área de polígonos.

Ejemplo 6.1. Utilizando GeoGebra resolveremos el ejemplo 2. (página 364), se traza el polígono y la aplicación nos presenta las medidas de cada segmento y el área. Para el perímetro se usa el comando Perímetro, a continuación, está el proceso (figura 16).

Figura 16

Medidas de un polígono en GeoGebra

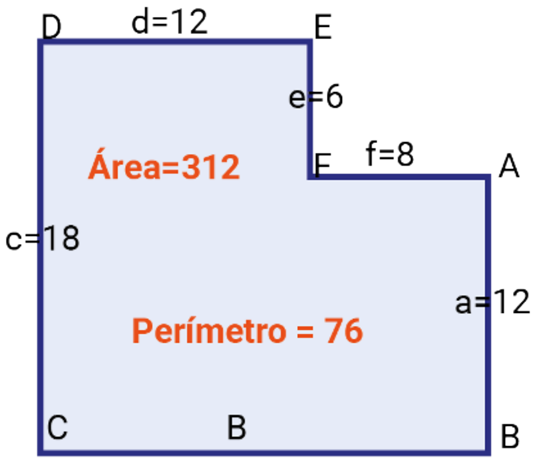
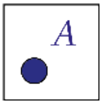
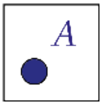
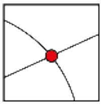
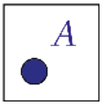
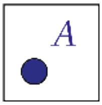
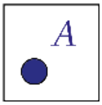
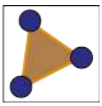


Figura 16 Polígono de lado a = 12, lado b = 20, lado c =18, lado d = 12, lado e = 6 y lado f= 8. Área = 312 y un perímetro igual a 76

Proceso:

Tabla 10

Descripción de Puntos, Segmentos y Cálculos de un Hexágono

Nº	Nombre	Ícono		Valor
1	Punto A			A = (20, 12)
2	Punto B		Punto sobre EjeX	B = (20, 0)
3	Punto C		Intersección de EjeX, EjeY	C = (0, 0)
4	Punto D		Punto sobre EjeY	D = (0, 18)
5	Punto E			E = (12, 18)
6	Punto F			F = (12, 12)
7	Hexágono Área		Polígono A, B, C, D, E, F	Área = 312
7	Segmento a		Segmento [A, B]	a = 12
7	Segmento b		Segmento [B, C]	b = 20

Nº	Nombre	Ícono		Valor
7	Segmento c		Segmento [C, D]	c = 18
7	Segmento d		Segmento [D, E]	d = 12
7	Segmento e		Segmento [E, F]	e = 6
7	Segmento f		Segmento [F, A]	f = 8
8	Número Perímetro		Perímetro(Área)	Perímetro = 76
9	Texto texto1		FórmulaTexto(Perímetro, true, true)	“Perímetro\, = \,76”
10	Texto texto2		FórmulaTexto(Área, true, true)	“Área\, = \,312”

Usando el icono del polígono trazar desde el punto A en las coordenadas (20,12) seguidamente el punto B en la coordenada (20,0) y así su sucesivamente, al final se debe dar un clic de nuevo en el punto A para que se cierre el polígono. Activar todos los elementos; en propiedades, activar la casilla [presente nombre y valor], con lo cual, se visualizará los valores de cada lado.

Calcular el perímetro utilizando el comando *perímetro* y dentro del paréntesis colocar el nombre del polígono que se creó. Para crear el texto, simplemente arrastre desde la columna izquierda al dibujo y se visualizarán los datos calculados del polígono.

6.2. Polígonos regulares y área

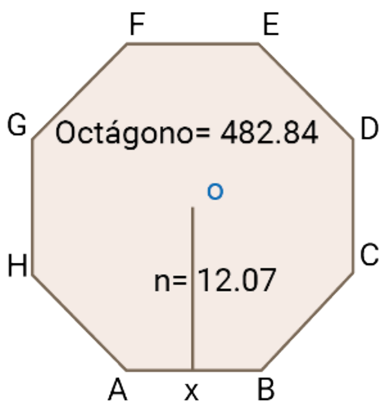
En esta sección estudiaremos polígonos regulares, equiláteros y equiángulos.

Recordemos los conceptos de polígono inscrito y circunscrito. Un polígono es circunscrito con respecto a un círculo si cada lado del polígono es tangente a ella. Un polígono está inscrito en un círculo, sí y solo sí, todos sus vértices están en el círculo.

Para reforzar estos conocimientos, revise el siguiente ejemplo:

Figura 17

Ejemplo de octágono con sus medidas y segmentos



Encuentre el área del polígono regular (octágono) que se muestra en la figura 17. El centro de ABCDEFGH es el punto O. La longitud de la apotema OX es 12.07 cm y la longitud del lado AB es 10 cm.

Solución: Si AB = 10 cm, entonces el perímetro del octágono regular ABCDEFGH es 8 x 10 cm, perímetro = 80 cm. Con la longitud de la apotema OX = 12.07 cm, la fórmula del área es A = ½ a P, por tanto, A = ½ x 12.07 x 80 = 482.8y el resultado es: A = 482,8 cm^2.

6.3. Circunferencia y área de un círculo

En geometría, dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma. En circunferencias semejantes existe proporcionalidad entre las circunferencias (distancia alrededor) y los diámetros (distancias a través) de círculos.

El estudio de esta sección corresponde a circunferencia de un círculo, π (Pi), longitud de un arco, límites y el área de un círculo.

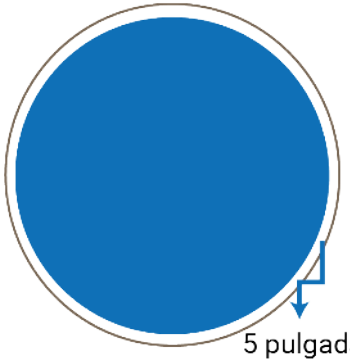
Para entender mejor este tema, desarrollé la siguiente definición y el ejemplo (Burrill y otros, 2000)

Área de un círculo.- Si un círculo tiene un área de A unidades cuadradas y un radio de r unidades, entonces $A = \pi r^2$.

Revise el siguiente ejemplo: el área de una piscina circular (figura 18) es de aproximadamente, 7850 pies cuadrados (2,392m2). Se quieren cambiar las losas del borde de la piscina.

Figura 18

Area de una piscina circular



a. Se desea usar losas cuadradas de 5 pulgadas, ya que el ancho del borde es de 5 pulgadas. ¿Cuántas losas debe comprar?

Solución:

$A = \pi r^2$

Si el área de la piscina es de 7850 pies cuadrados, entonces se reemplaza en la ecuación

$7850 = \pi r^2$

Despejando r se tiene:

$$r = \sqrt{\frac{7850}{\pi}}$$

$r = 49.99 \approx 50$ pulgadas

Ahora se usa la fórmula de la circunferencia para hallar la distancia alrededor de la piscina:

$C = 2 \pi r$

$C = 2\pi (50)$

$C = 100\pi$

$C = 314.2 \text{ cm}^2$

Para hallar el número de losas que recubren el borde de la piscina, se debe realizar la siguiente operación: $\frac{314.2}{5} = 62.84$

Entonces se deben comprar 63 losas y colocarlas igualmente espaciadas.

Señor estudiante, para sintetizar la unidad, le invito a ver el siguiente video: Área de polígonos regulares y del círculo | Demostrando Pi.

El video demuestra las fórmulas de las áreas de los polígonos regulares y del círculo. Define el número pi. Todas las demostraciones, en el video, las realiza con métodos geométricos muy visuales para que sean más fáciles de entender y recordar. Tiene algunos enlaces a aplicaciones de GeoGebra para aquellos que quieran ir un poco más allá y experimentar un poco.

Para contestar la pregunta ¿cómo realizar o encontrar polígonos en la vida real?, les invito a ver el siguiente video: El área de polígonos.

Es un video corto, en el que enseña a medir una parcela, utilizando mediciones en campo y un trazo en una hoja cuadriculada, el dibujo del terreno está a escala, de manera que cada cuadrado mide un metro cuadrado, existen 50 cuadrados de la cuadrícula que cubren completamente el polígono irregular. Empleando la división en triángulos, encuentra el área de la parcela.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 6 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio de las áreas de polígonos y círculos, contestando las interrogantes planteadas:

   - ¿Qué significa el valor de π?.
   - ¿Cuál es la fórmula del perímetro de un polígono? Grafique un ejemplo.
   - ¿Para qué se utiliza la fórmula de Herón? Grafique un ejemplo.
   - ¿Para qué se utiliza la fórmula de Brahmagupta? Grafique un ejemplo.

   Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las áreas de polígonos y círculos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 6

1. (   ) El perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono.

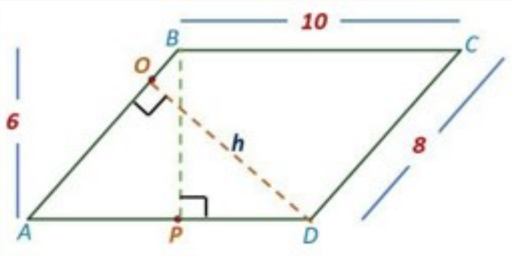
2. (   ) El área A de un rectángulo cuya base tiene longitud b y cuya altura tiene longitud h está dada por A = ½ bh.

3. (   ) π es la relación proporcional entre la circunferencia C y la longitud del diámetro d de cualquier círculo; por tanto, π = C/4 en cualquier círculo.

4. (   ) El área A de un triángulo cuya base tiene una longitud b y cuya altura correspondiente tiene longitud h está dada por A = bh.

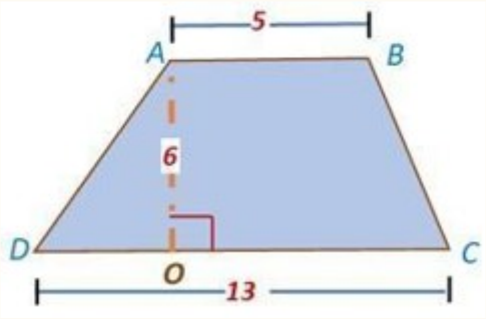
5. (   ) El área A de un cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud s está dada por $A = s^2$.

6. En el paralelogramo ABCD encuentre la longitud de la altura h y el área.



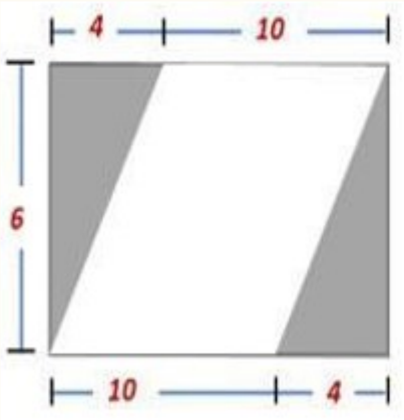
a. 6.0 y 60.
b. 7.5 y 60.
c. 8.0 y 80.

7. Encuentre el área trapezoide ABCD.



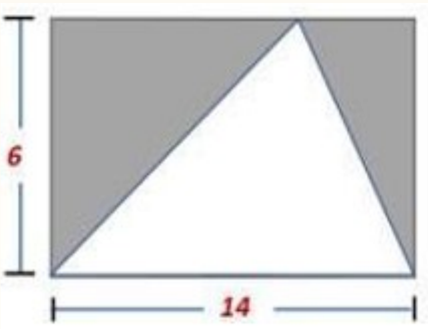
a. 30.
b. 78.
c. 54.

8. Encuentre el área de la región sombreada de la siguiente figura.



a. 60.
b. 84.
c. 24.

9. Encuentre el área de la región sombreada de la siguiente figura.



a. 84.
b. 42.
c. 60.

10. En una fábrica de arandelas, se desea saber el área del anillo de una arandela de radio del límite circular interno es de 0.75 cm y el radio del límite circular externo es 1.25 cm.

a. $3.1416cm^2$.

b. $\pi * 1.563cm^2$.

c. $\pi * 0.563cm^2$.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 7

"Las matemáticas son un lugar donde puedes hacer cosas que no puedes hacer en el mundo real".-
Marcus du Sautoy.

Figura 19

Por carretera Noches

Nota. Adaptado de Por carretera Noches, por mufaddalap. Pixabay(carretera Noches) CC BY 2.0

Los sólidos es lo real, igual que el mundo, es tridimensional, tiene longitud, anchura y profundidad, que determinan una región delimitada del espacio conocida como volumen, lo observamos tanto en la naturaleza, montañas, rocas, árboles, etc. como obras realizadas por el hombre, que sobresalen los vestigios de las diversas civilizaciones, como las pirámides, templos, coliseos, etc. y, en la actualidad, rascacielos, puentes, templos, estadios, represas, etc. También, existen obras de arte de pequeño tamaño, pero de gran belleza, en las joyas y en material tecnológico.

Estimados estudiantes, para finalizar el contenido del primer bimestre, estudiaremos la Unidad 7. Superficies y sólidos, lo relacionado con los Prismas, área y volumen; a las Pirámides, área y volumen; a los Cilindros y conos y, finalizaremos con los Poliedros y esferas.

7.1. Prismas, área y volumen

En la geometría no solo podemos medir las figuras, sino también todo lo que existe, para lo cual se debe utilizar el método correspondiente. Para medir el área de un terreno, generalmente tiene forma variable, puede tener la forma de un rectángulo, cuadrado o alguna otra forma, que nos da la idea de un polígono.

Área lateral de un prisma recto: Si un prisma recto tiene un área lateral de L unidades cuadradas, una altura de h unidades y cada base tiene un perímetro de P unidades, entonces L = P*h.

Área de superficie de un prisma recto: Si el área de superficie total recto es **T** unidades cuadradas, su altura es **h** unidades y cada base tiene un área de **B** unidades cuadradas y un perímetro de p unidades, entonces **T = P*h +2*B**

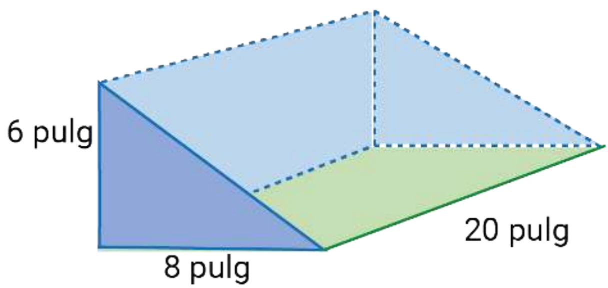
Entonces, estos conceptos plásmelos por medio del siguiente ejemplo, tomado de la Geometría de Burrill y otros (2000):

Encuentre el área lateral y el área de superficie de un prisma triangular con una altura de 20 pulgadas (50.80 cm) y que tiene como base un triángulo rectángulo con catetos de 8 y 6 pulgadas.

Visualice gráficamente los datos, Figura 20:

Figura 20

Prisma triangular



Usando el teorema de Pitágoras, se encuentra la media de la hipotenusa, ***c***

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$c = 10$$

Utilizando el valor de la hipotenusa, se encuentra el perímetro.

Ahora, con la definición de perímetro, se suman los tres lados del triángulo.

$P = 6 + 8 + 10 = 24.$

Para encontrar el área de la base, se utiliza la fórmula: $B = ½\, b \times h$

$b = 6, h = 8$

$B = ½\,(6)(8) = 24$

Base $(B) = 24$ $pulg^2$

Con estos datos, se puede determinar el área de la superficie:

$T = Ph + 2B$

$T = 24.20 + 2.24 = 528$ $pulg^2$, $P = 24, h = 20, B = 24$

7.2. Pirámides, área y volumen

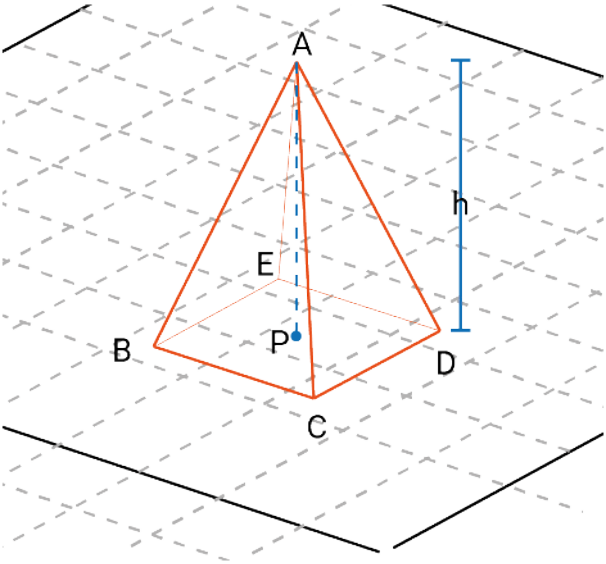
En este apartado se estudiará el área superficial y el volumen de una pirámide.

La pirámide en la figura 21 es una pirámide cuadrangular. Tiene vértice A, cuadrado BCDE como su base y aristas laterales AB, AC, AD y AE. Aunque al punto A se le llama el vértice de la pirámide, hay en realidad cinco vértices: A, B, C, D y E.

Los lados de la base BA, CD, DE y EB son las aristas de la base. Todas las caras laterales de una pirámide son triángulos; ΔABC es una de las cuatro caras laterales de la pirámide cuadrangular. Incluyendo la base BCDE, esta pirámide tiene un total de cinco. La altura de la pirámide, de longitud h, es el segmento de recta AP desde el vértice A perpendicular al plano de la base, punto P.

Figura 21

Pirámide cuadrangular



Área superficial de una pirámide

Para establecer las bases para el siguiente teorema, se justifica el resultado "desarmando" una de las pirámides regulares y poniéndola plana.

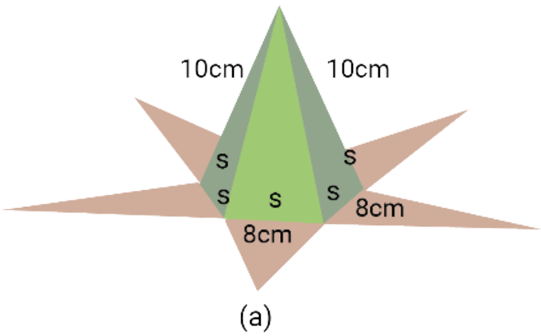
Cuando las caras laterales de la pirámide regular se despliegan en un plano, como se muestra en la figura 22 (a), el área lateral sombreada es la suma de las áreas de las caras laterales triangulares. Utilizando A = ½ bh, se encuentra que el área de cada cara es ½ .s .l (cada lado de la base de la pirámide tiene longitud s y la altura inclinada es l). Las áreas combinadas de los triángulos dan el área lateral. Debido a que hay n triángulos, *A = n .(½ . s . l)*

A = ½ l(n . s)

Perímetro (P) = n . s (n= Número de caras y s = base A = ½ lP

Figura 22

Pirámide pentagonal regular



Ejemplo 9.3

Encuentre el área lateral de una pirámide pentagonal regular si los lados de la base miden 8 cm y las aristas laterales miden 10 cm cada una [vea la figura 22 (a).

Solución:

La longitud de la altura inclinada para la cara lateral triangular [vea la figura 22 (b)], se encuentra aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2+b^2=c^2$$
$$4^2 + I^2 = 10^2$$

l^2 = 100m - 16 = 84

l^2 = (4 . 21) = 2^2 . 21

$$l = \sqrt{(2^2 * 21)} = 2\sqrt{21}$$

Ahora $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{IP}$ A = ½ IP

$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\ 2\sqrt{21}\ (5\ .\ 8) = 40\sqrt{21}$

$\mathbf{A} = 183.30\mathrm{cm}^2$

7.3. Cilindros y conos

Esta sección se pone interesante, porque se estudia lo relacionado con cilindros (rectos y oblicuos), bases y altura de un cilindro, Eje de un cilindro, Conos (rectos y oblicuos), Base y altura de un cono, Vértice y altura inclinada de un cono, Eje de un cono, Área lateral, Área total, Volumen, Sólido de revolución y Eje de un sólido de revolución, les propongo que el mayor número de ejemplos se encuentre gráficamente utilizando el GeoGebra, que es una gran herramienta para ayudar a visualizar las figuras geométricas.

Ejemplo 7.3.

Para el cilindro circular recto que se muestra en la figura 23 encuentre el:

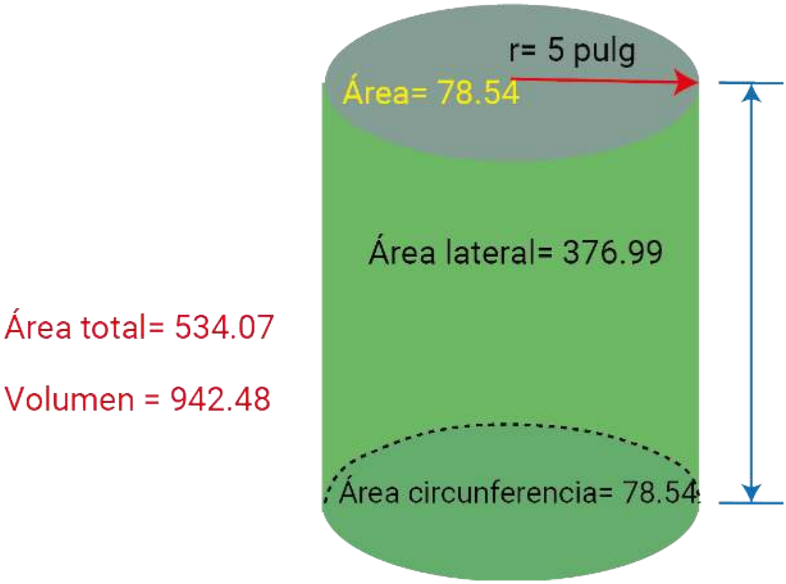
a. Área lateral exacta L.
b. Área superficial exacta T.
c. El volumen.

Solución:

En GeoGebra trazamos el cilindro circular de radio 5 y altura 12, en la Vista 3D y se obtienen los resultados, ver figura 23.

Figura 23

Cilindro circular



Procedimiento:

En la vista 3D seleccionamos los puntos A(0,0,0) y B(0,0,12), activar el icono cilindro, señalamos el punto A y B, digitamos 5 como radio, con esto se crea el cilindro. En la vista algebraica, debajo del punto a cilindro, está el valor del volumen del cilindro. En el punto b está el valor del área lateral del cilindro. A continuación, calculamos el área de la base, para lo cual, en la celda de entrada, escribimos Ba = π x 25, para encontrar el total del área utilizamos la siguiente fórmula. T = b + BA, con esta información se crean los textos, incluyendo las variables de los resultados y se finaliza.

A continuación, está la secuencia de construcción del cilindro que corresponde a la figura 23.

Tabla 11
Secuencia de construcción de un cilindro

Nº	Nomb	Ícono	Descripción	Valor
1	Punto A		Punto de intersección	A = (0, 0,...n
2	Punto B			B = (0, 0,...
3	Cilind...		Cilindro(A, B, 5)	a: 942.48
3	Super...		Cilindro(A, B, 5)	b: 376.99
3	Circu...		Cilindro(A, B, 5)	c: X = (0,...
3	Circu...		Cilindro(A, B, 5)	d: X = (0,...
4	Núme...	$a=2$		Volumen...
5	Núme...	$a=2$		Ba = 78....
6	Núme...		b + Ba	T = 455.53
7	Texto ...	**ABC**	"Área lateral=" +	"Área lat...
8	Texto ...	**ABC**	"Volumen = " + a + ""	"Volume...
9	Texto ...	**ABC**	"Área circunferen	"Área cir...
10	Texto ...	**ABC**	"Área = " + Ba + ""	"Área = ...
11	Texto ...	**ABC**	"Área total = " +	"Área tot...

Al final obtenemos el cilindro circular recto que se muestra en la figura 23

7.4. Poliedros y esferas

Finalizando el bimestre y el capítulo de geometría plana, estudiaremos lo relacionado con el ángulo diedro, poliedro (convexo y cóncavo), vértices, arista y caras, ecuación de Euler, poliedros regulares, (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro), Esfera (centro, radio, diámetro, gran círculo, hemisferio), Área superficial y volumen.

Definición de poliedro.- “Es una superficie cerrada que consta de regiones poligonales. Las regiones poligonales son llamadas caras” (Mervin y Charles, 1965).

Los poliedros, como los polígonos, se clasifican con el número de elementos frontera. Es decir, los poliedros se clasifican por el número de caras, por ejemplo, el menor número de caras de un poliedro es 4 y se llama tetraedro.

Ahora, para reforzar su aprendizaje, analícese el siguiente ejemplo, pero antes analice el siguiente teorema:

Teorema.— Si dos sólidos son similares con un factor de escala de a:b, entonces las áreas de superficie tienen una razón de a2:b2 y los volúmenes tienen una razón de a3:b3.

Ejemplo (Burrill y otros, 2000)

Manuel, un agricultor de la sierra, construyó una mazorca grande para atraer turistas a su finca. Dicha mazorca tiene 32 pies de largo y un radio de 12 pies. Cada grano corresponde a un galón de jugo de leche con un volumen de 231, pulg^3.

a. ¿Cuál es el factor de escala entre la mazorca grande y una real semejante que tenga 14 pulgadas de largo?
b. Estime el volumen de un grano de la mazorca real de 14 pulgadas.

Solución:

a. Entonces, la razón entre las medidas correspondientes de las mazorcas es:

Transformamos los pies a pulgadas= 32 * 12pulg = 384 pulgadas

Por lo tanto, el factor de escala es

$$\frac{\textit{Longitud de la mazorca grande}}{\textit{Longitud de la mazorca real}} = \frac{384}{14} = \frac{192}{7}$$

Por lo tanto, el factor de escala es 192:7

b. Ahora, por el teorema anterior se tiene que, si el factor de escala es a:b, entonces la relación de los volúmenes es a3:b3, a = 192 y b = 7

$$\frac{\textit{Volumen de la mazorca grande}}{\textit{Volumen de la mazorca real}} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{192^3}{7^3} = \frac{7.077.888}{343}$$

Para hallar el volumen de un grano de la mazorca real, es:

$$\frac{7.077.888}{343} = \frac{231}{x}$$

$$x = \frac{231*343}{7.077.888} = 0.01119\ pulg^3$$

Por lo tanto, el volumen de un grano de mazorca real es de aproximadamente 0.011 $pulg^3$

Para contestar la pregunta, ¿cómo realizar o encontrar el área y volumen de superficies y sólidos? Les invito a ver el siguiente video, Volumen de prisma y una pirámide.

En el video desarrollan los procesos que se deben realizar para resolver ejercicios de un prisma en relación con una pirámide.

Sugerimos revisar el siguiente contenido: Problemas interactivos de área y volumen del prisma, de la pirámide y del tronco de la pirámide.

Es un sitio que presenta ejercicios de diferentes tipos, en la que se debe colocar la respuesta, tiene la opción de revisar y corregir los ejercicios, presentando como retroalimentación el desarrollo de cada ejercicio.

Finalmente, como resumen de esta unidad, se presentan las relaciones de volumen y área para sólidos, que lo puede observar a través del siguiente documento: Relaciones sólidos

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la semana 7 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Compruebe su avance en el estudio de las superficies y sólidos, contestando las interrogantes planteadas:

   - ¿En qué se diferencian los prismas rectos y oblicuos?, grafique.
   - ¿Cuál es la diferencia entre área lateral y total de una pirámide? Grafique un ejemplo.
   - ¿En qué se diferencian los cilindros rectos y oblicuos?, grafique.
   - ¿En qué se diferencian los poliedros convexos y cóncavos?, grafique.

   Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de las superficies y sólidos, es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes

Autoevaluación 7

1. (   ) Un **prisma** recto es un prisma en el cual las aristas laterales paralelas son oblicuas a las aristas de las bases en sus puntos de intersección.

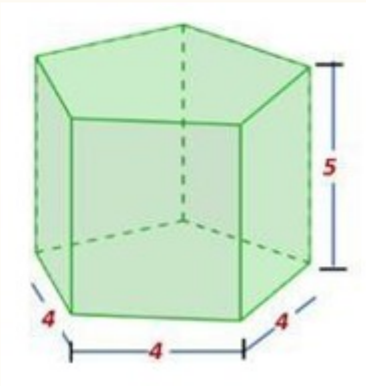
2. (   ) Un **prisma oblicuo** es un prisma en el cual las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base en sus puntos de intersección.

3. (   ) El **área lateral L** de un prisma es la suma de las áreas de todas las caras laterales.

4. (   ) Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

5. (   ) **Un cubo** es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas son congruentes**.**

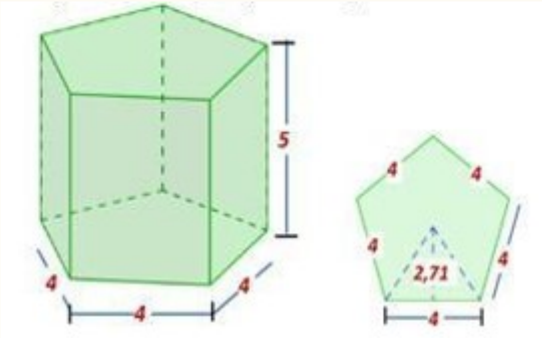
6. Encuentre el área lateral de un prisma recto, sus bases son pentágonos regulares con lados de 4 cm y una altura de 5 cm.



a. $20cm^2$.
b. $40cm^2$.

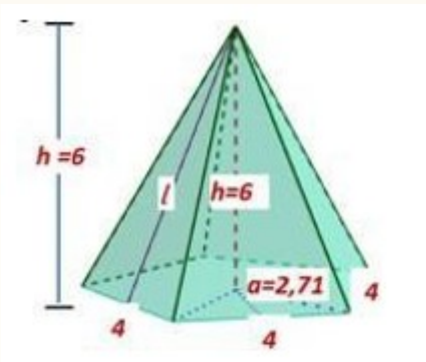
c. 100cm^2.

7. Encuentre el área total de un prisma recto, sus bases son pentágonos regulares con lados de 4 cm y una altura de 5 cm. El apotema del pentágono es 2.71cm.



a. 100.20cm^2.
b. 54.20cm^2.
c. 154.20cm^2.

8. Encuentre el área total de una pirámide pentagonal regularde 4 cm y una altura de 6 cm. El apotema del pentágono es 2.71cm.

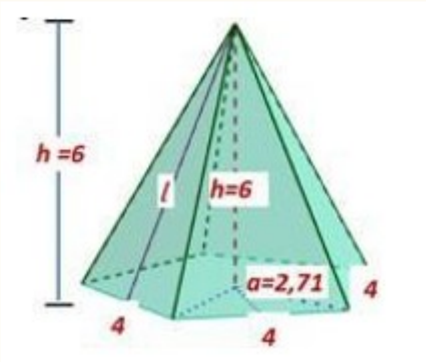


a. 43.34cm^2.

b. $27.10 cm^2$.

c. $93.00 cm^2$.

9. Encuentre el volumen de una pirámide pentagonal regular de 4 cm y una altura de 6 cm. El apotema del pentágono es 2.71cm.

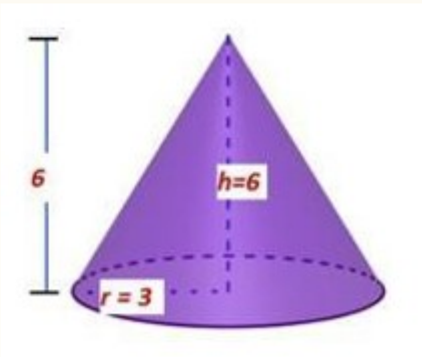


a. $48.2 cm^3$.

b. $93.0 cm^3$.

c. 65.90^3.

10. Encuentre el volumen del cono de radio 3 cm y altura 6 cm



a. $18\pi cm^3$.

b. $56.55 cm^3$.

c. 27π cm^3.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

"Las matemáticas tienen belleza y romance. El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar. Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí.".

Marcus du Sautoy.

En esta semana ocho, usted debe sistematizar los conocimientos estudiados en las siete semanas anteriores y prepararse para la evaluación de fin del primer bimestre, estudiando, repasando y poniendo en práctica los conocimientos tratados, para lograr el resultado de aprendizaje esperado: utilice GeoGebra para la comprobación de los ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Reforcemos los conocimientos a través de las siguientes actividades.

1. Se sugiere que revise las lecturas y videos propuestos.
2. De igual forma, revise las evaluaciones parciales y elabore un banco de preguntas referentes a la geometría en el plano.

   Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

3. Realice nuevamente las autoevaluaciones y ejercicios propuestos de los contenidos del primer bimestre, las unidades:

   Unidad 1.— Relaciones entre rectas y ángulos.

   Unidad 2. — Rectas paralelas.

Unidad 3.— Los triángulos y sus relaciones.

Unidad 4.— Los cuadriláteros y sus relaciones.

Unidad 5. Círculos.

Unidad 6.-Áreas de polígonos y círculos.

Unidad 7.-Superficies y sólidos.

4. Compruebe gráficamente los resultados de los ejercicios y ejemplos resueltos utilizando GeoGebra, de tal manera que tenga el mayor éxito al momento de desarrollar el cuestionario de evaluación presencial.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2:

Determina los principios y postulados necesarios para la modelación y resolución de problemas de la geometría espacial.

Mediante el estudio de este bimestre, usted tendrá la capacidad de aplicar con pertinencia los principios y postulados necesarios para la modelación y resolución de problemas de la geometría espacial.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

"Si la gente no cree que las matemáticas son simples, es solo porque no se dan cuenta de lo complicado que es la vida.".
John Louis von Neumann

En hora buena, después de terminar con éxito el primer bimestre, en la primera semana del segundo bimestre ingresaremos al campo de los vectores tridimensionales, realizando las Operaciones Básicas y estudiando las Propiedades de los vectores.

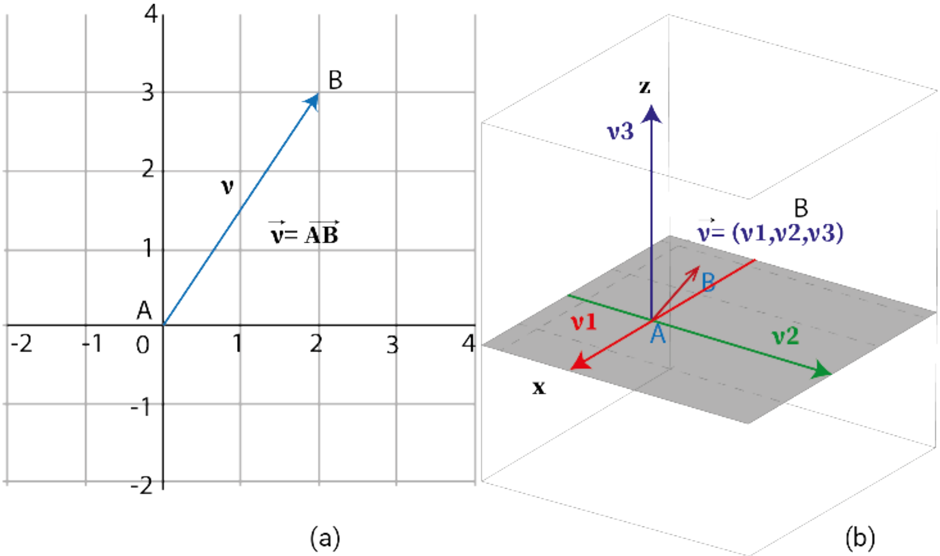
8.1. Vectores

La definición completamente de ciertas magnitudes como la velocidad, la fuerza o la aceleración, además de su valor numérico: es necesario especificar su dirección y se las denominan magnitudes vectoriales o, simplemente, vectores.

Los vectores se representan en el plano o en el espacio mediante segmentos orientados de recta. Si el punto inicial de un vector $\vec{v}$ es B y el punto final es B, escribiremos, figura 24 (a).

Figura 24

Vectores



Un vector en el espacio se representa mediante segmentos orientados de recta. Si el punto inicial de un vector $\vec{v}$ es A y el punto final es B, escribiremos, figura 24 (b).

Un punto del espacio está determinado por sus coordenadas $P(x, y, z)$ respecto a dichos ejes. Las *componentes* de un vector $\vec{v}$ son las coordenadas (v1, v2, v3) del punto final del representante del vector, cuyo origen está situado en el origen de coordenadas. Vamos a identificar cada vector con sus componentes y escribiremos simplemente $\vec{v} = (v^1, v^2 v^3)$, figura 24 (b).

Componentes de un vector en el espacio

Si las coordenadas de A y B son: $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ los componentes del vector $\vec{AB}$ obtienen restando a las coordenadas del extremo las del origen. $\vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z1)$.

Estimado estudiante, para introducirnos en el campo de los vectores, les invito a leer el tema “Vectores”, página 10, del texto Vectores, rectas y planos.

Con la lectura del tema se aprenderá a marcar un punto y construir vectores en los planos de 2 y 3 dimensiones. La notación como la traslación de los vectores.

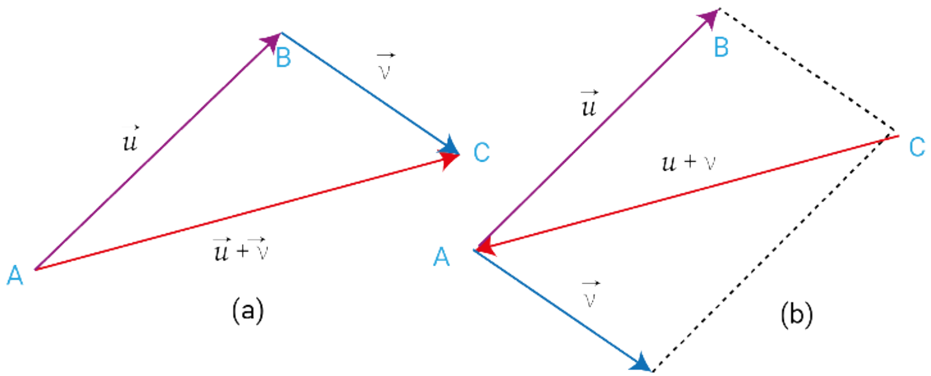
8.2. Operaciones básicas

8.2.1. Suma de vectores

Consideremos dos vectores $\vec{v} = (x1, y1, z1)$ y $\vec{u} = (x2, y2, z2)$ y tomemos los representantes de ellos, de suerte que $\vec{v}$ tenga como origen el extremo de $\vec{u}(B)$, entonces el vector suma está representado por un vector fijo cuyo origen es el origen del primero y cuyo extremo es el extremo del segundo, figura 25 (a)

Figura 25

Vectores AB, AC y BC



En el caso de que $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{x1}, \mathrm{y1}, \mathrm{z1})$ y $= (\mathrm{x2}, \mathrm{y2}, \mathrm{z2})$, no sean lineales, la suma de vectores puede regirse por la regla del paralelogramo, donde $\vec{\mathrm{u}} = (\mathrm{AB})$ y $\vec{\mathrm{v}} = (\mathrm{AD})$, entonces $\vec{\mathrm{u}} + \vec{\mathrm{v}} = \mathrm{AC}, \mathrm{ABCD}$ son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

La suma de $\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{u}}$ es el vector $\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{u}} = (\mathrm{x} + \mathrm{x}, \mathrm{y} + \mathrm{y}, \mathrm{z} + \mathrm{z})$

RESTA: la resta de vectores se define como la suma al minuendo de opuesto del sustraendo: $\vec{\mathrm{u}} - \vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{u}} + (-\vec{\mathrm{u}})$ es el vector $\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}} = (\mathrm{x} - \mathrm{x2}, \mathrm{y}_1 - \mathrm{y}^2, \mathrm{z}^1, -\mathrm{z}_2)$.

Producto de un número real por un vector

El producto de un número real kЄR por un vector $\vec{\mathrm{u}}$ es otro vector de: igual dirección que el vector $\vec{\mathrm{u}}$, del mismo sentido si k es positivo o de sentido contrario, si k es negativo, si tenemos $\vec{\mathrm{v}}$ = (x , y , z) y multiplicamos por k tenemos

$$\overrightarrow{\mathrm{kv}} = (\mathrm{kx}_1, \mathrm{ky}_1, \mathrm{kz}_1)$$

Las componentes del vector resultante se obtienen multiplicando por K las componentes del vector.

Estimado estudiante, para resolver con destreza las operaciones con los vectores es necesario realizar varios ejercicios, por tal motivo, analicemos los diversos ejemplos que propone el texto Vectores, rectas y planos.

En el tema "Operaciones básicas", página 13. Con la lectura del tema y el análisis de los ejemplos, se adquirirá la competencia en las operaciones básicas de vectores.

8.3. Propiedades de los vectores

Definiciones (figura 26)

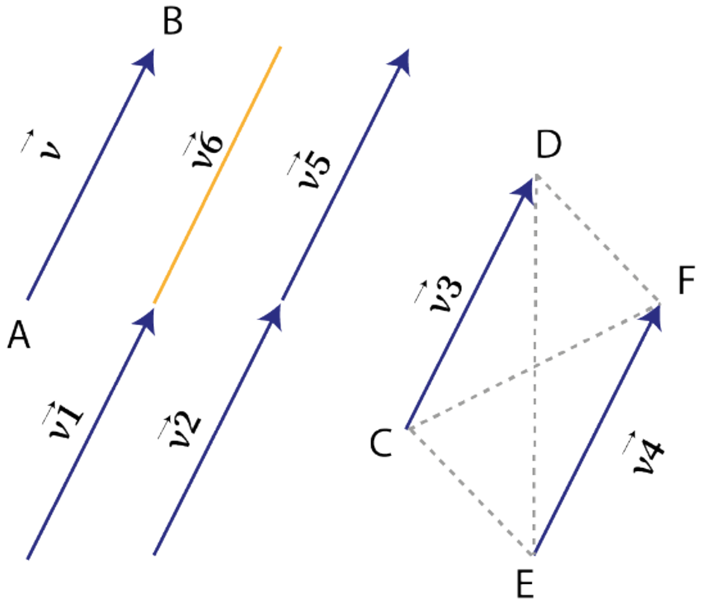
Un **vector fijo** o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, está determinado por un par de puntos del espacio (A, B), el punto A es el origen del vector fijo y el punto B su extremo, ver figura 26.

El **módulo** de $\overrightarrow{AB}$ se indica $|\overrightarrow{AB}|$ y es la medida del segmento $\overrightarrow{AB}$ es decir la distancia entre los puntos A y B.

Misma dirección. Dos vectores fijos $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ tienen la misma dirección, cuando las rectas en las que descansan CD y EF coinciden o son paralelas.

Figura 26

Vectores fijos



Mismo sentido, dos vectores fijos $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ y tienen el mismo sentido cuando son paralelas o estando en la misma recta ($\vec{v}_3$ y $\vec{v}_5$), ambos tienen el mismo sentido que el otro vector fijo que descansa en una recta paralela.

Sentido contrario, cuando dos vectores son paralelos o estando en la misma recta tienen sentido contrario ($\vec{v}_1$ y $\vec{v}_6$).

Equipolentes, decimos que dos vectores fijos $\vec{v}_3$ y $\vec{v}_4$ y son equipolentes o iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, es decir, cuando descansan en rectas paralelas. La equipolencia o igualdad es una relación entre los vectores fijos que gozan de las siguientes propiedades:

a. Reflexiva: todo vector fijo es equipolente, asimismo.
b. Simetría, si $\vec{v}_3$ es equipolente a $\vec{v}_4$ dos, entonces $\vec{v}_4$ es equipolente
c. Transitiva si $\vec{v}_3$ es equipolente a $\vec{v}_4$, y $\vec{v}_4$ y es equipolente a $\vec{v}_5$ entonces $\vec{v}_3$ es equipolente a $\vec{v}_5$.

Un vector libre es la clase de vectores formada por un vector fijo y todos los vectores fijos equipolentes a él.

Cuando escribimos $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ estamos indicando que $\vec{v}$ es el vector libre formado por $\overrightarrow{AB}$ y todos sus equipolentes, es decir, el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ es un representante del rector $\vec{v}$.

Propiedades de la suma:

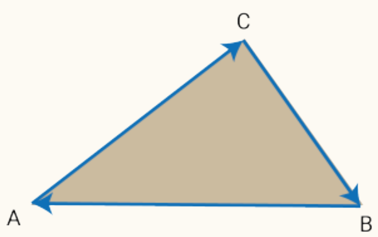
a. Asociativa: $v + (w + u) = (v + w) + u$
b. Elemento neutro: $v + 0 = v$
c. Vector opuesto: $v + -v = 0$
d. Conmutativa: $v + w = w + v$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido y plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Desarrolle el siguiente ejercicio.

   Determinar los componentes de los vectores que se pueden trazar en el triángulo de vértices A(−3, 4, 0), B(3, 6, 3) y C(−1, 2, 1), figura siguiente.



   Solución:

$\overrightarrow{AB}$= (3 + 3, 6-4, 3 – 0) = (6, 2, 3)

$\overrightarrow{AC}$= (-1 +3, 2 – 4, 1 -0) = (2, -2, 1)

$\overrightarrow{BC}$= (-1 -3, 2 – 6,1 -3) = (-4, -4, -2)

$\overrightarrow{BA}$= (-3 -3, 4 -6, 0 -3) = (-6, -2, -3)

$\overrightarrow{CA}$= (-3 + 1, 4 -2, 0 -1) = (-2, 2, -1)

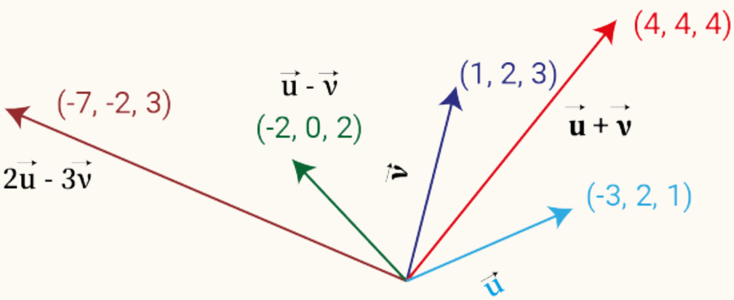
$\overrightarrow{CB}$= (3 +1, 6 – 2, 3 -1) = (4, 4, 2)

2. Desarrolle el siguiente ejercicio

Dado los vectores $\vec{v} = (1, 2, 3)$ y $\vec{u} = (3, 2, 1)$, encontrar a) $\vec{v} + \vec{u}$, b) $\vec{v} - \vec{u}$y c) $2\vec{v} - 3\vec{u}$, ver figura siguiente, resuelto en GeoGebra.

Solución:

a. $\vec{v} + \vec{u} +$ = (1, 2, 3) + (3, 2, 1) = (1+3, 2+2, 3+1) = (4, 4, 4)
b. $\vec{v} - \vec{u}$= (1, 2, 3) - (3, 2, 1) = (1 - 3, 2 - 2, 3 -1) = (-2, 0, 2)
c. $2\vec{v} - 3\vec{u}$= 2(1, 2, 3) - 3(3, 2, 1) = (2,4,6) – (9,6,3) = (-7, -2, 3)



Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

3. Le invito a participar del siguiente quiz en donde podrá poner a prueba lo aprendido durante la semana.
[Vectores tridimensionales]

4. Estimado estudiante, con la finalidad de conocer la aplicabilidad de las diferentes propiedades de los vectores, invito a ver el video Vectores en el espacio: elementos y operaciones, para profundizar los conocimientos de un vector libre y fijo, realice las operaciones con ellos: suma, resta, multiplicación por un escalar y suma de punto más vector.
5. También es necesario leer el tema "Propiedades de los vectores", página 22, del texto Vectores, rectas y planos.

   Con la lectura del tema y el análisis de los ejemplos, se adquirirá la competencia en aplicabilidad de las diferentes propiedades de los vectores.

6. Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema los Vectores tridimensionales, de la semana 9 es plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido:

   a. Desarrolle un ejemplo de cada una de las propiedades de los vectores.
   b. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas.

      - Sea $v = (1, 3, 4)$ y $w = (3, 1, 4)$, entonces $v + w = ?$
      - Sea $v = (1, 3, 4)$ y $w = (3, 1, 4)$, entonces $v - w = ?$
      - Sea $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 3, 2)$, $C = (1, 5, 0)$ y $D = (p, 2, k)$.

        Determinar los valores de p y k de modo que $AB = t \cdot CD$.

7. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de vectores tridimensionales. Introducción. Es hora de que realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar los puntos más importantes.

Autoevaluación 8

1. (   ) Un par de puntos del espacio (O, P) determina un vector fijo OP. El punto P es el origen del vector fijo y el punto O su extremo.

2. (   ) El módulo de OP se representa OP y es la medida del segmento OP es decir la distancia entre: OP.

3. (   ) Dos vectores fijos OP y QR tienen la misma dirección, cuando la rectas en las que descansan [r(OP) y r (QR)] se intersectan.

4. (   ) Dos vectores fijos OP y QR son equipolentes o iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

5. La equipolencia o igualdad es una relación entre los vectores fijos tiene sus propiedades. Relacione las propiedades con su descripción.

Propiedad	Descripción
1. Reflexiva	a. Sí AB es equipolente a CD y CD es equipolente EF, entonces AB equipolente a EF
2. Simetría	b. Todo vector fijo es equipolente a si mismo
3. Transitiva	c. Si AB es equipolente a CD, entonces CD es equipolente a AB

a. 1a, 2b, 3c.
b. 1c, 2b, 3a.
c. 1b, 2c, 3a.

6. Encontrar el vector unitario de $\vec{v} = (2, 1, 2)$.

a. $(1, 1, 1)$.

b. $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

c. $\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right)$.

7. Encontrar la suma y resta de los vectores $\vec{\mathrm{v}} = (1, 3, 4)$ y $\vec{\mathrm{u}} = (3, 2, 4)$.

$\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{u}}; \vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}}$

a. (4, 5, 8) y (-2, 1, 0).
b. (8, 5, 4) y (-2, 1, 0).
c. (4, 5, 8) y (2, 1, 0).

8. Realizar las siguientes operaciones con los vectores $\vec{\mathrm{v}} = (1, 3, 4)$ y

$\vec{\mathrm{u}} = (3, 2, -4); 2\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}}; -\vec{\mathrm{v}} + 3\vec{\mathrm{u}}$.

a. (-1, 4, 12) y (8, 3, -16).
b. (-1, -4, -12) y (8, 3, -16).
c. (4, 5, 8) y (2, 1, 0).

9. Halla las componentes del vector $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ de los puntos A(1,1,4) y B(3,0,2)

de R3.

a. (2, -1, -2).
b. (-2, 1, 2).
c. (4, 1, 6).

10. Dados los puntos A(1, 0, −1), B(2, 1, 0), C(0, 0, −1) y D(−1, 1, 1), halla los vectores AB, BC y CD. Comprueba si son linealmente dependientes o no. Dar una interpretación geométrica del hecho.

   a. (1, 1, 1), (−2, −1, −1), (−1, 1, 2), dependientes.
   b. (1, 1, -1), (2, −1, −1), (−1, 1, 2), dependientes.
   c. (1, 1, 1), (−2, −1, −1), (−1, 1, 2), independientes.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 10

“Dios usó las hermosas matemáticas al crear el mundo.”.
Paul Dirac

Muy bien estimado estudiante, continuando con el aprendizaje, en esta décima semana, estudiaremos la Unidad 9. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, lo referente a las ecuaciones de la recta en el espacio y la recta definida como intersección de dos planos.

Unidad 9. Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio

9.1. Ecuaciones de la recta en el espacio

Ecuación vectorial

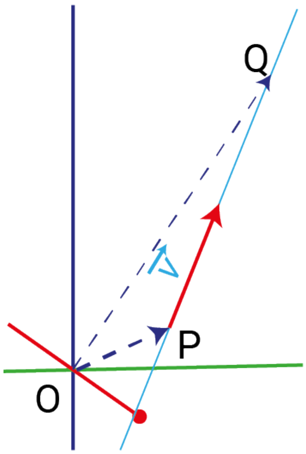
Definimos la recta que pasa por el punto P(x_1, y_1,z_1) y Q, figura 27, es paralela al vector $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{v1}, \mathbf{v2}, \mathbf{v3})$ como el conjunto de los puntos Q(x, y, z) del plano dado por = $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ = $\overrightarrow{\mathbf{kv}}$, con k Є R. o bien,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathbf{kv}}$$

Expresando los vectores en función de sus coordenadas, obtenemos la ecuación vectorial de la recta:

(x, y, z) = (x1, y1, z1) + k(v1, v2, v3).

Figura 27
Gráfico de vectores



Ecuación paramétrica

Expresando la ecuación vectorial, componente a componente, obtenemos la ecuación paramétrica:

$\{x = x_1 + kv_1 \; y = y_1 + kv_2 \; z = z_1 + kv_3$

Ecuación continua

Si las componentes del vector $\vec{v}$ no son nulas, podemos despejar k y obtener la ecuación continua.

$$\frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v^2} = \frac{Z-Z_1}{v_3}$$

Ecuaciones implícitas o cartesianas de la recta

De la ecuación continua, separando las igualdades y agrupando dos a dos fracciones, obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\frac{X-X_1}{V_1}=\frac{Y-Y_1}{V_2}\Rightarrow V_2(X-X_1)=V_1(Y-Y_1)\Rightarrow V_2X-V_2X_1=V_1Y-V_1Z_1$$

$$\frac{X-X_1}{V_1}=\frac{Z-Z_1}{V_3}\Rightarrow V_3(X-X_1)=V_1(Z-Z_1)\Rightarrow V_3X_1=V_1Z-V_1Z_1\text{-}$$

Con

$$A=V_2;\ B=-V_1;\ C=V_1Y_1-V_2X_1$$

$$A=V_3;\ B=-V_1;\ C=V_1Z_1-V_3X_1$$

De donde

$$V_2X-V_1Y+(V_1Y_1-V_2X_1)=0\Rightarrow Ax+Bz+C=0=>4x-y-11=0$$

$$V_3X-V_1Y+(V_1Z_1-V_3X_1)=0\Rightarrow Ax+Bz+C=0=>-x-z+3=0$$

Ejemplo: determina la ecuación continua y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos A(2, -3, 1) y B(4, 5, -1).

A es el punto inicial y, considerando al punto B, entonces el vector director es = (2, 8, -2), la ecuación sería:

$$\frac{X-X_1}{V_1}=\frac{Y-Y_1}{V_2}=\frac{Z-Z_1}{V_3}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-1}{-2}$$

Ecuación implícita:

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{8}\Rightarrow 8x-16=2y+6\Rightarrow 8x-2y-22=0$$

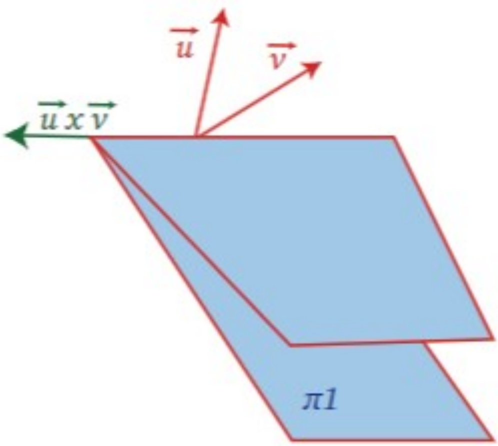
$$\frac{x2}{2}=\frac{z-1}{-2}\Rightarrow -2x+4=2z\Rightarrow -2x-2z+6=0$$

9.2. Recta definida como intersección de dos planos

Una recta definida como intersección de dos planos no paralelos es el producto vectorial de los vectores normales a los planos, que es el vector director de la recta, figura 28.

Figura 28

Recta definida como intersección de dos planos no paralelos



$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo. Ecuación paramétrica de la recta determinada por los planos:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0 \\ 02x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Dos soluciones:

1. Calcular un punto y un vector director de la recta. Para calcular un punto P de la recta, le damos un valor a una de las variables, por ejemplo, Z = 0, y resolvemos el sistema resultante:

   $$X - y + 2.0 = 2 \Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow x = 1$$

   $$2x + y + 0 = 1 \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow y = -1$$

   Para calcular un vector director $\vec{v}$ de la recta utilizamos los vectores normales a los planos:

$$\vec{v} = \vec{n}_1 x \vec{n}_2 = |\vec{i}\vec{j}\vec{k}\, 1 - 12211| = -3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = 3(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

Por tanto, podemos coger $\vec{v}$ = (−1, 1, 1). La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P1, −1,0) y tiene vector director $\vec{v}$= (−1, 1, 1) es:

$$x = 1 - ky = -1 + k\}$$

$$z = k$$

2. Parametrizamos la recta resolviendo el sistema que forman las dos ecuaciones, utilizando Gauss-Jordan.

$$x - y + 2z = 2$$

$$2x + y + z = 1$$

$$A^1 = (1 - 12211\ 21) \sim (1 - 1203 - 32 - 3) \sim (1 - 1201 - 12 - 1) \sim (10101 - 11 - 1)$$

$$x + z = +1 - z = -1\} \Rightarrow x = +1 - zy = -1 + z\} \Rightarrow x = +1 + ky = -1 + kz = k\}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, de la semana 10 y plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre ecuaciones de la recta y el plano en el espacio, invito a ver el video Rectas y planos. Ecuación de plano y recta en el espacio.
2. El video es un repaso general de la ecuación de un plano en el espacio r3. Un plano queda determinado por un punto y dos vectores directores no proporcionales o bien por tres puntos no alineados.
3. En la página 79, del texto Vectores, rectas y planos, el autor presenta otro método para determinar la intersección de una recta con dos planos.

4. Como futuros profesionales en educación, es importante tener diferentes puntos de vista del material didáctico y la forma de planificar la clase, por tal motivo invito a visitar el sitio Recta en R3. Ecuaciones de la recta en R3, en él encontrará, además de la explicación del contenido con animación, exámenes, que son de mucha ayuda.
5. Contestando las interrogantes planteadas:

    - ¿Cuáles son las ecuaciones de la recta en el espacio?
    - ¿Cuál es la ecuación de la recta definida como intersección de dos planos?

6. Desarrolle un ejemplo de cada una de las ecuaciones de la recta en el espacio.

    Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

7. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas de los siguientes ejercicios:

    - Hallar el vector director de la recta dada jura las siguientes ecuaciones implícitas.

    $$\begin{cases} x + y + z - 2 = 0 \\ -x + y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

    - Determine las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(1, 1, 1) y B(2, 1, 2).

8. Desarrolle la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 9

1. (   ) Recta definida como intersección de dos planos no paralelos es la suma vectorial de los vectores normales a los planos es un vector director de la recta.

2. (   ) La ecuación vectorial de la recta está expresada por los vectores en función de sus coordenadas.

(x, y, z) = (x1, y1, z1) + k(v1, v2, v3)

3. (   ) La ecuación continua se obtiene despejando el parámetro en cada ecuación paramétrica e igualando.

$$\frac{x-x_1}{v^1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}$$

4. (   ) La intersección de 2 planos secantes se interceptan en un punto.

5. (   ) La intersección de 2 planos dado origen a 2 semiplanos el ángulo de intercepción entre 2 semiplanos se denomina ángulo diedro.

6. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos O(3, 2, 1) y P(-2, 2, 0).

   a. (x, y, z) = (3, 2, 1) + α (-2, 2, 0).
   b. (x, y, z) = (3, 2, 1) + α (-5, 0, -1).
   c. (x, y, z) = (-2, 2, 0) + α (-5, 0, -1).

7. Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta OP; (x, y, z) = (3, 2, 1) + α (-4, -1, -1).

   a. x-3/4 = y -2 = z - 1.
   b. x-3/-4 = y + 2 = z - 1.
   c. x-3/4 = y -2 = z + 1.

8. Encontrar la recta de intersección entre los planos a = 3x − 2y + z = 2 y b = x + 3y + 5z = 3. Fijando arbitrariamente z = 0

   a.
   $$\mathbf{r:(z,y,z)} = \left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + \mathbf{t(-13, -14, 11).}$$

b.
$$r:(z,y,z) = (\tfrac{9}{10}, \tfrac{7}{10}, 0) + t(-\tfrac{13}{14}, -1, \tfrac{11}{14}) + t(-13/14, -1, 11/14).$$

c.
$$r:(z,y,z) = (3, -2, 1) + t(1, 3, 5).$$

9. Encontrar la recta de intersección entre los planos a= 3/4 x+2y+2z=5 y b= 3/4 x-2y+2z=3. Fijando arbitrariamente z = 0.

a.
$$r:(z,y,z) = (16, 1, 0) + t\left(1, 0, -\tfrac{3}{8}\right).$$

b.
$$r:(z,y,z) = \left(\tfrac{16}{3}, \tfrac{1}{2}, 0\right) + t\left(1, 0, -\tfrac{3}{8}\right).$$

c.
$$r:(z,y,z) = (3, -2, 1) + t(1, 3, 5).$$

10. Encontrar la recta de intersección entre los planos a = x + y + z= -1 y b = x − y − z = - 2. Fijando arbitrariamente z = 0

a.
$$r:(z,y,z) = (16, 1, 0) + t\left(1, 0, -\tfrac{3}{8}\right).$$

b.
$$r:(z,y,z) = \left(\tfrac{16}{3}, \tfrac{1}{2}, 0\right) + t\left(1, 0, -\tfrac{3}{8}\right).$$

c.
$$r:(z,y,z) = \left(-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}, 0\right) + t(0, 2, -2).$$

Ir al solucionario

Semana 11

"Sin matemáticas, no hay nada que puedas hacer. Todo a tu alrededor es matemáticas. Todo a tu alrededor son números".

Estimado estudiante, en la semana onceava estudiaremos la Unidad10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, lo concerniente a la intersección de una recta y un plano; las Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio; la recta perpendicular a un plano y la distancia mínima entre 2 rectas alabeadas.

Unidad 10. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio

10.1. Intersección de una recta y un plano

Las posiciones relativas de una recta y un plano, permiten, indicar si la recta y el plano en el espacio tienen o no puntos en común. Se clasifican en: figura 29.

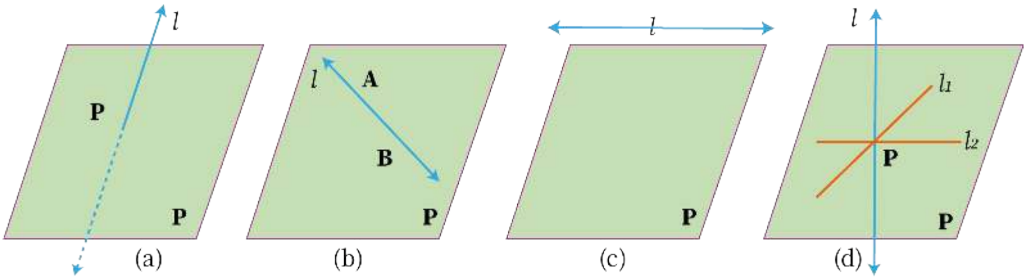
a. **Secante**, la recta tiene 1 punto en común, figura 29 (a); $l \cap \pi = \{P\}$
b. **Contenidas**, todos los puntos de una recta pertenecen al plano, figura 29 (b); $l \subset \pi$.

$$l \cap \pi = l$$

c. **Paralelas**, todos los puntos de una recta están a la misma distancia del plano, figura 29 (c); $l \parallel \pi$
d. **Perpendiculares**, la recta con el plano forma un ángulo de 90°, solo, si la recta L es perpendicular a 2 rectas, como mínimo, secantes del plano P, figura 29 (d); $l \perp \pi \iff \vec{v} \parallel \vec{n} \iff \vec{v} = k\vec{n}$

Figura 29

Rectas paralelas y perpendiculares.



Ejemplo: buscar la intersección entre la recta r1 y el plano π.

Solución: escribir las ecuaciones paramétricas de la recta y las reemplaza en la ecuación del plano:

π: 2x – 3y + z +1 =0

r1 : (x, y, z) = (0, 1, 3) + a (1, 0, 1)

$$\begin{cases} x = a \\ y = 1 \end{cases}$$

z = 3 + a

2 a – 3 . 1 + (3 + a) + 1 = 0 a = -1/3

Reemplazar el valor del parámetro a en:

$$\begin{cases} x = a = -1/3 \\ y = 1 \end{cases}$$

z = 3 + a = 3 -1/3 = 8/3

$$r_1 \cap \pi = \{P\} = \left\{-\tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{8}{3}\right\}$$

10.2. Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio

Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio, permiten, indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Se clasifican en:

a. **Paralelas**, todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra.
b. **Coincidentes**, todos los puntos son comunes con todos los puntos, por tanto, son puntos de la misma recta.
c. **Secantes**, las rectas tienen un punto en común.
d. **Se cruzan** (alabeadas) las rectas, no tienen puntos en común porque no pertenecen al mismo plano.
e. **Perpendiculares**, las rectas con el plano forman un ángulo de 90

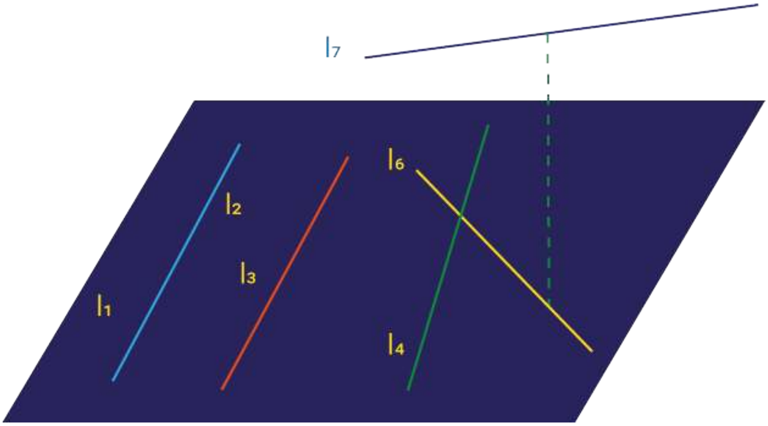
En la siguiente tabla se determinan las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio de acuerdo con el valor del rango:

Tabla 12
Posiciones relativas de 2 rectas

Rango	RECTAS			
	Paralelas	Coincidentes	Secantes	Se cruzan
A	2	2	3	3
A'	3	2	3	4
Soluciones	No	Infinitas	Única	No
Ejemplo figura siguiente	*l2 y l3*	*l1 y l2*	*l4 y l6*	*l6 y l7*

Figura 30

Posiciones relativas de 2 rectas en el espacio



Supongamos que las rectas vienen dadas en forma general o implícita, es decir:

$$R:\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ \mathbf{a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0} \end{cases} \qquad S:\begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \\ \mathbf{a_4x+b_4y+c_4z+d_4=0} \end{cases}$$

Lo que da lugar a un sistema de 4 ecuaciones con tres incógnitas, luego, y teniendo en cuenta que el rango de A es como mínimo 2, ya que, si fuera rango 1, tendríamos 4 planos paralelos, lo que implicaría que no habría recta:

Ejemplo 10.2, ejemplo de (Gonzáles y Valdés, 2015), determine la posición relativa de las rectas:

$$r:\begin{cases} x+2y-3=0 \quad s: \quad x+2=-2y=z-1 \\ \\ y+z+4=0 \end{cases}$$

Solución: Encontramos el vector de la recta r:

$$v_r = n_1 x n_2 = |\overrightarrow{ijk}\ \ 120011| = 2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

Y el vector director de s encontramos reescribiendo la ecuación continua:

$$s : x + 2 = -2y = z - 1 \Rightarrow s : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{1/2} = \frac{z-1}{1} = \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \vec{k}$$

hallamos ahora el vector, siendo P un punto r y Q un punto de s:

$$r : \{x + 2y, +3 = 0y + z + 4 = 0\} \Rightarrow \{y = 0x3z0 - 4 \Rightarrow P(3, 0, -4)yQ(-2, 0, 1)\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-5, 0, 5)$$

planteamos la matriz y calculamos el determinante para hallar el rango.

$$u_1 u_2 u_3 v_1 v_2 v_3 q_1 - p_1 q_2 - p_2 q_3 - p_3 = (2 - 1111/21 - 505) \Rightarrow |2 - 1111/21 - 505| = \frac{35}{2} \neq 0$$

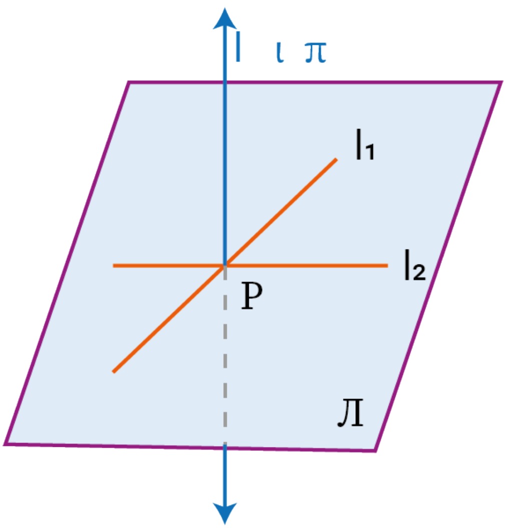
El rango de la matriz es 3 y los vectores son linealmente independientes, las rectas se cruzan.

10.3. Recta perpendicular a un plano

Se dice que la recta es perpendicular al plano cuando la recta con el plano forma un ángulo de 90°, entonces la recta L es perpendicular a todas las rectas del plano π P.(d); figura 31.

Figura 31

Recta perpendicular a plano

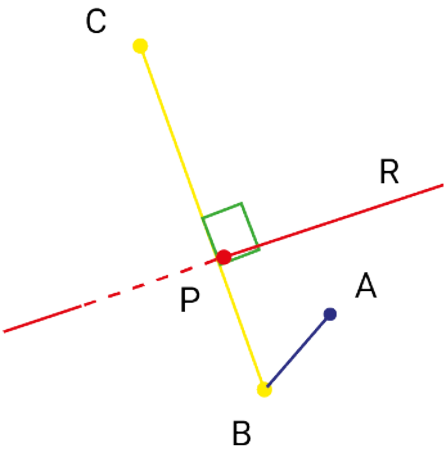


Para verificar la perpendicularidad entre una recta (*l*) y un plano (π),es suficiente comprobar que dos rectas (l_1 y l_2) no sean paralelas del plano (π) sean perpendiculares, ú ortogonales, a la recta (*l*).

Ejemplo 10.3. ejemplo de (Gutiérrez y Mora, 2018)

Figura 32

Plano con dos puntos



Determinar una ecuación normal del plano que contiene los puntos A = (1, 1, -4), B = (2,-2,3) y C = (-3, 1, 4).

Solución: los puntos no son colineales. Para obtener una ecuación normal del plano es necesario hallar un vector normal a este, es decir un vector perpendicular a dicho plano. Supongamos que n = (a,b,c) es el vector normal. Los segmentos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son segmentos en el plano, entonces el vector normal es perpendicular a los vectores *AB* y *BC*, así *AB*.

n = 0 y BC . n = 0

Entonces

AB *= (2,-2,3)-(1, 1,-4) = (1,-3,7)*

AB . n *= 0 =) (1,-3,7) . (a,b,c) = 0 =) a -3b Å7c = 0*

Luego,

BC *= (-3, 1,4)-(1, 1,-4) = (-4, 0,8)*

BC . n *= 0 (-4, 0,8) . (a,b,c) = 0 =) -4a Å8c = 0*

Resolviendo este sistema de ecuaciones se llega a que a = 2c y b = 3c donde c se puede elegir libremente. Entonces (a,b,c) = (2c,3c,c) = c(2, 3, 1), . Así, una ecuación normal del plano es

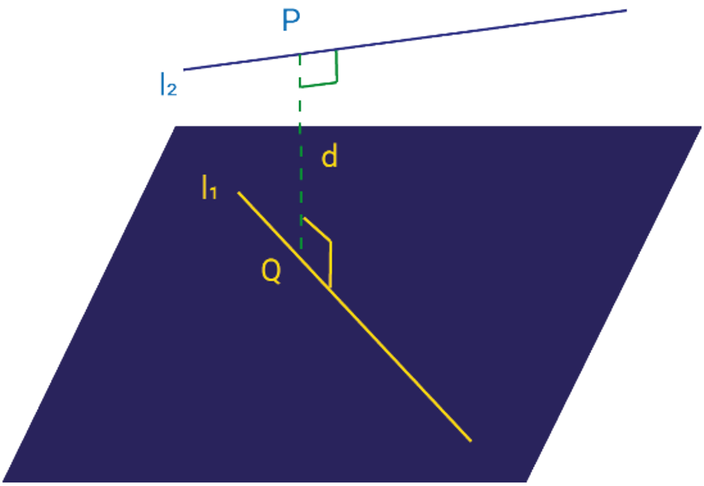
$$\begin{cases} \lceil (x, y, z) - (1, 1, 4) \rceil \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ (x \cdot 1, y \cdot 1, z + 4) \cdot (2, 3, 1) = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

10.4. Distancia mínima entre 2 rectas alabeadas

La distancia mínima entre 2 rectas alabeadas no coplanares ni secantes es la longitud del segmento perpendicular a ambas, *d = PQ*, figura 33.

Figura 33

Distancia entre dos rectas



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, de la semana 11 y plasmar dichos conocimientos, realice las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Posiciones relativas de dos rectas en el espacio, invito a ver el video Rectas paralelas | Posición relativa de dos rectas en el espacio.

   En este vídeo se estudia la posición relativa de dos rectas en el espacio que resultan ser rectas paralelas. En este caso, se cumple que los vectores de dirección de ambas rectas son paralelos (sus coordenadas son proporcionales) y ningún punto de paso de las dos rectas pertenece a la otra recta.

2. En la página 94, del texto Vectores, rectas y planos, el autor presenta otro método para determinar la intersección de una recta con dos planos.
3. En la página 17, del texto Geometría del espacio; ejercicios y problemas, los autores grafican cada uno de los casos y determinan la intersección de una recta con dos planos.
4. Contestando las interrogantes planteadas:

   - ¿Cuál es el procedimiento para obtener la intersección entre una recta y un plano?
   - ¿Cuáles son las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio? Grafique cada una de ellas.

5. Desarrolle un ejemplo de cada una de las ecuaciones de la recta en el espacio.

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

6. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas

- Obtener la intersección, si hubiera, entre el plano π : x -2y + 3z = 1 y la recta L : (x, y, z) = (1, 2,1) + t(0, 2,3)

7. Desarrolle la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 10

1. (   ) Las posiciones relativas de una recta y un plano, permite, indicar si la recta y el plano en el espacio tienen o no puntos en común.

2. (   ) La Intersección de una recta y un plano es **secante** si la recta tiene 2 o más puntos en común con el plano.

3. (   ) La Intersección de una recta y un plano es **Contenidas** cuando todos los puntos de una recta pertenecen al plano.

4. Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio, permite, indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común y se clasifican. Relacione el tipo de intersección con su descripción.

Intersección	Descripción
1. Paralelas	a. Las rectas con forma un ángulo de 90
2. Coincidentes	b. Todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra
3. Secantes	c. Todos los puntos son como unos con todos los puntos son comunes por tanto son la misma recta.
4. Se cruzan	d. Las rectas tienen 1 punto en común

Intersección	Descripción
5. Perpendiculares	e. Las rectas no tienen puntos en común porque no pertenecen al mismo plano

a. 1b, 2d, 3c, 4e, 5a.
b. 1b, 2c, 3d, 4e, 5a.
c. 1a, 2c, 3d, 4e, 5b.

5. (   ) La distancia mínima entre 2 rectas alabeadas no coplanares ni secantes es la longitud del segmento perpendicular a ambas.

6. Encontrar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{\mathrm{v}} = (3, 2, 4)$

que pasa por el punto $P0(1, 1, -1)$.

a. $\pi_1 = 2\mathrm{x} + 3\mathrm{y} + 4\mathrm{z} - 1 = 0$

b. $\pi_1 = 3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 4\mathrm{z} - 1 = 0$

c. $\pi_1 = 3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 4\mathrm{z} - 4 = 0$

7. Encontrar la ecuación del plano que corta perpendicularmente al segmento OP en su punto medio, los puntos O(1,3,3) y P(3,−1,3).

a. π= 2x + y -5 = 0.
b. π= 2x + 2y + z -5 = 0.
c. π= 2x + y + z -5 = 0.

8. Encontrar la posición relativa de las dos rectas r y s:

$$r: \begin{cases} \text{x-y+z} = 0 \\ \text{2x+y} = 30 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} \text{x-2y+z} = 0 \\ \text{x-2y-z} = 3 \end{cases}$$

a. Secantes.
b. coincidentes.
c. Paralelas.

9. Encontrar la posición relativa de las dos rectas r y s:

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=3y \end{cases}$$

z = 1 + 2t

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+3t \end{cases}$$

z = 2t

a. Secantes.
b. Paralelas.
c. Coincidentes.

10. Encuentre la distancia mínima entre las rectas r y s:

r: (x, y, z) = (2, 0, -2) + l(-1, 2, -1)

s: (x, y, z) = (1, -2, 0) + t(2, 1, 1)

a. $\frac{9}{\sqrt{35}}$

b. $\frac{13}{\sqrt{35}}$

c. $\frac{13}{\sqrt{35}}$

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 12

"Las matemáticas son la creación más poderosa y bella del espíritu humano.".

Stefan Banach.

Muy bien estimado estudiante por el interés demostrado en el desarrollo de las actividades, en la semana doceava nos corresponde estudiar la Unidad 11. Posición relativa de dos planos en el espacio, la distancia de un punto a un plano y la proyección de un punto y de una recta sobre un plano.

11.1. Posiciones relativas de 2 planos en el espacio

Las posiciones relativas de 2 planos, permiten, indicar si los 2 planos en el espacio tienen o no puntos en común y se realiza a base de los vectores normales de cada plano, ver figura 34. Se clasifican en:

a. Contenidos todos los puntos del plano π_1 pertenecen al plano π_2 **(a); Los** vectores normales son proporcionales ($\vec{n}_1 = \vec{n}_1$) => significa que son paralelos, $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_1$, además, con el punto de paso pertenece a los mismos planos.

$\pi_1 = \pi_2$ y π_1 c π_2

b. **Paralelos**, todos los puntos del plano están a la misma distancia del plano (b); Los vectores normales son proporcionales ($\vec{n} = \vec{n}$) => significa que son paralelos , $\vec{n} \parallel \vec{n}$ el punto de paso pertenece solo a un plano.

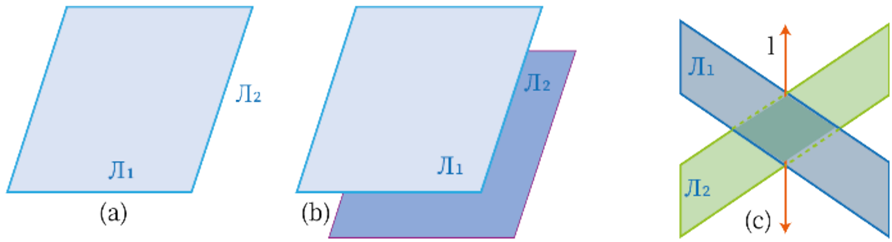
$$\pi_1 \cap \pi_2 = 0$$

c. **Secante**, los planos tienen una recta que les intersectan (corta) o en común (c); Los vectores normales no son proporcionales ($\vec{n}_1 = \vec{n}_1$) => significa que no son paralelos $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_1$

$$\pi_1 \cap \pi_2 = 1$$

Figura 34

Posiciones relativas de 2 planos



Sean los planos *π1 y π2* dados por sus ecuaciones generales, obtenemos los vectores normales. Si los vectores son proporcionales (iguales) son paralelos, si, también los términos independientes son proporcionales, se trata de planos coicidientes. Si los vectores normales no son proporcionales, son planos secantes y tiene una recta que les intersecta. En la siguiente tabla está la síntesis de las posiciones relativas de los dos planos según la proporcionalidad de los vectores.

Tabla 13

Comparación de Características entre Planos Coincidentes, Paralelos y Secantes

Características	PLANOS		
	Coincidentes	Paralelos	Secantes
Vectores normales proporcionales	Si	Si	no
Términos independientes proporcionales	si	no	No aplica
Soluciones	Infinitas	No	Una recta
Ejemplo figura 34	(a)	(b)	(c)

Ejemplo: determinación de dos planos en el espacio analizando los rangos de las ecuaciones generales de los planos.

Solución: construimos la matriz $\mathbf{M}$ (de los coeficientes) y la matriz ampliada $\mathbf{M}*$ (incluido los términos independientes)

$$M = |A\,B\,A'\,B' \quad C\,C'| = M' = |A\,B\,A'\,B \quad C\,C' \quad D\,D'|$$

Si el Rg (M) = 1 y Rg (M*) = 1 => coincidentes

Si el Rg (M) = 1 y Rg (M*) = 2 => paralelos

Si el Rg (M) = 2 y Rg (M*) = 2 => secantes

En la siguiente tabla está la síntesis de las posiciones relativas de los dos planos de acuerdo al rango de M y M*.

Tabla 14

Rango y Soluciones de Planos Coincidentes, Paralelos y Secantes

Rango	PLANOS		
	Paralelas	Coincidentes	Secantes
M	1	1	2
M’	1	2	3
Soluciones	Infinitas	No	Una recta
Ejemplo figura 34	(a)	(b)	(c)

Ejemplo 12.1, ejemplo de (Gonzáles y Valdés, 2015), Estudiar la posición relativa de los siguientes planos {π_1:6x+3y-3z-1=0 π_2:10x+5y-5z+1=0:

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices de este:

π_1:6x+3y-3z-1=0 π_2:10x+5y-5z+1=0 } => M=(6 3 -3 10 5 -5) => M' =(6 3 -3 10 5 -5 1 -1)

Ahora el rango de M es 1, ya que sus filas son proporcionales, y todos los determinantes que podamos construir a partir de ellos son nulos

|6 3 10 5 |=|3 -3 5 -5 |=|6 -3 10 -5 |=0 => rg(M)=1

Sin embargo, el rango de M’ es dos, ya que D y D’ no mantienen la relación de proporcionalidad de los demás coeficientes.

|-3 1 -5 -1 |=3-(-5)=8≠0 => rg(M^')=2

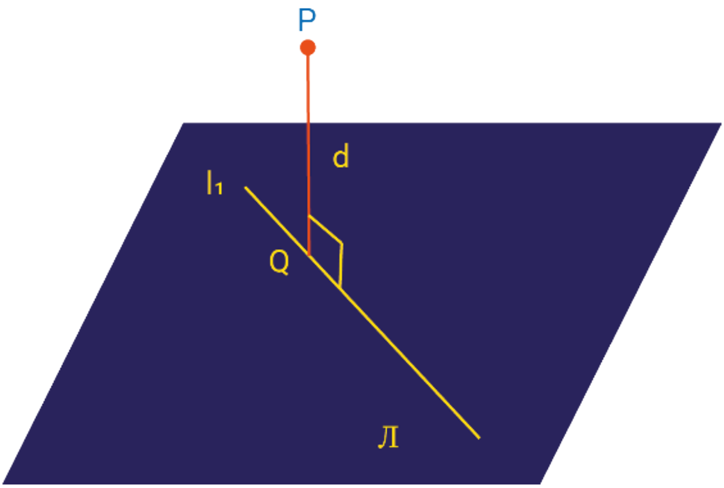
Por tanto, los planos π_1 y π_2 son paralelos.

11.2. Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto a un plano es la longitud del segmento perpendicular a plano deseado, desde el punto, d=PQ figura 35

Figura 35

Distancia de un punto a un plano



Para determinar la distancia *d* entre punto P y un plano π, se traza, por el punto A una recta perpendicular al plano π y se determina la intercesión Q entre ambos. La distancia entre los puntos P y Q es igual a la distancia entre el punto A y el plano *π*.

Si tenemos la ecuación a un plano $\mathbf{ax}+\mathbf{by}+\mathbf{cz}=\mathrm{d}$, y siendo $P(x_1,y_1,z_1)$ obtenemos la fórmula de la distancia d:

$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Ejemplo 12.2 (ejemplo de Gutiérrez y Mora, 2018) Si π: 2x + 3y -2z = 5. La distancia del plano al origen es

$$d=\frac{|2\cdot0+3\cdot0-2\cdot0-5|}{\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{17}}$$

Tener presente que el origen es O(0, 0, 0)

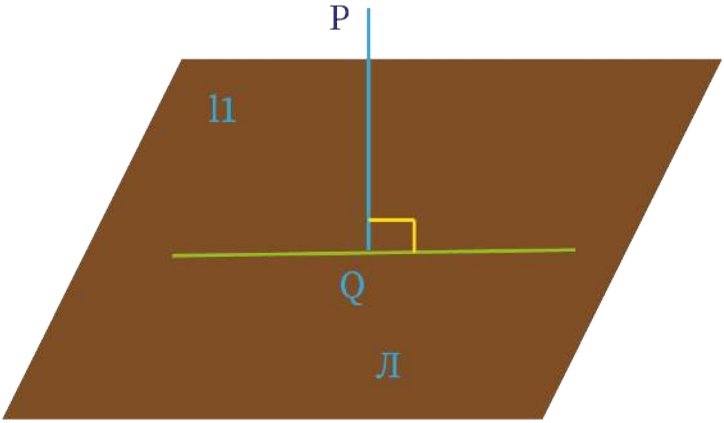
11.3. Proyección de un punto y de una recta sobre un plano

Proyección de un punto sobre un plano

La proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular al plano trazada desde el punto, Proy_{π} P = P', figura 36.

Figura 36

Proyección de un punto sobre un plano



Proyección de una recta sobre un plano

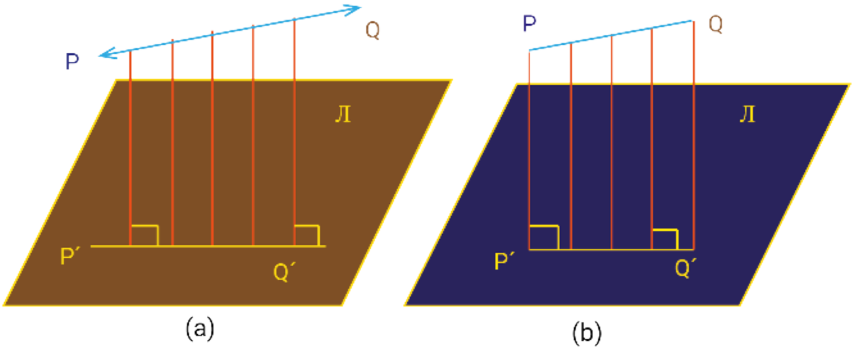
La proyección de una recta sobre un plano, si se da una recta r y un plano π se desea obtener la proyección ortogonal de la recta sobre el plano.

Es el conjunto de los puntos del plano que corresponden a las proyecciones de los puntos de la recta, $Proy_{\pi} PQ^{\leftrightarrow} = P'Q^{\leftrightarrow}$, figura 37 (a).

En el caso de la proyección de un segmento sobre un plano, se obtiene el segmento cuyos extremos son las proyecciones de los extremos del segmento dado, $Proy_{\pi}(\underline{\mathrm{PQ}}) = \mathrm{P'Q'}$, figura 37 (b).

Figura 37

Proyección de una recta sobre un plano



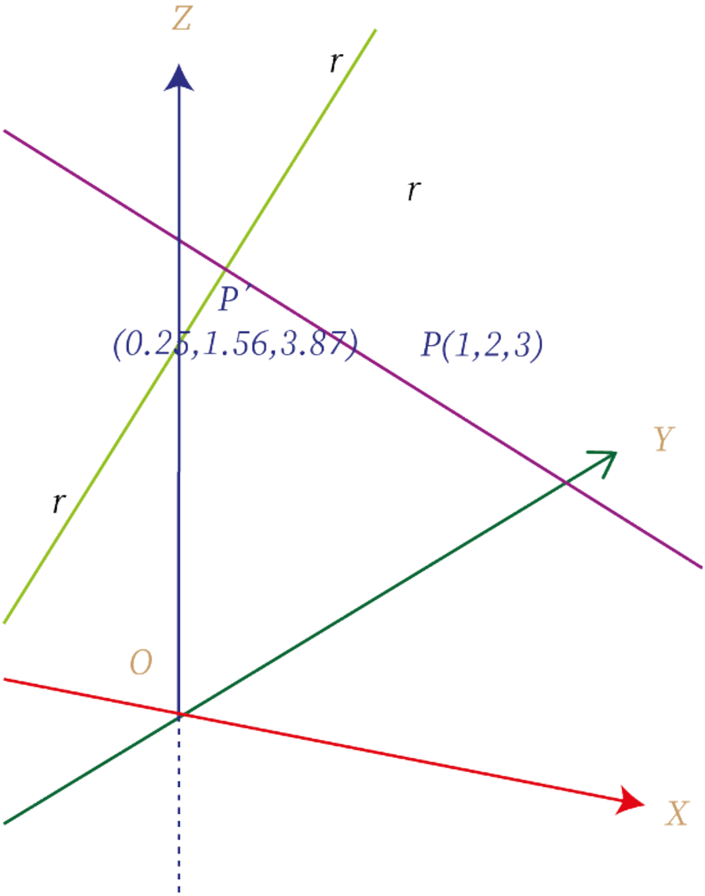
Ejemplo 12.4. Hallar la proyección de P(1,2,3) sobre la recta, figura 38:

$$r = \{\mathrm{x} = -1 + 4\mathrm{k}\ \mathrm{y{=}5k}\ \mathrm{z{=}2{+}6k}\}$$

Si P' pertenece a la recta l debe ser de la forma P'(-1+4k, 5k, 2+6k) y como $\overrightarrow{PP^1} \perp \vec{v} \Rightarrow (4,5,6).\,(4k-2,\ 5k-2.6k-1) = 0 \Rightarrow k = \frac{24}{77}$; entonces el punto buscado es $\mathrm{P'}(\frac{19}{77}, \frac{120}{77}, \frac{298}{77})\mathrm{P'}(0.25, 1.56, 3.87)$

Figura 38

Ejemplo de proyección de un punto sobre un plano



Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la Posición relativa de dos planos en el espacio, de la semana 11 y plasmar dichos conocimientos, es realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Posición relativa de dos planos en el espacio, invito a ver el video Cómo estudiar la posición relativa de dos planos en el espacio.

   En este vídeo se deducen las expresiones que nos permiten estudiar la posición relativa de dos planos en el espacio que pueden tener las siguientes posiciones relativas: coincidentes, paralelos o secantes. El estudio se puede hacer con rangos de las matrices que involucran a las ecuaciones de los planos o mediante los vectores normales y puntos de paso de los planos.

2. En la página 22, del texto Geometría del espacio; ejercicios y problemas, los autores grafican cada uno de los casos y determinan las posiciones relativas de los planos en el espacio.
3. Grafique cada una de las posiciones relativas de dos planos en el espacio.

   Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

4. Utilice GeoGebra para graficar las respuestas.

   Dado π: x + y + z = 3

   a. Hallar la proyección de la recta r: $(x, y, z) = \lambda(0, 2, 21)$
   b. Dada la recta $s: (x, y, z) = (1, 0, 0) + t.(-2,b,c)$, hallar los valores b y c para que la proyección de s sobre π sea un punto. ¿Cuál es dicho punto?

5. Desarrolle la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 11

1. ( ) Dos planos en el espacio son coincidentes cuando todos los puntos del plano π_1 no pertenece al plano π_2.

2. ( ) Dos planos en el espacio son paralelos cuando los vectores normales son proporcionales $\vec{n} = \vec{n} \Rightarrow$ significa que son paralelos $\vec{n}^1 \parallel \vec{n}$ además, con el punto de paso pertenece a los mismos planos.

3. ( ) Dos planos son Secantes cuando tiene una recta que les intersectan (corta) o en común; Los vectores normales no son proporcionales $(\vec{n} \neq \vec{n}) \Rightarrow$ significa que no son paralelos $\vec{n}^1 \parallel \vec{n}$

4. ( ) Los planos son Paralelos cuando el Ra (M) = 1 y Rg (M*) = 2.

5. ( ) **Dos planos en el espacio son secantes cuando el Ra (M) = 1 y Rg (M*) = 1.**

6. Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

   $\alpha = x + y - z + 2 = 0$

   $\beta = 3x + 3y - 3z + 6 = 0$

   a. Secantes.
   b. Paralelas.
   c. Coincidentes.

7. Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

α= x + y - z + 2 = 0

β= 3x + 3y - 3z + 8 = 0

a. Secantes.
b. Paralelas.
c. Coincidentes.

8. Determinar la posición relativa de los siguientes planos:

α= 5x + y - z - 4 = 0

β= 2x - 2y - z + 5 = 0

a. Secantes.
b. Paralelas.
c. Coincidentes.

9. Encuentre la ecuación de la recta que les intersectan los planos. Utilizar un parámetro para la x:

α= 5x + y - z - 4 = 0

β= 2x - 2y - z + 5 = 0

a.
$$\begin{cases} \mathbf{x} = \lambda \\ \mathbf{y} = 3 - \lambda \\ \mathbf{z} = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} \mathbf{x} = 2\lambda \\ \mathbf{y} = 3 - \lambda \\ \mathbf{z} = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

c.
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$$

10. Hallar la proyección de una recta sobre un plano, la de la ecuación de la

recta es $r : \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2}$ sobre el plano

$\pi : 2x + y - 3z + 1 = 0.$

a.
$$r' : \begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ -4x + 5y - z - 14 \end{cases}$$

b.
$$r' : \begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ 4x + 5y - z - 14 \end{cases}$$

c.
$$r' : \begin{cases} 2x + y - 3z = -1 \\ -4x + y - z - 14 \end{cases}$$

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 13

"Dios no se preocupa de nuestras dificultades en matemáticas; él se integra empíricamente.-.".

En la semana treceava veremos la Unidad12. Posición relativa de tres planos en el espacio, lo correspondiente a: tres planos son coincidentes, los tres planos son paralelos, los tres planos se cortan en una recta, dos planos son paralelos y cortan al tercero y finalizamos con tres planos que se cortan en un punto

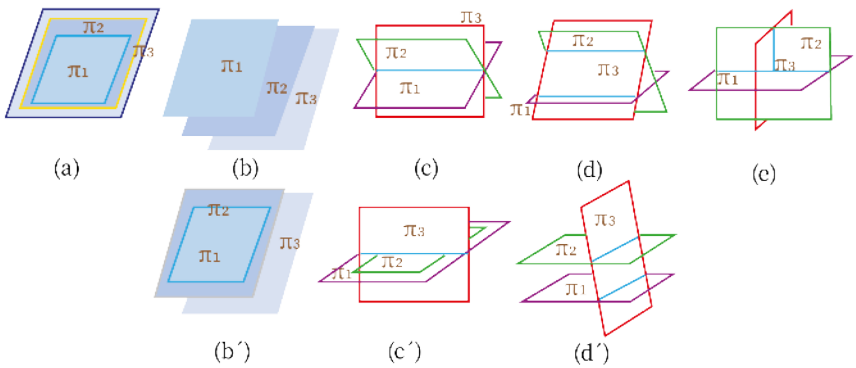
Unidad 12. Posición relativa de tres planos en el espacio

Las posiciones relativas de 3 planos, permiten indicar si 3 planos en el espacio tienen o no puntos en común, Figura 39. Se clasifican en:

a. Los tres planos son coincidentes, figura 39 (a).
b. Los tres planos son paralelos, figura 39 (b) y (b’).
c. Los tres planos se cortan en una recta, figura 39 (c), (c’), (1c) y (1c’).
d. Los tres planos se cortan en un punto, figura 39 (d).

Figura 39

Posición relativa de tres planos en el espacio



A continuación, estudiaremos las posiciones relativas de tres planos en el espacio, π_1 π_2 π_3, cada uno con su color, para lo cual analicemos los rangos de la matriz M y la ampliada M*, todos los coeficientes, en la primera fila los coeficientes del plano π_1, en la segunda fila los del plano π_2 y en la tercera en la tercera fila los coeficientes del plano π_3.

Sean los tres planos

$$\pi = A_1 + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \pi_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Con las ecuaciones implícitas de los tres planos, formamos un sistema de ecuaciones

$$\{A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \; A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \; A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0\}$$

cuyas matrices de coeficientes y ampliadas son:

$$M = (A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 A_3 B_3 C_3) = M* = (A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2 A_3 B_3 C_3 \; D_1 D_2 D_3)$$

También tomemos en cuenta los vectores normales de cada plano:

$$\overrightarrow{n_1} = A_1, B_1, C_1 \overrightarrow{n_2} \equiv A_2, B_2, C_2 \overrightarrow{n_3} \equiv A_3 . B_3, C_3$$

12.1. Los tres planos son coincidentes

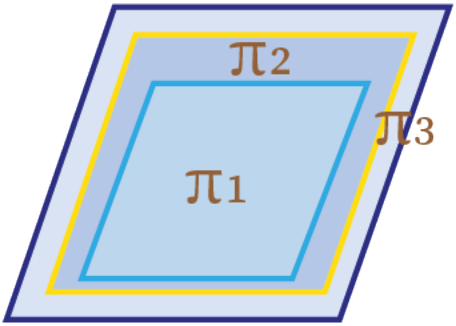
Los planos son coincidentes, cuando el rango de M y el rango de $\mathrm{M}*$ son iguales a 1, las ecuaciones son proporcionales, el sistema es compatible y va a ser indeterminado.

Tabla 15
Parámetros de Planos Coincidentes

Parámetros	Planos son coincidentes
Rango M	1
Rango M*	1
Sistema	Sistema Compatible Indeterminado (SCI)
Posición	coincidentes
Figura	40

Figura 40

Planos coincidentes



12.2. Los tres planos son paralelos

Los planos son paralelos cuándo el rango de M = 1 y el rango de M* = 2, el sistema es Incompatible. Pueden darse dos casos:

a. Si dos de las ecuaciones son proporcionales y la otra no, tendremos dos planos coincidentes y paralelos al tercero.
b. Si ninguna de las ecuaciones es proporcional, tendremos 3 planos paralelos.

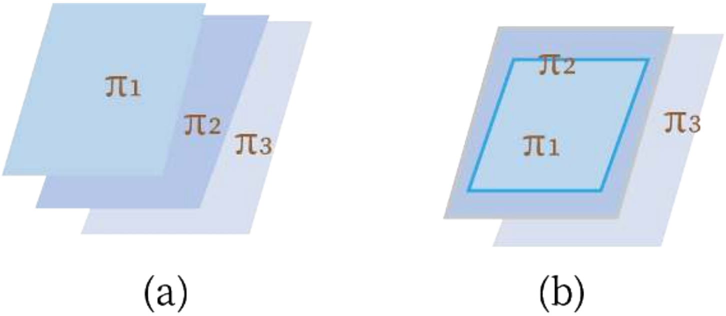
Tabla 16

Parámetros y Configuraciones de Planos Paralelos

Parámetros	Planos paralelos	
Rango M	1	
Rango M*	2	
Sistema	Sistema Incompatible (SI)	
Posición	3 paralelos	2 coincidentes y un paralelo
Figura	41 (a)	41 (b)

Figura 41

Planos paralelos



Nota. Tomado *de Clasificación de la materia* [Tabla] por Burns, R., 2011, Fundamentos de Química CC BY 4.0

12.3. Los tres planos se cortan en una recta

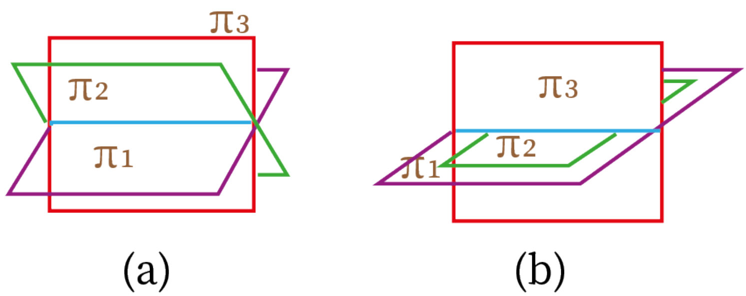
Los planos se cortan en una recta, si el rango de M y de M* son = 2, en este caso, el sistema es compatible indeterminado y puede darse dos casos:

a. Si dos de las ecuaciones son proporcionales, tenemos dos planos coincidentes que cortan al tercero.
b. Si no hay ecuaciones proporcionales, no hay planos coincidentes, los 3 planos se cortan en una recta.

Tabla 17
Parámetros y Configuraciones de Planos Secantes

Parámetros	Planos secantes	
Rango M	2	
Rango M*	2	
Sistema	Sistema Compatible Indeterminado	
Posición	3 secantes y distintos	2 coincidentes y un secante
Figura	42 (a)	42 (b)

Figura 42
Planos que se cortan por una recta



12.4. Dos planos son paralelos y cortan al tercero

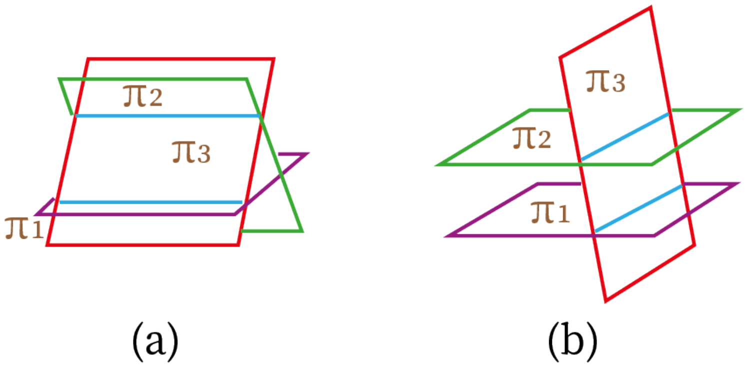
Dos planos son paralelos y cortan al tercero, Si es rango de M = 2 y es diferente al rango de M’ = 3, entonces el sistema es incompatible y en este caso puede ocurrir:

a. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.
b. Si ninguno de los planos es paralelo al otro, se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.

Tabla 18
Parámetros de Planos Paralelos que Cortan a un Tercero

Parámetros	Dos planos son paralelos y cortan al tercero	
Rango M	2	
Rango M*	3	
Sistema	Sistema Incompatible	
Posición	secantes 2 a 2	2 paralelos y un secante
Figura	43 (a)	43 (b)

Figura 43
Dos planos son paralelos y cortan al tercero



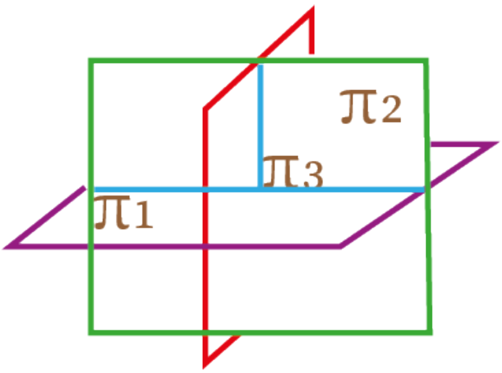
12.5. Los tres planos se cortan en un punto

Por último, los tres planos se cortan en un punto, cuando el rango de M y M* son igual a 3, en este caso, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución porque los 3 planos se cortan en un punto.

Tabla 19
Parámetros de Planos que se Cortan en un Punto

Parámetros	Los tres planos se cortan en un punto
Rango M	3
Rango M*	3
Sistema	Sistema Compatible Determinado (SCD)
Posición	Se cortan en un punto P
Figura	44

Figura 44
Tres planos se cortan en un punto



Ejemplo (ejemplo de Gonzáles y Valdés, 2015).

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos

$$\{\pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0 \pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0 \pi_3 : x - 3y - z - 3 = 0\}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones y hallamos las matrices M y M*:

$$\pi_1 : x - y + 2z - 1 = 0\pi_2 : x + y + 3z + 1 = 0\pi_3 : x - 3y - z - 3 = 0\} \Rightarrow M$$

$$(1 - 121131 - 3 - 1) \Rightarrow M^1$$

$$(1 - 121131 - 3 - 1 - 21 - 3)$$

Comprobamos que el rango es 3

$$|1 - 12\,11\,3\,1 - 3 - 1| = -1 - 6 - 3 - 2 - 1 + 9 = -4 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}(M) = 3$$

Por lo que el sistema es compatible y determinado, los tres planos se cortan en un punto. Resolvemos con el método de Cramer y se obtiene el punto de intersección:

x = 1,   y = 1   y   z= 1

Todo lo explicado anteriormente con las ecuaciones generales de los planos, sirve también, si alguno de ellos viene dado en ecuaciones paramétricas. Se puede plantear el sistema formado por sus ecuaciones y analizar su compatibilidad, o bien hallar los vectores normales y comprobar si son paralelos o no.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de la Posición relativa de tres planos en el espacio, de la semana 13 y plasmar dichos conocimientos, por ello les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento, invito a ver el video Posiciones relativas de tres planos en el espacio, en este video se estudia las posiciones de tres planos en el espacio, alfa, beta y gamma, utiliza un color para diferenciar cada plano en los

dibujos y detalla los procedimientos para determinar cada uno de los casos que se puede presentar.

2. En la página 22, del texto Geometría del espacio; ejercicios y problemas, los autores grafican cada uno de los casos y determinan las posiciones relativas de los planos en el espacio, analizando los rangos de M y M*, además, otras condiciones que cumplen.
3. Completa la siguiente tabla.

Parámetros	**Posición relativa de tres planos en el espacio**				
	Coincidentes	*Paralelos*	Secantes en una recta	Cortan al tercero	Se cortan en un punto
Rango M	1	1			
Rango M*	1	2			
Sistema	SCI	Ecuaciones proporcionale	Vectores normales paralelos	Vectores normales paralelos	
Otra condición		2 implícitas	0		
Posición	Coincidentes	2 coincidentes y paralelo	3 paralelos		

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

4. Compruebe que los tres planos siguientes forman un prisma infinito sin bases. (Utilice GeoGebra para graficar los planos)
5. Desarrolle la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 12

1. ( ) Los 3 planos son coincidentes cuándo el rango de **M** y el rango de **M*** son iguales a 0, las ecuaciones son proporcionales, el sistema es compatible y va a ser indeterminado.

2. ( ) Los 3 planos son paralelos cuándo el rango de **M** = 2 y el rango de **M*** = 1, el sistema es Incompatible.

3. ( ) Los 3 planos se cortan en una recta sí el rango de **M** y de **M*** son = 2, entonces el sistema es compatible indeterminado.

4. ( ) Dos 3 planos son paralelos y cortan al tercero, sí es rango de **M** = 2 y es diferente a rango de **M'** = 3, entonces el sistema es incompatible.

5. ( ) Los tres planos se cortan en un punto, si el rango de **M** = 3 y el rango de **M*** = 3, entonces, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución porque los 3 planos se cortan en un punto.

6. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos.

   π_{1}: 2- y-z=0

   π_{2}: x+z=0

   π_{3}: x- y=1

   a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
   b. Dos planos coincidentes que cortan al tercero.
   c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.

7. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos:

   π_1: 2x+3y+z=3

   π_2: x+y-z=-1 π_3:

$3x+ y-3z=-1$

a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
b. Los tres planos se cortan en un punto.
c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.

8. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos

π_1: $2x+3y-2z=3$

π_2: $x-2y-z=-1$ π3:

$3x+ y-3z=2$

a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
b. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.
c. Los 3 planos se cortan en una recta.

9. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos.

π_1: $2x+3y+1/3z=3$

π_2: $x+1/3y-z=-1$

π_3: $3x+ y-3z=-1/3$

a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases.
b. Los tres planos se cortan en un punto.
c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero.

10. Encontrar la posición relativa de los siguientes planos:

π_1: $x+y+z=7$

π_2: $3x+3y+3z=21$

π_3: $4x+5 y+6z=26$

a. Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases
b. dos planos coincidentes que cortan al tercero
c. Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

"Las matemáticas no conocen razas o límites geográficos. Para las matemáticas, el mundo cultural es una país.".
David Hilbert

Bien estimado estudiante, estamos ya en la penúltima semana y trataremos la Unidad13. Posición relativa de una recta y un plano en el espacio, lo referente a la recta viene definida por dos planos secantes, por último; a la recta viene definida por un punto y un vector.

Unidad 13. Posición relativa de una recta y un plano en el espacio

13.1. La recta viene definida por dos planos secantes

Para comprobar sí una recta está definida por dos planos secantes tenemos que analizar la ecuación seleccionando dos puntos y la ecuación del plano, calculando el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada, a partir de los resultados se puede determinar la posición relativa de la recta y el plano, que está dado por los valores de los rangos, como se indica a continuación.

Sea la recta.

$$r = \{A_1x + B_1y + C_1y + D_1 = 0 \; A_2x + B_2y + C_2y + D_2 = 0$$

Y del plano

$$\pi = A_3\, x+B_3\, y+C_3\, z+D_3=0$$

Si: *r* = rango de la matriz de los coeficientes y *r'*= rango de la matriz ampliada.

Las posiciones relativas de la recta y el plano vienen dadas por la siguiente tabla:

Tabla 20

Posición y Características de la Relación entre una Recta y un Plano

Posición	**CARACTERÍSTICAS**			
	r	***r'***	Soluciones	En la figura
Recta contenida en el plano	2	2	Infinitas 3	a
Recta y plano son paralelos	2	3	No	b
Recta y plano son secantes	3	3	Única	c

Ejemplo tomado de superprofe (s.f.).

Hallar la posición relativa de la recta y el plano:

$$r = \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \qquad \pi \equiv x - 2y + 3z + 1 = 0$$

En primer lugar, se pasan las ecuaciones continuas a ecuaciones implícitas.

$$\{x - 2y = -1y + z = 0x - 2y + 3z = -1$$

Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes.

$$M = (1 - 200111 - 23) = |1 - 200111 - 23| \neq 0, \quad r = 3$$

Determinamos el rango de la matriz ampliada.

$$M = (1 - 200111 - 23 - 10 - 1) \quad r = 3$$

Comparamos los rangos, son iguales a 3, por tanto, la recta y el plano se cortan en un punto.

13.2. La recta viene definida por un punto y un vector

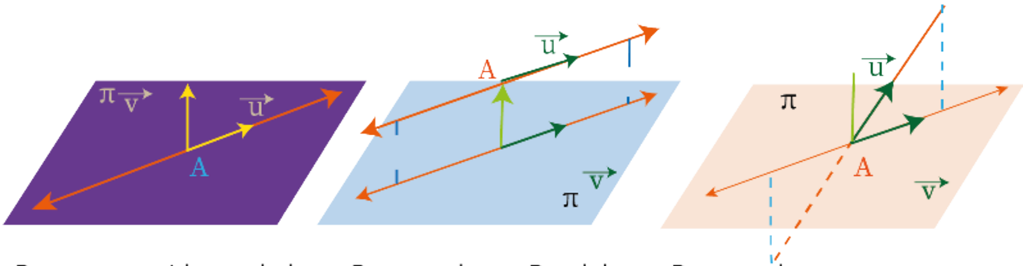
La recta viene definida por un punto $\mathbf{A}$, un vector $\vec{u}$ y un plano π, cuyo rector normal es $\vec{v}$ Pueden presentarse 3 casos y son:

Tabla 21
Posición y Soluciones de la Relación entre una Recta y un Plano

Posición	CARACTERÍSTICAS		
	$\vec{u} * \vec{v}$	La recta pertenece al plano	Soluciones
Recta contenida en el plano	=0	Є π	Infinitas 3
recta y plano son paralelos	=0	Є π	No
recta y plano son secantes	$\neq 0$	Un punto de la recta Є π	Única

Figura 45

Recta definida por un punto



Recta contenida en el plano (a) Recta y planos Paralelos (b) Recta y plano secantes (c)

Ejemplo tomado de superprofe (s.f.).

Hallar la posición relativa de la recta y el plano:

$$r = \frac{x-1}{5} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1} \qquad \pi \equiv -x + 3y + 2z + 5 = 0$$

En primer lugar, se pasan las ecuaciones continuas a ecuaciones implícitas.

$$\{x - 5y = 1y - z = 2 - x + 3y + 2z = -5$$

Hallamos el rango de la matriz de los coeficientes.

$$M = (1 - 5001 - 1 - 132) = |1 - 5001 - 1 - 132| = 0, \quad r = 2$$

Determine el rango de la matriz ampliada.

$$M = (1 - 5001 - 1 - 132\ 12 - 5) = |1 - 5001 - 1 - 132| = 0, \quad r^1 = 2$$

Comparamos los rangos, son iguales a 2, por tanto, la recta está contenida en el plano.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de las posiciones relativas de una recta y un plano en el espacio, de la semana 14, y plasmar dichos conocimientos, es realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Posición relativa de una recta y un plano en el espacio, invito a ver el video Intersección entre una recta y un plano en el espacio, (Ronny, 2020), en este video se estudia dos métodos para conocer la posición relativa entre una recta y un plano, considerando que la recta debe llevarse a forma paramétrica y luego esta se relaciona con el plano para el primer método, y en el segundo método, más tradicional, usando los vectores director de la recta y normal del plano para verificar usando producto punto o escalar.
2. Señor estudiante, le invito a analizar el tema Posiciones relativas de una recta y un plano, que detalla las fórmulas para los casos. La recta viene definida por dos planos secantes y la recta viene definida por un punto y un vector.
3. Encuentre la intersección entre la recta y el plano. (Utilice GeoGebra para graficar el plano y la recta)

   $\pi: 2x - 3y + z + 1 = 0$

   $r: (x, y, z) = (0,1,3) + \alpha(1,0,1)$

4. Desarrolle la siguiente autoevaluación con el fin de comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 13

1. (   ) Una recta está contenida en el plano cuando Ra (M)= 2 y Rg (M*) = 3.

2. (   ) Una Recta y plano son paralelos cuando el Ra (M) = 2 y Rg (M*) = 2.

3. (   ) Una Recta y plano son secantes cuando el Ra (M) = 3 y Rg (M*) = 3.

4. (   ) La recta viene definida por un punto **A** y un vector $\vec{u}$ y un plano π cuyo rector normal es $\vec{v}$ y pueden presentarse 3 casos.

5. La recta viene definida por un punto **A** y un vector $\vec{u}$ y un plano π cuyo rector normal es $\vec{v}$ y pueden presentarse 3 casos. Las posiciones relativas de la recta de plano son:

Características	Las posiciones
Si $\in \pi$ y $\vec{u} * \vec{v} = 0$	a. Recta y plano son paralelos
Si $\in \pi$ y $\vec{u} * \vec{v} = 0$	b. Recta y plano son secanteslas
Si un punto de la recta $\in \pi$ el $\vec{u} * \vec{v} \neq 0$	c. Recta contenida en el plano

a. 1c, 2a, 3b.
b. 1a, 2b, 3b.
c. 1b, 2a, 3c.

6. Encontrar la posición relativa de la recta y el plano.

$$r = \{x - 5y = 1y - z = 2$$

Y del plano

$$\pi = -\mathbf{x}+\mathbf{3y}+\mathbf{2z} = -\mathbf{5}$$

a. La recta está contenida en el plano.
b. La recta y el plano son paralelos.
c. La recta y plano son secantes.

7. Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: A(4, 4, 4) y $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{2}, \mathbf{7}, \mathbf{5})$.

   a. (x, y, z) = (4, 4, 4) + λ(2, 7, 5).
   b. (x, y, z) = (2, 7, 5) + λ(4, 4, 4).
   c. (x, y, z) = (4, 4, 4) + (2, 7, 5).

8. Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: A(3, 2, 1) y $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{4}, -\mathbf{1}, -\mathbf{1})$

   a. (x, y, z) = (3, 2, 1) + (-4, -1, -1).
   b. (x, y, z) = (3, 2, 1) + λ(-4, -1, -1).
   c. (x, y, z) = (-4, -1, -1) + λ(3, 2, 1).

9. Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A(-3, -2, -4) y B(2, 3, 4).

   a. 2.0.
   b. 2.5.
   c. 1.0.

10. Determinar si los puntos C(2, -3, 1) y D(2, 3, 12) pertenecen a la recta:

    (x, y, z) = (-3, -2, 4) + λ(5, 5, 8)

    a. C y D si pertenecen a la recta.

b. C si pertenece y D no pertenece a la recta.
c. C no pertenece y D si pertenece a la recta.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 15

"No todo lo que cuenta puede ser contado. No todo lo que puede ser contado cuenta.".

Excelente, hemos llegado a la última unidad de estudio que es la Unidad14. Ángulos y Distancias, revisaremos lo referente al ángulo entre dos planos; al Ángulo entre recta y plano; al Ángulo entre dos rectas; la Distancia punto-recta en R3; la Distancia entre dos rectas paralelas, finalizando con la Distancia entre rectas alabeadas.

Unidad 14. Ángulos y distancias

14.1. Ángulo entre dos planos

El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales.

Recordemos que dos planos en el espacio pueden ser coincidentes, paralelos o secantes.

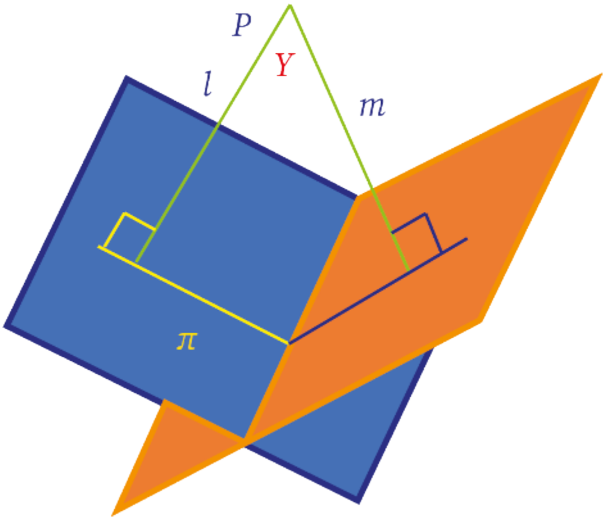
Si los dos planos son coincidentes o paralelos, forman un ángulo de 0°.

Si los planos son secantes, determinan cuatro ángulos diedrales, iguales dos a dos. El más pequeño se define como ángulo entre los planos.

Para medir el ángulo (γ) entre dos planos (*π y* π_1), se trazan, por un punto (P) cualquiera, las rectas (*l y m*) perpendiculares a los planos (π y π_1) respectivamente. El ángulo (γ) que forman las rectas (*l y m*) es igual al ángulo que forman los planos (π y π_1), es decir, sus respectivos vectores normales.

Figura 46

Angulo entre dos planos



14.2. Ángulo entre recta y plano

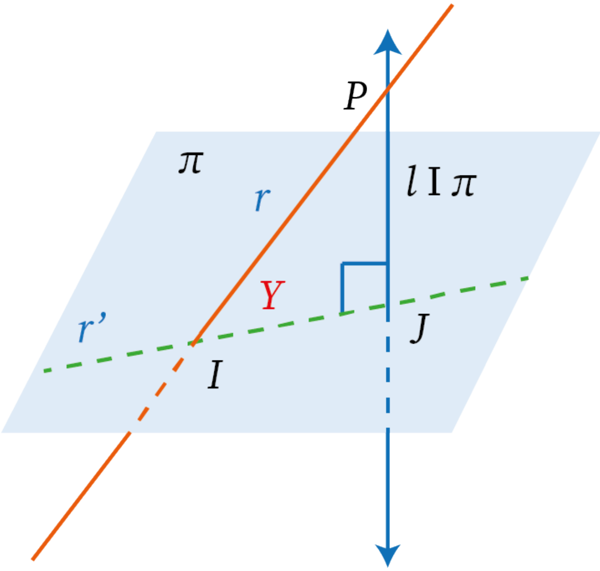
Se define como ángulo entre una recta r y un plano π al ángulo agudo que forman r y r´.

Para medir el ángulo (γ) entre una recta (r) y un plano (π):

a. Se determina la intersección (I) entre el plano (π) y la recta (r)
b. Se traza, por un punto cualquiera (P) de la recta (r), una recta (r') perpendicular al plano (π) y se determina la intersección (J), entre la recta (r') y el plano (π). Los puntos (I y J) definen la recta (l).
c. El ángulo (γ) que forman las rectas (*r yl*) es igual al ángulo que forma la recta (r) con el plano (*π*).

Figura 47

Angulo entre una recta y un plano



14.3. Ángulo entre dos rectas

El ángulo formado entre dos rectas de R3 es el ángulo que se forma entre sus vectores directores.

Sean las rectas r1 y r2 con sus vectores directores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Entonces:

$$\cos\cos\cos\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|}$$

Usemos la misma convención que se utiliza para ángulo entre planos, para ángulo entre recta y plano, apliquemos el módulo:

$$\cos\cos\cos\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{\|\vec{v}_1\|\|\vec{v}_2\|}$$

Por lo tanto:

$$\alpha = arcos = \left(\frac{|\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2|}{\|\vec{v}_i\|\|\vec{v}_j\|}\right), \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

Casos particulares:

Si α = 0, entonces las rectas son paralelas $(\overrightarrow{\mathrm{v_1}} = \overrightarrow{\mathrm{kv_2}})$.

Si α = π/2 , entonces las rectas son perpendiculares $(\overrightarrow{\mathrm{v_1}}.\overrightarrow{\mathrm{kv_2}} = 0)$

Ejemplo (ejemplo de UTN.BA, s.f.)

Sean:

$$\{r_1 : (x, y, z) = (1, 0, 0)\ k \in R r_2 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + t(0, 0, 1)\ t \in R$$

Este sistema de ecuaciones se trata de rectas, son alabeadas. ¿Cuál es el ángulo entre ellas?

Como $(\overrightarrow{\mathrm{v_1}}.\overrightarrow{\mathrm{kv_2}} = 0)$, las rectas son perpendiculares, o sea que α = *π/2*

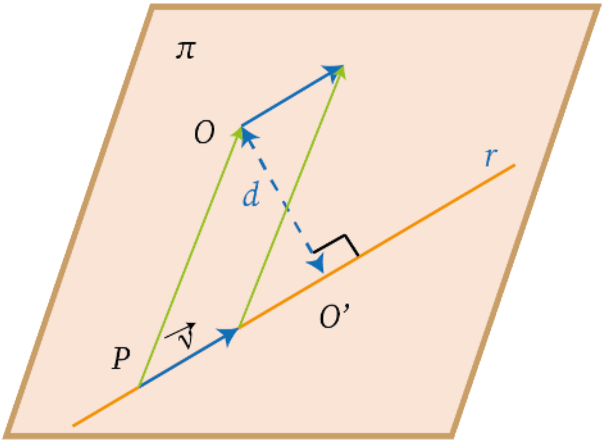
14.4. Distancia punto-recta en R3

En la figura 48, se desea encontrar la distancia entre el punto O a la recta r. La recta r que pasa por el punto P, tiene por vector director v→, hay que hallar la distancia entre O y r (con O Є r), Sea O’ Є r tal que OO es perpendicular a la recta r.

$$\mathrm{d}(O, r) = \| \overrightarrow{\mathrm{OO}} \|$$

Figura 48

Distancia punto-recta



Consideremos al punto P Є r y el vector $\overrightarrow{\mathrm{OO}}$' y construyamos el paralelogramo determinado por $\vec{\mathrm{v}}$ y $\overrightarrow{\mathrm{OO}}$, tal como lo ¿ muestra la figura 48.

El segmento $\overrightarrow{\mathrm{OO}}$ es la altura del paralelogramo. Si llamamos S al área de dicho paralelogramo, resulta:

$$\mathbf{S} = \mathbf{b} * \mathbf{h} \parallel \vec{\mathbf{v}} \parallel *\mathbf{d}$$

El área de paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial:

$$\mathbf{S} = \|\overrightarrow{\mathbf{PO}}^{*}\vec{\mathbf{v}}\|$$

Igualamos las dos ecuaciones de S

$$\|\vec{v}\|\ ^{*}\ d = \|PO\ ^{*}\vec{v}\| \Rightarrow$$

$$d(O, r) = \frac{\|PO^{*}\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

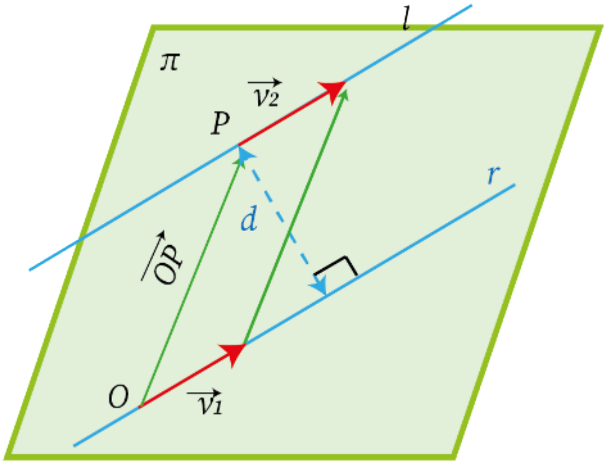
14.5. Distancia entre dos rectas paralelas

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se utiliza la fórmula de la distancia punto-recta:

$$d(O,r)=\frac{\|PO\|^{*}\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Figura 49

Distancia entre dos rectas paralelas



Veamos el ejemplo (ejemplo de Gonzáles y Valdés, 2015).

Con las rectas r y l calcular la distancia entre estas dos paralelas, d(r, l):

r: (x,y,z)=(1,0,0) + t(2,-1,1)

$$l:\{x+z=2x+ky=0$$

Halla k tal que r l y calcular d(r , l):

Partiendo de la condición para que dos rectas sean paralelas:

$$r \parallel l \leftrightarrow \vec{v}_1=\overrightarrow{\sigma v_2} \quad [1]$$

La recta l está definida como intersección de dos planos. Si hacemos el producto vectorial de los vectores normales, tendremos un vector director de la recta:

(0,1,1) * (1,k,0) = (-k,1,-1)

Para calcular la distancia, tomemos dos puntos cualquiera de las rectas y construyamos el vector.

Por [1]:

$$(-\mathbf{k}, 1, -1) = \mathbf{a}(2,1,1) \Rightarrow \begin{cases} -k = 2\alpha \\ -1 = \alpha \\ -1 = \alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{k} = 2$$

$$O(1,0,0) \in r, \quad P(0,0,2), \quad \overrightarrow{PO} = (-1,0,2)$$

La distancia entre las rectas será la distancia entre P y $\mathbf{r}$:

$$d\,(r,l) = d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{OP} * \overrightarrow{v_1}\|}{\|v_1\|}$$

$$\overrightarrow{OP} * \overrightarrow{v_1} = (-1,0,2) * (2,-1,1) = (2,5,1)$$

$$\|\overrightarrow{OP} * \overrightarrow{v}1\| = \sqrt{30}$$

$$d(r,l) = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

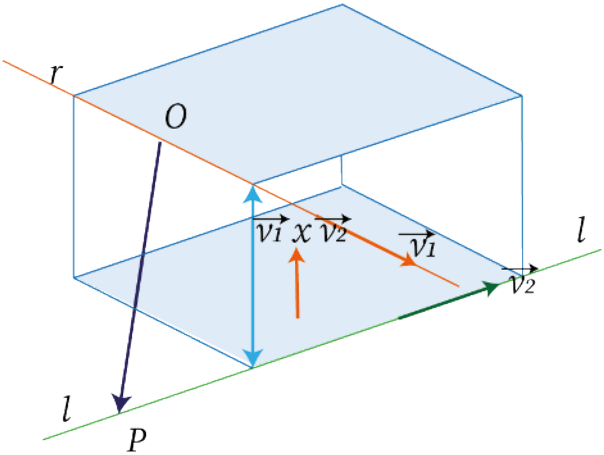
14.6. Distancia entre rectas alabeadas

Se denomina rectas alabeadas a las que no son paralelas ni se intersecan en el espacio, es decir, que no pertenecen al mismo plano.

Dadas dos rectas r y l no paralelas, nos proponemos calcular la distancia entre ambas:

Figura 50

Distancia entre rectas alabeadas



Nota. Tomado *de Clasificación de la materia* [Tabla] por Burns, R., 2011, Fundamentos de Química CC BY 4.0

La mínima distancia entre dos rectas alabeadas r y l se obtiene al proyectar el vector $\overrightarrow{OP}$ sobre la dirección perpendicular a ambas rectas, dada por $\vec{v} * \vec{v}$:

$$d(r,l) = \left\| \overrightarrow{\text{proy}\vec{v_1} * \vec{v_2}(\overrightarrow{OP})} \right\|$$

Recordar, que:

$$\left\| \overrightarrow{prov}_{\vec{v}}(\vec{u}) \right\| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$$

A partir de esto, podemos obtener una fórmula para la distancia entre rectas alabeadas r y l

$$d(r,l) = \frac{|\overrightarrow{OP} * (\vec{\nu}_1 * \vec{\nu}_2)|}{\|\vec{\nu}_1 * \vec{\nu}_2\|}$$

Ejemplo (ejemplo de Gonzáles y Valdés, 2015).

Calcular la distancia entre las rectas r y l, d(r , l):

r: (x, y, z)=(3,2,5) + k(0,-1,2)

$$l : \begin{cases} 2x + y + 3z + 2 = 0 \\ -x + 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$$

Solución:

Debemos verificar que se trata de rectas alabeadas. Busquemos la dirección de la recta l

$$\vec{\mathrm{v}}_2 = (2,1,3) * (-1,2,-4) = (-10,5,5)$$

Vemos que las rectas no son paralelas porque sus vectores directores no son paralelos. Luego podemos utilizar la fórmula para distancia entre rectas alabeadas:

$$d(r,l) = \frac{|\overrightarrow{OP} * (\vec{\nu}_1 * \vec{\nu}_2)|}{\|\vec{\nu}_1 * \vec{\nu}_2\|}$$

Para hallar PЄr2 fijamos z = 0, por ejemplo, y averiguamos los valores de x e y resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$l : (2x + y + 3z + 2 = 0 \rightarrow x + 2y - 4z + 3 = 0 \Rightarrow x = -\tfrac{1}{5},\ y = -\tfrac{8}{5})$$

Encontramos el punto

$$P\left(-\tfrac{1}{5}, -\tfrac{8}{5}, 0\right) \in l$$

Calcular la distancia:

$$\overrightarrow{\mathrm{O}P}(-\tfrac{16}{5}, -\tfrac{18}{5}, -5)$$

$$\vec{v}_2 * \vec{v}_2 = (0,-1,2) * (-10,5,5) = (-15,-20,-10)$$

$$\|\overrightarrow{v_1 v_2}\| = \sqrt{(-15)^2 + (-20)^2 + (-10)^2} = \sqrt{725}$$

$$\overrightarrow{OP} * (\overrightarrow{v_1} * \overrightarrow{v_2}) = \left(-\frac{16}{5}, -\frac{18}{5}, -5\right) * (-15, -20, -10) = 48 + 72 + 50 = 170$$

$$d(r, l) = \frac{170}{\sqrt{725}} \cong 6.31$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una forma de comprobar el aprendizaje adquirido sobre el tema de los Ángulos y Distancias, de la semana 15 y plasmar dichos conocimientos, les propongo realizar las siguientes actividades que, a pesar de no ser calificadas, les servirán para interiorizar y llegar al dominio de lo aprendido.

1. Estimado estudiante, con la finalidad de profundizar el conocimiento sobre Ángulos y Distancias, invito a ver los siguientes videos:

   - Ángulo entre planos, expone el ángulo entre planos
   - Ángulo entre recta y plano. Explica, a partir de la ecuación de una recta y la ecuación general de un plano, el ángulo que forman entre sí, multiplicando escalarmente el vector normal del plano y el vector director de la recta. Una vez hallado el ángulo que forman ambos, el ángulo que forman la recta y el plano se obtiene fácilmente, si restamos a 90º, ese valor.
   - Distancia de un punto a una recta, es un ejemplo resuelto sobre la distancia de un punto a una recta que pasa por dos puntos, calcula el vector director de la recta y la normal del producto cruz, con el vector que une un punto de la recta con el punto P externo a ella, todo explicado paso a paso.
   - Distancia entre Rectas alabeadas R3, explica el método para hallar la distancia entre rectas alabeadas en el espacio.

2. Calcular la distancia desde el punto P(1,1,1) a la recta que pasa por Q(0,6,8) y R(-1,4,7).

3. Calcular la distancia desde el origen a la recta l(t) = (1,2,-3) +t(1,1,5)

   Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

   Comprobar gráficamente utilizando GeoGebra.

4. Desarrolle la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 14

1. (   ) El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales.

2. (   ) El ángulo entre recta y plano se define al ángulo recto que forman r y r´.

3. (   ) El ángulo formado entre dos rectas de R3 es el ángulo plano que se forma entre sus vectores directores.

4. (   ) Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se utiliza la fórmula de la distancia punto-recta:

5. (   ) Se denomina rectas alabeadas a las que no son paralelas ni se intersecan en el espacio, es decir, que no pertenecen al mismo plano.

6. Encuentre el ángulo que forman los planos α= 3x - y + 2z + 1 = 0.

   β= 2x + y - 5z - 1 = 0

   a. 75.88°.
   b. 88.75°.
   c. 90.00°.

7. Encuentre el ángulo que forman los planos. α= 3x - 2y + z + 10 = 0.

   β= x - y + 2z + 12 = 0

a. 40.18°.
b. 44.00°.
c. 45.

8. Encuentre el ángulo que forman la recta r y el plano.

$$r : \{x = 3 + \lambda y = -21 + \lambda z = 5$$

a. 3x - 4y + 5z - 1 = 0.
b. 40.18°.
c. 44.00°.

9. Calcula la distancia del punto P y la recta r. P(2, 4, 1) y r: (x, y, z) = (2, 3, -1) + λ(1, 2, 1).

a. 1.35.
b. 1.43.
c. 1.53.

10. Calcular la distancia entre las rectas s y r que son paralelas.

$$r : \{x = 1 + 2k\ y = 5 - kz = -2 + 3k \qquad s : \{x = -7 + 6t\ y = 4 - 3t\ z = 1 + 9t$$

a. 1.82.
b. 3.82.
c. 2.82.

Ir al solucionario

Semana 16

"El estudio de las matemáticas, como el Nilo, comienza con minuciosidad, pero termina con magnificencia.".
Charles Caleb Colton.

En esta semana 16, usted debe sistematizar los conocimientos estudiados en las siete semanas anteriores y prepararse para la evaluación de fin del segundo bimestre, estudiando, repasando y poniendo en práctica los conocimientos tratados para lograr el resultado de aprendizaje: Utiliza GeoGebra para la comprobación de los ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante el desarrollo de las siguientes actividades.

1. Se sugiere que revise las lecturas y videos propuestos, de igual forma, revise las evaluaciones parciales y elabore un banco de preguntas referentes al contenido del segundo bimestre.

   Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

2. Realice nuevamente las autoevaluaciones y ejercicios propuestos de los contenidos del segundo bimestre, las unidades:

   8.) Vectores tridimensionales. Introducción.

   9.) Ecuaciones de la recta y el plano en el espacio.

   10.) Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

   11.) Posición relativa de dos planos en el espacio.

   12.) Posición relativa de tres planos en el espacio.

13.) Posición relativa de una recta y un plano en el espacio.

14.) Ángulos y distancias.

3. Compruebe gráficamente los resultados de los ejercicios y ejemplos resueltos utilizando GeoGebra, de tal manera que tenga el mayor éxito al momento de desarrollar el cuestionario de evaluación presencial.

4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	El Postulado del transportador es “La medida de un ángulo es un número positivo único”
2	f	Un ángulo recto tiene la medida de 90°
3	v	El ángulo obtuso tiene la medida del ángulo está entre 90° y 180°
4	v	Un ángulo llano es aquel cuyos lados forman rayos opuestos (una línea recta).
5	f	Un ángulo llano tiene su medida de 180°
6	b	$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC = 25° + 38° = 63°$
7	a	$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC = x° + (4x + 5) = (5x + 5)°$
8	a	$4x + 20 = 6x + 4 \Rightarrow 6x - 4x = 20 - 4 = 16°$
9	b	***8x*** - 25 = 4x +2 => 8x − 4x = 2 + 25 = 27°m ABC = m ABD + m DBC = 25° + 38° = 63°
10	c	x + 41 = 90, por tanto, x = 90 − 41 = 49; el complemento = 49° x + 41 = 180, por tanto, x = 180 − 41 = 139; el suplemento = 139°

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Teorema. A partir de un punto fuera de una recta hay exactamente una recta perpendicular a la recta dada.
2	v	Las **rectas paralelas** son rectas en el mismo plano y no se intersecan.
3	v	Postulado. A través de un punto fuera de una recta, exactamente una recta es paralela a la recta dada.
4	f	Postulado. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son congruentes.
5	v	Teorema. Si dos rectas paralelas se cortan por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son congruentes.
6	c	m ∠ 1 = 127° correspondiente a ∠ 5 m ∠ 2 = 53° suplementario a ∠ 1 m ∠ 8 = 127° vertical a ∠ 5
7	c	Los ángulos ∠ 7 y ∠ 14 son ángulos alternos externos, por tanto, son congruentes, es decir ∠ 7 = ∠ 14. X2 + 2x – 6 = x2 + 6 => x2 – x2 + 2x = 6 + 6 => 2x = 12 => x = 6 ∠14=6^2+6=42
8	b	Los ángulos ∠ 11 y ∠ 14 son ángulos alternos internos, por tanto, son congruentes, es decir ∠ 11 = ∠ 14. Los ángulos ∠11 y ∠ 13 son ángulos suplementarios, es decir ∠ 11 + ∠ 13 = 180°. 3x + 5y = 9x + 3y => 6x – 2y = 0 => y = 3x 3x + 5y + 12x + 5y = 180 => 15x + 10y = 180 => 3x + 2y = 36 m ∠ 13 = 9x + 3y = 9*4 + 3*12 = 72° 3x + 2(3x) = 36 ==> 9x = 36 => x = 4 Y = 3x => y = 3 * 4 => y = 12 *m ∠ 14 = 12x + 5y = 12*4 + 5 * 12 = 108°*
9	a	La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. m ∠ Q = 180 - 40 - 69 = 71°
10	a	La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°. m ∠ Q = 180 - 90 - 52 = 38°

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Definición. Dos triángulos son congruentes si las seis partes del primer triángulo son congruentes con las seis partes correspondientes del segundo triángulo.
2	v	Postulado. Si los tres lados de un triángulo son congruentes con los tres lados de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LLL).
3	v	Postulado. Si dos lados y el ángulo incluido de un triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (LAL).
4	f	Definición. En este contexto identidad es la razón que se cita cuando se comprueba que un segmento de recta (o un ángulo) es congruente consigo mismo; también se le conoce como propiedad de congruencia reflexiva.
5	v	Postulado. Si dos ángulos y el lado incluido de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado incluido de un segundo triángulo, entonces los triángulos son congruentes (ALA).
6	a	$c2 = a2 + b^2$ $c2 = 9 + 16 = 25$ $c = 5$
7	b	$c2 = a2 + b^2$ $a2 = 100 - 64 = 36$ $a = 6$
8	b	or ser triángulo isósceles los $m\angle B = m\angle C$ $m\angle B + m\angle C = 180 - 34 = 146$ $m\angle B = 146/2 = 73°$ $m\angle C = 73°$
9	c	Si c = b entonces b = 4.47, el perímetro = 4.7 + 4.7 + 4.0= 13.40
10	a	De acuerdo con el teorema: "Si un lado de un triángulo es más largo que un segundo lado, entonces la medida del ángulo opuesto al lado más largo es mayor que la medida del ángulo opuesto al lado más corto". Ya que AC > BC > AB, el ángulo mayor es $\angle B$ que se encuentra opuesto a *AC*. El ángulo intermedio es $\angle$ *A y el más corto* $\angle$ *C*

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Definición. Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los dos pares de lados opuestos son paralelos.
2	v	Teorema. Dos rectas paralelas son equidistantes dondequiera.
3	f	*T*eorema. Una diagonal de un paralelogramo lo separa en dos triángulos congruentes
4	v	Definición. La **altura** de un paralelogramo es un segmento de recta desde un vértice que es perpendicular a un lado no adyacente (o a una extensión de ese lado).
5	v	Teorema. En un paralelogramo con pares de ángulos consecutivos desiguales, la diagonal mayor se encuentra opuesta al ángulo obtuso.
6	c	m ∠ B y m ∠ C son suplementarios, entonces m ∠ C = 180° - 42° = 138° Por opuestos m ∠ B = ∠ D = 42° Por opuestos a = c y d = b P = (5.3 + 5.3 + 8.1 + 8.1) cm = 26.8cm
7	b	Los ángulos ∠ D y ∠ A son suplementarios por consecutivos, entonces m ∠ D + m ∠ A = 180° 2x + 20 + 3x - 10 = 180 5x = 180 – 10 X = 170/5 = 34, entoces m ∠ D = 2x +20 = 88° m ∠ A = 180° - 88° = 92° Porque m ∠ A > m ∠ D, la diagonal DB será mayor que AC
8	a	De acuerdo con el teorema: “El segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo tiene una longitud igual a la mitad de la longitud del tercer lado”. OP = ½ BC = 9.22/2 = 4.61 BC = 2OP = 2 * 6.53 = 13.06
9	a	Conocemos que OP = ½ AC 15x – 3 = 2(6x + 3) ==> 15x – 12x = 6 + 3 == > 3x = 9 == > x = 3 AC = 15*3 – 3 = 42 OP = 6*3 + 3 = 18 + 3 = 21
10	b	Encontramos la longitud del lado c C2 = a2 + b2 == > c2 = 62 + 82 = 36 + 64 = 100 C = 10 P = 4 * 10 = 40

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 5

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Definición. Un círculo, son dos o más círculos que tienen radios congruentes
2	v	Los círculos congruentes son dos o más círculos que tienen radios congruentes
3	f	En un círculo o círculos congruentes los arcos congruentes tienen medidas iguales.
4	v	En ángulo inscrito de un círculo es un ángulo que tiene su vértice en un punto en el círculo y sus lados son cuerdas del círculo
5	v	Una tangente es una recta que interseca un círculo en exactamente un punto; el punto de intersección es el punto de contacto o punto de tangencia.
6	a	El ángulo $\angle 1$ es un inscrito por lo tanto m $\angle 1$ = ½ m DE = 41° El $\angle$ DBC = 90° por lo tanto m $\angle 2$ = 90° - 41° = 48°
7	b	El segmento DB $\angle$ AB por lo tanto m $\angle$ DBA = 90° El ángulo $\angle 1$ es un inscrito por lo tanto m $\angle 1$ = ½ m DE = 41° El $\angle$ DBC = 90° por lo tanto m $\angle 2$ = 90° - 41° = 48° El $\angle$ EBA = $\angle$ DBA + 1 = 90° + 41° = 131°
8	c	M $\angle 1$ = ½ (mACB – mAB) La suma de los arcos ACB + AB = 360° ===> x + y = 360 Si el arco ACB = x y el arco AB = y M $\angle 1$ = ½ (x – y) = 48 = ½ (x – y) ==> x = 96 + y X + y = 360 96 + y + y = 360 ____ ==>2y = 264 = ==> y = 132° X = 96 + 132 = 228
9	c	Por el teorema de Pitágoras AB2 = AP2 -PB2 = 100 – 36 = 64 AB = 8 entonces AC = 16
10	b	De acuerdo con el teorema: Si dos cuerdas se intersecan dentro de un círculo, entonces el producto de las longitudes de los segmentos (partes) de una cuerda es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra cuerda. CO * OD = AO * OB OD = (5 *4)/8 = 2.5

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 6

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	Definición. El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos los lados del polígono..
2	f	eorema. El área *A* de un rectángulo cuya base tiene longitud *b* y cuya altura tiene longitud *h*, está dada por *A* = *bh*.
3	v	Definición. π es la relación proporcional entre la circunferencia *C* y la longitud del diámetro *d* de cualquier círculo; por tanto, π = C/4 en cualquier círculo.
4	f	Teorema. El área *A* de un triángulo cuya base tiene una longitud *b* y cuya altura correspondiente tiene longitud *h* está dada por *A* = ½*bh*
5	v	Teorema. El área *A* de un cuadrado cuyos lados son cada uno de longitud *s* está dada por $A = s^2$.
6	b	Encontramos el área A = 10 * 6 (BP=6) = 60 También el área A = 8 * h = 60 h = 60/8 = 7.5
7	c	A = ½ h(b1 + b2) = ½ 6(13 + 5) = 54
8	c	A = 14 * 6 = 84 A2 = 10 * 6 = 60 A = 84 – 60 = 24
9	b	Área sombreada = área de rectángulo – área del triángulo A = 14 * 6 – ½ 14*6 = 42
10	a	A = A2 – A1 = πR2 – πr2 = π (1.252 - 0.752) = π*1cm2 = $3.1416cm^2$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 7

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Un **prisma recto** es un prisma en el cual las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base en sus puntos de intersección
2	f	Un **prisma oblicuo** es un prisma en el cual las aristas laterales paralelas son oblicuas a las aristas de las bases en sus puntos de intersección.
3	v	El área lateral *L* de un prisma es la suma de las áreas de todas las caras laterales
4	v	Un **prisma regular** es un prisma recto cuyas bases son polígonos regulares
5	v	Definición. Un **cubo** es un prisma cuadrangular recto cuyas aristas son congruentes.
6	c	Área lateral = perímetro * altura = 5*4 * 5 = 100cm^2
7	c	Área lateral = perímetro * altura = 5*4 * 5 = 100cm2 Área de las bases B = ½ aP = ½*2.71*20 = 27.10cm2 Área total = área lateral + 2*área base = 100 + 2*27.10 = 154.20cm^2
8	b	Encontrar l, l2 = h2 + a2 = 62 + 2.712 = 43.3441 L = 6.59 Área de cada triángulo = ½ * 4 * 6.59 = 13.18 Área lateral = 5 * 13.18 = 65.90 Área de las bases B = ½ a*P = ½*2.71*20 = 27.10cm2 Área total = área lateral + área base = 65.90 + 27.10 = 93cm^2
9	a	Aplicamos la fórmula V = 1/3 Bh Área de las bases B = ½ a*P = ½*2.71*20 = 27.10cm^2 V = 1/3(24.10 * 6) = 48.2 cm^3.
10	a y b	V = 1/3(B*h) V = 1/3(π r^2 h) = 1/3(π 9 * 6) = 18π cm^3 = 56.55 cm^3

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 8

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Un par de puntos del espacio (O, P) determina un vector fijo OP. El punto O es el origen del vector fijo y el punto P su extremo.
2	v	El módulo de OP se representa OP y es la medida del segmento OP es decir la distancia entre: OP.
3	f	Dos vectores fijos OP y QR tienen la misma dirección, cuando la rectas en las que descansan [r(OP) y r (QR)] coinciden o son paralelas
4	v	Dos vectores fijos OP y QR son equipolentes o iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.
5	c	La equipolencia o igualdad es una relación entre los vectores fijos que goza de las siguientes propiedades: Reflexiva: todo vector fijo es equipolente a si mismo Simetría: sí AB es equipolente a CD, entonces CD es equipolente a AB Transitiva sí AB es equipolente a CD y CD es equipolente EF, entonces AB equipolente a EF
6	b	El módulo del es igual a **= 3**
7	a	$\vec{v} + \vec{u}$ = (1+3, 3+2, 4+4) = (4, 5, 8) $\vec{v} - \vec{u}$ = (1-3, 3-2, 4-4) = (-2, 1, 0)
8	a	$2\vec{v} - \vec{u}$ = 2*(1, 3, 4) - (3, 2, -4) = (2 -3, 6-2, 8+4) = (-1,4, 12) $-\vec{v} + 3\vec{u}$ = -(1, 3, 4) + 3(3, 2, -4) = (-1 +9, -3+6, -4-12) = (8_, 3, -16)
9	b	**AB** = (3,0,2) - (1,1,4) = (3-1, 0-1, 2-4) = (2, -1, -2)
10	c	AB = (2, 1, 0) − (1, 0, −1) = (1, 1, 1) BC = (0, 0, −1) − (2, 1, 0) = (−2, −1, −1) CD = (−1, 1, 1) − (0, 0, −1) = (−1, 1, 2) Para ver si son linealmente independientes se hace el determinante $\|1\ 1\ 1 - 2 - 1 - 1 - 1\ 1\ 2\ \|= -1 + 5 - 3 = 1 \neq 0$ Al ser distinto de 0, los vectores son linealmente independientes

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 9

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Recta definida como intersección de dos planos no paralelos es el producto vectorial de los vectores normales a los planos, es un vector director de la recta
2	v	La ecuación vectorial de la recta está expresada por los vectores en función de sus coordenadas. $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + k(v_1, v_2, v_3)$
3	v	La ecuación continua se obtiene despejando el parámetro en cada ecuación paramétricas e igualando $\frac{x-x_1}{v_1} = \frac{y-y_1}{v_2} = \frac{z-z_1}{v_3}$
4	f	La intersección de 2 planos secantes determina una recta por tanto se interceptan en infinitos puntos
5	f	La intersección de 2 planos dado origen a 4 semiplanos el ángulo de intercepción entre 2 semiplanos se denomina ángulo diedro
6	b y c	Elegimos uno de ellos como vector director: P(-2, 2, 0) -O(3, 2, 1) = (-5, 0, -1) (x, y, z) = (3, 2, 1) + α (-5, 0, -1) Ecuación vectorial de la recta O (x, y, z) = (-2, 2, 0) + α (-5, 0, -1) Ecuación vectorial de la recta P
7	a	X = 3 – 4α y = 2 – α z = 1 – α Para obtener las ecuaciones simétricas, despejamos el parámetro e igualamos: $a = \frac{x-3}{-4}, a = \frac{y-2}{-1}, a = \frac{z-1}{-1}$ $\frac{x-3}{4} = y - 2 = z - 1$
8	a y b	Resolvemos el sistema: Los planos a = 3x – 2y + z = 2 y b = x + 3y + 5z = 3 forman un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Fijando arbitrariamente z = 0 X = 9/10 Y = 7/10 Z = 0 P(9/10, 7/10, 0) Encontramos el vector director v = (-13, -14, 11) Las ecuaciones paramétricas de la recta $r : (x, y, z) = \left(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, 0\right) + t(-13, -14, 11)$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	b	Resolvemos el sistema: Los planos $\frac{3}{4}x + 2y + 2z = 5 \; y \; b = \frac{3}{4}x - 2y + 2z = 3$ y forman un sistema de 2 ecuaciones y 3 incógnitas. Fijando arbitrariamente z = 0 X = 16/3 Y = 1/2 Z = 0 P(16/3, 1/2, 0) Encontramos el vector director v = (1, 0, -3/8) Las ecuaciones paramétricas de la recta $r: (x, y, z) = \left(\frac{16}{3}, \frac{1}{2}, 0\right) + t\left(1, 0, -\frac{3}{8}\right)$
10	c	Resolvemos el sistema: Encontrar la recta de intersección entre los planos a = x + y + z = -1 y b = x − y − z = - 2. Fijando arbitrariamente z = 0 X = -3/2 Y = 1/2 Z = 0 P(-3/2, 1/2, 0) Encontramos el vector director v = (0, 2, -2) Las ecuaciones paramétricas de la recta $r: (x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + t(0, 2, -2)$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 10

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	Las posiciones relativas de una recta y un plano, permite, indicar si la recta y el plano en el espacio tienen o no puntos en común.
2	f	La Intersección de una recta y un plano es **secante** si la recta tiene 1 punto en común con el plano
3	v	La Intersección de una recta y un plano es **Contenidas** cuando todos los puntos de una recta pertenecen al plano
4	b	Las posiciones relativas de 2 rectas en el espacio, permite, indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común y se clasifican en: ▪ **Paralelas** todos los puntos de una recta están a la misma distancia de la otra. ▪ Coincidentes todos los puntos son comunes, por tanto, son la misma recta. ▪ Secantes las rectas tiene 1 punto en común. ▪ Se cruzan (Alabeadas) las rectas no tienen puntos en común porque no pertenecen al mismo plano. ▪ Perpendiculares las rectas con forma un ángulo de 90.
5	v	La distancia mínima entre 2 rectas alabeadas no coplanares ni secantes es la longitud del segmento perpendicular a ambas
6	b	π1 $3x + 2y + 4z + d = 0$ El punto debe verificar la ecuación, entonces reemplazamos P0 y obtenemos el coeficiente que faltaba: $3.1 + 2.1 + 4.(-1) + d = 0$ $d = -1$ la ecuación del plano: $\pi_1 = 3x + 2y + 4z - 1 = 0$
7	a	Las coordenadas del punto medio: $= (2, -4, 0)$ Ecuación del plano $= 2x + y + 0z + d = 0$ $2.2 + 1.1 + 0.3 + d = 0 \Rightarrow d = -5$ la ecuación del plano: $2x + y - 5 = 0$
8	a	Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes = Rag A = 3 Calculamos el rango de la matriz ampliada = Rag A*= 3 *Rag A = Rag A* = 3* Rectas secantes

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	b	Pr = (2, 0, 1) y d= (1, 3, 2) Ps = (-2, 1, 0) y ds = (1, 3, 2) d= ds Puede ser paralelas o coincidentes, comprobar sustituyendo el punto Pr en la recta s 2 = -2 + t => t = 4 0 = 1 + 3t => t = 1/3 1 = 2t => t = ½ Por tanto, son paralelas
10	c	Punto de paso de s menos el punto de paso r $\overrightarrow{SoRo} = \mathrm{R}_{\circ} - \mathrm{S}_{\circ} = (2, 0, -2) - (1, -2, 0) = (1, 2, -2)$ Producto mixto = $(\vec{r} * \vec{s}) * \overrightarrow{SR} = \mid -12 - 121112 - 2 \mid = 11$ es diferente de 0, determina que so rectas alabeadas Vector normal $d = \left\| \frac{(1,2,-2)(3,-1,-5)}{\sqrt{3^2+1x^2+5^2}} \right\| = \frac{11}{\sqrt{35}}$
		Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 11

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Dos planos en el espacio son coincidentes cuando todos los puntos del plano π_1 pertenece al plano π_2
2	f	Los planos son Paralelos cuando todos los puntos del plano están a la misma distancia del plano π2 ; Los vectores normales son proporcionales $(\vec{\mathbf{n}}_1 \parallel \vec{\mathbf{n}}_2) \Rightarrow$ significa que son paralelos $\vec{\mathbf{n}}_1 \parallel \vec{\mathbf{n}}_2$, el punto de paso pertenece solo a un plano
3	v	Dos planos son Secantes cuando tiene una recta que les intersectan (corta) o en común; Los vectores normales no son proporcionales $(\vec{\mathbf{n}}_1 \neq \vec{\mathbf{n}}_2) \Rightarrow$ significa que no son paralelos $\vec{\mathbf{n}}_1 \parallel \vec{\mathbf{n}}_2$
4	v	Los planos son Paralelos cuando el Ra (M) = 1 y Rg (M*) = 2
5	v	Dos planos en el espacio son secantes cuando el Ra (M) = 2 y Rg (M*) = 2
6	c	Comprobamos la proporcionalidad de los vectores normales Vector normal $\vec{\mathbf{n}}_a = (1, 1, -1)$ Vector normal $\vec{\mathbf{n}}_B = (3, 3, -3)$ $\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{2}{6}$Son iguales, por tanto, los planos son coincidentes
7	c	Comprobamos la proporcionalidad de los vectores normales Vector normal $\vec{\mathbf{n}}_a = (1, 1, -1)$ Vector normal $\vec{\mathbf{n}}_B = (3, 3, -3)$ $\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{-1}{-3} = \frac{2}{8}$Son proporcionales los vectores normales, pero no los términos independientes, por tanto, los planos son paralelos
8	b	Comprobamos la proporcionalidad de los vectores normales Vector normal Vector normal $\frac{5}{2} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$Son diferentes, por tanto, los planos son secantes
9	a	Resolver el sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, para lo cual utilizamos un parámetro para x = λ. x = λ y = 3 − λ *z = -1 + 4 λ*

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	a	$\mathbf{r}: \{\mathrm{A}(\text{-}2,1,\text{-}1)\vec{\mathrm{u}} = (3,2,2)\pi: \quad \Rightarrow \vec{\mathrm{n}} = (2,1,-3)\}$ La ecuación de π^':|x+2 3 2 y-1 2 1 z+1 -2 -3 |=0==>π^': -4x+5y-z-14=0 La recta pedida es: r^':{2x+y-3z=-1 -4x+5y-z-14

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 12

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Respuesta</th><th>Retroalimentación</th></tr>
<tr><td>1</td><td>f</td><td>Los planos son coincidentes cuándo el rango de M y el rango de M* son iguales a 1, las ecuaciones son proporcionales, el sistema es compatible y va a ser indeterminado.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>f</td><td>Los planos son paralelos cuándo el rango de M = 1 y el rango de M* = 2, el sistema es Incompatible.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>v</td><td>Los 3 planos se cortan en una recta sí el rango de M y de M* son = 2, entonces el sistema es compatible indeterminado</td></tr>
<tr><td>4</td><td>v</td><td>Dos 3 planos son paralelos y cortan al tercero, sí es rango de M = 2 y es diferente a rango de M’ = 3, entonces el sistema es incompatible</td></tr>
<tr><td>5</td><td>v</td><td>Los tres planos se cortan en un punto, si el rango de M = 3 y el rango de M* = 3, entonces, el sistema es compatible determinado, tiene una única solución porque los 3 planos se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td>6</td><td>a</td><td>M=(2 -1 -1 -1 0 1 1 -1 0)=(0-1-1)-(0-2+0)=0
|2 -1 -1 0 |=0-1=-1 ≠0=>Rg(M)=2
M^'=(2 -1 -1 -1 0 1 1 -1 0 0 0 1)=(0+0+0)-(0+0+1)=-1 ≠0=>Rg(M^')=3
Se cortan dos a dos y define un prisma sin bases</td></tr>
<tr><td>7</td><td>b</td><td>M=(2 3 1 1 1 -1 3 1 -3)=(-6+1-9)-(3-2-9)=-6≠0
|2 3 1 1 |=2-3=-1 ≠0=>Rg(M)=3
M^'=(2 3 1 1 1 -1 3 1 -3 3 -1 -1)=(-2+3-9)-(9-2-3)=-4 ≠0=>Rg(M^')=3
Como tenemos el Rg(M) = Rg(M*) = 3, los 3 planos se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td>8</td><td>c</td><td>M=(2 3 -2 1 -2 -1 3 1 -3)=(12-2-9)-(12-2-9)=0
Rg (M) < 3
|2 3 1 -2 |=-4-3=-7 ≠0=>Rg(M)=2
M^'=(2 3 1 1 1 -1 3 1 -3 3 -1 2)=(-8+3-9)-(-18-2+6)=0
Rg (M*) < 3
|2 3 1 -2 |=-4-3=-7 ≠0=>Rg(M')=2
Como tenemos el Rg(M) = Rg(M*) = 2, los 3 planos se cortan en una recta</td></tr>
</table>

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	c	Rg **(M)** < 3 $M=(231/311/3-131-3)-\left(-2+\frac{1}{3}-9\right)-\left(-\frac{1}{3}-2+9\right)=0$ M^'=(2 3 1/3 1 1/3 -1 3 1 -3 3 -1 -1/3)=(-2/9-9+3)-(3-1-2)=-56/9 ≠0=>Rg(M^')=3 Los planos 2 y 3 son proporcionales menos sus términos independientes por tanto son paralelos Como tenemos el Rg (M) = 2 y Rg(M*) = 3, Dos de los planos son paralelos y cortan al tercero
10	b	M=(1 1 1 3 3 3 4 5 6)=(18+15+12)-(12+15+18)=0 Rg (M) < 3 |3 3 4 5 |=15-12=3 ≠0=>Rg(M)=2 M^'=(1 1 1 3 3 3 4 5 6 7 21 26)=(78+105+84)-(84+105+78)=0 |3 3 4 5 |=15-12=3 ≠0=>Rg(M')=2 =>Rg(M^')=2 Los planos 1 y 2 son proporcionales incluidos sus términos independientes por tanto son coeficientes Como tenemos el Rg(M) = 2 y Rg(M*) = 2, tenemos dos planos coincidentes y el 3º secante

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 13

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f	Una recta está contenida en el plano cuando el Ra (M)= 2 y Rg (M*) = 2
2	f	Una Recta y plano son paralelos cuando el Ra (M) = 2 y Rg (M*) = 3
3	v	Una Recta y plano son secantes cuando el Ra (M) = 3 y Rg (M*) = 3
4	v	La recta viene definida por un punto **A** y un vector $\vec{\mathbf{u}}$ y un plano π cuyo rector es $\vec{\mathbf{v}}$ y pueden presentarse 3 casos.
5	v	La recta viene definida por un punto **A** y un vector $\vec{\mathbf{u}}$ y un plano π cuyo rector es $\vec{\mathbf{v}}$ y pueden presentarse 3 casos. Las posiciones relativas de la recta de plano son: a. Si $\epsilon\pi$ $\mathbf{y}$ $\vec{\mathbf{u}} * \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \Rightarrow$ Recta contenida en el plano b. Si $\epsilon\pi$ $\mathbf{y}$ $\vec{\mathbf{u}} * \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \Rightarrow$ Recta contenida en el plano son paralelos Si un punto de la recta $\epsilon\pi$ el $\vec{\mathbf{u}} * \vec{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0} \Rightarrow$ Recta y plano son secantes
6	a	M=(1 -5 0 0 1 -1 -1 3 2)=(2+0-5)-(0-3+0)=0 Rg (M) < 3 |1 -5 0 1 |=1-0=1 ≠0=>Rg(M)=2 M^'=(1 -5 0 0 1 -1 -1 3 2 1 2 -5)=(-5+0+10)-(-1+6+0)=0 Rg (M*) < 3 |1 -5 0 1 |=1-0=1 ≠0=>Rg(M')=2 Como tenemos el Rg(M) = Rg(M*) = 2, La recta está contenida en el plano
7	a	Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector: A(4, 4, 4) y =(2, 7, 5) Ecuación vectorial (x, y, z) = (4, 4, 4) + λ(2, 7, 5)
8	b	Encontrar la ecuación vectorial de la recta definida por un punto y un vector:Ecuación vectorial (x, y, z) = (3, 2, 1) + λ(-4, -1, -1)
9	c	Con los datos dos puntos de la recta el vector director es $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5, 5, 8)$, tomando como punto de paso AEntonces la ecuación es:(x, y, z) = (-3, -2, 4) + λ(5, 5, 8)

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	c	Para el punto A (2, -3, 1) = (-3, -2, 4) + λ(5, 5, 8) Comprobar si existe algún valor del parámetro λ que verifique está ecuación vectorial {-3+5λ=2 -2+5λ=-3 4+8λ=1 Este sistema es incompatible, así que el punto no pertenece a la recta. Para el punto B (2.5, 2.5, 4) = (-3, -2, 4) + λ(5, 5, 8) Comprobar si existe algún valor del parámetro λ que verifique está ecuación vectorial {-3+5λ=2 -2+5λ=3 4+8λ=12 Este sistema es compatible, así que el punto si pertenece a la recta.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 14

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	v	El ángulo entre dos planos es el ángulo entre sus respectivos vectores normales.
2	f	Se define como ángulo entre una recta r y una plano π al ángulo agudo que forman r y r´.
3	f	El ángulo formado entre dos rectas de R3 es el ángulo que se forma entre sus vectores directores.
4	v	Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas se utiliza la fórmula de la distancia punto-recta:
5	v	Se denomina rectas alabeadas a las que no son paralelas ni se intersecan en el espacio, es decir, que no pertenecen al mismo plano.
6	a	Vectores normales y aplicamos la fórmula: $\vec{\mathbf{n}}_1 = (3, -1, 2)$ $\vec{\mathbf{n}}_2 = (2, 1, -5)$ $\alpha = \arccos\left(\frac{\lvert 3*2+(-1)*1+2(-5)\rvert}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+(-5)^2}}\right)\alpha = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{420}}\right) = \arccos \arccos(0.244) = 45.88^\circ$
7	a	Vectores normales y aplicamos la fórmula: $\vec{\mathbf{n}}_1 = (3, -2, 1)$ $\vec{\mathbf{n}}_1 = (1, -1, 2)$ $\alpha = \arccos\left(\frac{\lvert 1*3+1*(-4)+0*5\rvert}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}}\right)\alpha = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{84}}\right) = \arccos \arccos(0.764) = 40.17^\circ$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	b	Vectores normales y aplicamos la fórmula: $\vec{\mathrm{n}}_1 = (1,1,0)$ $\vec{\mathrm{n}}_2 = (3,-4,5)$ $\alpha = \arccos\left(\frac{\lvert 1*3+1*(-4)+0*5\rvert}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}}\right)\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right) = \arccos\arccos(0.10) = 5.74°$
9	c	Producto vectorial de un punto de la recta O y P, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \mathrm{P}(2,4,1) - \mathrm{O}(2,3,-1)$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,1,2)$ $\lvert\overrightarrow{OP} * \overrightarrow{v}\rvert =\lvert\, i\ j\ k\ 0\ 1\ 2\ 1\ 2\ 1\, \rvert=\rvert\, i+2j-k-4i\, \rvert=\rvert -3i+2j-k\rvert$ $= \lvert(-3,2,-1)\rvert = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$ Aplicamos la fórmula: $d(P,r) = \frac{\lvert\overrightarrow{OP}*\vec{v}\rvert}{\lvert\vec{v}\rvert} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = 1.53$
10	c	$\vec{\mathrm{r}} = (1,-1,3); \mathrm{R}(1,5,-2)$ $\vec{\mathrm{s}} = (6,-3,9); \mathrm{S}(-7,4,-1)$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \mathrm{S}(-7,4,1) - \mathrm{R}(1,5,-2)$ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}(-8,-1,3)$ $\lvert\vec{r} * \overrightarrow{RS}\rvert =\lvert\, i\ j\ k\ 2-13-8-13\, \rvert=\rvert -3j-2k-24j-(8k-3i+6j)\rvert = \lvert 0i-30j-10k\rvert$ $\vec{r} * \overrightarrow{RS} = (0,-30,-10)\rvert d(r,s) = \frac{\left\lvert\sqrt{0^2+(-30)^2+(-10)^2}\right\rvert}{\left\lvert\sqrt{6^2+(-3)^2+9^2}\right\rvert} = \frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{126}} = 2.82$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

1a con Berni, (20 de febrero de 2019). Ángulo entre planos.[Video]. https://www.youtube.com/watch?v=Wov5bzhfGaI

AcademiaCibernautas (22 de agosto de 2017). *Ejercicios básicos de circunferencia-geometría.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=oEJMdbNKeEU

Acervo - Televisión Educativa. (25 de octubre de 2019). 17. *El área de polígonos.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=6HIADlG1mQc

Alexander, D. y Koeberlein, G. (2013). Geometría. Cengage Learning. https://elibro.net/es/lc/bibliotecautpl/titulos/39990

Alcerro, J. (28 de abril de 2020). *Introducción a las demostraciones geométricas I.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=m28WxnwUaH8

Centro Matemático Ricardo Araya, (12 de octubre de 2017). Ángulos en la circunferencia 1 ejercicio resuelto. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=XNb5HBdIFtc

Estudia (16 de enero de 2013). *Vectores en el espacio*: elementos y operaciones. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=9zWOLjOPIM0&ab_channel=estudiia

Estudia (7 de febrero de 2013). *Posiciones relativas de tres planos en el espacio*. [Video]. https://www.youtube.com/

Gutiérrez y Mora, (2018). Intersección entre recta y plano. *VECTORES, RECTAS Y PLANOS*. [ARCHIVO PDF]. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/visualizacion-interactiva-vectores-rectas-y-planos/ https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/visualizacion-interactiva-vectores-rectas-y-planos/

Gutiérrez y Mora, (2018). Operaciones básicas. *VECTORES, RECTAS Y PLANOS*. [ARCHIVO PDF]. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/visualizacion-interactiva-vectores-rectas-y-planos//

Gutiérrez y Mora, (2018). Propiedades de los vectores. *VECTORES, RECTAS Y PLANOS*. [ARCHIVO PDF]. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/visualizacion-interactiva-vectores-rectas-y-planos/

Hernández, H. (9 de octubre de 2017). Geogebra 001 *descarga, instalación e inicio de GeoGebra 5.0*. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=3nHSoBfpozM

Khan Academy, (2019). *Comencemos a usar Khan Academy"*. [Video]. https://es.khanacademy.org/khan-for-educators/khan-para-maestros/bienvenido-a-khan-para-maestros/inscribete-a-khan-academy/v/comencemos-a-usar-khan-academy?modal=1

Khan, S. (s.f.). *Determinación de triángulos congruentes*. Khan Academy. [Video]. https://es.khanacademy.org/khan-for-educators/khan-para-maestros/bienvenido-a-khan-para-maestros/inscribete-a-khan-academy/v/comencemos-a-usar-khan-academy

Khan, S. (s.f.). *Introducción a los cuadriláteros*. Khan Academy. [Video]. https://es.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-shapes/basic-geo-quadrilaterals/v/quadrilateral-overview

Mageo, O. (s.f.) DEMOSTRACIÓN INDIRECTA. *Olga mageo*. https://olaurens.blogspot.com/p/demostracion-indirecta.html

MateFacil, (9 de julio de 20119). *Distancia de un punto a una recta.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=ut1Qsc8asSU

Mates con Andrés (17 de enero de 2019). *Rectas Paralelas | Posición Relativa de Dos Rectas en el Espacio.*[Video]. https://www.youtube.com/watch?v=vaJEaP1hJc0

Mates con Andrés (8 de enero de 2019). *Posición relativa de dos planos en el espacio.*[Video]. https://www.youtube.com/watch?v=Ig-_XN1pTWg

Pérez, A. (2 de octubre de 217). Rectas y Planos. Ecuación de plano y recta en el espacio. *Universidadurjc.*[Video]. https://www.youtube.com/watch?v=yZI4XJpBFx8

Pi-ensa Matematik, (20 de marzo de 2020). *Volumen de prisma y una pirámide.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=Xc_mKQxC7JU

Portal Académico (s.f.). *Propiedades del triángulo isósceles.* https://portalacademico.cch.unam.mx/matematicas2/geometria-del-triangulo/propiedades-isosceles

Pustilnik, I y Gómez, F. (22 de junio de 2019) .Recta en R3. Ecuaciones de la recta en R3.UTN.BA. https://aga.frba.utn.edu.ar/recta-en-r3/

Pustilnik, I y Gómez, F. (23 de agosto de 2017) . Ángulos y distancias. UTN.BA. https://aga.frba.utn.edu.ar/angulos-y-distancias/

Ronny Online, (28 de enero de 2020). *Intersección entre una recta y un plano en el espacio #2.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=PJcypuWsonQ

Siu y Andaluz, (2019). *Planos en el espacio. Geometría del espacio; ejercicios y problemas.* [ARCHIVO PDF]. https://repositorio.up.edu.pe/item/0b2ddeab-977d-48c2-9de8-e417259cdae3

Siu y Andaluz, (2019). *Rectas y planos en el espacio. Geometría del espacio; ejercicios y problemas.* [ARCHIVO PDF]. https://repositorio.up.edu.pe/item/0b2ddeab-977d-48c2-9de8-e417259cdae3

Superprof, (s.f.). *Revise el siguiente contenido: Problemas interactivos de área y volumen del prisma, de la pirámide y del tronco de pirámide.* [Material didáctico] https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/geometria/espacio/ejercicios-interactivos-del-area-y-volumen-del-prisma-de-la-piramide-y-del-tronco-de-piramide.html#tema_volumen-y-area-del-piramide

Superprof: *Posiciones relativas de una recta y un plano.* https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/recta/posiciones-relativas-de-una-recta-y-un-plano.html

Teorema Pi. (14 de marzo de 2017). Área de polígonos regulares y del círculo | Demostrando Pi. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=0paJ1ciCsoQ

Tourón, J. (2016).TPACK: *Un modelo para los profesores de hoy.* INED21. https://ined21.com/tpack/

Unamunoenlinea, (1 de enero de 2013). *Distancia entre Rectas Alabeadas* R3. [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=AKBJgmjRSys

Unicoos, 28 de febrero de 2018). *Angulo entre recta y plano.* [Video]. https://www.youtube.com/watch?v=a049gRmVAOo