Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Sucesiones y Probabilidad y su Didáctica

Guía didáctica

Facultad Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Sistemas de Conocimiento de Sucesiones y Probabilidad y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)	VIII

Autores:

Luis Alberto Cuenca Macas

Gustavo Belizario Viñamagua Medina

Reestructurada por:

Gustavo Belizario Viñamagua Medina

EDUC_4155

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Sucesiones y Probabilidad y su Didáctica

Guía didáctica

Luis Alberto Cuenca Macas
Gustavo Belizario Viñamagua Medina
Reestructurada por:
Gustavo Belizario Viñamagua Medina

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-39-430-9

Año de edición: marzo, 2022

Edición: primera edición reestructurada en enero 2025 (con un cambio del 25%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Comunicación oral y escrita.

1.3 Competencias del perfil profesional

1. Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física mediante la fundamentación teórico-práctica de los sistemas de conocimiento que, faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado.
2. Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

3. Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.
4. Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.
5. Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.
6. Elaborar, ejecutar y evaluar proyectos o procesos de investigación que lleven a la recopilación, organización y análisis de información en el ámbito de las matemáticas y la física enfocados a la generación de nuevos conocimientos, habilidades y actitudes que aporten a la solución de problemas prácticos de su comunidad.
7. Desarrollar, ejecutar y difundir proyectos pedagógicos y didácticos con metodologías activas e innovadoras, involucrando la matemática y la física, vinculados a la solución de problemas de la realidad y que apoyen la integración de los docentes con el entorno natural y social de la comunidad y del país en general.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

Escasa capacitación o formación en temas pedagógicos y didácticos, así como de dominio disciplinar; falta de innovación en la práctica docente; inadecuada formación y actualización docente.

2. Metodología de aprendizaje

Para el estudio de la asignatura Sistemas de conocimiento de sucesiones y probabilidad y su didáctica, se aplicará una metodología constructivista mediante el aprendizaje cooperativo, con lo cual usted tendrá una experiencia de aprendizaje entre iguales, ya que se propiciará el trabajo en pequeños grupos de trabajo donde se apropiarán del contenido a ser abordado en la presente asignatura. (Ferreiro Gravié, 2016).

Para llevar a cabo esta propuesta metodológica se aplica el método ELI, el cual consta de 7 momentos que se pueden aplicar en cada una de las clases y actividades.

1. Momento A, Activación social, afectiva e intelectual hacia el tema de estudio, con el cual se crea el ambiente propicio.
2. Momento O, Orientación de la atención, para captar y mantener el interés de los alumnos.
3. Momento R, Recapitulación o repaso de los temas estudiados hasta ese momento.
4. Momento PI, Procesamiento de la Información donde el alumno, de forma individual o grupal, confronte el contenido, y se apropie del mismo.
5. Momento I, Interdependencia social positiva: aquí los estudiantes comparten sus conocimientos, aprenden los unos de los otros, generando una verdadera comunidad de aprendizaje.
6. Momento E, Evaluación como juicio de valor sobre los procesos y resultados del proceso de enseñanza – aprendizaje.
7. Momento SSMT, Sentido y Significado, Metacognición y Transferencia o también conocido como el momento de Reflexión

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Aplica los conceptos básicos del cálculo de sucesiones para la resolución de problemas.

Mediante este resultado de aprendizaje, usted adquirirá la habilidad de aplicar los conceptos básicos del cálculo de sucesiones para la resolución de problemas matemáticos, fortaleciendo su capacidad analítica y lógica.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Existen muchas aplicaciones de las sucesiones en la vida cotidiana, como por ejemplo en el desarrollo de ciertas plantas, entre ellas los girasoles. El análisis sería por mes y año, determinando la manera de cómo sería su producción. Otra aplicación está en el cálculo de intereses bancarios, que con base al tiempo se puede observar que se forma una sucesión entre el capital y los intereses. En el campo industrial se ve también la formación de una sucesión, ya que el análisis sería con base en el producto, la fabricación y el expendio. Pero sin ir muy lejos, también encontramos sucesiones en los números ya que tenemos sucesiones de pares, impares, múltiplos de números.

La conceptualización de las sucesiones y la notación de sumatoria son de gran importancia, es por ello que empezaremos analizando algunos temas relacionados con las sucesiones y sus propiedades. En esta primera unidad nos apoyaremos en los siguientes temas:

- Sucesiones infinitas.
- Notación de sumatoria.
- Teoremas sobre sumas.

Estimado estudiante, previo a iniciar el estudio de las sucesiones y notación de sumatoria, analicemos y demos respuesta a los siguientes cuestionamientos: ¿Qué entendemos por sucesiones y cómo se relacionan con nuestro entorno?, ¿cuáles son las características que poseen las sucesiones?, ¿en la vida real, para qué nos es útil la sumatoria de una sucesión? ¡Adelante, iniciemos con este estudio!

1.1 Sucesiones infinitas

¿Qué entendemos por sucesiones y cómo se relacionan con nuestro entorno?

En el ámbito de la matemática, una sucesión es un conjunto de números que sigue un patrón determinado y se lo puede representar como:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

De forma general, se puede decir que una sucesión es una secuencia de números infinitos, que se pueden representar como una función a(x), donde x es la entrada de la función y tiene correspondencia con los números naturales, y los valores a(x) son cada uno de los elementos de la sucesión.

También podemos notar que tienen estrecha relación con nuestro entorno, ya que en la vida cotidiana podemos identificar diversas situaciones donde aparecen las sucesiones como: la disposición de asientos en un teatro, los ingresos por ventas realizadas, el crecimiento de una bacteria, las finanzas para el cálculo de intereses, entre otras. En la naturaleza también podemos encontrar patrones de repetición. A continuación, se presenta una serie de imágenes donde podrá observar estas características.

[Sucesiones en nuestro entorno]

Por medio de la actividad pudo visualizar como en la naturaleza están presentes las sucesiones que se representan por medio de patrones, todas las imágenes se han relacionado con la serie de Fibonacci, la cual es una secuencia que empieza con el 0 y 1, a partir de ello cada elemento siguiente se genera al sumar los dos elementos previos.

Elementos de Fibonacci = {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …}.

¿Cuáles son las características que poseen las sucesiones?

Las sucesiones numéricas infinitas tienen características específicas que deben cumplir; a continuación, se mencionan las siguientes:

- Tienen orden, a cada elemento se le asigna una posición dentro de la serie y cuentan con primer elemento.
- Los elementos de la sucesión siguen un patrón.
- Se puede determinar el n-ésimo término, en función de su patrón.
- No es posible determinar la totalidad de términos, lo que se puede hacer es generar una cantidad *n* de términos.

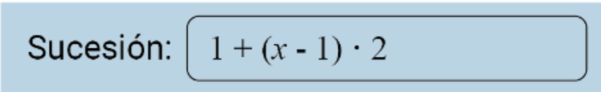
Estimado estudiante, en el quiz que se presenta a continuación, le permitirá identificar y clasificar las sucesiones planteadas.

[Sucesiones conjuntos numéricos]

Como pudo haber notado, existen conjuntos numéricos que no se los puede considerar como sucesiones, dado que no es posible determinar un patrón para su generación, así mismo encontramos múltiples ejemplos que sí cumplen con las características de sucesiones, adicional a los ejemplos mostrados se podrían mencionar al conjunto de los números pares, al conjunto de los múltiplos de un número, entre otros.

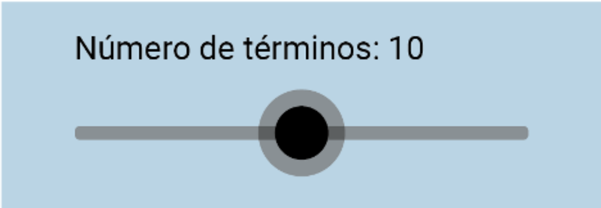
A continuación, le invito a que, a través de las instrucciones que se presentan, experimente ingresando sucesiones, genere sus elementos y visualice la misma.

i. Ingrese la sucesión en la caja de texto, puede usar las propuestas en el libro. Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica de Swokowski, Earl William (2018). Pág. 647.



ii. En lugar de la letra n, use la letra x.

iii. Determine la cantidad de elementos a generar, para ello, deslice a la derecha para agregar elementos y a la izquierda para quitar elementos.



iv. Finalmente, podrá visualizar la sucesión.

[Geogebra]

En esta experimentación, se observa con claridad cómo los elementos de la sucesión se van generando, ya que cada uno resulta de reemplazar el valor posicional en la expresión de la secuencia, por ejemplo, en la sucesión:

$$a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2$$

Para generar el elemento quinto de la sucesión, se reemplaza ***n*** por el valor 5, de esta forma se tiene:

$$1 + (5 - 1) \cdot 2 = 1 + (4) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$$

Por lo que el quinto elemento de la sucesión es: $a_5 = 9$

Asimismo, dependiendo de la sucesión, podemos ver que algunas se van aproximando a un determinado valor. A este tipo se las denomina sucesiones convergentes, ya que confluyen en un valor específico, mientras que las sucesiones divergentes son aquellas cuyos valores van creciendo o decreciendo infinitamente.

Patrones de una sucesión

A continuación, se presenta un conjunto de números.

1, 4, 9, 16, ...

¿Qué patrón puede identificar en estos números? La respuesta a esta pregunta parece obvia, dado que estos números tienen correspondencia con los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4, ... De esta forma, la sucesión está definida por:

$$a_n = n^2$$

Sin embargo, se puede determinar otra sucesión cuyos primeros cuatro términos son 1, 4, 9, 16. En otras palabras, la respuesta a este problema no es única, ya que otra sucesión es:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_n &= a_{n-1} + 2n - 1 \\
a_2 &= 1 + 2(2) - 1 = 4 \\
a_3 &= 4 + 2(3) - 1 = 9 \\
a_4 &= 9 + 2(4) - 1 = 16
\end{aligned}$$

Sucesiones definidas en forma recursiva

En determinadas sucesiones para calcular el n-ésimo término se requiere conocer de alguno o de todos sus elementos previos; a este tipo se los caracteriza como sucesiones recursivas. Un claro ejemplo de este tipo es la sucesión de Fibonacci, en la cual se parte de los dos primeros elementos 0 y 1, a partir de ello los elementos siguientes se generan a partir de la suma de los dos elementos previos.

A continuación, se presenta un ejemplo.

Ejemplo 1: Determine los siguientes 3 términos de la siguiente sucesión definida de forma recursiva, donde se conocen los dos primeros elementos: $a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_2 = 2$.

$$a_k = 2a_{k-1} + 3a_{k-2}, \quad \text{para todo } k \geq 3$$

Solución:

Se conocen los dos primeros términos $a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_2 = 2$, para calcular los siguientes tres elementos ***k***=1, 2, 3, se debe realizar lo siguiente:

Para el tercer término se usa el primer y segundo elemento.

$$a_3 = 2a_{3-1} + 3a_{3-2} = 2a_2 + 3a_1 = 2(2) + 3(1) = 4 + 3 = 7$$

Para el cuarto término se usa el segundo y tercer elemento que fueron calculados en el paso anterior.

$$a_4 = 2a_{4-1} + 3a_{4-2} = 2a_3 + 3a_2 = 2(7) + 3(2) = 14 + 6 = 20$$

Para el quinto término se usa el tercer y cuarto elemento que fue calculado en el paso anterior.

$$a_5 = 2a_{5-1} + 3a_{5-2} = 2a_4 + 3a_3 = 2(20) + 3(7) = 40 + 21 = 61$$

De esta forma, los 5 elementos de la sucesión son:

1, 2, 7, 20, 61.

Aplicaciones prácticas de las sucesiones

Se había mencionado que en el ámbito de las finanzas se hace uso de las secuencias; es por ello que, a continuación, se presenta una aplicación práctica en este ámbito.

Ejemplo 2: Interés compuesto. Jaime deposita 3000 dólares en una cuenta de ahorros que paga el 3 % de interés al año, capitalizado mensualmente. La cantidad en la cuenta después de ***n*** meses está dada por:

$$A_n = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^n$$

a. Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.
b. Encuentre la cantidad en la cuenta después de 2 años.

Solución:

a. Para resolver este literal se debe reemplazar ***n*** por 1, 2, 3, 4 y 5.

$$A_1 = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^1 = 3007.5$$

$$A_2 = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^2 = 3015.02$$

$$A_3 = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^3 = 3022.56$$

$$A_4 = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^4 = 3030.11$$

$$A_5 = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^5 = 3037.69$$

b. En este caso, como se pide el valor a los 2 años, primero se deben calcular los meses que hay; en este caso son 24 meses, por lo tanto, se debe calcular el elemento n=24 de la sucesión.

$$A_{24} = 3000\left(1 + \frac{0.03}{12}\right)^{24} = 3185.27$$

A los dos años, Jaime tendrá en su cuenta un valor de 3185.27 dólares.

1.2 Notación de sumatoria

¿En la vida real, para qué nos es útil la sumatoria de una sucesión?

En el ámbito financiero, cuando se obtiene un préstamo, la entidad bancaria genera un documento denominado Tabla de Amortización, el cuál constituye una sucesión donde se puede apreciar el capital pagado, los intereses, el saldo, entro otros datos. Si se requiere saber cuánto interés se pagará por dicho préstamo, entonces podemos recurrir a la sumatoria de una secuencia, ya que esto implica sumar los elementos de la sucesión.

En el ámbito de la matemática se emplea la letra griega Sigma $\sum$ para denotar la sumatoria de una sucesión. De esta forma, si se tiene la sucesión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$$

La sumatoria se representa como:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

Donde, ***k*** representa al índice o variable de la suma y los valores 1 y ***n*** corresponden al valor inicial y final de la serie.

Ejemplo 1: Determine la sumaria de la siguiente serie.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2$$

Solución: para determinar el resultado, se sustituye cada uno de los valores desde el inicial hasta el final.

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 3 + 9 + 16 + 25 = 54$$

Ejemplo 2: Escribir la siguiente suma en notación sigma.

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$$

Solución: Se podría definir la suma como:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = \sum_{k=3}^{7} k^3$$

Como puede observar, el 3 es el valor inicial y el 7 el final.

N-ésima suma parcial

Otra forma de representar una suma es mediante la expresión: S_n, y tomando el ejemplo de sucesión $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ tendríamos.

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4
\end{aligned}$$

Generalizando, tendríamos $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

Finalmente, podemos definir la sumatoria parcial como:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= S_1 + a_2 \\
S_3 &= S_2 + a_3 \\
S_4 &= S_3 + a_4 \\
S_n &= S_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Determine los primeros 5 términos y el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales relacionada con la sucesión de los números impares.

Solución:

La sucesión de los números impares sería: 1, 3, 5, 7, 9, …

La suma de los cinco términos de la sucesión de sumas parciales sería:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = 1 \\
S_2 &= S_1 + a_2 = 1 + 3 = 4 \\
S_3 &= S_2 + a_3 = 4 + 5 = 9 \\
S_4 &= S_3 + a_4 = 9 + 7 = 16 \\
S_5 &= S_4 + a_5 = 16 + 9 = 25
\end{aligned}$$

La n-ésima suma se puede escribir de las siguientes formas:

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (m-4) + (m-2) + m \\
S_n &= m + (m-2) + (m-4) + \cdots + 5 + 3 + 1 \\
2S_n &= (m+1) + (n+1) + (m+1) + \cdots + (m+1) + (m+1) + (m+1)
\end{aligned}$$

Como se observa, la expresión (***m+1***) aparece n veces entonces:

$2S_n = n(m+1)$ o su equivalente $S_n = \frac{n(m+1)}{2}$

Hay que tener presente que el valor de m corresponde al n-ésimo impar y n al número de elementos impares a sumar.

1.3 Teoremas sobre sumas

Para consolidar el aprendizaje, vamos a realizar una serie de ejemplos donde se aplicarán los teoremas de las sumas.

Ejemplo 1: Aplique el teorema sobre la suma de una constante y calcule:

$$\sum_{k=3}^{9} 5$$

Solución: la suma no necesariamente debe empezar desde el primer término, como se ve en el ejemplo propuesto. Se pide sumar desde el elemento 3 al 9, de esta forma se aplica el teorema:

$$\sum_{k=m}^{n} c = (n - m + 1)c$$

$$\sum_{k=3}^{9} 5 = (9 - 3 + 1)5 = 7 \times 5 = 35$$

Ejemplo 2: Aplique las propiedades sobre la suma y, calcule:

$$\sum_{k=1}^{5} (7 - 2k)$$

Solución: Para este ejercicio se deben aplicar las propiedades de la suma.

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Aplicando las propiedades, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1}^{5}(7-2k) &= \sum_{1}^{5}7-\sum_{1}^{5}(2k)\\
&= \sum_{1}^{5}7-2\left(\sum_{1}^{5}k\right)\\
&= 5\cdot 7-2(1+2+3+4+5)\\
&= 5\cdot 7-2(15)\\
&= 35-30\\
&= 5
\end{aligned}
$$

Recursos didácticos

Para profundizar el análisis en la definición de sucesión, se recomienda leer el libro Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica, la sección 9.1 en donde se explica con ejemplos ilustrativos las sucesiones infinitas y la notación de sumatoria, conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.1 Ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta primera semana estudiamos sobre las sucesiones infinitas y la notación de sumatoria. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, es conveniente experimentarlos con la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo las siguientes actividades:

1. Determine los 6 primeros elementos de la sucesión $a_n = \frac{12}{n}$, luego con la herramienta GeoGebra: visualizar y manipular una sucesión, confirme su resultado.

2. Dada la sucesión $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \frac{11}{36}, \ldots$, determine el n-ésimo término, luego con la herramienta GeoGebra: Visualizar y manipular una sucesión confirme su resultado.
3. Encuentre la sumatoria:

$$\sum_{4}^{12} 10$$

4. Encuentre la sumatoria:

$$\sum_{j=1}^{5} (3j+4)$$

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar y experimentar la representación y el proceso para encontrar los términos de una sucesión, el n-ésimo término y la sumatoria de una sucesión, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada, por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 2

Unidad 1. Sucesiones y series

1.4 Sucesiones aritméticas

Vamos a iniciar el estudio de un tipo de sucesión que son las aritméticas, las cuales las podemos asociar con las funciones lineales, de forma general se dice que una sucesión aritmética es una secuencia de números en la que cada término se genera a partir del anterior sumado un valor constante, nótese que al decir sumado un valor constante este puede ser positivo o negativo, en caso de ser positivo se tratará de una sucesión ascendente y si es negativo será descendente.

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ será aritmética si se escribe como:

$\{a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d, \ldots\}$, donde ***d*** es la constante que se suma.

De la expresión anterior se puede generalizar la fórmula de la sucesión aritmética como:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

También puede definirse de forma recursiva como:

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad \text{para} \quad n \geq 2$$

En los conjuntos numéricos podemos encontrar diversos ejemplos de sucesiones aritméticas como:

- Los números pares.

  {2, 4, 6, 8, 10, 12, …}.

- Los números impares.

  {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}.

- El listado de los múltiplos de un número. Por ejemplo, los múltiplos de 5.

  {5, 10, 15, 20, 25, ...}.

A continuación, con la finalidad de reforzar los conocimientos de la presente temática, le invito a participar del siguiente quiz:

Clasificación de sucesiones correspondientes a sucesiones aritméticas o no

Como pudo haber notado, todos los ejemplos son sucesiones, ya que siguen un patrón para su generación, pero solo ciertas sucesiones se pueden clasificar como aritméticas, puesto que los elementos se van generando a partir del anterior más un valor constante.

1.5 Elementos de una sucesión aritmética

En el apartado anterior se definió la forma general de una sucesión aritmética como:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Donde:

a_n Es el elemento n-ésimo.

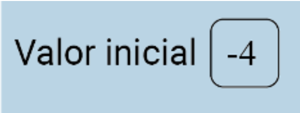
a_1 Es el primer elemento.

n es la cantidad de elementos de la sucesión.

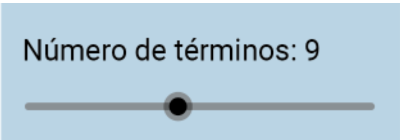
d es la distancia o diferencia común, es aquel valor constante que se suma a cada elemento para generar el siguiente.

En la aplicación GeoGebra, siga las instrucciones dadas y experimente con las sucesiones aritméticas.

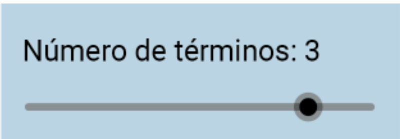
i. Ingrese el valor inicial en la caja de texto; este será el primer elemento de la serie.



ii. Determine el número de términos a generar n, para ello deslice a la derecha para agregar elementos y a la izquierda para disminuir elementos.



iii. Determine la diferencia común d, recuerde que este valor puede ser real, positivo o negativo.



iv. *Finalmente,* podrá visualizar la sucesión aritmética.

[Elementos de una sucesion aritmetica]

En esta experimentación, se observa con claridad cómo al modificar los elementos de la sucesión aritmética se van generando los elementos, los cuales se representan en notación de conjunto, así como la representación gráfica.

A partir de la forma general de una sucesión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Se pueden despejar fórmulas para: el primer elemento, la diferencia común o distancia, y el número de elementos.

Primer elemento:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n - (n-1)d = a_1$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

Diferencia común o distancia:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n - a_1 = (n-1)d$$
$$\frac{a_n - a_1}{n-1} = d$$
$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$

Cuando se conocen dos elementos consecutivos de una sucesión aritmética, otra forma de obtener la diferencia común es restar el elemento actual al anterior.

$$d = a_n - a_{n-1}$$

Cantidad de elementos.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n - a_1 = (n-1)d$$
$$\frac{a_n - a_1}{d} = n - 1$$
$$\frac{a_n - a_1}{d} + 1 = n$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

A continuación, vamos a aplicar las fórmulas antes descritas en la resolución de problemas.

Ejemplo 1: Determine la cantidad de múltiplos de 3 existentes entre 56 y 269.

En este caso, el primer paso es determinar el primer y último de 3 entre 56 y 268.

El primer múltiplo sería: 55, ya que 56 no es divisible para 3, pero el 57 si lo es, como puede apreciar aquí, se toma valores mayores a 57.

Otra forma de determinar este valor es dividir 55 entre 3. Del valor resultante se toma el entero siguiente, en este caso nos da 18.33, entonces se toma el entero siguiente que sería 19, y, este se multiplica por 3 y tenemos el primer múltiplo de 3, que es 57.

El último múltiplo sería: 267, ya que el 269 no es divisible para 3, pero el 267 lo es. Como puede ver aquí, se toman valores menores al 267.

Otra forma de determinar este valor es dividir 269 entre 3. Del valor resultante se toma solo la parte entera, en este caso nos da 89.66, entonces se toma la parte entera que sería 89 y este se multiplica por 3 y tenemos el último múltiplo de 3, que es 267.

De esta forma se tendría la siguiente información:

$\textbf{Elemento } \boldsymbol{n}\textbf{-ésimo: } \boldsymbol{a_n = 267}$
$\textbf{Primer elemento: } \boldsymbol{a_1 = 57}$
$\textbf{Diferencia común: } \boldsymbol{d = 3,}\ \textbf{dado que hace referencia a los múltiplos de 3}$
$\textbf{Número de elementos: } \boldsymbol{n =} \textbf{ es lo que se va a calcular.}$

Entonces se aplica la fórmula $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ y se reemplazan los valores.

$$n = \frac{267 - 57}{3} + 1$$
$$n = \frac{210}{3} + 1$$
$$n = 70 + 1$$

Por lo que la cantidad de múltiplos de 3 entre 56 y 269 es de 71.

Ejemplo 2: Determine el primer elemento, si se conoce que el elemento séptimo de la serie es: 54 y el elemento octavo de la serie es: 47.

La información que se conoce son los elementos 7 y 8, como son dos consecutivos, también conocemos la diferencia común que resultará de restar 47 y 54, dando un valor de 47-54= -7.

Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} a_8 &= 47 \\ a_7 &= 54 \\ d &= a_n - a_{n-1} = a_8 - a_7 = 47 - 54 = -7 \end{aligned}$$

n* = *8, también se podría tomar ***n* = *7***.

$$a_1 = \text{es el valor que se pide.}$$

Entonces se aplica la fórmula para el primer elemento:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$

Se reemplazan los valores:

$$\begin{aligned} a_1 &= 47 - (8-1)(-7) \\ a_1 &= 47 - (7)(-7) \\ a_1 &= 47 - (-49) \\ a_1 &= 47 + 49 = 96 \end{aligned}$$

De esta forma, el elemento inicial de la sucesión sería: 96.

Ejemplo 3: Determine el elemento 35 de la serie, si se conoce que los dos primeros elementos de la sucesión son: 12 y 19.

En este ejercicio, la única información que se tiene son los dos primeros elementos, entonces a partir de ello podemos determinar su diferencia común.

$$d = a_n - a_{n-1} = 19 - 12 = 7$$

Ahora se debe emplear la fórmula para encontrar el elemento n-ésimo:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{35} = a_1 + (35-1)7$$
$$a_{35} = 12 + (34)7 = 12 + 238 = 250$$

De esta forma, el elemento 35 de la sucesión aritmética es 250.

1.6 Aplicaciones de las sucesiones aritméticas

La investigación indica que para que un contenido sea significativo para el alumno, se le debe proporcionar la relación o utilidad que se tendría en un ambiente real. De esta forma se mostrará al estudiante donde él puede aplicar lo aprendido, lo cual le motivará a seguir aprendiendo.

De esta manera, en este apartado vamos a mostrar algunos ejemplos de aplicación en situaciones cotidianas que se pueden modelar con sucesiones aritméticas.

Ejemplo 1 - Ahorros: Es común en los distintos bancos o cooperativas que se ofertan planes de ahorro programado, en los cuales se va depositando un valor fijo mensual. Esta situación se puede modelar mediante una sucesión aritmética, ya que el valor que se ahorra mensualmente sería la diferencia común y el primer elemento sería el mismo valor a ahorrar.

De esta forma, si la Familia Yépez Argudo adquiere un plan de ahorro de $60 dólares mensuales, ¿cuánto dinero tendrá dentro de 5 años sin considerar los intereses que le otorga el banco?

Entonces, aquí lo que se debe encontrar es el elemento 60, ya que como el año tiene 12 meses y al ser 5 años, el total de meses resulta del producto 12*5=60.

En otras palabras, nos pide:

$$a_{60} = a_1 + (60-1)d$$

El valor inicial y la diferencia común serían 60, porque es el valor que se pretende ahorrar cada mes; de esta forma se tendría:

$$a_{60} = 60 + (60 - 1)(60)$$
$$a_{60} = 60 + (59)(60) = 3600$$

De esta forma, dentro de 5 años contará con $3600 dólares, más los intereses que le otorgue el banco.

Ejemplo 2 – Teatro Romano: Como ha podido ver, las sucesiones aritméticas tienen aplicaciones en distintos ámbitos de la vida cotidiana. En el presente caso, vamos a ver cómo se las aplica en la disposición de los asientos de un teatro.

En la figura siguiente usted puede encontrar un esquema de un Teatro Romano.

Figura 1

Estructura de un Teatro Romano

Nota: Adaptado de Imagen de Teatro romano, Siglo 2 y Punto de referencia. De uso gratuito [Ilustración], por dimitrisvetsikas1969, Pixabay. CC BY 4.0.

Aquí se puede observar la disposición que tienen los asientos que a medida que avanzan en las filas estas tienen más capacidad para las personas.

Vamos a suponer que en el esquema mostrado anteriormente hay 30 filas de asientos, la primera fila consta de 64 asientos, y cada fila siguiente tiene 3 asientos más que la anterior.

Tomando la información dada conteste las siguientes preguntas:

a. Determine la forma general de la sucesión aritmética que modela esta situación.

Para estructurar la forma general se debe identificar los siguientes elementos:

Primer elemento y diferencia común, en este caso serían: 64 y 3 respectivamente.

Con estos valores los reemplazamos en la forma estándar de una sucesión aritmética:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Donde representa la n-ésima fila de asientos y su forma general será:

$$a_n = 64 + (n-1)(3)$$

b. Determine la cantidad de asientos que tendría la fila 16.

Para este literal se hará uso de la fórmula anterior: $a_n = 64 + (n-1)(3)$

En este caso la fila 16 será el elemento n-ésimo

$$\begin{aligned} a_{16} &= 64 + (16-1)(3) \\ a_{16} &= 64 + (15)(3) \\ a_{16} &= 64 + 45 = 109 \end{aligned}$$

De esta forma en la fila 16 se tendrá espacio para 109 asistentes.

Recursos didácticos

Para profundizar el análisis en la definición de sucesión aritmética, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.2 referente a las sucesiones aritméticas en donde se explica con ejemplos ilustrativos las sucesiones aritméticas, sus elementos y aplicaciones, conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.2 Ejercicios.

Se recomienda realizar una revisión sistemática del siguiente artículo sobre repaso de sucesiones aritméticas disponible en la plataforma Khan Academy. Este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre las partes de una sucesión aritmética.

Con la realización de este repaso se puede comprender de forma clara como se realiza la generalización de una sucesión aritmética, ya que en los ejercicios propuestos le permite ir experimentando y poniendo en práctica los distintos elementos que conforman las sucesiones, con lo cual se afianza el conocimiento.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta segunda semana estudiamos sobre las sucesiones aritméticas. Para reforzar estos aprendizajes teóricos es conveniente experimentarlos con la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo las siguientes actividades:

1. Determine el octavo término de la sucesión aritmética, donde el primer elemento es 13 y la diferencia común es: -3, luego con la herramienta GeoGebra: Visualizar y manipular una sucesión aritmética confirma su resultado.

2. Dada la sucesión $\frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, 2 \ldots$, determine el n-ésimo término, luego con la herramienta GeoGebra: Visualizar y manipular una sucesión aritmética confirme su resultado.
3. Desarrolle el siguiente problema de aplicación:

    a. El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera fila tiene 50 espacios, la segunda 47. Y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿de cuántos sitios dispone el estacionamiento en la séptima fila?

4. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Ejercicios sobre sucesiones aritméticas.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las sucesiones aritméticas, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada, por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 3

Unidad 1. Sucesiones y series

1.7 Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Antes de introducir a este apartado, vamos a observar un fragmento de la película “Midiendo el Mundo” (Contar lo Infinito, 2016)

En este fragmento de video se observa la historia de Karl Friedrich Gauss, que a su temprana edad resolvió un problema aplicando una sumatoria de sucesiones aritméticas. En el video pudo observar que el maestro pedía la suma de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …, 100, el joven Gauss se levantó y le presentó a su maestro su respuesta de 5050, y la explicación que dio en ese entonces fue que al sumar el primer con el último elemento es igual a sumar el segundo con el penúltimo y así con cada una de las sumas, hasta llegar a sumar el último elemento con el primero siempre daba el mismo valor, entonces esa suma la debía multiplicar por la cantidad de elementos divida entre 2, y con ello obtendría su respuesta.

Como puede apreciar, se está narrando la fórmula aplicada para la sumatoria de una sucesión aritmética.

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

Donde:

S_n Será la sumatoria.

a_1 Será el primer elemento.

a_n será el último elemento.

n el total de elementos de la sucesión.

Asimismo, en función de esta fórmula, se podrían despejar otras fórmulas en función de S_n.

Para determinar el total de términos que se deben sumar al obtener S_n

$$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n}$$

Para determinar el primer elemento de una suma S_n

$$a_1 = \frac{2S_n}{n} - a_n$$

Para determinar el último elemento de una suma S_n

$$a_n = \frac{2S_n}{n} - a_1$$

Según Demana, Waits, Foley, y Kenedy. (2007) se podría usar una fórmula alternativa en la cual, en vez de usar, se reemplaza por la fórmula del n-ésimo elemento, $a_n = a_1 + (n-1)d$ de esta manera, una nueva versión para la sumatoria sería.

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_1 + (n-1)d)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

Es momento de aplicar lo aprendido en el desarrollo de algunos ejercicios, esto le permitirá adquirir mayor destreza en el desarrollo de ejercicios sobre sumatorias de sucesiones aritméticas.

Ejercicio 1. Sumar términos de una sucesión aritmética. Calcule el número de términos de la sucesión aritmética con primer elemento 5 y diferencia común 2, que se debe agregar para obtener un valor de 2700.

Para el desarrollo de este ejercicio se debe emplear la fórmula:

$$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_n}$$

Adicionalmente, debemos reemplazar por la fórmula del n-ésimo elemento, $a_n = a_1 + (n-1)d$ dado que no contamos con su valor.

$$n = \frac{2S_n}{a_1 + a_1 + (n-1)d} = \frac{2S_n}{2a_1 + (n-1)d}$$

Luego se despeja ***n***, realizando operaciones algebraicas.

$$n(2a_1 + (n-1)d) = 2S_n$$
$$n2a_1 + n(n-1)d = 2S_n$$
$$n2a_1 + dn^2 - dn = 2S_n$$

Se ordenan los términos.

$$dn^2 + n2a_1 - dn = 2S_n$$

Se agrupan los dos términos de n.

$$dn^2 + n(2a_1 - d) = 2S_n$$

Como la variable a despejar es n, entonces se adopta la forma de una ecuación cuadrática $an^2 + bn + c = 0$.

$$dn^2 + n(2a_1 - d) - 2S_n = 0$$

Y para resolver una cuadrática se puede aplicar la fórmula cuadrática:

$$\frac{-(2a_1 - d) \pm \sqrt{(2a_1 - d)^2 - 4d(-2S_n)}}{2d}$$

Donde:

$$a = d = 2$$
$$b = 2a_1 - d = 2(5) - 2 = 8$$
$$c = -2S_n = -2(2700) = -5400$$

Entonces, al reemplazar los valores en la fórmula general, $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ tenemos:

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(-5400)}}{2(2)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+43200}}{4}$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{43264}}{4} = \frac{-8 \pm 208}{4}$$

Ahora se debe calcular para determinar los dos valores:

$$n_1 = \frac{-8+208}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

Y

$$n_2 = \frac{-8-208}{4} = \frac{-216}{4} = -54$$

En este caso adoptamos el valor dado que la sucesión empieza en 5 y su diferencia común es positiva.

Entonces, la cantidad de términos que se deben sumar son 50, para obtener una sumatoria de 2700.

Se sugiere que pueda determinar el elemento 50 de la sucesión y verifique si realmente al sumar los 50 elementos se obtiene la suma de 2700.

Con el propósito de reforzar el aprendizaje, le invito a participar del siguiente juego de completar:

Práctica sobre suma de sucesiones aritméticas

Con el desarrollo de estos ejercicios, pudo aplicar las fórmulas de sumatoria, las cuales le permiten adquirir destrezas en el desarrollo de este tipo de ejercicios, lo cual le ayudará más adelante en la resolución de problemas reales de nuestro entorno.

1.8 Aplicaciones de las sumas parciales de sucesiones aritméticas

De acuerdo con Ruiz, Flores, Ramírez, y Fernández. (2019). En la formación de profesores de matemáticas se debe contribuir a que los futuros profesores analicen lo que implica enseñar matemáticas con sentido (matemático), de esta forma puedan transmitir a sus futuros alumnos una enseñanza de las matemáticas con sentido. Es por ello que, para acercar hacia la realidad el tema de las sumatorias de las sucesiones se presentan una serie de aplicaciones orientadas a situaciones cotidianas que se viven en el día a día.

Nota: Adaptado de Galvanised steel ducting tubing for air extraction on the floor of a factory warehouse [Ilustración], por rigsbyphoto, s.f. shutterstock. CC BY 4.0.

Ejemplo 1 – Almacenaje de Tubos de drenaje: en un municipio del Ecuador se están almacenando tubos de drenaje en una pila con 25 tubos en la primera capa, 24 en la segunda, y así sucesivamente. Si hay 12 capas, ¿cuántos tubos de drenaje contiene la pila?

El primer paso es identificar la información que se tiene en el problema, donde se puede encontrar el primer elemento que sería 25, luego la diferencia común se puede deducir que es –1, ya que se indica que en las capas superiores va disminuyendo de uno en uno, cuando se indica que hay 12 capas, este valor se asocia a ***n***.

De esta forma se calcula la cantidad de tubos que habrá en la capa 12.

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)d = 25 + (11)(-1) = 25 - 11 = 14$$

Por lo que en la capa 12 se contará con 14 tubos, bien ahora se tendrá que sumar los tubos de cada una de las capas, para ello se usará la fórmula de la sumatoria:

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12(25+14)}{2} = \frac{12(29)}{2} = 6(29) = 174$$

Entonces se puede indicar que en total el Municipio cuenta con 174 tubos de drenaje en la pila.

Se sugiere que emplee la fórmula alternativa de la sumatoria $S_n = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$ cuando no se conoce el n-ésimo elemento y verifique que se llegue al mismo resultado.

Nota. *Adaptado de Normativa de garajes comunitarios [Ilustración], por Realíder, 2023, Realíder. CC BY 4.0.*

Ejemplo 2 – Estacionamiento: Un Centro comercial del Ecuador tiene espacios para 20 autos en la primera fila de estacionamiento, 22 en la segunda, 24 en la tercera, y así sucesivamente. Si en el Centro comercial hay 21 filas, calcule el número de autos que se pueden estacionar.

El primer paso es identificar los datos que se presentan en el problema:

El primer elemento sería: 20.

La diferencia común resultará de: 22 – 20 = 2.

El número de filas es 21, por lo que ***n*** = 21.

La cantidad de autos en la última fila es desconocida, por lo que se podrá usar la fórmula alternativa cuando no se conoce el último elemento de una serie.

$$S_n = \frac{n(2a_1+(12-1)d)}{2}$$

Entonces, al reemplazar los valores, se tiene:

$$S_{21} = \frac{21(2(20)+(21-1)(2))}{2} = \frac{21(40+(20)(2))}{2} = \frac{21(40+40)}{2} = \frac{21(80)}{2} = 21(40) = 840$$

Esto indica que el estacionamiento dispone de 840 espacios de estacionamiento.

Nota. *Tomado de Imagen de Teatro romano, Siglo 2 y Punto de referencia [Ilustración], por dimitrisvetsikas1969, 2019, [Pixabay](). CC BY 4.0.*

Ejemplo 3 – Teatro: Un arquitecto diseña un teatro con 15 asientos en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera, y así sucesivamente. Si el teatro ha de tener capacidad para 870 asientos, ¿cuántas filas debe usar el arquitecto en su diseño?

En el apartado 1.7 en el ejercicio 1 se determinó una fórmula para calcular la cantidad de elementos, la que permitió obtener una sumatoria de una sucesión aritmética. Para este ejercicio se hará uso de esa fórmula.

$$dn^2 + n(2a_1 - d) - 2S_n = 0$$

Y para resolverse puede aplicarse la fórmula cuadrática:

$$\frac{-(2a_1-d)\pm\sqrt{(2a_1-d)^2-4d(-2S_n)}}{2d}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
&a = d = 21 - 18 = 3 \\
&b = 2a_1 - d = 2(15) - 3 = 30 - 3 = 27 \\
&c = -2S_n = -2(870) = -1740
\end{aligned}$$

Entonces, al reemplazar los valores en la fórmula general $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{-27\pm\sqrt{(27)^2-4(3)(-1740)}}{2(3)} = \frac{-27\pm\sqrt{729+20880}}{6} \\
&= \frac{-27\pm\sqrt{21609}}{6} = \frac{-8\pm147}{6}
\end{aligned}$$

Ahora solo se debe calcular con el valor 147, debido a que la diferencia común es positiva.

$$n = \frac{-27+147}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

De esta forma, el arquitecto deberá construir 20 filas en el teatro para cubrir la capacidad del mismo.

Recursos didácticos

Para profundizar en la definición de sumatoria de una sucesión aritmética, se recomienda leer el libro de Swokowski (2018), el tema sobre las sumatorias de las sucesiones aritméticas disponible en la sección 9.2, donde se explica con ejemplos ilustrativos, aplicaciones y conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del apartado y que aparece como 9.2 Ejercicios.

Se recomienda realizar una revisión sistemática del siguiente artículo sobre problemas verbales de series aritméticas disponible en la plataforma Khan Academy, en este artículo encontrará una explicación paso a paso de cómo resolver problemas de la vida cotidiana empleando series aritméticas.

Con la revisión de este artículo se puede comprender de forma clara como se realiza la modelación empleando sumatorias de sucesiones aritméticas, ya que se presentan diversas situaciones donde se muestra paso a paso el desarrollo y solución, lo cual le permite ir experimentando y poniendo en práctica las sumatorias de las sucesiones aritméticas, con lo cual se afianza el conocimiento.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta tercera semana estudiamos sobre las sumatorias de las sucesiones aritméticas. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, es conveniente experimentarlos, por ello le invito a desarrollar y resolver las actividades que se presentan a continuación:

1. Determine la sumatoria de la siguiente sucesión aritmética:

    a. $1 + 5 + 9 + \ldots + 401$.

2. Desarrolle el siguiente problema de aplicación:

    El estacionamiento de un centro comercial tiene la siguiente disposición de lugares: la primera tiene 50 espacios, la segunda 47, y cada fila subsiguiente tiene 3 menos que la anterior. Si la última fila tiene 23 lugares, ¿Cuál es la capacidad total de que dispone el estacionamiento?

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Problemas verbales sobre sumatorias de sucesiones aritméticas.

   Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

   Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las sumatorias de las sucesiones aritméticas, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

4. Hemos concluido la semana tres, es momento de autoevaluar nuestros conocimientos logrados hasta aquí. La presente autoevaluación le permitirá medir su aprendizaje, por lo cual es importante que la desarrolle. Asimismo, esta actividad le permitirá prepararse para la evaluación bimestral, para lo cual en cada pregunta seleccione el literal correcto.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada, por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Autoevaluación 1

1. Complete. La sucesión aritmética es un conjunto de números reales tales que cada término es igual al anterior ... un número ... llamado ...

   a. Sumado, constante, diferencia.
   b. Multiplicado, constante, diferencia.
   c. Sumado, variable, constante.
   d. Sumado, constante, variable.

2. Encuentre el enésimo término, el décimo cuarto y décimo octavo término de la siguiente sucesión aritmética: 3, 7, 11, 15, …

   a. $3 + 4(n - 1), 55, 71.$

   b. $4n - 3, 53, 74.$

   c. $3n, 42, 54.$

   d. No es posible obtener ya que no se cuenta con el valor de la diferencia común.

3. Complete la siguiente sucesión: -5, -3, …, …, 3, …, 7, 9, …

   a. -1, 1, 5.
   b. 0, -2, 6.
   c. -2, 0, 5.
   d. 0, 1, 5.

4. Complete: Cuando se conocen los elementos de la sucesión aritmética, la diferencia "***d***" se halla ... a ... término de ella, el …

   a. Restando, el primer, último.
   b. Restando, el último, primer.
   c. Sumando, cualquier, siguiente.
   d. Restando, cualquier, anterior.

5. Determine el sexto elemento de la siguiente sucesión: x + 3, x, x - 3, x - 6

   a. x – 7.
   b. x + 5.
   c. x – 12.
   d. No se puede determinar el sexto elemento porque no se trata de una sucesión.

6. Calcule el número de enteros entre 20 y 400 que sean divisibles entre 5.

   a. 80.
   b. 81.
   c. 77.
   d. 76.

7. Calcule el número de pares entre 1 y 1000.

   a. 499.5.
   b. 500.
   c. 501.
   d. 500.5.

8. Determine la suma de los primeros 100 impares positivos.

   a. 10000.
   b. 2500.
   c. 1000.
   d. No se cuenta con la información suficiente para poder determinar la suma.

9. Determine la cantidad de enteros múltiplos de 4 que hay entre 1 y 100.

   a. 24.
   b. 25.
   c. 20.
   d. 21.

10. Determine la suma de los primeros 50 pares negativos.

   a. 5100.
   b. -5100.
   c. -2500.
   d. No se cuenta con la información suficiente para determinar la suma.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 4

Unidad 1. Sucesiones y series

1.9 Sucesiones geométricas

En el ámbito de Economía y Finanzas se evidencian diversos problemas y aplicaciones que pueden resolverse con la aplicación de las sucesiones geométricas, tal como se indica en el trabajo desarrollado por (Acinas, Paz, y Veralli, 2017).

Las sucesiones geométricas se las puede asociar con las funciones exponenciales, de forma general se dice que una sucesión geométrica es una secuencia de números en la que cada término se genera a partir del anterior multiplicándolo por un valor constante, la única condición para este valor es que debe ser distinto de 0, si es negativo los signos de los términos de la sucesión se intercalarán.

Definición

Según Demana, Waits, Foley, & Kenedy. (2007), una sucesión será geométrica si se escribe como:

$\{a, a \cdot r, a \cdot r^2, \ldots, a \cdot r^{n-1}, \ldots\}$, donde ***r*** es la razón y debe ser distinta de 0.

De la expresión anterior se puede generalizar la fórmula de la sucesión geométrica como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

También puede definirse de forma recursiva como:

$$a_n = a_{n-1} \cdot r, \quad \textbf{para} \quad n \geq 2$$

Podemos encontrar diversos ejemplos de sucesiones geométricas como:

- {2, 4, 8, 16, 32, …}.
- {1, 3, 9, 27, 81, …}.
- {5, 10, 20, 40, 80, …}.

Estimado estudiante, para reforzar los conocimientos sobre la presente temática, le invito a participar del quiz que se presenta a continuación:

Clasificación de conjuntos numéricos que corresponden a sucesiones geométricas o no

Como pudo haber notado, todos los ejemplos son sucesiones, ya que siguen un patrón para su generación, pero solo ciertas sucesiones se pueden clasificar como geométricas porque los elementos se van generando a partir del anterior multiplicándose por un valor constante denominado razón.

1.10 Elementos de las sucesiones geométricas

En el apartado anterior se definió la forma general de una sucesión geométrica como:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Donde:

a_n Es el elemento n-ésimo.

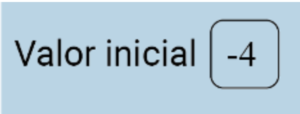
a_1 Es el primer elemento.

n es la cantidad de elementos de la sucesión.

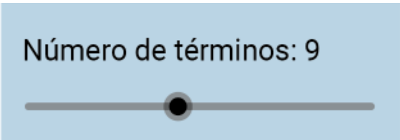
r es la razón, es aquel valor constante que se multiplica cada elemento para generar el siguiente.

En la aplicación GeoGebra, siga las instrucciones dadas y experimente con las sucesiones geométricas.

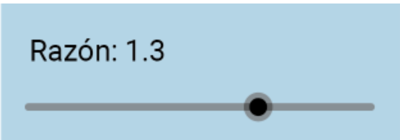
i. Ingrese el valor inicial a_1 en la caja de texto; este será el primer elemento de la serie.



ii. Determine el número de términos a generar n, para ello deslice a la derecha para agregar elementos y a la izquierda para disminuir elementos.



iii. Determine la diferencia en razón r, recuerde que este valor puede ser real, positivo o negativo.



iv. Finalmente, podrá visualizar la sucesión geométrica.

Elementos de una sucesion geométrica

En esta experimentación, se observa con claridad cómo al modificar los elementos de la sucesión geométrica se van generando los términos, los cuales se presentan mediante la notación de conjunto, así como la representación gráfica.

A partir de la forma general de una sucesión aritmética:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Se pueden despejar fórmulas para: el primer elemento, la razón, y el número de elementos.

Primer elemento:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$\frac{a_n}{r^{n-1}} = a_1$$
$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

Razón:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$
$$\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[n-1]{r^{n-1}}$$
$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Cuando se conocen dos elementos consecutivos de una sucesión geométrica, otra forma de obtener la diferencia común es dividir el elemento actual del anterior.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Cantidad de elementos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$\frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}$$

Dado que la variable ***n*** está en el exponente, se deben aplicar logaritmos en ambos lados de la ecuación y luego aplicar algunas propiedades de los logaritmos, con lo cual se despejará la variable ***n***.

$$\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = \log\left(r^{n-1}\right)$$

$$\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right) = (n-1)\log(r)$$

$$\frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(r)} = n-1$$

$$\frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(r)} + 1 = n$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(r)} + 1$$

A continuación, vamos a aplicar las fórmulas antes descritas en la resolución de problemas.

Ejemplo 1: Se da el n-ésimo término de una sucesión geométrica $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

a. Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

$$a_1 = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{1-1} = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{0} = 4$$

$$a_2 = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{2-1} = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{1} = -2$$

$$a_3 = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{3-1} = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{2} = 4 \cdot \tfrac{1}{4} = 1$$

$$a_4 = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{4-1} = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{3} = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{8}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$a_5 = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{5-1} = 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{4} = 4 \cdot \tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{4}$$

b. ¿Cuál es la razón común **r**?

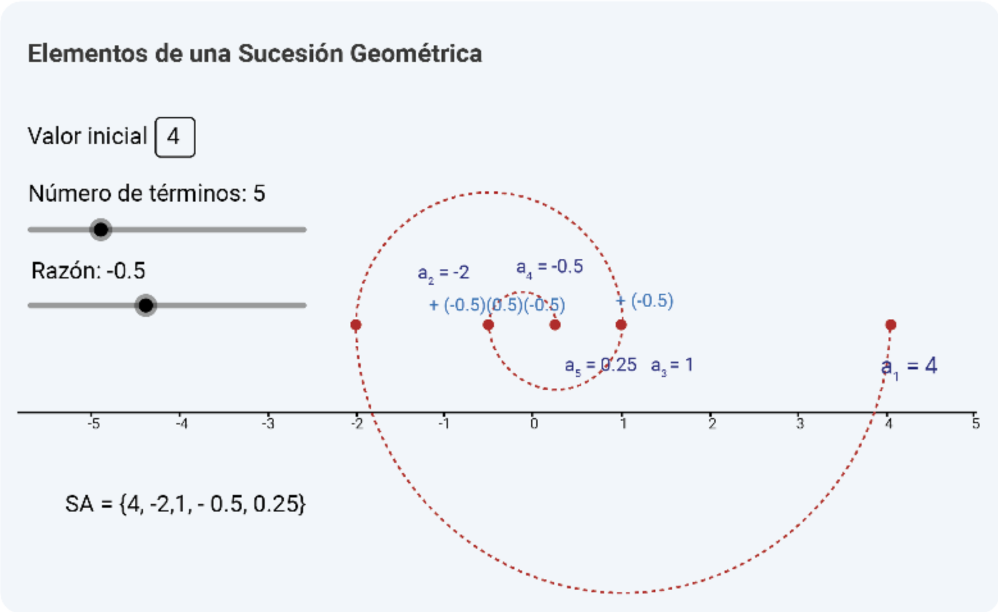
La razón r es $-\frac{1}{2}$

c. Trace la gráfica de los términos que encontró en el inciso a).

Para este apartado vamos a hacer uso de la actividad de gráfica de una sucesión geométrica, en la cual se ingresaría el valor inicial 4, la razón -1/2 y 5 como cantidad de términos.

Figura 2

Elementos de una sucesión geométrica



Nota. Viñamagua, G., 2025.

Aquí se puede apreciar cómo se alternan los signos en los elementos de la sucesión y gráficamente se puede ver cómo se van intercalando los términos entre positivos y negativos.

Ejemplo 2: El primer y quinto elemento de una sucesión geométrica son 1.5 y 24, respectivamente. Encuentre la forma general de sucesión.

La información que se conoce son los elementos 1 y 5, de esta forma se aplica la fórmula antes encontrada para ***r***.

$$\boldsymbol{r} = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Entonces se reemplazan los valores y se tiene:

$$\boldsymbol{r} = \sqrt[5-1]{\frac{a_5}{a_1}} = \sqrt[4]{\frac{24}{1.5}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

De esta forma la razón ***r*** es 2, así la forma general de la sucesión es:

$$a_n = 1.5 \cdot 2^{n-1}$$

Puede comprobar esta respuesta ingresando los datos de la sucesión en la actividad gráfica de una sucesión geométrica.

Ejemplo 3: Determine el primer y sexto elemento de la sucesión geométrica si se conoce que su tercer elemento es 5 y su octavo elemento es −160.

Para este ejercicio se va a hacer uso de la forma recursiva de la sucesión, de esta forma se tendría:

$$a_3 = a_1 \cdot (r)^{3-1} = a_1 \cdot (r)^2 = 5$$
$$a_8 = a_1 \cdot (r)^{8-1} = a_1 \cdot \left(r\right)^7 = -160\Big)$$

A continuación, despejamos a_1 de:

$$a_1 \cdot r^2 = 5$$
$$a_1 = \frac{5}{r^2}$$

Este valor se lo reemplaza en la forma recursiva del quinto elemento:

$$a_1 \cdot r^7 = -160$$
$$\frac{5}{r^2} \cdot r^7 = -160$$
$$r^5 = \frac{-160}{5}$$
$$r = \sqrt[5]{-32} = -2$$

Con el valor de r=−2 se procede a obtener el primer elemento, para ello aplicamos la forma recursiva del tercer elemento:

$$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1}$$
$$5 = a_1 \cdot (-2)^2$$
$$a_1 = \frac{5}{(-2)^2} = \frac{5}{4}$$

El primer elemento de la sucesión es: $\frac{5}{4}$ con lo cual la forma general de la sucesión geométrica es:

$$a_n = \frac{5}{4} \cdot (-2)^{n-1}$$

Ahora con la información obtenida hasta ahora es posible determinar el sexto elemento:

$$a_6 = \frac{5}{4} \cdot (-2)^{6-1}$$
$$a_6 = \frac{5}{4} \cdot (-2)^{5}$$
$$a_6 = \frac{5}{4} \cdot (-32) = 5 \cdot (-8) = -40$$

De esta forma el sexto elemento es: -40

1.11 Aplicaciones de una sucesión geométrica

De acuerdo con Miranda Nuñez (2020) todo conocimiento que se va a enseñar debe contextualizarse y proporcionar la relación o utilidad que se tendría en un ambiente real, de esta forma se mostrará al estudiante donde él puede aplicar lo aprendido, lo cual le motivará a seguir aprendiendo.

Es por ello que en este apartado vamos a mostrar algunos ejemplos de aplicación en situaciones cotidianas que se pueden modelar con sucesiones geométricas.

Ejemplo 1 – Póliza de inversión: Otra de las aplicaciones que tienen las sucesiones geométricas son en el ámbito financiero; a continuación, se presenta un caso de Inversiones.

Se tiene el caso de Jorge que heredó de sus padres una considerable cantidad de dinero y está dispuesto a invertirla en una póliza en un banco.

Él cuenta con \$120 000 dólares para invertir, en el banco le indicaron las condiciones de inversión las cuales son:

Plazo: 5 años

Tasa de interés: 5,5% que se compone anualmente, es decir que en el segundo año el interés que le pagan es sobre el capital sumado el interés del primer año, y así sucesivamente para los próximos años.

No puede realizar ningún retiro antes de los 5 años.

Bajo este contexto desarrolle los siguientes literales:

a. Describa cual sería la expresión de la sucesión que modela esta situación.

Para este literal se identifica los datos que se dan en el problema, y se puede identificar que se tiene el valor 120 000, mismo que sería el valor inicial, también se tiene el valor 5.5% que representa a la tasa de interés que pagará el banco al año, y en los siguientes sobre lo acumulado del año anterior, es decir:

Al segundo año se tendría: 120000 * 1.055 = 126600

Al tercer año se tendría: 126600 * 1.055 = 133563

Y así sucesivamente para los años siguientes, de esta forma se puede estructurar la sucesión general:

$$a_n = 120000 \cdot (1.055)^{n-1}$$

Donde ***r*** viene a ser el % de interés y 120000 el valor inicial de inversión.

b. Determine el valor total a recibir luego de los 5 años.

Para este parte se hará uso de la fórmula encontrada en el literal anterior en la cual se reemplazar ***n*** por 5 que representarán los años de inversión.

$$\begin{aligned} a_n &= 120000 \cdot (1.055)^{n-1} \\ a_5 &= 120000 \cdot (1.055)^{5-1} \\ a_5 &= 120000 \cdot (1.055)^4 \approx 148658.96 \end{aligned}$$

De esta forma luego de 5 años Jorge recibirá $148 658.96 dólares por su inversión.

Ejemplo 2 – Bacterias: En el ámbito biológico también se puede ver el uso de las sucesiones, en lo que respecta al crecimiento bacteriano.

Cierto cultivo contiene inicialmente 10 000 bacterias y cada hora que pasa aumentan en un 20% más que lo que había anteriormente.

a. Describa cuál sería la expresión de la sucesión que modela esta situación.

En este caso se puede distinguir el valor de 10 000 que vendría a ser el primer término, así mismo se tiene el 20% que sería el incremento recursivo que se haría por cada hora que pase, de esta forma se ve la expresión de la sucesión geométrica, y para este caso sería:

$$a_n = 10000 \cdot (1.2)^{n-1}$$

Nótese que se ha colocado 1.2, esto significa que al multiplicarse por este valor se calcula el total de bacterias más el porcentaje de incremento:

$$10000 + 10000 \times 0.2 = 10000(1 + 0.2) = 10000(1.2)$$

b. ¿Cuántas bacterias hay en el cultivo al término de 8 horas?

Se hace uso de la fórmula encontrada en el literal a y tenemos:

$$a_8 = 10000 \cdot (1.2)^{8-1}$$
$$a_8 = 10000 \cdot (1.2)^7 = 35832$$

De esta forma se tendrían 35832 bacterias luego de 8 horas, en este caso es importante notar que el resultado que se toma es el entero siguiente.

Recursos didácticos

Para profundizar el análisis en la definición de sucesión aritmética, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.3 referente a las sucesiones geométricas, en donde se explica con ejemplos ilustrativos las sucesiones geométricas, sus elementos y aplicaciones, conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.3 Ejercicios.

Se recomienda realizar una revisión sistemática del siguiente artículo sobre repaso de sucesiones geométricas disponible en la plataforma Khan Academy. Este artículo le permitirá recordar y afianzar sus conocimientos sobre las partes de una sucesión geométrica.

Con la realización de este repaso se puede comprender de forma clara como se realiza la generalización de una sucesión geométrica, ya que en los ejercicios sugeridos le permite ir experimentando y poniendo en práctica los distintos elementos que conforman las sucesiones, con lo cual se afianza el conocimiento.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta cuarta semana estudiamos sobre las sucesiones geométricas. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, es conveniente experimentarlos con la aplicación GeoGebra, por ello, le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Determine el sexto término de la sucesión geométrica, donde el primer elemento es 3 y la razón es 1.5, luego con la herramienta GeoGebra: Visualizar y manipular una sucesión geométrica confirme su resultado.

2. Dada la sucesión $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, 12, \ldots$, determine el n-ésimo término, luego con la herramienta GeoGebra: "Visualizar y manipular una sucesión geométrica", puede confirmar su resultado.
3. Desarrolle el siguiente problema de aplicación:
4. Alexandra envió una cadena a 100 de sus amigos y les pidió que a su vez la reenviaran a sus amigos. Cada día desde entonces, el número de personas que recibieron la cadena era el 20 % más que el día anterior.

   Determine una expresión para modelar el número de personas que recibieron la cadena en el n-ésimo día desde que Alexandra la envió.

5. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Ejercicios sobre sucesiones geométricas.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las sucesiones geométricas, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada, por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Semana 5

Unidad 1. Sucesiones y series

1.12 Sumas parciales de sucesiones geométricas

En este apartado se va a iniciar explicando la fórmula de sumatoria parcial de sucesiones geométricas, ya que es conveniente conocer cómo se originan las fórmulas y con ello se hace más comprensible su uso.

De acuerdo con (Stewart, Redlin, & Watson, 2017), la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica se representa como:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1}$$

Para determinar una fórmula para S_n se multiplica S_n por ***r*** y se resta de S_n

$$\begin{array}{rl} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= \quad\;\; ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \end{array}$$

Al despejar S_n se tiene:

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{o} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, \quad \text{para } r \neq 1$$

Donde ***a*** representa al primer elemento de la sucesión geométrica.

Primer elemento: De esta forma, también en función de esta fórmula se puede determinar una para el primer elemento.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \text{o} \quad S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$\frac{S_n(1-r)}{1-r^n} = a \quad \text{o} \quad \frac{S_n(r-1)}{r^n-1} = a$$

$$a = \frac{S_n(1-r)}{1-r^n} \quad \text{o} \quad a = \frac{S_n(r-1)}{r^n-1}$$

Esta fórmula será de utilidad en ejercicios donde se tiene la sumatoria, la razón y se requiere calcular el primer elemento.

Número de elementos de la suma: también es posible determinar una fórmula para determinar la cantidad de elementos.

$$S_n = \frac{S_n(r-1)}{r^n-1}$$

$$\frac{S_n(r-1)}{a} = r^n - 1$$

$$r^n = \frac{S_n(r-1)}{a} + 1$$

$$\log r^n = \log\left(\frac{S_n(r-1)}{a} + 1\right)$$

$$n \cdot \log r = \log\left(\frac{S_n(r-1)}{a} + 1\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{S_n(r-1)}{a} + 1\right)}{\log r}$$

De esta forma se obtiene una fórmula para determinar la cantidad de elementos que se han sumado. Algo importante a considerar en el uso de esta fórmula es que se debe conocer el valor de la sumatoria, el primer elemento y la razón.

1.13 Aplicaciones de las sumas parciales de sucesiones geométricas

En este apartado vamos a contextualizar la aplicación de la fórmula de la sumatoria descrita anteriormente. Esto permitirá lograr una mejor comprensión y, sobre todo, ver cómo se aplica en la vida cotidiana.

Nota. Adaptado de *Warsaw, Masovia / Poland - 2018/06/07: Arena Ursynow, the modern sports and concert hall in Ursynow - residential district in southern Warsaw [Ilustración]*, por ArtMediaFactory, s.f., shutterstock. CC BY 4.0.

Ejercicio 1 – Centro comercial: Un nuevo centro comercial registra 600 compradores en total en su primer día. Cada día después de eso, el número de compradores fue un 10 % más que el número anterior.

¿Cuál es el número total de compradores que fueron al centro comercial los primeros 10 días?

El primer paso es determinar los valores dados en el problema:

Primer elemento 600, la razón en este caso es el 10%, y al mencionar más que el número anterior, entonces esto implica que se calcula el valor del porcentaje más el valor anterior, así la razón ***r*** será 1.1.

De esta forma se tienen ya identificados los valores para aplicar la fórmula de la sumatoria para los diez primeros días.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{600(1-(1.1)^{10})}{1-(1.1)}$$

Es conveniente hacer uso de una calculadora para determinar este valor. Con la ayuda de Wolfram Alpha obtenemos este cálculo y su resultado es: 9562.45, pero como se pide contabilizar personas, se debe tomar del resultado el entero siguiente, de esta forma el resultado sería: 9563.

Finalmente, es importante responder a la interrogante planteada. El centro comercial en los primeros 10 días contará con un total de 9563 personas que lo han visitado.

Nota. *Tomado de Camino de santiago compostela, pilgrims walking on wild natural way, galicia spain [Ilustración], por P_galasso2289, shutterstock. CC BY 4.0.*

Ejercicio 2 – Camino de Santiago: Una de las peregrinaciones más reconocidas a nivel mundial es la del Camino de Santiago. Rosie fue a realizar el Camino de Santiago. El primer día caminó 20 kilómetros, cada día después caminó el 60 % de lo que caminó el día anterior.

¿Cuál es la distancia total que Rosie recorrió al final del día 5 del Camino de Santiago?

El primer paso es determinar los valores dados en el problema.

Primer elemento 20, la razón en este caso es el 60 %, pero como menciona de lo que caminó el día anterior, entonces esto implica que cada vez solo se calcula el valor del porcentaje del valor anterior, de esta forma ***r*** será 0.6.

De esta forma se tienen ya identificados los valores para aplicar la fórmula de la sumatoria para los 5 días del Camino de Santiago.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{20(1-(0.1)^5)}{1-(0.1)}$$

Es conveniente hacer uso de una calculadora para determinar este valor. Con la ayuda de [Wolfram Alpha] obtenemos este cálculo y su resultado es: 46.11. En este caso, el valor representa km recorridos, por lo que se adopta el valor con los decimales. Ya los Km se pueden fraccionar.

Finalmente, la respuesta a la interrogante planteada sería: Al final del quinto día del Camino de Santiago ha recorrido un total de 46.11 kilómetros.

Nota: Tomado de Niños en el columpio. Hermanas de niñas columpiándose en un columpio en el patio. verano divertido [Ilustración], por alexeyzhilkin, s.f., freepik. CC BY 4.0.

Ejercicio 3 - Columpio: Una persona se columpia en una estructura en la que en cada oscilación hace un arco cuya longitud es el 75 % de la longitud anterior. La longitud total de los arcos de las primeras 4 oscilaciones es 175 m.

¿De cuántos metros fue el arco en la primera oscilación del columpio?

El primer paso es determinar los valores dados en el problema:

La sumatoria total de las 4 oscilaciones es de 175, la razón en este caso es el 75 %, pero como menciona en la longitud anterior, entonces esto implica que cada vez solo oscila el porcentaje del valor anterior, de esta forma ***r*** será 0.75.

De esta forma se tienen ya identificados los valores para aplicar la fórmula de la sumatoria para los 5 días del Camino de Santiago.

$$a = \frac{S_4(1-r)}{1-r^4}$$

$$a = \frac{175(1-0.75)}{1-(0.75)^4}$$

Es conveniente hacer uso de una calculadora para determinar este valor. Con la ayuda de Wolfram Alpha obtenemos este cálculo y su resultado es: 64.

Finalmente, la respuesta a la interrogante planteada sería: La primera oscilación en el columpio fue de 64 metros.

Recursos didácticos

Para profundizar el análisis en la definición de sucesión aritmética, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, el tema referente a las sumatorias de sucesiones geométricas que lo encuentra en la sección 9.3, en donde se explica con ejemplos ilustrativos las sumas de sucesiones geométricas y aplicaciones, conceptos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.3 Ejercicios.

Es de gran ayuda que, estudie el video Problemas verbales de series geométricas, en donde se explica, de forma muy didáctica y concreta, la forma intuitiva de hallar el modelo matemático empleando series geométricas. Además, aquí se explican detalladamente los pasos para desarrollar el problema.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta quinta semana estudiamos sobre las sumatorias parciales de sucesiones geométricas. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, es conveniente experimentarlos, por ello le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Determine la sumatoria de los primeros 10 elementos de la sucesión $\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, 3, 6, 12, \ldots$
2. Desarrolle el siguiente problema de aplicación: Plan de ahorros.

   Una mujer con mucha paciencia desea juntar mil millones de dólares. Decidió seguir un esquema simple: el primer día ahorra 1 centavo, 2 centavos el segundo día, 4 centavos el tercer día, y así sucesivamente, duplicando el número de centavos cada día.

   a. ¿Cuánto dinero tendrá al término de 30 días?
   b. ¿Cuántos días le tomará a esta mujer realizar su deseo?

   Debe usar esta fórmula para el literal b)

$$n = \frac{\log \log \left(\frac{S_n (r-1)}{a} + 1 \right)}{\log \log r}$$

3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: Ejercicios sobre sumatorias parciales de sucesiones geométricas.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las sucesiones geométricas, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada, por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 6

Unidad 1. Sucesiones y series

1.14 Inducción matemática

La importancia que tiene la Inducción Matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje radica en que se conduce al estudiante a realizar generalizaciones a partir de casos particulares (Gunderson, 2011).

Le invito a revisar el siguiente video sobre el efecto dominó disponible en (llamaflame, 2018) se puede visualizar de manera informal a la inducción matemática, ya que en el video se puede apreciar la ocurrencia de una reacción en cadena, en la cual por medio de una acción inicial cada una de las piezas siguientes van cayendo, de esta forma se puede ver los dos pasos de la inducción.

- **Paso 1:** La primera ficha cae.
- **Paso 2:** Cuando se cae cualquier ficha, entonces la siguiente también cae. De esta forma se concluye que todas las fichas caen.

1.15 Introducción

El descubrimiento y la demostración son dos aspectos importantes en el ámbito matemático, dado que antes de probar algo se debe descubrir. En este apartado revisaremos la relación entre estos dos componentes que son claves en la matemática.

Empezaremos por un experimento simple que consiste en sumar números impares.

$1 = 1$
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

¿Qué puede notar en el resultado de las distintas sumas de los números impares?

Podemos ver que al sumar 1 impar, el resultado es 1.

Al sumar 2 impares, el resultado es 2^2.

Al sumar 3 impares, el resultado es 3^2.

Al sumar 4 impares, el resultado es 4^2.

Al sumar 5 impares, el resultado es 5^2.

Lo cual nos lleva a pensar que la suma de los ***n*** impares resultará en n^2.

En la sección de sucesiones aritméticas se indicó la generalización de los impares como: 2n – 1, de esta forma podemos decir:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Pero, aun así, no podemos generalizar, dado que existen infinitos impares, y si pretendemos ir probando cada número, no será posible.

Aquí se puede apreciar el valor que tienen las demostraciones, ya que con ellas podemos demostrar un argumento. En este caso, podríamos demostrar que la suma de los ***n*** impares es igual al cuadrado de ***n***.

En el siguiente apartado vamos a introducir al respecto del principio de inducción matemática y junto con ello vamos a realizar la demostración de que la suma de los ***n*** impares es igual a ***n*** al cuadrado.

1.16 Definición

Vamos a referirnos al principio de inducción matemática dado en Stewart, Redlin, y Watson (2017).

Para todo número natural ***n***, sea ***P(n)*** un enunciado que depende de ***n***. Suponga que se satisfacen las dos condiciones siguientes.

1. ***P(1)*** es verdadero.
2. Si ***P(k)*** es verdadero para todo número natural ***k***, entonces ***P(k + 1)*** es verdadero.

Entonces ***P(n)*** es verdadero para todos los números naturales n (p. 875).

Se deben seguir dos pasos para aplicar el principio antes descrito.

- **Paso 1:** Se debe probar que ***P***(1) es verdadero.
- **Paso 2:** Se debe suponer que ***P(k)*** es verdadero, para lo cual se emplea esta suposición para demostrar que ***P(k+1)*** es verdadera.

A continuación, se desarrolla la demostración de que la suma de los ***n*** impares es igual a ***n*** al cuadrado.

P(n) sería el enunciado:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Paso 1: Vamos a probar que ***P***(1) es verdadero, y se observa que, en efecto, $1 = 1^2$ por lo que se comprueba su veracidad.

Paso 2: Se supone que ***P(k)*** es verdadero; de esta forma, nuestra hipótesis de inducción es:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$$

Como se observa, se ha reemplazado ***k*** por ***n***, y con ello se debe demostrar que ***P(k+1)*** es verdadero.

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Observe que se ha agregado $(2(k+1)-1)$ y $(k+1)^2$ por el hecho de reemplazar (***k+1***).

De esta forma iniciamos el proceso, para lo cual se agrupan los primeros ***k*** términos.

$$[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Note que la agrupación realizada $[1+3+5+\cdots+(2k-1)]$ es equivalente a k^2 por lo que reemplaza por dicho valor.

$$k^2+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Se desarrolla la parte izquierda y se deberá llegar a la expresión equivalente de la parte derecha.

$$k^2+2k+2=(k+1)^2$$

Al factorizar, tenemos:

$$(k+1)(k+1)=(k+1)^2$$

Con lo que se ha llegado a una igualdad que es verdadera, con lo que queda demostrado que ***P(n)*** es cierta para todos los números naturales.

Ejemplo 1: Demuestre que 3 es un factor de n^3-n+3

Para cada entero positivo ***n***, lo denotamos con ***P(n).***

3 es un factor de $n^3 - n + 3$

Ahora se realizan los dos pasos.

Paso 1: Se prueba que P(1) es verdadero.

$$1^3 - 1 + 3 = 1 - 1 + 3 = 3$$

En este caso da como resultado 3, y como 3 es un factor de 3. Se verifica.

Paso 2: Se supone que P(k) es verdadera; de esta forma, la hipótesis de inducción es:

3 es un factor de $k^3 - k + 3$

Algebraicamente, se podría usar esta expresión equivalente:

$$k^3 - k + 3 = 3p$$

Lo cual indica 3, el factor de cualquier número entero ***p***. De esta forma se demuestra que ***P***(***k+1***) es verdadera.

$$(k+1)^3 - (k+1) + 3 = 3p$$

Se ha reemplazado ***k +1*** por ***k*** y se ha desarrollado:

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 + 3 = 3p$$

Se agrupa:

$$[k^3 - k + 3] + 3k^2 + 3k = 3p$$

Observe que $[k^3 - k + 3]$ es 3***p*** por la hipótesis de inducción.

$$3p + 3k^2 + 3k = 3p$$
$$3(p + k^2 + k) = 3p$$

De esta forma queda demostrado que el 3 sí es un factor de $n^3 - n + 3$.

Recursos didácticos

Para profundizar el análisis en la definición de inducción matemática, se recomienda leer el libro Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica, la sección 9.4 referente a Inducción Matemática en donde se explica con ejemplos ilustrativos la demostración de expresiones matemáticas que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.4 Ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta sexta semana estudiamos sobre la inducción matemática. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, es conveniente experimentarlos, por ello le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Demuestre que $2+4+6+...+2n=n(n+1)$.
2. Demuestre que n^2-n+41 es impar, para todos los números naturales n.

   Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

   Con el desarrollo de las dos actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con la inducción matemática, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

3. Hemos concluido la semana seis, es momento de evaluar nuestros conocimientos logrados hasta aquí, es por ello que la siguiente autoevaluación le permitirá medir su aprendizaje, por lo cual es importante que la desarrolle, así mismo esta actividad le permitirá prepararse para la evaluación bimestral.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como el chat de tutorías y consultas, bandeja de entrada, por los cuales puede manifestar sus dudas e inquietudes con su tutor.

Autoevaluación 2

1. Las sucesiones geométricas están conformadas por una secuencia de elementos en la que cada uno se obtiene del anterior ... por una ... denominada …

   a. Multiplicándolo, constante, razón, “r”.
   b. Multiplicándolo, variable, razón, “r”.
   c. Dividiéndolo, constante, resto, “r”.
   d. Dividiéndolo, variable, resto, “r”.

2. Determine la razón común de la siguiente serie geométrica: 3, 12, 48, 192, …

   a. 9.
   b. 4.
   c. 6.
   d. No es posible determinar ya que no se cuenta con la información suficiente.

3. Encuentre el n-ésimo término, el sexto término y el séptimo término de la sucesión geométrica: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \ldots$

   a. $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n}, \frac{1}{729}, \frac{1}{2187}.$

   b. $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}.$

c. $\frac{1}{3} \cdot 2^{n+1}, \frac{3}{32}, \frac{3}{64}.$

d. $\frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}, \frac{32}{3}, \frac{64}{3}.$

4. Seleccione la razón común de la siguiente serie geométrica:

$$8, -4, 2, -1, \tfrac{1}{2}, \ldots, 8\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

a. 8.
b. 1/2.
c. -1/2.
d. 4.

5. De las siguientes series, seleccione las dos que correspondan a sucesiones geométricas:

a. -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, …
b. 3, 6, -12, -24, -48, …
c. 3, 6, 8, 24, 72, …
d. 3/4, 3/2, 3, 6, 12, …

6. El quinto término de una sucesión geométrica es 12, y la razón es 2. Calcule el primer término.

a. 3/4.
b. 1.
c. 2.
d. 1/2.

7. Seleccione la razón de la siguiente serie geométrica: -3, 3, -3, 3, -3, 3

a. 0.
b. 1.
c. -1.

d. No es posible obtener la razón porque no se trata de una sucesión geométrica.

8. Determine la suma de los 9 primeros términos de la siguiente serie geométrica: -2, 2, -2, 2, …

   a. 2.
   b. -2.
   c. 0.
   d. No es posible sumar ya que no se trata de una sucesión geométrica.

9. La inducción matemática es un método para demostrar que un enunciado P(n) es verdadero para todos los números …

   a. Naturales.
   b. Enteros.
   c. Reales.
   d. Racionales.

10. Para demostrar que $n^2 + n$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n, el primer paso para aplicar la inducción matemática es:

   a. Verificar que P(n) es verdadera.
   b. Verificar que P(1) es verdadera.
   c. Verificar que P(k+1) es verdadera.
   d. Comprobar que P(k+1) es verdadera.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 7

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en estas dos últimas semanas de estudio se invita para que revise los contenidos del primer bimestre y con ello logre buenos resultados en la evaluación presencial, para lo cual se sugiere las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Realice una revisión de su diario de notas.
2. Desarrolle las actividades recomendadas.
3. Interactúe con los simuladores de las sucesiones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

Actividades finales del bimestre

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la unidad 1 estudiada en el primer bimestre. Sucesiones, Sucesiones aritméticas, Sucesiones geométricas, Sumatorias e Inducción Matemática.

Además de las actividades de la semana 7, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre, y tener una buena preparación para la prueba bimestral, se sugiere las siguientes actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Participe en la videoconferencia donde se realizará un repaso para el examen bimestral.

   Revise cada uno de los conceptos y sus aplicaciones de los contenidos estudiados en la unidad 1 del primer bimestre.

   Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las temáticas estudiadas, desarrollando las actividades recomendadas al final de cada semana.

2. **Examen bimestral**

   Revise el horario de exámenes para que tenga claro el día y la hora de la evaluación.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje, hemos concluido este primer bimestre!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2:

Aplica los conceptos básicos de los métodos de conteo para la resolución de problemas de aplicación.

Mediante este resultado de aprendizaje usted adquirirá la habilidad de aplicar los conceptos básicos de los métodos de conteo para la resolución de problemas de aplicación, fortaleciendo su capacidad para abordar y resolver situaciones prácticas y cotidianas que requieren un análisis cuantitativo y estructurado.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

Unidad 2. Teorema del binomio

Todos conocemos la importancia de los experimentos tanto en las ciencias humanísticas como en las ciencias técnicas. Todo experimento es valioso porque nos permite suponer que, si realizamos un determinado experimento cumpliendo condiciones idénticas lógicas, se llegará a conclusiones iguales a las que de entrada se espera. En este escenario se puede controlar el valor de las variables que afectan el resultado de un experimento. No obstante, en ciertos experimentos nos es posible conocer los resultados de ciertas variables, de manera que los resultados esperados, aun cuando la mayoría de las condiciones son iguales, dichos experimentos se los conoce como aleatorios. Las aplicaciones del teorema de Newton, permutaciones, combinaciones y probabilidad, se aplican en la misma ciencia de la matemática como en la vida cotidiana, como por ejemplo en proyectos donde le permiten la inclusión de diferentes formas al momento de combinar o permutar, así mismo, nos ayuda a tomar decisiones en el pronóstico del tiempo, diagnóstico médico, deportes, juegos de mesa, estudio de la posibilidad de tomar un seguro de vida, efectuar una inversión, entre otros

2.1 Introducción

Un aspecto notable en el aprendizaje del álgebra, corresponde al cálculo algebraico, que surge como una generalización del trabajo aritmético. En este sentido, se plantea la enseñanza del Teorema del Binomio y sus aplicaciones. Generalmente, los libros presentan las potencias de binomios en dos partes, siendo la primera de ellas la realización del producto aplicando la ley distributiva, conmutando y reduciendo términos semejantes para finalmente conseguir el resultado. La segunda etapa consiste en reconocer el resultado obtenido como un producto notable del álgebra de polinomios, enunciando una propiedad, en el caso del cuadrado y el cubo del binomio. La manera de presentar el tema, descrito anteriormente, no incluye su generalización. En efecto, no se plantea cómo determinar la enésima potencia del binomio, $(a + b)^n$, resultado que es conocido como Teorema del Binomio o Binomio de Newton.

El teorema del binomio fue atribuido a Newton, sin embargo, por primera vez lo descubrió, Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn al-Karaji alrededor del año 1000.

El descubrimiento de la serie binómica es un resultado importante de por sí; sin embargo, a partir de este descubrimiento, Newton tuvo la intuición de que se podía operar con series infinitas del mismo modo que con expresiones polinómicas finitas. Newton no publicó nunca el teorema del binomio. Lo hizo Wallis por primera vez en 1685 en su Álgebra, atribuyendo a Newton este descubrimiento. El teorema binómico para $n=2$ se encuentra en los Elementos de Euclides (300 a. C.), así mismo, el término «coeficiente binomial» fue introducido por Michel Stifer en el siglo XVI. En esta sección usaremos inducción matemática para establecer esta fórmula general.

2.2 Definición

Un binomio es una suma ***a + b***, donde, ***a*** y ***b*** representan números. Si ***n*** es un entero positivo, entonces una fórmula general para expandir (***a + b***)^{n} (esto es, para expresarlo como suma) está dada por el teorema del binomio. Los siguientes casos especiales se pueden obtener por multiplicación:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
\end{aligned}
$$

El binomio de Newton es la fórmula que nos permite hallar las potencias de un binomio.

2.3 Definición del binomio de Newton

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0}a^n \pm \binom{n}{1}a^{n-1}b \pm \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \pm \cdots \pm \binom{n}{n}b^n$$

Se observa que; el número de términos es , y los coeficientes son números combinatorios que corresponden a la fila enésima del triángulo de Tartaglia (también conocido como triángulo de Pascal). A continuación, le invito a revisar la siguiente infografía donde podrá visualizar de mejor manera el triángulo de Pascal.

[Triángulo de Pascal]

En el desarrollo del binomio, los exponentes de van disminuyendo, de uno en uno, de a cero; y los exponentes de van aumentando, de uno en uno, de cero a , de tal manera que la suma de los exponentes de y de en cada término es igual a . En el caso de que uno de los términos del binomio sea negativo, se alternan los signos positivos y negativos.

2.4 Propiedades

1. Hay ***n + 1*** términos, siendo $\boldsymbol{a^n}$ el primero y $\boldsymbol{b^n}$ el último.
2. Al proseguir desde cualquier término al siguiente, la potencia de ***a*** disminuye en 1 y la potencia de ***b*** aumenta en 1. Para cada término, la suma de los exponentes de ***a*** y ***b*** es n.
3. Cada término tiene la forma $(c)a^{n-k}b^k$, donde, el coeficiente ***c*** es un entero y k = 0, 1, 2, ..., n.
4. La siguiente fórmula es verdadera para cada uno de los primeros ***n*** términos de la expansión:

$$\frac{\text{Coeficiente del término}}{\text{Número del término}} = \text{Coeficiente del término siguiente}$$

La tabla siguiente ilustra la propiedad 4 para la expansión de $(a+b)^5$.

Tabla 1

Propiedad 4 para la expansión

Término	Número de término	Coeficiente de término	Exponente de *a*	Coeficiente del término siguiente
a^5	1	1	5	$\frac{1\times5}{1}=5$
$5a^4b$	2	5	4	$\frac{5\times4}{2}=10$
$10a^3b^2$	3	10	3	$\frac{10\times3}{3}=10$
$10a^2b^3$	4	10	2	$\frac{10\times2}{4}=5$
$5ab^4$	5	5	1	$\frac{5\times1}{5}=1$

Nota. Cuenca, L., 2024.

A continuación, consideremos $(a + b)^n$ para un entero positivo arbitrario n. El primer término es a^n, que tiene coeficiente 1. Si suponemos que la propiedad 4 es verdadera, obtenemos los coeficientes sucesivos que aparecen en la tabla siguiente.

Tabla 2
Coeficientes sucesivos

Término	Número de término	Coeficiente de término	Exponente de *a*	Coeficiente del término siguiente
a^n	1	1	n	$\frac{1\times n}{1}=n$
$\frac{n}{1}a^{n-1}b$	2	$\frac{n}{1}$	$n-1$	$\frac{n(n-1)}{2\times 1}$
$\frac{n(n-1)}{2\times 1}a^{n-2}b^2$	3	$\frac{n(n-1)}{2\times 1}$	$n-2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}a^{n-3}b^3$	4	$\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}$	$n-3$	$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\times 3\times 2\times 1}=5$

Nota. Cuenca, L., 2024.

El patrón que aparece en la quinta columna lleva a la siguiente fórmula para el coeficiente del término general.

Coeficiente del (k + 1) término de la expansión de (a + b)^n.

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdots(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}; \quad k=1,2,3,\ldots,n$$

El n-ésimo coeficiente (***k + 1***) se puede escribir en una forma compacta usando notación factorial. Si ***n*** es cualquier entero no negativo, entonces el símbolo ***n!*** (***n*** factorial) se define como sigue.

$$(1)\ n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1; \quad \text{si}\, n > 0$$
$$(2)\ 0! = 1$$

Por lo tanto, si ***n*** > 0, entonces ***n!*** es el producto de los primeros ***n*** enteros positivos. La definición 0! = 1 se usa para que ciertas fórmulas que contengan factoriales sean verdaderas para todos los enteros no negativos.

Ejemplo 1: Desarrollar $(a+b)^6$

Solución:

Se sabe que todos los términos son positivos. Luego tomando los números combinatorios de séptima fila:

$$(a+b)^6 = C_0^6 a^6 + C_1^6 a^5 b + C_2^6 a^4 b^2 + C_3^6 a^3 b^3 + C_4^6 a^2 b^4 + C_5^6 a b^5 + C_6^6 b^6$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Ejemplo 2: Expandir $(a-b)^7$

Solución:

Considerando que los signos de los términos son alternadamente positivos y negativos, existen números combinatorios de la octava fila:

$$(a-b)^7 = C_0^7 a^7 - C_1^7 a^6 b + C_2^7 a^5 b^2 - C_3^7 a^4 b^3 + C_4^7 a^3 b^4 - C_5^7 a^2 b^5 + C_6^7 a b^6 - C_7^7 b^7$$
$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6 b + 21a^5 b^2 - 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 - 21a^2 b^5 + 7ab^6 - b^7$$

Ejemplo 3: Desarrollar $(x^2 + 2x)^4$

Solución:

Tomemos como modelo el desarrollo de $(a+b)^4$, y sustituyamos ***a*** por $x^2 \ y \ b \ por \ 2x$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(x^2+2x)^4 = (x^2)^4 + 4(x^2)^3 2x + 6(x^2)^2(2x)^2 + 4x^2(2x)^3 + (2x)^4$$
$$= x^8 + 8x^7 + 24x^6 + 32x^5 + 16x^4$$

2.5 Recursos interactivos

Título: Ingresar el binomio en términos de X y Y.

A continuación, se explica la demostración gráfica de la fórmula del binomio de Newton utilizando el simulador matemático GeoGebra.

Instrucciones:

- Ingresar a la aplicación GeoGebra online.
- Registrarse.
- Apoyarse en los tutoriales de GeoGebra.
- Crear el recurso utilizando los comandos del menú de la app.
- Probar el resultado.
- Grabar y publicar el recurso.

GeoGebra.

Recursos didácticos

Para profundizar la comprensión del teorema del binomio, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.5 en donde se explica los conceptos básicos, demostración de teoremas y ejemplos ilustrativos del teorema del binomio, conocimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.5 Ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta primera semana del segundo bimestre estudiamos sobre el teorema del binomio. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, le invito a realizar las siguientes actividades:

1. Experimentar en la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo el binomio al cubo, $(2x-3)^3$
2. Experimentar en la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo un generador del binomio de Newton; $(4x^4-5x^3)^4$

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las dos actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con el teorema del binomio, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como: tutorías en vivo, chat, correo, consultas, bandeja de entrada en la plataforma CANVAS, por los cuales puede consultar dudas e inquietudes a su tutor.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 10

Unidad 2. Teorema del binomio

Cómo se usa el teorema del binomio

Para usar el teorema del binomio para expandir un binomio de la forma ${\{(a+b)\}^n}$, necesitamos recordar lo siguiente:

- Los exponentes del primer término (***a***) decrecen de ***n*** a cero.
- Los exponentes del segundo término (***b***) incrementan de cero a ***n***.
- La suma de los exponentes de ***a*** y ***b*** es igual a ***n***.
- Los coeficientes del primero y del último término son ambos iguales a 1.

2.6 Ejercicios resueltos

Usemos el teorema del binomio para expandir varias expresiones y entender el teorema.

Ejercicio 1. Expande el binomio $(x+3)^2$

Solución:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Ejercicio 2. Expande el binomio $(2x-3)^2$

Solución:

$$(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

Ejercicio 3. Expande el binomio $(-2x^2+3)^2$

Solución:

$$(-2x^2)^2 + 2 \cdot (-2x^2) \cdot 3 + 3^2 = 4x^4 - 12x^2 + 9$$

Ejercicio 4. Expande el binomio $(x+3)^3$

Solución:

$$x^3 + 3x^2 \cdot 3 + 3x \cdot 3^2 + 3^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 9$$

Ejercicio 5. Expande el binomio $(x+y)^5$; usando el triángulo de Pascal.

Solución:

Podemos observar que la fila 5 del triángulo de Pascal es 1, 5, 10, 10, 5, 1. Usando estos números para la expansión binomial, tenemos:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Ejercicio 6. Expande el binomio $(x+y)^4$ usando combinatorias.

Solución:

Esto puede ser expandido de la siguiente manera:

$$\binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Recordamos que tanto $\binom{4}{0}$ como $\binom{4}{4}$ son equivalentes a 1, ya que solo hay una forma de escoger 0 y 4 elementos de un conjunto de 4 elementos. Entonces, tenemos:

$$x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + y^4$$

Ahora evaluamos cada una de las combinatorias restantes:

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4!}{1!3!} = 4$$
$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$
$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

Al sustituir estos números en la expresión, tenemos:

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Ejercicio 7. Expande el binomio $(x+2y)^5$; usando combinatorias.

Solución:

$$\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4\cdot 2y+\binom{5}{2}x^3\cdot(2y)^2+\binom{5}{3}x^2\cdot(2y)^3+\binom{5}{4}x\cdot(2y)^4+\binom{5}{5}(2y)^5$$
$$=x^5+10x^4y+40x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+32y^5$$

Ejercicio 8. Expande el binomio $(2-3y)^4$; usando combinatorias.

Solución:

$$\binom{4}{0}2^4-\binom{4}{1}2^3\cdot 3y+\binom{4}{2}2^2\cdot(3y)^2-\binom{4}{3}2\cdot(3y)^3+\binom{4}{4}(3y)^4$$
$$=16-96y+216y^2-216y^3+81y^4$$

Cálculo del término que ocupa el lugar k.

Ejercicio 9. El quinto término del binomio $(x+2y)^5$; es:

Solución:

$$T_5=\binom{5}{4}x\cdot(2y)^4=80xy^4$$

Ejercicio 10. El cuarto término del binomio $(2-3y)^4$; es:

Solución:

$$T_4=(-1)^3\cdot\binom{4}{3}2\cdot(3y)^3=-216y^3$$

Ejercicio 11. El octavo término del desarrollo de $(x^2-3y^3)^{10}$; es:

Solución:

$$T_8 = (-1)^7 \cdot \binom{10}{7} (x^2)^3 \cdot (3y^3)^7 = -262440x^6y^{21}$$

Ejercicio 12. Sea el binomio $(a+b)^5$; ¿cuál sería su desarrollo?

Solución:

Por el teorema del binomio tenemos que:

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k b^{5-k} \\ &= \tbinom{5}{0}b^5 + \tbinom{5}{1}ab^4 + \tbinom{5}{2}a^2b^3 + \tbinom{5}{3}a^3b^2 + \tbinom{5}{4}a^4b + \tbinom{5}{5}a^5 \\ &= b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5\end{aligned}$$

El teorema del binomio nos resulta muy útil si tenemos una expresión en la que queremos saber cuál es el coeficiente de un término en específico sin tener que realizar el desarrollo completo.

Ejercicio 13. Sea el binomio $(x+y)^16$; ¿cuál es el coeficiente x^7y^9; de un término en específico sin tener que realizar el desarrollo completo?

Solución:

Por el teorema del binomio, tenemos que el coeficiente es:

$$\binom{16}{7} = \frac{16!}{(7!)(9!)} = 11440$$

2.7 Ejercicios propuestos

1. $(2-3y)^4$

Solución:

$$16 - 96y + 216y^2 - 216y^3 + 81y^4$$

2. $(4 - x)^7$

Solución:

$$16384 - 28672x + 21504x^2 - 8960x^3 + 2240x^4 - 336x^5 + 28x^6 - x^7$$

3. $(x - 3)^6$

Solución:

$$x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1458x + 729$$

4. $(x - 2y)^4$

Solución:

$$x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4$$

5. **Hallar el término quinto del desarrollo de:** $(x + 2y)^5$

Solución:

$$T_5 = 80xy^4$$

6. **Encontrar el término quinto de:** $\left(x - \frac{1}{x}\right)^7$

Solución:

$$T_5 = \frac{35}{x}$$

7. **Buscar el término octavo de:** $(x^2 - 3y^3)^{10}$

Solución:

$$T_8 = -262440x^6y^{21}$$

8. **Hallar el término general k de:** $\left(a^3 \frac{-2}{a}\right)^{10}$

Solución:

$$T_k = (-1)^{k-1}\left(\frac{20}{k-1}\right)(a^3)^{21-k}\left(\frac{2}{a}\right)^{k-1}$$

9. **Hallar el término independiente del desarrollo de:** $\left(\frac{a^3-2}{a}\right)^{20}$

Solución:

508.035.072

Sugerencia: El exponente de ***a*** con el término independiente es 0, por tanto, tomar solo la parte literal e igualar $a^{\{0\}}$.

2.8 Recursos interactivos

Título: Teorema del binomio.

A continuación, se deduce la fórmula que nos permite a cualquier potencia de exponente natural, ***n***, calcular un binomio, utilizando el simulador matemático GeoGebra.

Instrucciones:

- Ingresar a la aplicación GeoGebra online.
- Registrarse.
- Apoyarse en los tutoriales de GeoGebra.

- Crear el recurso utilizando los comandos del menú de la app.
- Probar el resultado.
- Grabar y publicar el recurso.

GeoGebra

Recursos didácticos

Para profundizar la comprensión del teorema del binomio, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, sobre los ejercicios de aplicación de teorema del binomio que lo encontrará en la sección 9.5 en donde se explica con ejemplos ilustrativos de la aplicación del teorema del binomio, conocimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.5 Ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta segunda semana del segundo bimestre estudiamos más a fondo el teorema del binomio. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, le invito a realizar las siguientes actividades:

1. Experimentar en la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo un generador del binomio de Newton, $(x+y)^n$
2. Experimentar en la aplicación GeoGebra, desarrollando y resolviendo el binomio $(5+3x)^{15}$.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las dos actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con el teorema del binomio, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como: tutorías en vivo, chat, correo, consultas, bandeja de entrada en la plataforma CANVAS, por los cuales puede consultar dudas e inquietudes a su tutor.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 11

Unidad 2. Teorema del binomio

2.9 Permutaciones

Permutar es colocar elementos en distintas posiciones. También, se llaman permutaciones de ***m*** elementos en ***n*** posiciones a las distintas formas en que pueden ordenarse los ***m*** elementos ocupando únicamente las ***n*** posiciones. Siempre y cuando ***m*** ≥ ***n***.

Hay que tener en cuenta lo siguiente:

Sí, importa el orden, ya que el intercambio entre dos elementos distintos genera una nueva permutación.

No se repiten los elementos, porque de repetirse o ser iguales entre sí, al intercambiarlos no se genera una nueva permutación.

Para obtener el total de maneras en que se pueden colocar ***m*** elementos en ***n*** posiciones, se utiliza la siguiente fórmula:

$$P_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Si, en dado caso, ***m*** = ***n*** para calcular el total de permutaciones se utiliza la siguiente fórmula:

$$P_n = n!$$

2.10 Teorema sobre el número de permutaciones diferentes

Sea ***S*** un conjunto de ***n*** elementos y sea 1 ≤ ***r*** ≤ ***n***. El número de permutaciones diferentes de ***r*** elementos de ***S*** es:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

La fórmula para ***P*** (***n***, ***r***) en el teorema previo contiene exactamente ***r*** factores en el lado derecho, como se muestra en la ilustración siguiente:

$$\blacksquare P(n,1) = n \quad \blacksquare P(n,3) = n(n-1)(n-2)$$
$$\blacksquare P(n,2) = n(n-1) \quad \blacksquare P(n,4) = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

Ejemplos

Analiza los siguientes ejemplos utilizando lo anteriormente aprendido.

Ejemplo 1. Evaluar ***P*** (***n***, ***r***); Encuentre P (5, 2), P(6, 4) y P(5, 5).

Solución: Usaremos la fórmula para ***P*** (***n***, ***r***) del teorema precedente. Encada caso, primero calculamos el valor de (***n*** − ***r*** + 1).

5 - 2 + 1 = 4, entonces P(5, 2) = 5 . 4 = 20.

6 - 4 + 1 = 3, entonces P(6, 4) = 6 . 5. 4. 3 = 360.

5 - 5 + 1 = 1, entonces P(5, 5) = 5 . 4. 3. 2. 1 = 120.

Ejemplo 2. Calcular las permutaciones de 6 elementos en 6 posiciones.

Solución: $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Ejemplo 3. ¿Cuántos números de 5 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5?

Solución: ***m*** = 5 y ***n*** = 5; donde se cumple estrictamente lo siguiente:

- Sí entran todos los elementos, ya que tenemos la misma cantidad de elementos que de posiciones.
- Sí importa el orden.
- No se repiten los elementos.

El enunciado nos pide que las cifras sean diferentes: $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Forma factorial ***P*** (***n***, ***r***).

Si ***n*** es un entero positivo y 1 ≤ ***r*** ≤ **n**, entonces: $p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Demostración.- Si hacemos ***r*** = ***n*** en la fórmula para ***P***(***n***, ***r***) del teorema sobre permutaciones, obtenemos el número de arreglos diferentes de todos los elementos de un conjunto formado por ***n*** elementos.

En este caso, $n - r + 1 = n - n + 1 = 1$; y entonces:

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

En consecuencia, $P(n, n)$ es el producto de los primeros ***n*** enteros positivos.

Este resultado también está dado por la forma factorial, porque si $r = n$, entonces:

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Si $1 \leq r < n,\ \text{entonces}$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)!}{(n-r)!}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Esto concuerda con la fórmula para ***P*** (***n***, ***r***) del teorema sobre permutaciones.

2.11 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse ocho personas en una fila de ocho butacas?

Solución:

- Sí entran todos los elementos. Tienen que sentarse las 8
- Sí importa el orden.
- No se repiten los elementos. Una persona no se puede repetir.
- P8 = 8! = 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320.

Ejercicio 2. ¿Cuántas formas diferentes hay que colocar a las letras A, B, C en tres posiciones?

Solución:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Aquí están las 6 formas a las que se refiere el cálculo: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Ejercicio 3. El número de ordenaciones diferentes o permutaciones que consta de 3 letras tomadas de las 7 letras: A, B, C, D, E, F Y G es:

Solución:

$$7P3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

2.12 Ejercicios propuestos

1. Calcule el número: P (17, 1).

   Solución: 17.

2. Calcule el número: P (20, 1).

Solución: 20.

3. Calcule el número: P (9, 6).

   Solución: 60480.

4. Calcule el número: P (5, 3).

   Solución: $-\frac{1}{8.842} \times 10^{30}$

5. Calcule el número: P (5, 5).

   Solución: 120.

6. Calcule el número: P (4, 4).

   Solución: 24.

7. Calcule el número: P (6, 5).

   Solución: 720.

8. Calcule el número: P (7, 6).

   Solución:

9. Calcule el número: P (52, 5).

   Solución: 9311875200.

10. Calcule el número: P (52, 2).

    Solución: 2652.

2.13 Recursos interactivos

Título: Tres posiciones y 5 letras con repeticiones y sin repeticiones.

El siguiente recurso es una calculadora para obtener permutaciones digitando el determinado valor, utilizando el simulador matemático GeoGebra.

Instrucciones:

- Ingresar a la aplicación GeoGebra online.
- Registrarse.
- Apoyarse en los tutoriales de GeoGebra.
- Crear el recurso utilizando los comandos del menú de la app.

GeoGebra

Recursos didácticos

Para profundizar la comprensión de las permutaciones, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.6 en donde se explica los conceptos básicos, demostración de teoremas y ejemplos ilustrativos de las permutaciones, conocimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.6 Ejercicios. Además, realiza una síntesis del ejercicio resuelto del epígrafe 2.13 Permutaciones en la página 51 del libro: Probabilidad y estadística del autor: Alvarado Verdín, V. M. (2015).

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta tercera semana del segundo bimestre estudiamos sobre el principio fundamental de conteo y el teorema sobre el número de permutaciones. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. Encuentre el número de combinaciones si es que $n = 10$ y $r = 3$. Respuesta: 120.
2. ¿En cuántas maneras puede un presidente, un tesorero y un secretario ser escogidos de 7 candidatos? Respuesta. 210.
3. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: permutaciones.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con el principio fundamental de conteo y el teorema sobre el número de permutaciones, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como: tutorías en vivo, chat, correo, consultas, bandeja de entrada en la plataforma CANVAS, por los cuales puede consultar dudas e inquietudes a su tutor.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 12

Unidad 2. Teorema del binomio

2.14 Permutaciones y combinaciones distinguibles

Ciertos problemas consisten en hallar diferentes arreglos de objetos, algunos de los cuales son indistinguibles. Por ejemplo, supongamos que nos dan cinco discos del mismo tamaño, tres de los cuales son negros, uno es blanco y el otro es rojo. Encontremos el número de formas en que se puedan acomodar en fila para que se obtengan arreglos de colores diferentes. Si los discos fueran todos de diferentes colores, ¡entonces el número de arreglos sería 5!, o sea, 120. No obstante, como algunos de los discos tienen la misma apariencia, no podemos obtener 120 arreglos diferentes. Para aclarar este punto, escribamos: N N N B R; para el arreglo que tenga discos negros en las primeras tres posiciones de la fila, el disco blanco en la cuarta posición y el disco rojo en la quinta. ¡Los primeros tres discos se pueden acomodar en 3!, o sea, 6, formas diferentes, pero estos arreglos no se pueden distinguir el uno del otro porque los primeros tres discos se parecen. ¡Decimos que son esas 3 permutaciones son no distinguibles. Del mismo modo, dado cualquier otro arreglo, por ejemplo: N R N B N; hay 3! Formas diferentes de acomodar los tres discos, pero aquí también cada uno de estos arreglos no es distinguible de los otros. Llamemos permutaciones distinguibles a dos arreglos de objetos si una no se puede obtener de la otra al reacomodar objetos semejantes. Así, N N N B R y N R N B N; son permutaciones distinguibles de los cinco discos. Denotemos con k el número de permutaciones distinguibles. ¡Como a cada uno de estos arreglos corresponden 3!, permutaciones no distinguibles, debemos tener 3! / k = 5!, el número de permutaciones de cinco objetos diferentes. En consecuencia, k = 5! / 3! ! 5 · 4 = 20. Por el mismo tipo de razonamiento, podemos obtener la siguiente extensión de esta exposición.

2.15 Primer teorema: permutaciones distinguibles

Si ***r*** objetos de un conjunto de ***n*** objetos son semejantes y si los objetos restantes son diferentes entre sí y distintos de los ***r*** objetos, entonces el número de permutaciones distinguibles de los n objetos es: $\frac{n!}{r!}$.

2.16 Segundo teorema: permutaciones distinguibles

Si, en un conjunto de ***n*** objetos, n_1 son semejantes de una clase, n_2 son semejantes de otra clase, . . . , n_k son semejantes de otra clase adicional: $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$; entonces, el número de permutaciones distinguibles de ***n*** objetos es:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

Ejemplos

Ejemplo 1. Calcule el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra Mississippi.

Solución: En este ejemplo nos dan un conjunto de once objetos en el que cuatro son de una clase (la letra s), cuatro son de otra clase (i), dos son de una tercera clase (p) y uno es de una cuarta clase (M). En consecuencia, por el teorema precedente, tenemos 11 = 4 + 4 + 2 + 1 y el número de permutaciones distinguibles es:

$$\frac{11!}{4!\cdot 4!\cdot 2!\cdot 1!} = 34,650$$

2.17 Definición de combinación

Sea ***S*** un conjunto de n elementos y sea 1 1 ***r*** 1 ***n***. Una combinación de ***r*** elementos de ***S*** es un subconjunto de ***S*** que contiene ***r*** elementos distintos.

2.18 Teorema sobre el número de combinaciones

El número de combinaciones de ***r*** elementos que se pueden obtener de un conjunto de ***n*** elementos es:

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}, \quad 1 \leq r \leq n$$

Ejemplo 2. Un equipo de béisbol de la liga pequeña tiene seis jardineros, cinco pitchers y dos receptores. Cada uno de los jardineros puede jugar cualquiera de las tres posiciones de jardines y cada jugador de cuadro puede jugar cualquiera de las cuatro posiciones del campo corto. ¿En cuántas formas puede escogerse un equipo de nueve jugadores?

Solución: El número de formas de escoger tres jardineros de los seis candidatos es:

$$C(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$$

El número de formas en que se pueden escoger los jugadores de cuadro es:

$$C(7,4) = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 35$$

Hay cinco maneras de escoger un pitcher y dos opciones para el receptor. Se deduce del principio fundamental de conteo que el número total de maneras de escoger un equipo es: 20. 35. 5. 2 = 7000.

Ejemplo 3. Un cocinero prepara una ensalada de verduras con aguacate, pepino, cebolla y pomodoro. ¿De cuántas maneras se puede preparar la ensalada usando solo 2 ingredientes?

Solución: No importa el orden en que se tomen los ingredientes para la ensalada, pues da igual si es una ensalada de aguacate con pepino, que una ensalada de pepino con aguacate, ya que al final, el cocinero mezclará los dos ingredientes. Para llegar a la solución utilizamos la siguiente fórmula:

$$n = 4 \quad (\text{número total de elementos}); \quad K = 2 \quad (\text{tomados de dos en dos})$$

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2!\times2!} = \frac{24}{2\times2} = \frac{24}{4} = 6 \quad \text{formas}$$

2.19 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1. Se va a programar un torneo de ajedrez para los 10 integrantes de un club. ¿Cuántos partidos se deben programar si cada integrante jugará con cada uno de los demás sin partidos de revancha?

Solución: En este torneo se van a disputar partidas de ajedrez en cada una de las cuales participan 2 jugadores. Por ello, necesitamos ordenamientos de 2 en 2, es decir, ***k*** = 2. Además, en estos ordenamientos participarán los 10 jugadores, por eso, ***n*** = 10.

En este caso, no importa el orden, ya que solo necesitamos agrupar los jugadores. Es igual que juegue Jorge contra Carlos, que Carlos contra Jorge. Además, no hay partido de revancha, es una sola partida con cada contrincante.

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$n = 10 \quad (\text{número de jugadores}), \quad k = 2 \quad (\text{tomados de 2 en 2})$$

$$C_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 2!}$$

$$C_2^{10} = 5 \times 9 = 45$$

Solo tienen que programar 45 partidos

Ejercicio 2. Considera un grupo de 10 estudiantes, de los cuales 4 son mujeres y 6 son hombres. De acuerdo con esa información, determine:

a. El número de formas en que se puede elegir un representante del grupo.
b. El número de formas en que se puede elegir un comité de 3 miembros, donde al menos uno de los miembros sea mujer.

Solución: En este caso, no nos dicen que el comité tiene rangos; por lo tanto, no importa el orden. Aplicaremos la fórmula de combinaciones.

a. El número de formas en que se puede elegir un representante del grupo. De un total de 10 miembros, elegiremos a uno:

$$C_1^{10} = \frac{10!}{(10-1)!1!} = \frac{10 \times 9!}{9! \times 1!} = \frac{10}{1} = 10 \text{ formas}$$

b. El número de maneras en que se puede elegir un comité de 3 miembros, donde al menos uno de los miembros sea mujer. Al menos uno de los 3 miembros tiene que ser mujer. Eso significa que el comité puede estar formado por 1, 2 o 3 mujeres.

- Si el comité está formado por 1 mujer, significa que de las 4 mujeres seleccionaremos una, y de los 6 hombres seleccionaremos 2.

$$C_1^4 \cdot C_2^6 = \frac{4!}{(4-1)!1!} \times \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} \times \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = 4 \times 15 = 60 \text{ formas}$$

- Si el comité está formado por 2 mujeres, significa que de las 4 mujeres seleccionaremos 2, y de los 6 hombres seleccionaremos 1.

$$C_2^4 \cdot C_1^6 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \times \frac{6!}{(6-1)!1!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1!} \times \frac{6 \times 5!}{5! \times 1} = 6 \times 6 = 36 \text{ formas}$$

- Si el comité está formado por 3 mujeres, significa que de las 4 mujeres seleccionaremos 3, y de los 6 hombres no seleccionaremos a ninguno.

$$C_3^4 \cdot C_0^6 = \frac{4!}{(4-3)!3!} \times \frac{6!}{(6-0)!0!} = \frac{4\times 3!}{1\times 3!} \times \frac{6!}{6!\times 1} = 4 \times 1 = 4 \text{ formas}$$

En total, tenemos: ***60 + 36 + 4 = 100 Formas.***

2.20 Ejercicios propuestos

1. Calcule el número: P (17, 1).

   Solución: 17.

2. Calcule el número: P (9, 6).

   Solución: 84.

3. Calcule el número: P (5, 5).

   Solución: 1.

4. Calcule el número: P (4, 4).

   Solución: 24.

5. Calcule el número: P (6, 5).

   Solución: 6.

6. Simplifique la combinación: P (n, 0).

   Solución: 1.

7. Calcule el número: P (52, 5).

   Solución: 2598960.

2.21 Recursos interactivos

Título: Calculadora de factoriales, permutaciones y combinaciones.

A continuación, se lleva a cabo un análisis combinatorio, utilizando el simulador matemático GeoGebra.

Instrucciones:

- Ingresar a la aplicación GeoGebra online.
- Registrarse.
- Apoyarse en los tutoriales de GeoGebra.
- Crear el recurso utilizando los comandos del menú de la app.
- Probar el resultado.
- Grabar y publicar el recurso.

GeoGebra

Recursos didácticos

Para profundizar la comprensión de las permutaciones y combinaciones distinguibles, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.7 en donde se explican los conceptos básicos, demostración de teoremas y ejemplos ilustrativos de las combinaciones, conocimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.7 Ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta cuarta semana del segundo bimestre estudiamos sobre permutaciones y combinaciones distinguibles. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. ¿Cuántas formas existen de escoger un grupo de 5 personas, de un grupo de 12 personas? Respuesta. 495.
2. En una clase de 35 estudiantes se quiere elegir la directiva formada por tres estudiantes. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar? Respuesta. 6545.
3. Desarrolle los ejercicios sugeridos en la actividad de Khan Academy disponible en: combinaciones.

   Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

   Con el desarrollo de las tres actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las permutaciones y combinaciones distinguibles, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

4. La siguiente autoevaluación le permitirá valorar su aprendizaje, por esta razón, es fundamental su desarrollo. Además, esta actividad le ayuda a prepararse para la evaluación bimestral.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

> Recuerde que dispone de diferentes canales como: tutorías en vivo, chat, correo, consultas, bandeja de entrada en la plataforma CANVAS, por los cuales puede consultar dudas e inquietudes a su tutor.

Autoevaluación 3

Instrucciones: Desarrolle los binomios al cuadrado.

1. ¿Cuál es la definición de un binomio?

   a. Expresión algebraica formada por la diferencia de dos términos.
   b. Expresión algebraica formada por la suma de dos términos.
   c. Expresión algebraica formada por la suma o la diferencia de dos términos.

2. ¿Qué término contiene $x16x^{16}$ del desarrollo binomial

   $(3x4+2y5)10(3x^4+2y^5)^{10}$?

   a. Término 5.
   b. Término 6.
   c. Término 7.

3. $(x^2-\frac{1}{2}x)^2=$

   a. $x^4-x^3+\frac{1}{4}x^2.$

   b. $x^4+x^3-\frac{1}{4}x^2.$

   c. $x^4-x^3-\frac{1}{4}x^2.$

Instrucciones: Desarrolle los binomios al cubo.

4. $(2x-3)^3=$

a. $8x^3 - 12x^2 + 54x - 27$.

b. $8x^3 - 36x^2 + 54x - 9$.

c. $8x^3 + 36x^2 + 54x - 27$.

5. $(3x - 2)^3 =$

a. $9x^3 - 54x^2 + 36x - 8$.

b. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 16$.

c. $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$.

Instrucciones: Desarrolle las sumas por diferencias.

6. $(3x - 2)(3x + 2) =$

a. $9x^2 - 8$.

b. $9x^2 + 4$.

c. $9x^2 - 4$.

7. $(3x - 5)(3x + 5) =$

a. $9x^2 - 5$.

b. $9x^2 - 25$.

c. $9x^2 + 25$.

Instrucciones: Realice las siguientes combinaciones lineales.

8. Calcule el número: $P(10, 2)$

   a. 91.
   b. 90.
   c. 80.

9. Simplifique la combinación: $P(n, n-1)$

   a. $-n$.
   b. n.
   c. 0.

10. Calcule el número de permutaciones distinguibles de las letras de la palabra "bookkeeper" (contador)

   a. 10.
   b. 100.
   c. 20.

Ir al solucionario

Semana 13

Unidad 3. Probabilidad

3.1 Introducción

La probabilidad es una rama de la matemática de suma importancia que se ocupa del estudio de ciertos experimentos llamados aleatorios, es decir, regidos por el azar, en que conocemos todos los resultados posibles, sin embargo, no existe la posibilidad de tener una certeza de cuál será en particular el resultado del experimento. Por ejemplo, experimentos aleatorios cotidianos son el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, extracción de una carta de un mazo de naipes. Así mismo, la probabilidad está creada en desarrollar y aplicar técnicas para determinar información de una población o inferir conclusiones sobre esta. La presente unidad trata de procesos continuos que se presentan con frecuencia en matemáticas y en la vida cotidiana. Estos incluyen definiciones, ejercicios y aplicaciones.

3.2 Definiciones

Evento: Sea ***S*** el espacio muestral de un experimento. Un evento asociado con el experimento es cualquier subconjunto ***E*** de ***S***.

Espacio Muestral: Se llama espacio muestral (***E***) asociado a un experimento aleatorio, el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento.

Al lanzar una moneda, el espacio muestral es ***E*** = {c, s}.

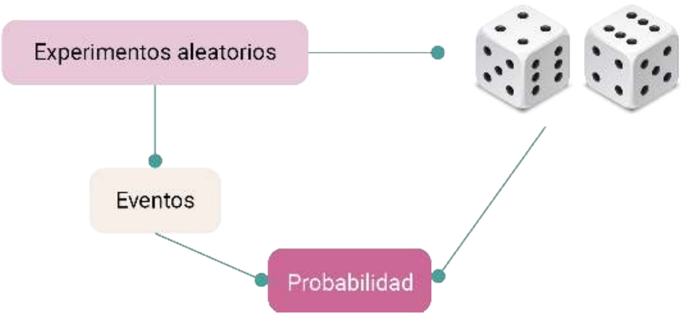
Al lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral es: ***E*** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Al lanzar dos monedas, el espacio muestral es: ***E*** = {(c,c), (c,s), (s,c), (s,s)}.

Al lanzar tres monedas, el espacio muestral es: ***E***={(c,c,c),(c,c,s). (c,s,c),(c,s,s), (s,c,c),(s,c,s),(s,s,c),(s,s,s)}.

Figura 3

Experimentos aleatorios



Evento o Suceso: Se llama evento o suceso a todo subconjunto de un espacio muestral.

Por ejemplo, en el espacio muestral $\boldsymbol{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del lanzamiento de un dado, los siguientes son eventos:

1. Obtener un número primo $\boldsymbol{A} = \{2, 3, 5\}$
2. Obtener un número primo y par $\boldsymbol{B} = \{2\}$
3. Obtener un número mayor o igual a 5 $\boldsymbol{C} = \{5, 6\}$

Eventos mutuamente excluyentes: Dos eventos son mutuamente excluyentes si *no pueden ocurrir en forma simultánea*, esto es, si y sólo si su intersección es vacía. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado los eventos.

$\boldsymbol{B} = \{2\}$ y $\boldsymbol{C} = \{5, 6\}$ son mutuamente excluyentes por cuanto

$\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C} = \emptyset$

Eventos Complementarios: Si $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$ y $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}$, se dice que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son eventos complementarios: $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{A}$

Su Medición Matemática o Clásica. Si en un experimento aleatorio todos los resultados son equiprobables (iguales probabilidades), es decir, la ocurrencia de uno es igualmente posible que la ocurrencia de cualquiera de los demás, entonces, la probabilidad de un evento A es la razón:

$$P(A) = \frac{\text{Nro. de casos favorables}}{\text{Nro. de casos posibles}}$$

3.3 Teorema sobre eventos mutuamente exclusivos

Si E_1 y E_2 son eventos mutuamente exclusivos y $E = E_1 \cup E_2$, entonces:

$P(E) = P(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + P(E_2)$

El teorema precedente se puede extender a cualquier número de eventos: E_1, E_2, ..., E_k, que sean mutuamente exclusivos en el sentido de que si $i \neq j$, entonces $E_i \cap E_j = \emptyset$. La conclusión del teorema es entonces.

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_k)$$

3.4 Teorema sobre eventos independientes

Si E_1 y E_2 son dos eventos cualesquiera, entonces:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Si E_1 y E_2 son mutuamente exclusivos, entonces $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ y $P(E_1 \cap E_2) = 0$. En consecuencia, el último teorema incluye, como caso especial, el teorema sobre eventos mutuamente exclusivos.

Ejemplo 1.- Lanzamos una sola vez una moneda trucada de manera que la probabilidad de obtener una cara es 2/3. Modelar este experimento mediante una variable aleatoria.

Solución:

La variable aleatoria X = “obtener una cara en una tirada” tiene distribución de Bernoulli de parámetro p = 2/3, es decir, si llamamos 1 al resultado “cara” y 0 al resultado “cruz”, P (X = 1) = 2/3 y P(X = 0) = 1 – 2/3 = 1/3.

Ejemplo 2.- Calcular la probabilidad de un evento

1. Si una moneda se lanza al aire, encuentre la probabilidad de que caiga con una cara hacia arriba.
2. Si se lanza un dado "limpio", encuentre la probabilidad de obtener un 4.
3. Si se lanzan al aire dos monedas, encuentre la probabilidad de que ambas caigan con la "cara" hacia arriba.

Solución.

A. $S = \{H, T\}, \quad S = \{H\}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{2}$

B. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{4\}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

C. $S = \{HH, HT, TH, TT\}, \quad E = \{HH\}, \quad P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

En el inciso a) del ejemplo hallamos que la probabilidad de obtener una cara en un tiro de una moneda es 1/2. Consideramos que esto significa que, si una moneda se lanza al aire muchas veces, el número de veces que una "cara" quede hacia arriba debe ser alrededor de la mitad del número total de tiros.

Por lo tanto, para 100 tiros, una "cara" debe aparecer alrededor de 50 veces. Es poco probable que este número sea exactamente 50. Una probabilidad significa que, si hacemos que el número de tiros aumente, entonces el número de veces que la "cara" quede hacia arriba se aproxima a la mitad del número total de tiros. Se pueden hacer observaciones similares para los incisos b) y c) del ejemplo.

En los siguientes dos ejemplos consideramos experimentos en los que un evento contiene más de un elemento.

3.5 Ejercicios resueltos

Ejercicio 1: Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que el número que aparezca sea un múltiplo de tres?

Solución:

Un dado cuenta con los siguientes números: D = {1,2,3,4,5,6}

Los múltiplos de 3 son el 3 y el 6, entonces: P = 2/6; P = 33.33%

Ejercicio 2: Si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par?

Solución:

Los números pares son el 2,4 y el 6, entonces: P = 3/6; P = 50%

Ejercicio 3: Si se lanza una moneda 3 veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres sellos

Solución:

La probabilidad es: $P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125 = 12.5\%$

Ejercicio 4: Si se lanza tres monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos sellos?

Solución:

Existen tres combinaciones que salgan dos sellos:

{C, S, S}; {S, C, S}; {S, S, C}

Como la probabilidad de salir cara y sello es la misma, 1/2, entonces la probabilidad de cada una de estas formas es: (1/2)(1/2)(1/2) = 1/8

Por lo tanto, la probabilidad de obtener una de las tres será: P = 3·(1/8) = 3/8 = 0.375 = 37.5%

Ejercicio 5: Martha posee un dado numerado de 1 al 6. ¿cuál es la probabilidad que los resultados sean impares?

Solución:

En este caso se tiene 3 números impares {1,3 y 5}

Nota. *Adaptado de 3d dado modelo vibrante y detallado PNG Pro [Ilustración], por Condologic Creative Design, s.f., vecteezy. CC BY 4.0.*

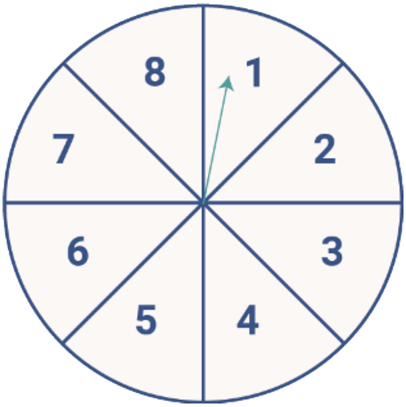
$$P(\text{Impares}) = \frac{3}{6} = 0.5$$

Ejercicio 6: Alejandro posee una ruleta numerada de 1 al 8. ¿cuál es la probabilidad que los resultados sean impares?

Solución:

En este caso se tiene 4 números impares {1,3,5 y 7}

$$P(\text{Impares}) = \frac{4}{8} = 0.5$$



Nota. *Adaptado de Un juego de azar consiste en hacer girar una flecha que se detiene apuntando a uno de los números [Ilustración], por Embiberar, s.f., Embiberar. CC BY 4.0.*

Ejercicio 7: Calcular probabilidades cuando dos dados se lanzan al aire. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de: (a) 7? (b) 9?

Solución:

Consideremos un dado como el primer dado y el otro como el segundo dado. Usaremos pares ordenados para representar resultados como sigue: (2, 4) denota el resultado de obtener un 2 en el primer dado y un 4 en el segundo; (5, 3) representa un 5 en el primer dado y un 3 en el segundo; y así sucesivamente. Como hay seis posibilidades diferentes para el primer número del par ordenado y, con cada uno de éstos, seis posibilidades diferentes para el segundo número, el número total de pares ordenados es 6 x 6 = 36. Por tanto, si ***S*** es el espacio muestral, entonces ***n(S) = 36***.

a. Si E es el evento correspondiente a obtener una suma de 7, entonces:

   E = {(1,6); (2,5); (3,4); (4,3); (5,2); (6,1)};

   En competencia:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b. Si E es el evento correspondiente a obtener una suma de 9, entonces:

E = {(3,6); (4,5); (5,4); (6,3)}; y

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

3.6 Recursos interactivos

Título: Lanzamiento de tres monedas: Simulación y recuento de resultados

En la actividad planteada podrán simular varios lanzamientos de las monedas, al mismo tiempo, permitirá controlar los resultados, es decir, el número de caras conseguidas, mediante la tabla de frecuencias y presentación de barras, utilizando el simulador matemático GeoGebra.

Instrucciones:

- Clica el botón "Lanza una vez", se observa hasta 10 lanzamientos y traza lo que se agrupa en las filas y columnas en la tabla de frecuencias y la presentación de barras.
- Al lanzar las tres monedas, se puede contar el total de caras, obteniendo los posibles resultados de; 0, 1, 2 o 3 caras.
- Clic en el botón Play (Lanzar muchas veces) y analiza los cambios obtenidos.
- Comprender cuál es la probabilidad de sacar tres caras en el lanzamiento de las tres monedas.

Geogebra

Recursos didácticos

Para profundizar la comprensión de la probabilidad, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.8 en donde se explica los conceptos básicos, demostración de teoremas y ejemplos ilustrativos de las combinaciones, conocimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.8 Ejercicios.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta quinta semana del segundo bimestre estudiamos sobre probabilidades y teorema sobre eventos mutuamente excluyentes, para reforzar estos aprendizajes teóricos, por ello, le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. En una bolsa hay diez bolas iguales, numeradas del 0 al 9 cada una. Se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números. ¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse colocando las bolas por orden de extracción?

   Respuesta. Este número se corresponde con las variaciones de 10 elementos tomados 2 a 2: $V_{10,2} = 10*9 = 90$.

2. Al hacer tres lanzamientos de un dado y sumar sus resultados, se alcanzó una puntuación total de 12. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtuviera un 6?

   Respuesta. P(primer lanzamiento sea 6 si la suma es 12)= 5/25 = ⅕.

3. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades P(A) = 0,7; P(B) = 0,6 y P(A U B) = 0,85. Calcular. P(a int B).

   Respuesta. 0.45.

4. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: probabilidades.

Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con probabilidades y teoremas sobre eventos mutuamente excluyentes, lo cual le será muy útil para los siguientes temas de estudio.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como: tutorías en vivo, chat, correo, consultas, bandeja de entrada en la plataforma CANVAS, por los cuales puede consultar dudas e inquietudes a su tutor.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 3. Probabilidad

3.7 Aplicaciones de la probabilidad

La probabilidad tiene un sinnúmero de aplicaciones en la vida cotidiana, como son:

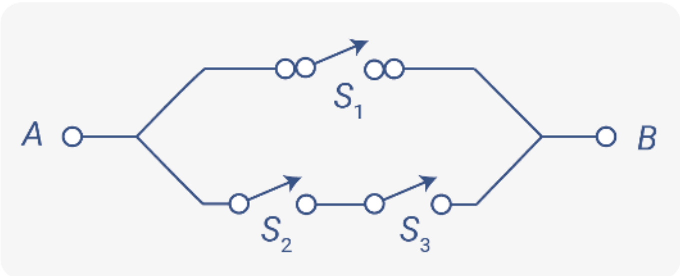
- **Juegos al azar**. Los casinos están programados para ganar dinero, por lo que, han definido bien cuál es la probabilidad de que el jugador gane y conocen que dicha probabilidad es baja.
- **Riesgo empresarial**. Se estiman las posibilidades de caída y alza de precio de las acciones bursátiles, y se predice la conveniencia de invertir.
- **Análisis estadístico de la conducta**. En la sociología, se utiliza la probabilidad para evaluar la posible conducta de una población en estudio, y predecir tendencias de pensamiento o de opinión, especialmente en elecciones electorales.

- **Garantías y seguros**. Procesos matemáticos en los que se calcula la probabilidad de avería de los servicios y productos para ofrecer el tiempo estimado que conviene pagar al asegurado.
- **Partículas subatómicas**. Según Heisenberg, establece que no podemos saber dónde está una partícula subatómica en un momento determinado y al mismo tiempo a qué velocidad se mueve, de modo que los cálculos en la materia se realizan normalmente en términos probabilísticos: existe ***X*** por ciento de probabilidades de que la partícula esté allí.
- **Biomédica**. Sirve para calcular porcentajes de éxito y de fracaso de las terapias, drogas médicas o de las vacunas, para así saber si son fiables, y si conviene o no producirlas en masa, o a qué porcentaje de la población podrán causar determinados efectos secundarios.

Ejemplo 3.- Una aplicación de probabilidad a un sistema eléctrico que tiene abiertos los interruptores S_1, S_2 y S_3, como se ve en la figura. Los interruptores operan de manera independiente, el uno del otro y la corriente circulará de ***A*** hacia ***B*** si S_1 está cerrado o si tanto S_2 como S_3 están cerrados.

Figura 4

Sistema eléctrico



Nota: Adaptado de Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica [Infografía], por Swokowski, E., 2018, Cengage. CC BY 4.0.

a. Si S_k, denota el evento de que S_k esté cerrado, donde $k = 1, 2, 3$, exprese, en términos de $P(S_1)$, $P(S_2)$ y $P(S_3)$, la probabilidad ***p*** de que circule corriente de ***A*** hacia ***B***.
b. Encuentre ***p*** si $P(S_k) = ½$ para cada k.

Solución:

Inciso a) La probabilidad ***p*** de que ocurra S_1 o S_2 y S_3 es:

$$p = P(S_1 \cup (S_2 \cap S_3))$$

Usando el teorema sobre la probabilidad de que ocurran dos eventos cualesquiera ***S1*** o $S_2 \cap S_3$, obtenemos:

$$p = P(S_1) + P(S_2 \cap S_3) - P(S_1 \cap (S_2 \cap S_3))$$

Aplicando dos veces el teorema sobre eventos independientes, tendremos:

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2 \cap S_3)$$

Por último, usando una vez más el teorema sobre eventos independientes, vemos

Que:

$$p = P(S_1) + P(S_2) \cdot P(S_3) - P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3)$$

Inciso b); si $P(S_k) = ½$; para cada k, entonces de acuerdo con el inciso a) la probabilidad de que circule corriente de ***A*** hacia ***B*** es:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8} = 0.625$$

3.8 Recursos interactivos

Título: Seis soluciones de un dado.

Por término medio, ¿cuántos lanzamientos son necesarios hasta conseguir que hayan salido los seis resultados posibles en un dado?

Instrucciones:

- Clic en “Lanzar un dado” y observa lo que sucede.

- Tras cuatro o cinco lanzamientos, explicar a cuál corresponde el color rojo o verde en cada uno de los seis cuadrados.
- ¿Cuántas de las seis soluciones posibles del dado que aún no han salido?
- Al pronosticar, ¿cuántos lanzamientos crees que harán falta hasta conseguir que no falte ninguno de los seis? Continuar lanzando dados hasta conseguirlo.
- Pulsa en "Nueva simulación" para repetir una segunda simulación.

  Geogebra

- Describa lo que ocurre al pulsar el botón "Lanza un dado" tras cuatro o cinco lanzamientos, describa de qué depende el color rojo o verde de cada uno de los seis cuadrados. ¿Cuántos de los seis resultados posibles de un dado todavía no han salido? Si tuviese que adivinarlo, ¿cuántos lanzamientos cree que harán falta hasta conseguir que no falte ninguno de los seis?
- Continúe lanzando dados hasta conseguirlo. Pulse en "Nueva simulación" para repetir una segunda simulación. Observe y, tras varias simulaciones, describa lo que se representa en la gráfica de abajo.

Recursos didácticos

Para profundizar la comprensión de la probabilidad, se recomienda leer el libro **Swokowski, Earl William (2018). Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica**, la sección 9.8 en donde se explica los conceptos básicos, demostración de teoremas y ejemplos ilustrativos de las probabilidades, conocimientos que deben ser reforzados con el desarrollo de un número suficiente de ejercicios propuestos al final del tema y que aparece como 9.8 Ejercicios. Además, resolver el problema reto de la página 68 del libro: Probabilidad y estadística del autor: Alvarado Verdín, V. M. (2015).

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, en esta sexta semana del segundo bimestre estudiamos sobre las aplicaciones de las probabilidades. Para reforzar estos aprendizajes teóricos, es conveniente experimentarlos, por ello le invito a desarrollar y resolver las siguientes actividades:

1. En una bolsa hay diez bolas iguales, numeradas del 0 al 9 cada una. Se extraen dos bolas de forma consecutiva y se anotan sus números. ¿Y la probabilidad de que termine en 3?

   Respuesta. Uno de cada diez números termina en 3, pues hay 10 terminaciones posibles $P(n3) = 9/90 = 1/10$.

2. Al hacer tres lanzamientos de un dado y sumar sus resultados, se alcanzó una puntuación total de 12. ¿Cuál es la probabilidad de que en alguno de los lanzamientos se obtuviera un 6?

   Respuesta. P(un lanzamiento sea 6 si la suma es 12) = 15/25 = ⅗..

3. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}85$. Calcular. $P((a \cap B)^C)$.

   Respuesta. 0.55.

4. Desarrolle los ejercicios propuestos en la actividad de Khan Academy disponible en: probabilidades.

   Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

   Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo practicar, aplicar y experimentar con las aplicaciones de las probabilidades, lo cual le será muy útil para afianzar sus conocimientos.

5. La presente autoevaluación le permitirá valorar su aprendizaje, por esta razón, es fundamental su desarrollo. Además, esta actividad le ayuda a prepararse para la evaluación bimestral.

¡Vamos por buen camino, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Recuerde que dispone de diferentes canales como: tutorías en vivo, chat, correo, consultas, bandeja de entrada en la plataforma CANVAS, por los cuales puede consultar dudas e inquietudes a su tutor.

Autoevaluación 4

Realice el procedimiento adecuado y seleccione la respuesta correcta.

1. En una mochila hay diez pelotas iguales numeradas del 0 al 9 cada una. Se extraen dos pelotas de forma consecutiva y se anotan sus números. Escriba todos los sucesos elementales que forman el suceso, si la primera bola extraída ha sido un 5.

   a. Los sucesos son 9: 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59.
   b. Los sucesos son 8: 50, 51, 52, 54, 56, 57, 58, 59.
   c. Los sucesos son 10: 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 61, 63.

2. Cada día se sortea un premio en un juego utilizando papeles con tres cifras, numeradas del 000 al 999. ¿Calcule la probabilidad de que el número ganador termine en 55?

   a. 5. Uno de cada 10 números termina en 5, por tanto; P(termina en 5) = 1/10 = 0.1.
   b. 55. Uno de cada 100 números termina en 55, por tanto; P(termina en 55) = 1/100 = 0.01.

c. 50. Uno de cada 100 números termina en 50, por tanto; P(termina en 50) = 1/10 = 0.1.

3. Si lanzamos a la vez cuatro dados de distinto tamaño, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?

   a. 1299.
   b. 1295.
   c. 1296.

4. En un torneo de tenis en el que participan 12 jugadores pueden clasificar 3 para la final. ¿Cuántos grupos distintos de finalistas se pueden formar?

   a. 120.
   b. 121.
   c. 110.

5. ¿De cuántas maneras pueden hacer cola 7 amigos que están esperando para entrar al cine?

   a. 5010.
   b. 5040.
   c. 5030.

6. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en fila 5 vasos sabiendo que 2 de ellos están llenos de refresco de tamarindo y 3 de refresco de maracuyá? (Considerar que los vasos del mismo sabor no se distinguen entre sí).

   a. 11.
   b. 5.
   c. 10.

7. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 personas en una mesa circular?

   a. 362880.
   b. 362870.
   c. 362888.

8. En una floristería hay 15 tipos de flores, ¿de cuántas formas se pueden elegir 8 flores?

    a. 319760.
    b. 319770.
    c. 219770.

9. ¿Cuántos números distintos se pueden formar con las cifras 2114544899?

    a. 251200.
    b. 151000.
    c. 151200.

10. ¿De cuántas maneras se pueden repartir 3 premios distintos entre 10 atletas?

    a. 720.
    b. 710.
    c. 750.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 15

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en estas dos últimas semanas de estudio se invita para que revise los contenidos del segundo bimestre y con ello logre buenos resultados en la evaluación presencial, para lo cual se sugiere las siguientes actividades.

1. Realice una revisión de su diario de notas.
2. Desarrolle las actividades recomendadas.
3. Interactúe con los simuladores del teorema del binomio y probabilidades.

Semana 16

Actividades finales del bimestre

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la unidad 2 y 2 estudiadas en el segundo bimestre: teorema del binomio, permutaciones, combinaciones y probabilidades.

Además de las actividades de la semana 15, para consolidar los aprendizajes del segundo bimestre, y tener una buena preparación para la prueba bimestral, se sugiere las siguientes actividades:

1. Participe en la videoconferencia donde se realizará un repaso para el examen bimestral.

   Revise cada uno de los conceptos y sus aplicaciones de los contenidos estudiados en la unidad 3 y 4 del segundo bimestre.

   Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las temáticas estudiadas, desarrollando las actividades recomendadas al final de cada semana.

2. Examen bimestral.

   Revise el horario de exámenes para que tenga claro el día y la hora de la evaluación.

¡Felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje, hemos concluido el segundo bimestre!

4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	A	Un elemento de una sucesión aritmética tiene la forma: $a_{k+1} = a_k + d$, donde a y d son números reales, y cada elemento se forma de sumar al elemento actual un valor constante llamado diferencia común.
2	A	Un elemento an (en la posición n de la sucesión) puede ser hallado: $a_n = a_1 + (n-1)d$. Así, se encuentra d: $a_2 - a_1 = d = 7 - 3 = 4$; se encuentran los elementos: $a_n = 3 + 4(n-1)$; $a_{14} = 3 + (14-1) \cdot 4 = 55$; $a_{18} = 3 + (18-1) \cdot 4 = 71$
3	A	Se encuentra d entre dos elementos consecutivos (separados por "," que no haya espacios), por ejemplo $-5, -(-3), \quad d = 2, \quad \text{si} \quad a_1 = -5$, entonces $a_3 = -5 + 2(3-1) = -1$
4	D	La distancia o diferencia común se la encuentra restando a cualquier término su anterior. $$d = a_k - a_{k-1}$$
5	C	Se encuentra d entre dos elementos consecutivos: $d = a_k - a_{k-1} = x - (x+3) = -3$; el elemento sexto es $a_6 = a_5 + d = a_4 + d + d = x - 6 - 3 - 3 = x - 12$
6	C	Se determina el primer y último entero divisible por 5 entre 20 y 400, en este caso serían los mismos 20 y 400. De esta forma $a_1 = 20 \quad \text{y} \quad a_n = 400$. Luego se aplica la fórmula para determinar $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$. $$n = \frac{400-20}{5} + 1 = \frac{380}{5} + 1 = 76 + 1 = 77$$
7	B	Se averigua el primer y último par los cuales serían 2 y 1000. De esta forma $a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_n = 1000$. Luego se aplica la fórmula para determinar: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$. $$n = \frac{1000-2}{2} + 1 = \frac{998}{2} + 1 = 499 + 1 = 500$$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	A	La sumatoria de una sucesión aritmética es: $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Para encontrar el impar 100 se aplica la fórmula $2n - 1 = 2(100) - 1 = 199$. Conocidos los elementos de la fórmula, se opera: $S = \frac{100}{2}(1 + 199) = 10000$.
9	B	Se averigua el primer y último múltiplo de 4 los cuales serían 4 y 100. De esta forma $a_1 = 4 \;\; \text{y} \;\; a_n = 100$. Luego se aplica la fórmula para determinar n: $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$. $$n = \frac{100-4}{4} + 1 = \frac{96}{4} + 1 = 24 + 1 = 25$$
10	B	La sumatoria de una sucesión aritmética es: $S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Para encontrar el par negativo 100 se aplica la fórmula $-2n = -2(50) = -100$. Conocidos los elementos de la fórmula, se opera: $S = \frac{100}{2}(-2 - 100) = 10100$.
		Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	A	La relación o razón r entre dos elementos consecutivos de una sucesión geométrica está dada por: $a_{k+1} = a_k r$. De esta forma, para obtener un nuevo elemento de la sucesión geométrica se multiplica el elemento actual por la razón.
2	B	Se encuentra la razón: $r = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{12}{3} = 4$.
3	A	Se encuentra la razón: $r = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$. Se encuentra el término $n : (a_n = a_1 r^{n-1} = \frac{1}{3}(2)^{n-1}$. Se calcula el sexto término: $a_6 = a_1 r^{6-1} = \frac{1}{3}(2)^{6-1} = \frac{1}{3}(32) = \frac{32}{3}$. Se calcula el séptimo término: $a_7 = a_1 r^{7-1} = \frac{1}{3}(2)^{7-1} = \frac{1}{3}(64) = \frac{64}{3}$.
4	C	Se encuentra $r = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$.
5	A y D	Se prueba la primera serie como geométrica buscando $r = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{-2} = -1$, $r = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{-2}{2} = -1$, se comprueba el patrón $2, -2, \ldots$, y que r se mantiene, por lo tanto, es una sucesión geométrica. Lo mismo se debe probar en el literal D.
6	A	Si se conoce a_k y r, se puede hallar el primer término con: $a_1 = \frac{a_5}{r^{5-1}} = \frac{12}{2^4} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.
7	C	Se encuentra $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{-3} = -1$.
8	B	La fórmula de la sumatoria de una sucesión geométrica es: $S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$ Se conoce $a_1 = -2$, $n = 9$, $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{-2} = -1$. Se obtiene $S_9 = -2(-1)^{9-1} = -2(1) = -2$. Ahora se aplica la fórmula de la sumatoria: $S_9 = -2\frac{1-(-1)^9}{1-(-1)} = -2\frac{2}{2} = -2$.
9	A	La inducción matemática indica que se verifica el enunciado $P(n)$ para todo número entero.
10	B	El primer paso para aplicar la inducción matemática es verificar que $P(1)$ es verdadera.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	C	La definición de un binomio es: la expresión algebraica formada por la suma o la diferencia de dos términos.
2	C	¿Qué término contiene x^{16} del desarrollo binomial $(3x^4 + 2y^5)^{10}$? Apoyándose en el triángulo de Pascal notamos que es el séptimo término. Otra opción es desarrollarlo manualmente mediante la fórmula estudiada en la Unidad 3.
3	A	$(x^2 - \frac{1}{2}x)^2$ Mediante el uso de productos notables, basta con realizar la resta algebraica del cuadrado del primer término menos el doble producto del primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término, aplicando la fórmula: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
4	A	$(2x-3)^3$ Un binomio al cubo (suma) es igual al cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo: $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5	C	$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$ Para llegar a esta solución, tener en consideración que un binomio al cubo (suma) es igual al cubo del primero, más el triple del cuadrado del primero por el segundo, más el triple del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo, o aplicando el binomio de Newton.
6	C	$9x^2 - 4$ Aplicar las propiedades básicas de los números: la suma por diferencia es igual a la diferencia de cuadrados.
7	B	$9x^2 - 25$ El resultado de multiplicar la suma de dos números por su diferencia es el mismo que si restamos los cuadrados de ambos números.
8	B	Aplicamos el teorema sobre números de combinaciones; llegamos a la respuesta $90 : P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
9	B	Aplicamos el teorema sobre números de combinaciones; llegamos a la respuesta $n : P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	A	Seguir los siguientes pasos: 1. **Permutaciones con repetición:** Cuando tiene n n tipos diferentes, tenemos n n opciones cada vez, es decir, si eliges 3 términos, las permutaciones son: $n \times n \times n$. 2. **Permutaciones sin repetición:** En este caso, se reduce el número de opciones en cada paso.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	A	Los sucesos son: 50, 51, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 59. En total hay 9 sucesos elementales, toda la decena de los cincuenta menos el suceso 55 no puede darse.
2	B	55. Uno de cada 100 números termina en 55, por tanto; $P(\text{termina en } 55) = \frac{1}{100} = 0.01$
3	C	Tenemos que formar grupos de 4 elementos con los 6 posibles resultados que tiene un dado. 1. Se verifica que en cada grupo: a. No entran todos los elementos. b. Sí importa el orden. c. Sí se repiten los elementos. d. El número de variaciones con repetición de 6 elementos tomados de 4 en 4 es: $VR_6^4 = 6^4 = 1296$
4	A	Tenemos que formar grupos de 3 finalistas con los 12 jugadores que hay. 1. Se verifica que en cada grupo: a. No entran todos los elementos. b. No importa el orden. c. No se repiten los elementos. d. El número de combinaciones sin repetición de 12 elementos tomados de 3 en 3 es: $C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12\times11\times10\times9!}{3\times2\times9!} = 220$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
5	B	Tenemos que formar grupos con los 7 amigos. 1. Se verifica que en cada grupo: a. Sí entran todos los elementos. b. Sí importa el orden. c. No se repiten los elementos. d. El número de permutaciones sin repetición de 7 elementos es: $P_7 = 7! = 5040$
6	C	Tenemos que formar grupos de 5 elementos donde el primero se repite 2 veces y el segundo 3 veces. 1. Se verifica que en cada grupo: a. Sí entran todos los elementos. b. Sí importa el orden. c. Sí se repiten los elementos. d. El número de permutaciones con repetición de 5 elementos donde uno se repite dos veces y otro tres veces es: $PR_5^{3,2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2} = 10$
7	A	Como las personas están colocadas alrededor de una circunferencia, si trasladamos a todas a un asiento, obtenemos una posición que es exactamente igual que la anterior. Se trata entonces de permutaciones circulares de 10 elementos. $PC_{10} = P_9 = 9! = 362880$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	B	Tenemos que formar grupos de 8 flores con los 15 tipos que hay. 1. Se verifica que en cada grupo: a. No entran todos los elementos. b. No importa el orden. c. Sí se repiten los elementos. d. El número de combinaciones con repetición de 15 elementos tomados de 8 en 8 es: $CR_{15}^{8}=\frac{22!}{8!\cdot(22-8)!}=\frac{22!}{8!\cdot 14!}=\frac{22\times21\times20\times19\times18\times17\times16\times15\times14!}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1\times14!}=31970$
9	C	Tenemos que formar grupos de 10 elementos donde el primero se repite dos veces, el segundo una vez, el tercero tres veces, el cuarto una vez, el quinto una vez y el sexto dos veces. 1. Se verifica que en cada grupo: a. Sí entran todos los elementos. b. Sí importa el orden. c. Sí se repiten los elementos. d. El número de permutaciones con repetición de 10 elementos donde tres de ellos se repiten una vez, dos de ellos se repiten dos veces y uno tres veces es: $PR_{10}^{3,2,2,1,1,1}=\frac{10!}{3!\cdot2!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!}$ $=\frac{10\times8\times7\times6\times5\times4\times3!}{3!\times2\times2}=10\times9\times8\times7\times6\times5=151200$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	A	Tenemos que formar grupos de 3 atletas de entre los 10 que hay. 1. Se verifica que en cada grupo: a. No entran todos los elementos. b. Sí importa el orden. c. No se repiten los elementos. d. El número de variaciones sin repetición de 10 elementos tomados de 3 en 3 es: $C_{10}^{3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Acinas, S. E., Paz, M. E., & Veralli, F. E. (2017). Economía y Finanzas con Series Geométricas. *XXXII Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Cs Económicas y Afines*. Argentina.

Alvarado Verdín, V. M. (2015). Probabilidad y estadística: Serie Universitaria Patria: (ed.). Grupo Editorial Patria. https://acortar.link/ApzIq6

Contar lo Infinito. (13 de Mayo de 2016). *https://www.youtube.com/user/papapetitero/about*. Obtenido de Johann Carl Friedrich Gauss niño genio: https://www.youtube.com/watch?v=JG-yPNIXdbQ

Demana, F., Waits, B., Foley, G., & Kenedy, D. (2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. Mexico: Pearson.

Ferreiro Gravié, R. (2016). *Pasión por la Enseñanza. Las Competencias Profesionales Didácticas del Método ELI*. México: Grupo Editorial Unisan.

Gunderson, D. S. (2011). *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications*. . U.S.A.: C.R.C. Press.

llamaflame. (21 de Noviembre de 2018). INCREÍBLE EFECTO DOMINO - JUEGO DE DOMINO DE COLORES. EE. UU.. Obtenido de https://www.youtube.com/watch?v=7j6a1GRY13A

Miranda Nuñez, Y. R. (2020). Praxis educativa constructivista como generadora de Aprendizaje Significativo en el área de Matemática. *Revista Interdisciplinaria de Humanidades, Educación, Ciencia y Tecnología*, 141-163. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7390787.pdf

Ruiz, J., Flores, P., Ramírez, R., & Fernández, J. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación matemática, 31*(1), 121-143. doi:https://doi.org/10.24844/em3101.05

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo.* México: Cengage.

Swokowski, E. W. (2018). *Precálculo: Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. Cengage.