La Universidad Católica de Loja

Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica

Guía didáctica

Facultad Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)	IV

Autora:

Sonia Granda Sivisapa

EDUC_2147

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica

Guía didáctica

Sonia Granda Sivisapa

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-25-815-1

Año de edición: mayo, 2020

Edición: primera edición reestructurada en febrero 2025 (con un cambio del 25%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3 Competencias del perfil profesional

- Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física mediante la fundamentación teórico-práctico de los sistemas de conocimiento que, faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado. Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

- Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.
- Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.
- Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.
- Elaborar, ejecutar y evaluar proyectos y/o procesos de investigación que lleven a la recopilación, organización y análisis de información en el ámbito de las matemáticas y la física enfocados a la generación de nuevos conocimientos, habilidades y actitudes que aporten a la solución de problemas prácticos de su comunidad. Desarrollar, ejecutar y difundir proyectos pedagógicos y didácticos con metodologías activas e innovadoras, involucrando la matemática y la física, vinculados a la solución de problemas de la realidad y que apoyen la integración de los docentes con el entorno natural y social de la comunidad y del país en general.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

El limitado conocimiento en el campo del modelado, con funciones en general y trigonométricas en particular, no facilita la solución de los problemas del entorno natural y social, ocasionando un conocimiento teórico apartado de la realidad del estudiante.

El escaso uso de herramientas tecnológicas no permite practicar la matemática experimentalmente a través de herramientas gratuitas que están al alcance de todos, dificultando el logro de aprendizajes significativos.

A través del análisis y aplicación de la modelización con las funciones trigonométricas se aborda el objeto de estudio y naturaleza de la matemática, lo cual favorece para que esta ciencia se convierta en una herramienta primordial para el estudio de otras ciencias y un pilar para el desarrollo del pensamiento formal del estudiante.

La didáctica aplicada en la enseñanza de los conocimientos de matemática se enfoca al desarrollo de conceptos de manera teórica y textual, sin considerar que el aprendizaje deber ser experimental, partiendo de la manipulación de un material concreto, explorando detalles conceptuales que permiten plantear inquietudes, comunicando los aportes a otros estudiantes y docente, y verbalizando sus conclusiones matemáticas.

2. Metodología de aprendizaje

Con la finalidad de hacer que el estudio de la asignatura Sistemas de Conocimiento de Funciones Trigonométricas y su Didáctica, se convierta en una experiencia de aprendizaje permanente, se diseñan actividades y estrategias fundamentadas en una metodología activa, en donde los estudiantes acceden a los aspectos iniciales de la conceptualización teórica viendo micro videos y accediendo a recursos planteados en la EVA, mientras que el trabajo en contacto con el docente se convierte en un taller de aplicación, dando el enfoque experimental en esta segunda parte, de tal manera que, se consolidan los aprendizajes de manera experimental, apoyado en videoconferencias semanales que serán grabadas para aquellos estudiantes que no pudieron participar en línea.

Aunque no existe un procedimiento único, el estudio de este curso se fundamenta en el uso de la bibliografía sugerida, recursos abiertos en línea y microvideos, complementados con herramientas como cuestionarios interactivos e infografías. Se recomienda anticipar el estudio de los aspectos teóricos, los cuales serán consolidados posteriormente mediante la práctica experimental.

El desarrollo de los aportes, principalmente cuantificados, contará en algunos casos con la presencia física del profesor y, en su mayoría, con el apoyo de videoconferencias. Además, se fomentará el trabajo colaborativo, teniendo en cuenta los distintos estilos de aprendizaje y enfocándose en la consecución de resultados que orienten el desarrollo de las competencias.

Cada concepto partirá de la manipulación de material concreto, permitiendo así una exploración progresiva que facilite su comprensión y aplicación.

Observar situaciones de aprendizaje que posibilitan la comunicación entre compañeros y el profesor, finalizando con la verbalización en los escritos de aportes y conclusiones, todo este procedimiento relacionado con una metodología activa ABP. Para profundizar sobre los fundamentos que orientan esta metodología de aprendizaje, la invitación para acceder a través de metodología activa ABP.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Determina las funciones trigonométricas a través del método de la circunferencia o del triángulo rectángulo para modelar y resolver problemas cotidianos.

Para lograr este resultado de aprendizaje, se enfatiza la habilidad de determinar funciones trigonométricas mediante dos enfoques fundamentales: el método de la circunferencia unitaria y el método del triángulo rectángulo. Estos métodos permiten comprender y aplicar las funciones trigonométricas en la modelación y resolución de problemas cotidianos, haciendo los conocimientos adquiridos altamente relevantes en contextos prácticos. Durante el bimestre, se proporcionarán orientaciones detalladas que guiarán el proceso de aprendizaje. Cada semana, se presentarán los contenidos específicos a estudiar, acompañados de recursos relevantes y actividades de aprendizaje diseñadas para reforzar la comprensión teórica y práctica de estos conceptos. La evaluación del desempeño se realizará a través de tareas enfocadas en la aplicación de los métodos en problemas cotidianos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Unidad 1. Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria

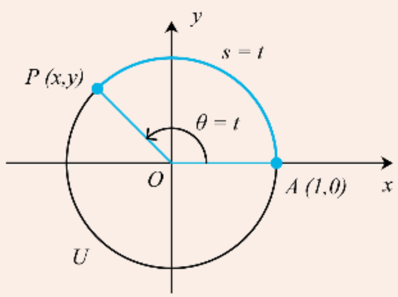
1.1 La circunferencia unitaria

Iniciamos considerando las funciones trigonométricas cuyo dominio están formados por números reales y no por ángulos. Para realizar la transición de ángulos a números reales debemos reconocer que a cada número real t corresponde un ángulo que mide t radianes.

Esta correspondencia se puede representar gráficamente con un círculo de radio 1 y centro en el origen en un sistema de coordenadas rectangulares.

Figura 1

Punto terminal y circunferencia unitaria



- La circunferencia es la gráfica de la ecuación $x^2+y^2=1$.
- t es un número real tal que $0<t<2\pi$.
- θ el ángulo en posición estándar, de medida t en radianes
- $P(x,y)$ es el punto de intersección del lado terminal de θ *y la* circunferencia unitaria U.
- s es la longitud del arco de circunferencia de $A(1,0)$ a $P(x,y)$.
- $s=r\theta$ es la longitud de un arco de circunferencia.
- t puede ser considerada como la medida en radianes del ángulo θ o como la longitud del arco de circunferencia AP en U.
- Para hallar los valores de funciones trigonométricas de números reales con una calculadora, usamos el modo de radianes.

Nota. Tomado de *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (p. 430) [Ilustración], por Swokowski y Cole, 2009, Cengage Learning Editores, CC BY 4.0.

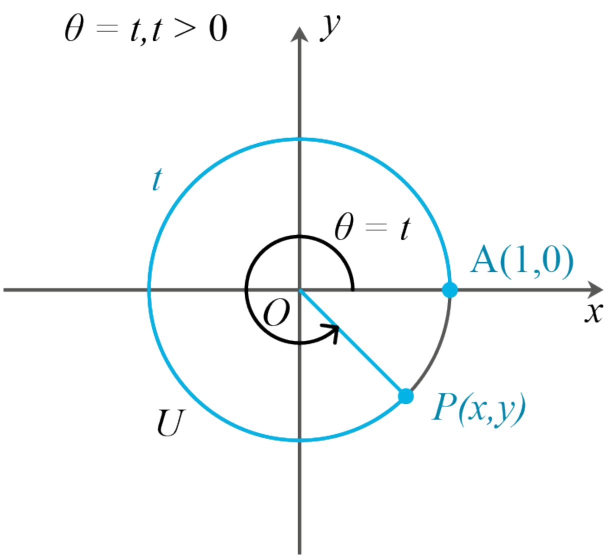
La figura muestra la representación gráfica del punto terminal y la circunferencia unitaria, se hace una descripción detallada de sus propiedades, las que le serán útiles en el aprendizaje de las funciones trigonométricas de números reales.

1.1.1 Puntos terminales en la circunferencia

El punto ***P (x,y)*** marcado en la figura 2 se denomina punto terminal determinado por el número real ***t.***

Figura 2

Punto terminal determinado por el número real



Nota. Tomado de *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica* (p. 430) [Ilustración], por Swokowski y Cole, 2009, Cengage Learning Editores, CC BY 4.0.

En la figura 2, usted observa un número real cualquiera ***t*** no negativo ubicado en la circunferencia unitaria, fundamental para el aprendizaje de las funciones trigonométricas de números reales.

Considere que el ángulo ***θ*** de medida ***t*** en radianes ha sido generado al girar el segmento de recta ***O A*** alrededor de ***O*** en la dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, entonces ***t*** es la distancia a lo largo de ***U*** que ***A*** viaja antes de llegar a su posición final ***P (x,y).***

1.1.2 El número de referencia

Le planteo usar la idea del número de referencia para ayudarse a encontrar puntos terminales, ya que, para encontrar un punto terminal en cualquier cuadrante, solo necesitamos conocer el punto terminal correspondiente en el primer cuadrante.

El número de referencia ***t*** asociado con ***t*** es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por ***t*** y el eje ***x***. Siempre que sea un número real.

Estimado estudiante, para una mejor comprensión de los contenidos de esta semana, se recomienda consultar el capítulo 5, sección 5.1 del libro de texto Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011). En este capítulo encontrará una explicación detallada de los conceptos fundamentales que abordaremos

Stewart et al. (2012) nos invitan a explorar el mundo de las funciones trigonométricas a través de la circunferencia unitaria. La figura 1 le ayudará a visualizar estos conceptos. ¡Analíce detenidamente y luego intente resolver los ejercicios propuestos para consolidar sus conocimientos!

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para afianzar sus conocimientos introductorios a las funciones trigonométricas, le recomiendo desarrollar las siguientes actividades:

1. Complete las siguientes proposiciones:

   a. Sea ***P (x,y)*** el punto terminal en la circunferencia unitaria determinada por ***t***. Entonces

      - sin t =
      - cos t =
      - *tan tan t* =

   d. Si ***P (x,y)*** está en la circunferencia unitaria, entonces ***x2*** + ***y2 =***

Así, para toda ***t*** tenemos ***sin***2 ***t + cos***2 ***t =***

2. Encuentre la coordenada faltante de ***P***, usando el hecho de que ***P*** se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

   Ejercicio 1

Coordenadas	Cuadrante
$P(-\frac{3}{5}, \ )$	***I*** ***I*** ***I***

3. Encuentre el punto terminal ***P (x,y)*** en la circunferencia unitaria, determinado por el valor de ***t. t*** = ***4π***

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al completar esta actividad, usted ha podido evidenciar su aprendizaje sobre la circunferencia unitaria. Si ha encontrado alguna dificultad, le recomiendo revisar nuevamente la bibliografía sugerida en esta sección, con el fin de reforzar sus conocimientos y alcanzar los resultados de aprendizaje esperados.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Detrás de los sueños siempre hay esfuerzos que la gente no ve."

¡Siga adelante!

Semana 2

Unidad 1. Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria

Estimado estudiante, en la semana anterior iniciamos con el estudio de las funciones trigonométricas, haciendo hincapié en la circunferencia unitaria, con lo que usted está preparado para estudiar el siguiente tema.

1.2 Funciones trigonométricas de números reales

1.2.1 Las funciones trigonométricas

Haciendo uso de las propiedades de la circunferencia unitaria, se define el valor de una función trigonométrica de un número real ***t*** como el valor del ángulo de ***t*** radianes, siempre que ese valor exista.

Hemos revisado cómo se asocia cada número real ***t***, a un punto único ***P (x,y)*** en ***U***. Recuerde, a ***P (x,y)*** lo llamamos **punto sobre la circunferencia unitaria *U* que corresponde a *t*.** Las coordenadas ***(x,y)*** de ***P*** se pueden usar para hallar las seis funciones trigonométricas de ***t***. Entonces, por la definición de las funciones trigonométricas de números reales junto con la definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, vemos que:

Tabla 1
Definición de las funciones trigonométricas

Definición de las funciones trigonométricas	
$sen\ t = sen\ \Theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y$	$csc\ t = csc\ \Theta = \frac{1}{y}(y \neq 0)$
$\cos t = \cos \Theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x$	$\sec t = \sec \Theta = \frac{1}{x} = (x \neq 0)$
$\tan t = \tan t\Theta = \frac{y}{x}(x \neq 0)$	$\cot t = \cot t\Theta = \frac{x}{y}(y \neq 0)$

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo, por* Stewart, Redlin y Watson, 2017, p. 409, México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A.

En esta tabla usted puede apreciar las razones que determinan las funciones trigonométricas en el círculo unitario, también conocidas con el nombre de **funciones circulares,** estas razones le ayudarán a determinar el valor de cualquier función trigonométrica de un número ***t***.

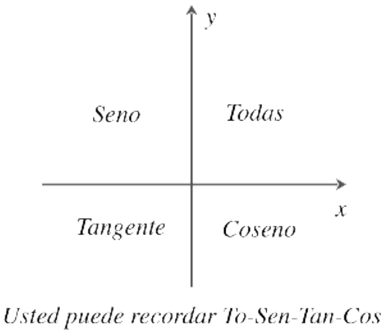
1.2.2 Valores de las funciones trigonométricas

Los valores de las funciones trigonométricas para cualquier número real t podrán ser calculados si previamente se determinan sus signos, los que dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de ***t***. Estos signos se explican seguidamente.

Tomando en cuenta el siguiente nemónico, usted podrá recordar los signos de las funciones trigonométricas de acuerdo a la siguiente figura:

Figura 3

Signos de las Funciones Trigonométricas



Funciones	Cuadrantes			
	I	*II*	*III*	*IV*
	To	Sen	Tan	Cos
scn	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−
scc	+	−	−	+
csc	+	+	−	−

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 412), por Stewar et al., 2012, Cengage Learning Editores. CC BY 4.0.

Esta figura expresa cómo varían los signos de las funciones trigonométricas alrededor de la circunferencia unitaria, en sentido contrario a las manecillas del reloj, en cada cuadrante, entender los signos le ayudará a usted, querido estudiante, a determinar el signo correcto de una función trigonométrica en cualquier posición de la circunferencia unitaria.

A continuación, procedo a explicarle los pasos para determinar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier número real por medio de algunos ejemplos, le recomiendo analizar e interiorizar cada uno de ellos.

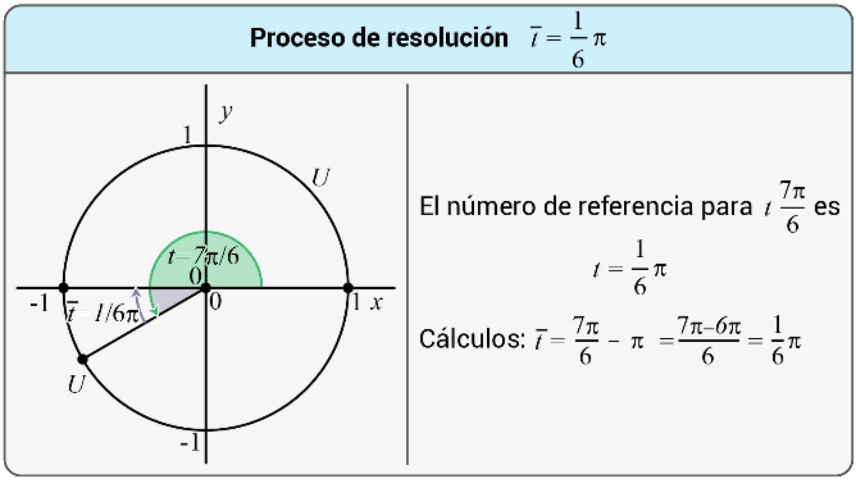
Ejemplo modelo

Enunciado: encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado $\frac{7\pi}{6}$.

i. **Encontrar el número de referencia.** Determine el número de referencia asociado con ***t****_* asociado con ***t***.

Figura 4

Proceso de Resolución



Nota. Granda S., 2020.

En la figura 4, usted querido estudiante, puede observar el proceso para encontrar el número de referencia como solución del problema dado, es conveniente que analice los elementos de la gráfica solución.

ii. **Encontrar el signo.** Determine el signo de la función trigonométrica de ***t*** indicando el cuadrante en el que se encuentra el punto terminal.

Como usted puede observar en la gráfica del ejemplo, el punto terminal de $t = \frac{7\pi}{6}$ está en el tercer cuadrante, por lo que $sen(\frac{7\pi}{6})$ es negativo.

iii. **Encontrar el valor.** El valor de la función trigonométrica de ***t***. Es igual, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de t.

Ya que $sen(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ Podemos concluir que: $sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

1.2.3 Identidades fundamentales

Una identidad trigonométrica es una ecuación o fórmula donde intervienen funciones trigonométricas, que es válida para todos los ángulos o números reales para los cuales están definidos ambos lados de la igualdad.

Tabla 2
Identidades fundamentales

Identidades fundamentales	
Identidades recíprocas	$csc\ t = \frac{1}{sen\ t}$
	$\sec t = \frac{1}{\cos t}$
	$\cot t = \frac{1}{\tan t}$
	$\tan t = \frac{sen\ t}{\cos t}$
	$\cot t = \frac{\cos t}{sen\ t}$
Identidades de Pitágoras	$sen2 = cos2t = 1$
	$tan^2 t\ 1 = \sec^2 t$
	$1 + \cot^2 t + 1 = \csc^2 t$

Nota. Tomado de Precálculo. *Matemáticas para el cálculo,* por Stewart, Redlin y Watson, 2017, p. 415, México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A.

En la tabla 2, usted puede apreciar las identidades recíprocas y pitagóricas necesarias para determinar funciones trigonométricas de números reales a partir de una función dada.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para fortalecer su aprendizaje, resuelva las actividades propuestas a continuación:

1. Elabore un cuestionario sobre los fundamentos teóricos de esta semana. Aproveche diversos recursos abiertos para investigar más a fondo, lo que enriquecerá su comprensión y le permitirá abordar los temas con mayor profundidad y seguridad.
2. Para comprender eficientemente las funciones trigonométricas de números reales, y que usted pueda desarrollar de forma pertinente el foro académico calificado de esta semana, le invito a:

    a. Observar atentamente el video titulado "Trigonometría. Relación entre ángulos".
    En este video se expone la forma cómo se calculan razones trigonométricas sin utilizar calculadora, empleando la circunferencia unitaria.
    b. Las identidades trigonométricas son fundamentales para resolver ecuaciones y simplificar expresiones. Le recomiendo revisar la sección 6.3 del libro de Swokowski para familiarizarse con las identidades más importantes y su aplicación

3. Compruebe lo aprendido resolviendo los siguientes ejercicios:

    1. Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado. $tan\frac{7\pi}{6}$
    2. Encuentre el valor (si está definido) de cada una de las seis funciones trigonométricas en el número real dado. Use sus respuestas para completar la tabla.
    $t = 0, t = \pi, t = \frac{\pi}{2}, t = \frac{3\pi}{2}$

Ejercicio 2

t	*sen t*	*cos t*	*tan t*	*csc t*	*sec t*	*cot t*
0	0	1		**indefinido**		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			**indefinido**
$\frac{3\pi}{2}$						

4. Escriba la primera expresión en términos de la segunda, si el punto terminal determinado está en el cuadrante dado.

   t*, cos cos *t*; *cuadrante II

5. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

   $sent = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de ***t*** está en el cuadrante ***IV***.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de estas actividades, usted ha tenido la oportunidad de evidenciar su aprendizaje sobre las funciones trigonométricas de números reales. Si ha experimentado alguna dificultad, es recomendable revisar nuevamente la bibliografía recomendada para alcanzar los resultados de aprendizaje esperados.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Solo tendrás éxito si crees que puedes tenerlo"

¡Siga adelante!

Semana 3

Unidad 1. Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria

1.3 Gráficas trigonométricas

Las gráficas son herramientas fundamentales para entender el comportamiento de una función, ya que permite representar información compleja de manera visual y fácilmente interpretable. En esta unidad, usted aprenderá a trazar las gráficas de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante, así como alguna de sus transformaciones.

1.3.1 Gráficas de las funciones seno y coseno

Para que empiece a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, debe tomar en cuenta los siguientes aspectos:

- Teorema en valores de función repetidos para ***sen y cos***. Si ***n*** es cualquier entero, entonces:
  - $(t + 2\pi n) = t$
  - $\cos \cos (t + 2\pi n) = \cos \cos t$
- Definición de función periódica: Una función ***f*** es **periódica** si existe un número real positivo ***k***, tal que:
  - $f(t + k) = f(t)$ para toda ***t*** en el dominio de ***f***
  - El número real positivo ***k*** mínimo, si existe, es el **periodo** de ***f***
- El periodo de las funciones seno y coseno es **2π**.
- El dominio de la función seno y coseno son todos los reales.
- El rango de la función seno y coseno está en el intervalo **[-1,1].**

- Si usamos el hecho de que las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π, se obtendrán gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo subsiguiente de longitud 2π.
- La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen.
- La gráfica de la función coseno es simétrica con respecto al eje y.
- La función seno es una función impar.
- La función coseno es una función par.
- Como deseamos trazar estas gráficas en un plano ***xy***, sustituimos la variable ***t*** por ***x*** y consideramos las ecuaciones:
    - $y = \operatorname{sen} x$
    - $y = \cos x$
- Podemos considerar ***x*** como la medida de cualquier ángulo en radianes, pero, en cálculo, ***x*** suele ser considerada como número real. Estos son puntos de vista equivalentes, porque el seno (o coseno) de un ángulo de ***x*** radianes es el mismo que el seno (o coseno) del número real ***x***.
- La variable y denota el valor de la función que corresponde a ***x***.
- Para graficar las funciones seno y coseno, debe elaborar una tabla que contenga una lista de coordenadas de varios puntos, en las gráficas de $y = x$ y $y = \cos \cos x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

1.3.2 Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

Una vez que hemos aprendido a graficar las funciones seno y coseno, en esta sección consideraremos las gráficas de las ecuaciones:

- $y = k(x - b)$
- $y = k(x - b)\ (k > 0)$

Para números reales ***a***, ***b***, ***k***, amplitud $|a|$, periodo $\frac{2\pi}{k}$ y desplazamiento horizontal ***b***.

La idea es graficar estas funciones, las que son transformaciones de las funciones seno y coseno a partir de sus tablas de valores, para no localizar demasiados puntos. Las gráficas que se obtendrán son muy importantes para la comprensión de las aplicaciones de las funciones trigonométricas, específicamente el movimiento armónico.

Estudiaremos las transformaciones de las funciones seno y coseno considerando dos casos:

a. **Caso especial**: ***c* = 0** y ***b* = 1**, es decir, ***y* = *a sen sen k x*** y ***y* = *a cos cos k x***.

(*k* > 0), amplitud | ***a*** | y periodo $\frac{2\pi}{k}$

Podemos hallar las coordenadas y de puntos sobre las gráficas si multiplicamos por las coordenadas y de puntos en las gráficas de:

y* = *x y ***y* = *cos cos x***.

Ejemplo ilustrativo: para graficar ***y* = *x*** multiplicamos por 2 la coordenada ***y*** de cada punto sobre la gráfica de ***y* = *x*** y obtenemos la siguiente tabla de valores.

Tabla 3

Valores de la función y = x

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$sen\ x$	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0
$2\ sen\ x$	0	1.42	2	1.42	0	-1.42	-2	-1.42	0

Nota. Tomado de *Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno* (p. 28), por Granda, S., EdiLoja.

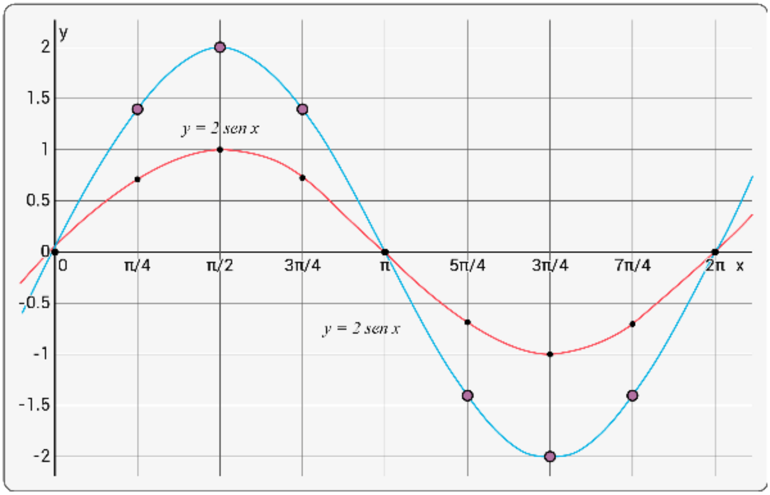
En esta tabla puede observar los valores que se obtiene al evaluar la función ***y* = *x***, para esto usted debe emplear su calculadora científica en modo radianes.

Estos valores nos permiten realizar la siguiente gráfica, donde por comparación también observamos la gráfica de ***y* = *x***.

El procedimiento es el mismo que para estirar verticalmente la gráfica de una función cualquiera.

Figura 5

Gráfica de y = x



Nota. Granda S., 2020.

En esta figura usted puede observar la gráfica de la función dada, donde claramente, se observan sus elementos, los explico a continuación: El número | ***a*** | se denomina **amplitud** y en nuestro ejemplo | ***a*** | = **2**

El periodo $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Entonces, hay una onda senoidal de amplitud 2 en el intervalo **[0,2 *π*].**

b. **Caso:** curvas de seno y coseno desplazados. ***y*** = ***k*** **(** **x** **-** ***b*** **)**

y = ***k*** **(** ***x*** **-** ***b*** **)** ***k*** **> 0** amplitud | ***a*** |, periodo $\frac{2\pi}{k}$ y desplazamiento. horizontal **b**. Intervalo para trazar la gráfica de un periodo completo $\left[b, b+\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right]$.

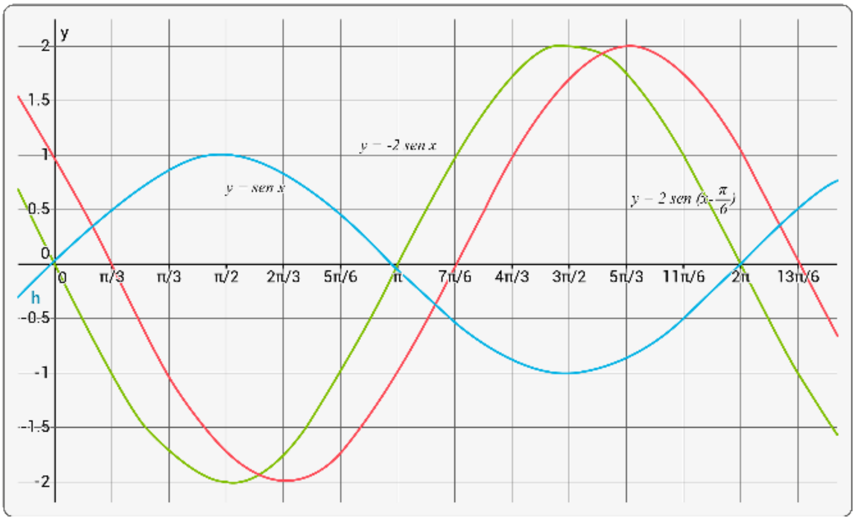
Ejemplo ilustrativo: Para graficar $y=-2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ debemos desplazar la gráfica desde una distancia 2, verticalmente hacia abajo por el signo negativo, esto hace que la función original se refleje, se constituye la amplitud de la gráfica, desplazarla $\frac{\pi}{6}$, en un periodo de y graficarla en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$.

Cálculos:

1. | ***a*** | = | **- 2** | = **2**
2. Periodo $=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$
3. $desface\ = b\ =\frac{\pi}{6}\ a\ la\ derecha$
4. Intervalo para graficar un periodo completo:
   $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\frac{\pi+12\pi}{6}\right]=\left[\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\right]$
   $\left[b, b+\left(\frac{2\pi}{k}\right)\right]=\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+\left(\frac{2\pi}{1}\right)\right]=\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}+2\pi\right]=$

Figura 6

Gráfica de la función seno y sus transformaciones



Nota. Granda S., 2020.

La figura 6, muestra las transformaciones de la función seno, le recomiendo analizar la gráfica y compararlas entre sí para comprender el desplazamiento horizontal, vertical y desfase.

Valores de la función $y = -2sen(x - \frac{\pi}{6})$

Para una mejor comprensión, analice la tabla de datos donde usted puede apreciar las transformaciones de la función.

Tabla 4

Tabla de valores de funciones de $y = -2sen(x - \frac{\pi}{6})$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
$y = sin\ x$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	0.5
$y = -2\ sen\ x$	0	-1	-1.73	-2	-1.73	-1	0	1	1.73	2	1.73	1	0	-1
$y = -2\ sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$	0	0	-1	-1.73	-2	-1.73	-1	0	1	1.73	2	1.73	1	0

Nota. Tomado de *Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno* (p. 28), por Granda, S., EdiLoja.

En esta tabla puede observar los valores que se obtiene al evaluar la función: $y = -2sen(x - \frac{\pi}{6})$

Para esto, usted debe emplear su calculadora científica en modo radianes.

Continuando con el estudio de las funciones trigonométricas, ahora vamos a aprender a trazar la gráfica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante, y sus transformaciones.

1.3.3 Gráfica de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Las gráficas de las funciones muestran muchas de sus propiedades, por esta razón, para empezar a trazarlas debe tomar en cuenta los aspectos de cada una de ellas, que se detallan en el módulo didáctico titulado "Propiedades de las funciones".

Propiedades de las funciones

Finalmente, estos resúmenes le ayudarán a sistematizar los contenidos teóricos de esta unidad, por lo que, le recomiendo estudiarlos minuciosamente para su total comprensión y aplicación en la resolución de problemas de modelado con funciones trigonométricas de números reales.

1.3.4 Gráfica de transformaciones de las funciones tangente y cotangente

Los métodos que usted aprendió para graficar transformaciones de las funciones seno y coseno se pueden aplicar a las funciones tangente y cotangente, tomando en cuenta algunas diferencias que se dan por la presencia de las asíntotas.

Para graficar las transformaciones de las funciones tangente y cotangente, debe tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

- Para algunas gráficas de tangente y cotangente, debe empezar por trazar la parte entre asíntotas sucesivas y luego debe repetir ese patrón a derecha e izquierda.
- La gráfica de $y = a \tan x$ para $a > 0$ se puede obtener al multiplicar a por la coordenada de cada punto en la gráfica $y = \tan x$.
- Si la gráfica de $y = a \tan x$ para $a < 0$, entonces también usamos una reflexión alrededor del eje x.
- Como la función tangente tiene periodo π, es suficiente trazar la ramanentre las dos asíntotas verticales sucesivas con: $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$.
- Las funciones $y = a \tan kx$ y $y = a \cot kx$ ($k > 0$) tiene un periodo $\frac{\pi}{k}$

- $\left(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}\right)$ es el intervalo apropiado para trazar la gráfica de un periodo de $(y = a\tan kx)$
- $\left(0, \frac{\pi}{k}\right)$ es el intervalo apropiado para trazar la gráfica de un periodo de $y = a\ cot\ kx$

Ejemplo ilustrativo : trazar la gráfica de la función$y = tan2(x - \frac{\pi}{3})$

Solución:$(-\frac{\pi}{k}), \frac{\pi}{2k}e$

a. Cálculo del periodo: $\frac{\pi}{k} = \frac{\pi}{2}$
b. Cálculo del intervalo apropiado:

$$(-\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k}) = (-\frac{\pi}{2(2)}, \frac{\pi}{2(2)}) = (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$$de ***y* = tan 2 *x***.

c. Cálculo del intervalo apropiado.
d. La gráfica está desplazada a la derecha $\frac{\pi}{3}$
e. El intervalo debe ser desplazado $\frac{\pi}{3}$ a la derecha .

$$(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = (\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$$

f. Se identifican los puntos extremos del intervalo $x = \frac{\pi}{12}$ y $x = \frac{7\pi}{12}$ y que se constituyen en asíntotas verticales.
g. Se elabora la tabla de valores:

Tabla 5

Valores de $y = \tan 2(x - \frac{\pi}{3})$

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$
$y = \tan 2x$	0.58	1.73	indefinido	-1.73	-0.58	0	0.58
$y \tan 2\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	indefinido	-1.73	-0.58	0	0.58	1.73	indefinido

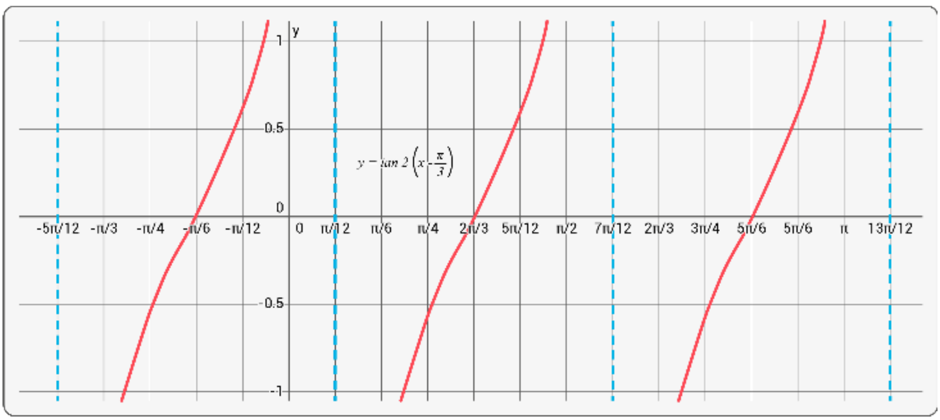
Nota. Tomado de *Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno* (p. 36), por Granda, S., EdiLoja.

En esta figura puede observar la tabla de valores que se obtiene al evaluar la función $y = tan2(x - \frac{\pi}{3})$, para esto usted debe emplear su calculadora científica en modo radianes.

h. Finalmente, trazamos la gráfica de un periodo en la forma de tangente en el intervalo $\left(\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$ y se puede repetir la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha, tome en cuenta las asíntotas.

Figura 7

Gráfica de y = tan tan $2(x - \frac{\pi}{3})$



Nota. Granda S., 2020.

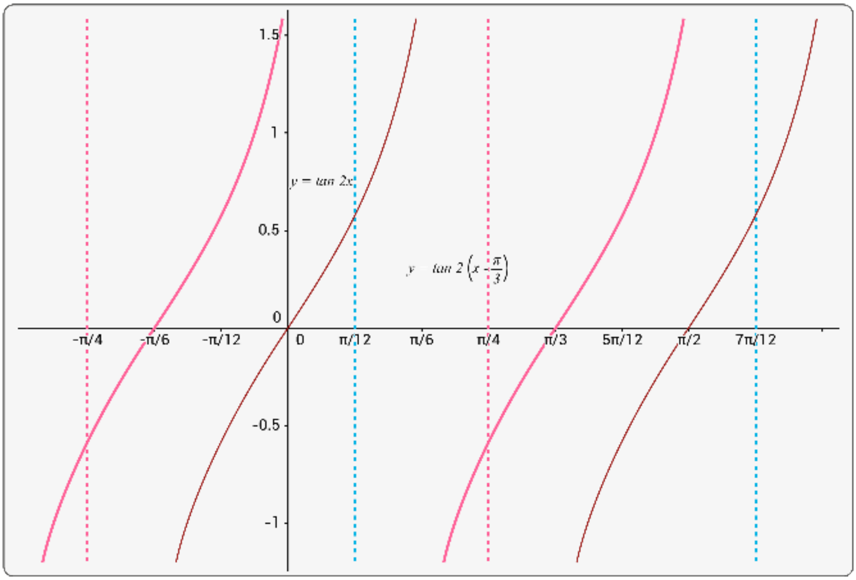
En esta figura puede apreciar el comportamiento de la función tangente, es muy importante que usted identifique las asíntotas y las características de esta función trigonométrica.

En la siguiente gráfica usted puede apreciar las gráficas de las funciones:

$y = tan2x,\ y = tan2\ (x - \frac{\pi}{3})$, y el desplazamiento

Figura 8

Gráfica de y = tan tan2x ,y = tan tan $2(x - \frac{\pi}{3})$



Nota. Granda S., (2020).

La figura 8, muestra las transformaciones de la función tangente, le recomiendo analizar la gráfica y compararlas entre sí, para comprender sus variaciones e identificar una a una sus propiedades.

Luego de analizar los procesos desarrollados en estos ejemplos modelo, lo animo a realizar sus propias gráficas, empleando su calculadora de pantalla gráfica y/o geogebra.

1.3.5 Gráfica de transformaciones de las funciones cosecante y secante

Hemos avanzado paso a paso con las gráficas de las funciones trigonométricas, ahora nos corresponde graficar las funciones cosecante y secante: sabemos que estas funciones son las recíprocas de las funciones seno y coseno, por lo que, los procesos antes revisados son la base para trabajar esta sección.

Tome en cuenta que las funciones ***y = a csc kx*** y ***y = aseckx*** **(** ***k*** **> 0)** tienen periodo $\frac{2\pi}{k}$

El intervalo $\left(0, \frac{2\pi}{k}\right)$ se considera apropiado para trazar la gráfica de un periodo completo.

Las gráficas que contienen funciones secante y cosecante se puede obtener con métodos semejantes a aquellos empleados para tangente o cotangente, o tomando recíprocos de gráficas correspondientes de las funciones coseno y seno, por lo que, recomiendo realizar sus propias gráficas, empleando su calculadora de pantalla gráfica y/o geogebra.

Actividad de aprendizaje recomendada

Compruebe lo aprendido desarrollando las siguientes actividades.

1. Le recomiendo responder las interrogantes presentes en la bibliografía sugerida y ampliar su conocimiento a través de la investigación.
2. Responda las preguntas del libro de GeoGebra. No olvide profundizar su conocimiento a través de la investigación.
3. Observar atentamente el video titulado Funciones trigonométricas , donde se presenta una explicación visual de cómo se representan gráficamente estas funciones. Este video permite comprender de manera más clara y dinámica las características y el comportamiento de las funciones trigonométricas, facilitando su interpretación y aplicación.

4. Leer comprensivamente el libro [Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011)]() de la biblioteca virtual de la universidad, capítulo 5 sección 5.3 correspondiente al contenido de la unidad Gráficas trigonométricas, aquí usted encontrará el fundamento teórico necesario para su aprendizaje.
5. Compruebe lo aprendido resolviendo los siguientes ejercicios:

   a. Si una función ***f*** es periódica con periodo ***p***, entonces ***f* (*t* + *p*)**

      i. = ____________ para todo ***t***. Las funciones trigonométricas ***y*** = **sen x** y **y**
      ii. = **cos x** son periódicas, con periodo _______ y amplitud __________ .

   b. Trace una gráfica de cada función en el intervalo **[0 , 2 π**].
   c. La función trigonométrica **f (x)** = **tanx** tiene un periodo _________ y asíntota **x** = ________ .Trace una gráfica de esta función en el

      i. intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

   d. La función trigonométrica **y** = **csc x** tiene un periodo y asíntotas x = .Trace la gráfica de esta función, en el intervalo **(- π , π)**.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con estas actividades, habrá evidenciado su aprendizaje sobre las funciones trigonométricas de números reales. Si tuvo dificultades, consulte la bibliografía recomendada y herramientas como Khan Academy y GeoGebra, para profundizar y alcanzar los resultados esperados.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Antes que nada, la preparación es la llave del éxito"

Alexander Graham Bell

¡Siga adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 4

Unidad 1. Funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria

1.4 Modelado de movimiento armónico

Las funciones trigonométricas son útiles en la investigación de movimiento vibratorio u oscilatorio, por ejemplo, el movimiento de una partícula en una cuerda de guitarra en vibración o un resorte que se ha comprimido o alargado y luego se suelta para oscilar en una y otra dirección. Tomando en cuenta que este tipo de desplazamiento de partículas obedece al movimiento armónico, le invito a estudiar con mucha atención la siguiente sección que le explicará las propiedades, ecuaciones y aplicación de dicho movimiento.

1.4.1 Movimiento armónico simple

Un punto que se mueve en una recta coordenada está en movimiento armónico simple si su distancia a desde el origen en el tiempo está dada por:

$$y = a\,\mathrm{sen}\,\omega\, t \text{ o } y = a \cos \omega\, t$$

Debe tener en cuenta que es el desplazamiento máximo del cuerpo. ***periodo*** = $\frac{2\pi}{w}$ es el tiempo requerido para completar un ciclo y ***frecuencia*** = $\frac{w}{2\pi}$ son el número de ciclos por unidad de tiempo.

Ejemplo modelo de problema de aplicación

- **Un corcho que sube y baja.** Un corcho que flota en un lago sube y baja en movimiento armónico simple. Su desplazamiento por encima del fondo del lago está modelado por:

$$y = 0.2 \cos 20\pi t + 8$$

Donde ***y*** se mide en metros y ***t*** en minutos.

a. Encuentre la frecuencia del movimiento del corcho.
b. Trace una gráfica de ***y.***
c. Encuentre el desplazamiento máximo del corcho por encima del fondo del lago.

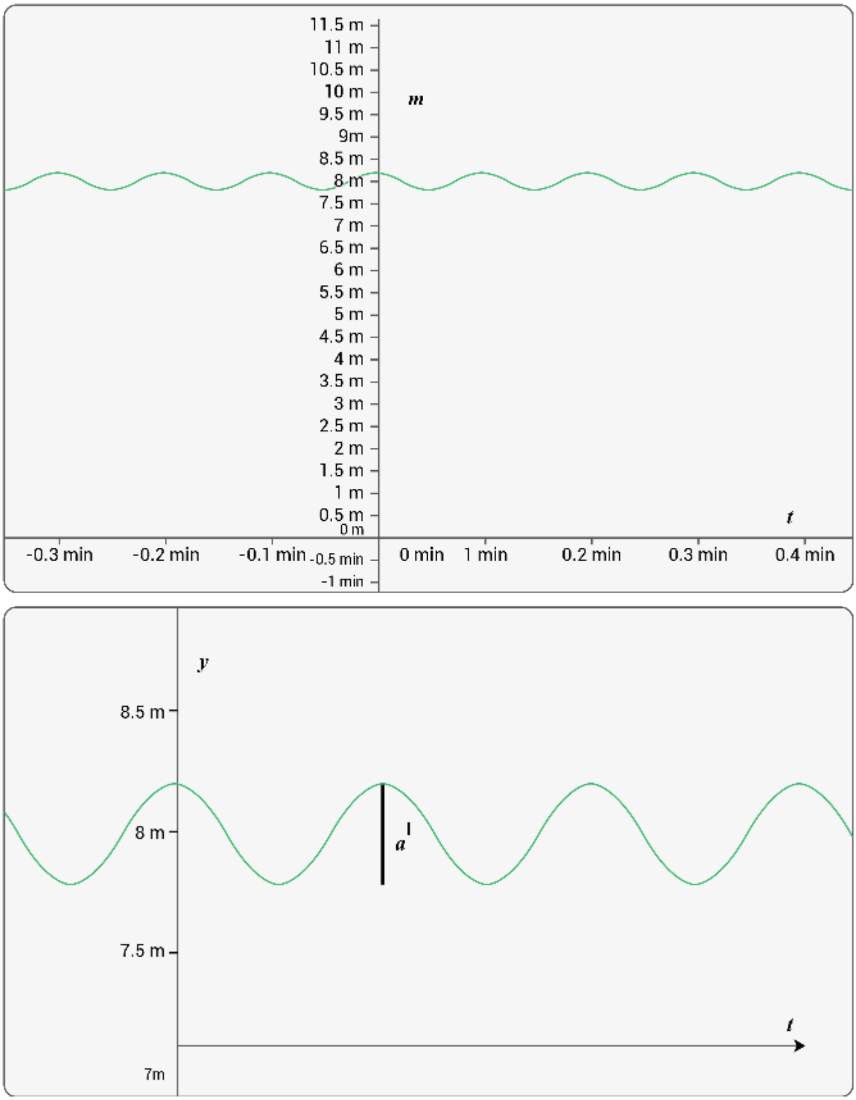
Solución:

De las fórmulas para la frecuencia obtenemos:

a. $frecuencia : \frac{w}{2\pi} = \frac{20\pi}{2\pi} = \ 10 \ ciclos \ por \ segundos \ Hz$
b. Al trazar las gráficas de *y* podemos apreciar cómo se ha desplazado 8 m a partir del origen fig.1 y en la fig.2, empleando un Zoom a la gráfica, podemos observar con claridad la amplitud del movimiento armónico. La gráfica del desplazamiento del corcho en el tiempo se ilustra a continuación.

Figura 9

Gráfica original y ampliada de modelado de movimiento armónico del lago



Nota. Granda S., 2020.

En esta figura usted puede apreciar la gráfica que genera el movimiento del agua del lago, del problema planteado como ejemplo, aquí se evidencia el modelado del movimiento armónico simple.

c. El desplazamiento máximo del corcho por encima del fondo del lago es |**a**| = **0.4**

1.4.2 Movimiento armónico amortiguado

Si tomamos en cuenta que todos los osciladores reales están sometidos a alguna fricción, que generan fuerzas disipativas, que llevan a cabo un trabajo que es transformado en calor, y es disipado fuera del sistema, salvo que alguna fuerza externa lo mantenga, seremos conscientes del amortiguamiento.

Este amortiguamiento da lugar al movimiento armónico amortiguado y es el tema de estudio de esta sección, tomando en cuenta que es una variante del movimiento armónico, donde su amplitud, responderá a la función $a(t) = Ke^{-ct}$, lo que genera una variación que usted puede observar en las gráficas de la bibliografía sugerida.

Si un cuerpo se desplaza y en un tiempo t y la ecuación que describe es: $y = ke^{-ct} senwt$ o $y = ke^{-ct} coswt (c > 0)$ entonces el cuerpo está en movimiento armónico amortiguado, recuerde que:

$$c = constante\ de\ amortiguamiento,\ k = amplitudincial,\ periodo = \frac{2\pi}{w}$$

Mediante la resolución de problema de modelado del movimiento armónico amortiguado, podrá entender las características y propiedades del mismo, por lo que le invito a revisar y analizar el siguiente problema de aplicación.

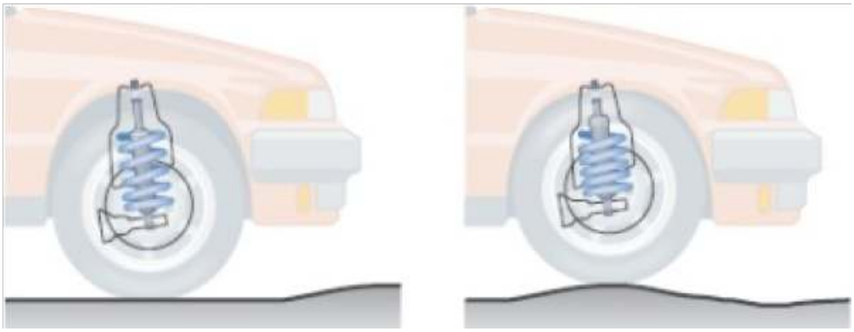
Ejemplo modelo de problema de aplicación

- **Amortiguador de un auto:** cuando un auto golpea contra un tope del camino, el amortiguador del auto se comprime una distancia de 6 pulgadas y luego se expande (vea la figura: amortiguador de auto). El amortiguador vibra en movimiento armónico amortiguado con frecuencia de dos ciclos por segundo. La constante de amortiguamiento para este amortiguador en particular es 2.8.

a. Encuentre una ecuación que describa el desplazamiento del amortiguador a partir de su posición de reposo como función del tiempo. Tome ***t*** = **0** como el instante en que se expande el amortiguador.
b. ¿Cuánto tiempo tarda la amplitud de la vibración en disminuir a 0.5?, pulg.?

Figura 10

Amortiguador de un auto



Nota. Tomado de *álgebra y trigonometría analítica* [Ilustración], por Cole, J., Cole, J., 2011, p. 459, Cengage Learning, CC BY 2.0.

<u>Solución</u>:

1. Datos: se procede a tomar los datos del enunciado del problema, luego de leerlo comprensivamente, usted debe identificar los datos y las incógnitas.

   a = **6 *pulg frecuencia* = 2 *Hz***

   constante de amortiguamiento = **2.8**

   t = **0**

   t = **?**

   a = 0.5 pulg

2. De la fórmula de la frecuencia $f = \frac{w}{2t}$ se despeja ***w* = 2 × *f*** Calculamos

   w* = 2** (**2 *π) --> ***w* = 4 *π***

3. Tomamos el modelo $y = ke^{-ct} senwt \rightarrow y = 6e^{-2.8t} sen4\pi t$ ya que según la indicación del problema, el movimiento inicia con cero desplazamiento.
4. Para determinar el tiempo en que tarda la amplitud de la vibración en disminuir a 0.5 pulg., tomamos en cuenta que la amplitud está gobernada por el coeficiente ke^{-ct} en las ecuaciones para movimiento armónico amortiguado. Entonces:

$$a(t) = ke^{-ct}$$

   Siendo ***a* (*t*) = 0.5**, entonces

$$a\,(t) = 0.5 = 6e^{-2.8t}$$

$$0.5 = 6e^{-2.8t}$$

$$\frac{0.5}{6} = e^{-2.8t}$$

$$ln\left(\frac{0{,}5}{6}\right) = ln\left(e^{-2.8t}\right)$$

$$ln\left(\frac{0.5}{6}\right) = -2.8t\ ln\ (e)$$

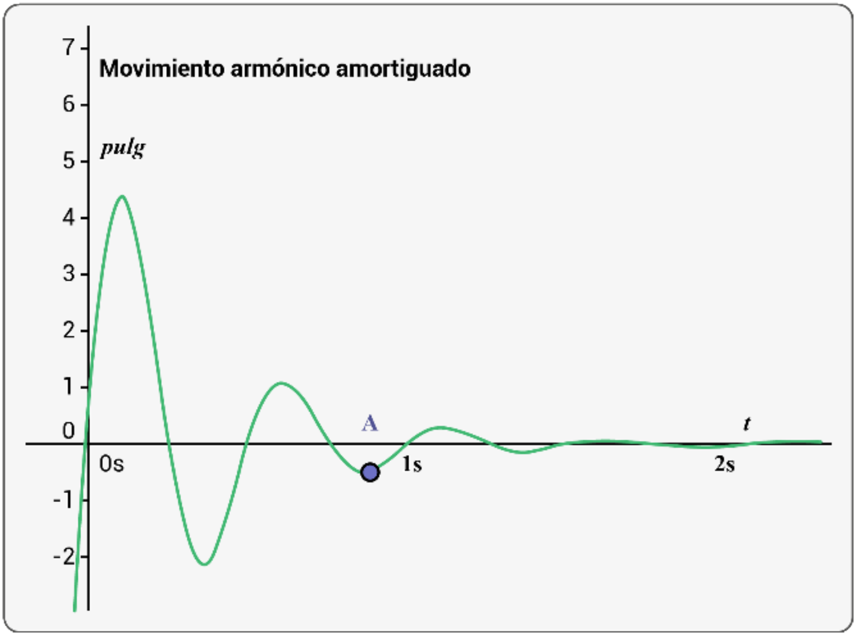
$$ln\left(\frac{0.5}{6}\right) = -2.8t$$

$$t = 0.8874s$$

5. Procedemos a graficar el modelo y obtenemos la vibración del amortiguador a lo largo del tiempo, usted lo puede apreciar en la siguiente figura:

Figura 11

Gráfica de modelado de movimiento del amortiguador



Nota. Granda S., (2020).

La figura 11, muestra la gráfica del modelado del movimiento generado por el amortiguador del auto presentado en el problema de aplicación, le recomiendo, estimado estudiante, el análisis exhaustivo de dicha figura para comprender su comportamiento.

1.4.3 Fase y diferencia de fase

Si consideramos dos objetos que se encuentran en movimiento armónico simple y tienen las mismas frecuencias, es importante determinar si los objetos se están moviendo juntos o cómo difieren estos movimientos.

En esta sección abordaremos la fase y diferencia de fase que se puede dar en ondas modeladas por las curvas seno. Esta curva seno puede ser expresada en las siguientes formas equivalentes: $y = Asen(kt - b)$ la fase es b, $Asenk\left(t - \frac{b}{k}\right)$ .El desfase es $\frac{b}{k}$. Para comprender la diferencia de fase consideremos dos funciones:

y1 = ***Asen*** (***kt*** - ***b***) y ***y1*** **=** ***Asen*** (***kt*** **-** ***c***), la diferencia de fase entre la primera función y la segunda: ***y1*** y ***y2***, es ***b*** **-** ***c***. Finalmente, usted debe tomar en cuenta que si la diferencia de fase es un múltiplo de **2*π***, las ondas están en fase, caso contrario, las ondas están fuera de fase.

Mediante la resolución de problemas de fase y diferencia de fase, podrá entender las características y propiedades del mismo, por lo que le invito a revisar y analizar el siguiente ejemplo:

Para la siguiente cuerda, encuentre la amplitud, el periodo, la fase y el desfase.

$$y = 5sen\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Solución:

Amplitud ***a*** = **5**

Periodo = $\frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Fase = $\frac{\pi}{2}$

Para encontrar el desfase factorizamos:

$$y = 5sin(2t - \tfrac{\pi}{2}) \rightarrow \; y = 5sin2\left(\frac{2t}{2} - \frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) \rightarrow 5sen\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Desfase = $\frac{\pi}{4}$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para consolidar lo aprendido, resuelva las siguientes actividades y utilice la investigación como una valiosa estrategia del aprendizaje.

1. Explore la bibliografía recomendada, Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011), disponible en la biblioteca virtual de la universidad, en la sección 5.6, podrá profundizar los conceptos que enriquecerán su comprensión y le permitirán conectar teoría y práctica de manera más efectiva.
2. Con el fin de profundizar en el modelado del movimiento armónico y enriquecer su aprendizaje, le invito a:

   a. Revisar y emplear la Aplicación de Funciones Trigonométricas. Esta aplicación permite comprender el modelado del movimiento armónico simple, mostrando cómo las funciones seno y coseno representan oscilaciones cíclicas en fenómenos físicos, como el movimiento de un péndulo o las ondas sonoras.

   b. Lea la bibliografía recomendada sobre el modelado del movimiento armónico simple y amortiguado, así como sobre la fase y la diferencia de fase. Este recurso le proporcionará los fundamentos teóricos necesarios para abordar y resolver ejercicios y problemas propuestos de manera efectiva.

3. Compruebe lo aprendido resolviendo los siguientes ejercicios:

   a. Para un cuerpo en movimiento armónico simple con $\frac{2\pi}{w}$ amplitud ***a*** y periodo, encuentre una ecuación que modele el desplazamiento ***y*** al tiempo ***t*** si: ***y*** = **0** ***al tiempo t*** = **0 :** ***y*** =

   b. Para un cuerpo en movimiento armónico amortiguado con amplitud inicial a, periodo $\frac{2\pi}{w}$, y constante de amortiguamiento ***y*** en el tiempo ***t*** si: ***y*** = ***a al tiempo t*** = **0:** ***y*** =

c. Para un objeto en movimiento armónico modelado por: **y** = ***Asen*** (***kt*** - ***b***) la amplitud es ___________, el periodo es ___________ y la fase es ________________.

Para encontrar el desfase factorizamos ***k***, para obtener: ***y*** = ___________. De esta forma de la ecuación vemos que el desfase es ________________.

d. Los objetos A y B se encuentran en movimiento armónico modelado por $y = 3sen(2t - \pi)$ y $y = 3sen\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$. La fase de A es ________ y la fase de B es __________ .

La diferencia de fase es _________________, por lo que los objetos se están moviendo _________ (en fase/fuera de fase).

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

El desarrollo de estas actividades le ha permitido evidenciar su aprendizaje sobre el modelado del movimiento armónico. Si ha encontrado alguna dificultad, es importante que revise los materiales recomendados para alcanzar los resultados de aprendizaje esperados.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Solo tendrás éxito si crees que puedes tenerlo"

¡Siga adelante!

4. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la unidad de funciones trigonométricas: método de la circunferencia unitaria, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Autoevaluación 1

Seleccione la opción correcta.

1. Las coordenadas de **P(x,y)** que determina $t = \frac{5\pi}{6}$ sobre la circunferencia unitaria son:

   a. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

   b. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

   c. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2. El número de referencia para el valor $t = \frac{5\pi}{4}$ es:

   a. $\frac{\pi}{4}$

   b. $\frac{\pi}{3}$

   c. $\frac{\pi}{6}$

3. Si el punto **P (x,y)** está en la circunferencia unitaria, la coordenada faltante de **P(-1,)** es:

   a. -1
   b. 1
   c. 0

4.
Dado el punto terminal $P\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{19}\right)$ determinado por un número real

t, los valores de las funciones **sin sin t, cos cos t y tan tan t** son:

a.
$t = \frac{21}{29}, \cos\cos t = -\frac{20}{29}, \tan\tan t = -\frac{21}{20}$

b.
$t = -\frac{21}{29}, \cos\cos t = +\frac{20}{29}, \tan\tan t = +\frac{21}{20}$

c.
$t = \frac{-21}{29}, \cos\cos t = -\frac{20}{29}, \tan\tan t = +\frac{21}{20}.$

5.
El valor exacto de $\cos\cos\frac{3\pi}{4}$ es:

a.
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b.
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

c.
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

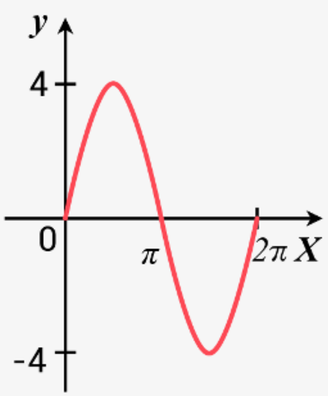
6.
La gráfica de la función $y = \cos\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ presenta la siguiente amplitud, periodo y desfase:

a.
|a| = 1, período = 2π, $b - \frac{\pi}{2}$ a la derecha.

b.
|a| = -1, período = π, $b - \frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

c.
|a| = 1, período = 2π, . $b - \frac{\pi}{2}$ a la derecha.

7. Dada la gráfica de un período completo de la curva seno, se puede apreciar que su amplitud, período y desfase son:



a. |a| = 4 periodo = 2π b = 0

b. |a| = -4 periodo = π b = 0

c. |a| = 4 periodo = $\frac{\pi}{2}$ b = 0

8.
La curva seno $y = -4 \sin \sin 2 \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ muestra la siguiente amplitud, período y desfase:

a.
|a| = -4, período = $\frac{\pi}{2}$ y desfase b = π a la izquierda.

b.
|a| = 4, período = π y desfase b = $\frac{\pi}{2}$ a la izquierda.

c.
|a| = 4, período = $\frac{\pi}{3}$ y desfase b = $\frac{\pi}{2}$ a la derecha.

9. La función y = 23t modela el desplazamiento de un cuerpo que se mueve con movimiento armónico simple, su amplitud, período y la frecuencia del movimiento son:

   a. |a| = -2, período = $\frac{3\pi}{2}$, frecuencia = $\frac{3}{\pi}$

   b. |a| = 2, período = $\frac{2\pi}{3}$, frecuencia = $\frac{1}{2\pi}$.

   c. |a| = 2, período = $\frac{2\pi}{3}$, frecuencia = $\frac{3}{2\pi}$

10. Se tiene una amplitud inicial k = 2, una constante de amortiguamiento c = 1.5 y frecuencia f = 3, la función que modela un movimiento armónico amortiguado es:

   a. y = $-2e^{1.5t}$ cos 6πt

   b. y = $2e^{-1.5t}$ cos 6πt

   c. y = $2e^{1.5t}$ cos 3πt

Ir al solucionario

Semana 5

Unidad 2. Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo

2.1 Trigonometría de triángulos rectángulos

Para abordar las diversas aplicaciones matemáticas que implican funciones trigonométricas, las cuales vinculan ángulos y distancias, continuaremos con el estudio del método del triángulo rectángulo. Le invito a prestar atención a las definiciones presentadas en esta guía, a utilizar el libro Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) como apoyo, y a resolver problemas de aplicación.

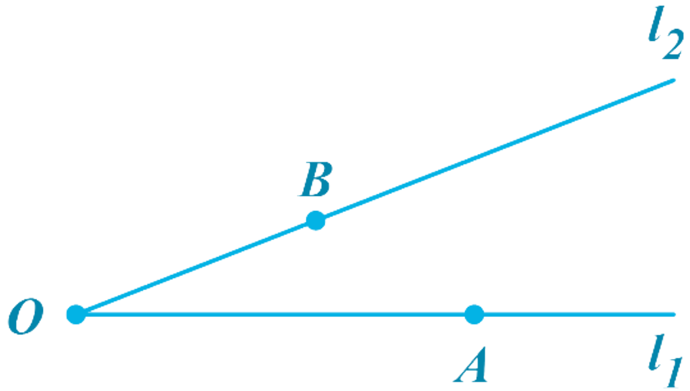
2.1.1 Medida de un ángulo

Para entender la medida de un ángulo es necesario definirlo, por lo que consideraremos las siguientes definiciones:

Un ángulo en geometría se define como el conjunto de puntos determinado por dos rayas o semirrectas, ***l1*** y ***l2***, que tienen el mismo punto extremo ***O***. Si A y B son puntos en ***l1*** y ***l2*** , como en la figura 12, nos referimos al ángulo AOB (denotado $\angle AOB$) Un ángulo puede también ser considerado como dos segmentos de recta finitos con un punto extremo común.

Figura 12

Representación geométrica de ángulo



Nota. Tomado de *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica(p. 400)* [Ilustración], por Swokowski y Cole, 2009, Cengage Learning Editores.

En esta figura usted puede observar la representación gráfica de un ángulo, se indica cada uno de sus elementos; vértice y lados; esta representación es muy importante al iniciar esta unidad, ya que usted aprenderá a aplicar el método del triángulo rectángulo.

Para medir dichos ángulos utilizamos grados y radianes, aquí tienen las definiciones de cada una de estas medidas.

- Un **grado** es una unidad de medición angular igual $\frac{1}{180}$ a del ángulo que se forma con la línea horizontal. Se representa con el símbolo °.
- **Radián.** Un ángulo central de un círculo mide 1 radián si interseca un arco cuya longitud mide lo mismo que el radio.

2.1.2 Ángulos en posición estándar

Para hablar de un ángulo en posición estándar, debemos introducir un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la posición estándar de un ángulo se obtiene al tomar el vértice en el origen y hacer que el lado inicial coincida con el eje x positivo. Si el lado inicial está en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj hasta la posición terminal, el ángulo se considera positivo. Si el lado inicial se hace girar en dirección de las manecillas, el ángulo es negativo.

2.1.3 Longitud de un arco de circunferencia

Debido a que el ángulo central de 1 radián siempre interseca a un arco cuya longitud equivale a lo que mide el radio, se infiere que el ángulo central π de radianes en un círculo de radio r interseca un arco de longitud πr. Esto nos proporciona una fórmula para medir la longitud de un arco.

Si θ es un ángulo central en un círculo de radio r y si θ se mide en radianes, entonces la longitud s del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = r\theta$$

Si θ es un ángulo central, en un círculo de radio r y si θ se mide en grados, entonces la longitud s del arco intersecado se obtiene mediante la fórmula:

$$s = \frac{\pi r\theta}{180}$$

2.1.4 Área de un sector circular

Para determinar el área de un sector circular emplearemos la siguiente fórmula: $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ siendo θ la medida en radianes de un ángulo central de una circunferencia de radio r.

2.1.5 Movimiento circular

Para contextualizar la definición de movimiento circular, usted debe recordar la definición de la velocidad promedio de un objeto, que no es más que la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. Ahora suponga que un objeto se mueve alrededor de un círculo de radio r a una velocidad constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor del círculo, entonces la velocidad lineal v del objeto se define como:

$$v = \frac{s}{t}$$

Mientras este objeto viaja alrededor del círculo, suponga que θ (medido en radianes) es el ángulo central barrido en el tiempo t. Entonces, la velocidad angular w (la letra griega omega) de este objeto es el ángulo (medido en radianes) que se barren divididas entre el tiempo transcurrido, es decir $w = \frac{\theta}{t}$:

Finalmente, es necesario que usted conozca la relación entre la velocidad lineal y angular, en el caso específico de un punto que se mueve a lo largo de un círculo de radio r con velocidad angular w, entonces su velocidad lineal v está dada por $v = rw$.

Una vez presentadas estas definiciones, le invito a observar y analizar el proceso de resolución de los ejercicios y problemas resueltos en línea. Junto con la explicación que se presenta a continuación sobre un problema de aplicación, podrá abordar eficientemente la evaluación parcial de los conocimientos adquiridos en esta unidad.

Ejemplos modelos de problemas de aplicación

Distancia de viaje. Las ruedas de un auto miden 28 pulgadas de diámetro.

¿Qué distancia (en millas) recorrerá el auto si sus ruedas giran, 100000 veces sin patinar?

a. **Datos**

$$d = 28\ pulg$$

$$s = ?$$

$$\theta = 2\pi$$

b. **Cálculos**

$$r = \frac{28pulg}{2} = 14pulg$$

θ* = *s* / *r --> **s** = ***θ* . *r*** --> ***s*** = **2*π* . (14 *pulg*) = 28 *πpulg***

Si la rueda gira 10000 veces sin patinar

--> **28*π*** (**10000**) = **280000 *πpulg***

c. Finalmente, empleamos una regla de tres para convertir de pulgadas a millas.

1 *milla*	**63360 *pulg***
x	**280000 *π***

$$x_{millas} = \frac{28000\pi}{63360}$$

$$x_{millas} = 13.88 \approx 13.9\ millas$$

Velocidad de una corriente. Para medir la velocidad de una corriente, unos científicos colocan una rueda de paletas en la corriente y observa la rapidez a la que gira la rueda. Si la rueda tiene un radio de 0.20 m y gira a 100 rpm, encuentre la velocidad de la corriente en $\frac{m}{s}$.

a. Datos

r = **0.20 *m***

$$w = 2\pi \cdot 300 = 600\pi \frac{rad}{min}$$

v = ***?***

b. Cálculos

Determinamos la ***v*** = ***rw*** --> ***v*** = (**0.20 *m***) (600 ***π***) $\frac{rad}{min}$

$$y = 120 \frac{m}{min}$$

Realizamos la conversión de unidades

$$120\frac{m}{min} \times \frac{1min}{60s} = 2\frac{m}{s}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Reforcemos el aprendizaje realizando las siguientes actividades.

1. Para comprender eficientemente la trigonometría de triángulos rectángulos y que además usted pueda participar de forma pertinente en el foro académico propuesto para esta semana, le invito a:

    - Observar atentamente el video titulado Grados sexagesimales y radianes.

      En este vídeo se explica el proceso previo para resolver triángulos rectángulos por medio de ejemplos de aplicación de los contenidos de esta unidad.

2. Considere la bibliografía recomendada Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) disponible en la biblioteca virtual de la universidad, en la sección 6.1. Este material le proporcionará los fundamentos teóricos sobre la medida de un ángulo, los ángulos en posición estándar, la longitud de un arco de circunferencia, el área de un sector circular y el movimiento circular, lo que le permitirá abordar con confianza los ejercicios y problemas de aplicación.
3. Elabore un banco de preguntas, tomando en cuenta los ejercicios y problemas propuestos de esta sección.
4. Resuelva el banco de preguntas superando las dificultades por medio de la investigación y la consulta a su docente.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Lo único imposible es aquello que no intentas"

¡Siga adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 6

Unidad 2. Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo

Estimado estudiante, en la semana anterior iniciamos el estudio de las funciones trigonométricas mediante el método del triángulo rectángulo, lo cual le ha brindado una base sólida para resolver problemas relacionados con triángulos rectángulos en contextos físicos. Ahora es el momento de avanzar en su aprendizaje y profundizar en las funciones trigonométricas aplicadas a ángulos generales. Siga adelante con su dedicación; está progresando de manera excelente.

2.2 Funciones trigonométricas de ángulos

Con base en su conocimiento de las relaciones trigonométricas para ángulos agudos, en esta sección ampliaremos estas definiciones para abarcar ángulos de cualquier medida, para esto es necesario revisar la infografía que se presenta a continuación:

Funciones Trigonométricas en el Sistema de Coordenadas Rectangulares

Esta infografía aborda la representación de ángulos y funciones trigonométricas en el sistema de coordenadas rectangulares. Se inicia explicando cómo se coloca un ángulo en posición estándar, con el vértice en el origen y un triángulo rectángulo que conecta el origen con un punto P(x,y). A partir de este triángulo, se definen las seis funciones trigonométricas en función de las coordenadas y la distancia desde el origen. Si denota la distancia de (0,0) a P (x,y), entonces las seis funciones trigonométricas de θ se definen como las razones presentadas en la siguiente tabla:

Tabla 6

Razones trigonométricas

Razones trigonométricas		
$sen\Theta = \frac{y}{r}$	$\cos\Theta = \frac{y}{r}$	$\tan\Theta = \frac{y}{r}\ (x \neq 0)$
$csc\ \Theta = \frac{r}{y}(y \neq 0)$	$\sec\ \Theta = \frac{r}{x}(x \neq 0)$	$cot\ \Theta = \frac{x}{y}(y \neq 0)$

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 491), por Stewart, Redlin y Watson, 2017, México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A.

En esta tabla se muestran las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera ***θ***, estas razones usted las empleará para resolver funciones trigonométricas por medio del método del triángulo rectángulo.

2.2.1 Evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo

Una vez que se sabe en qué cuadrante está un ángulo, se determina el signo de cada función trigonométrica de este ángulo. Utilizar cierto ángulo de referencia puede ayudar a evaluar las funciones trigonométricas de este.

Sea ***θ*** un ángulo no agudo que está en un cuadrante. El ángulo agudo formado por el lado terminal de ***θ*** y ya sea el lado positivo del eje ***x*** o el lado negativo del eje ***x*** se llama ángulo de referencia para ***θ***.

Ejemplo: encuentre el valor exacto de la función trigonométrica **cos 1500.**

En la figura podemos observar que $cos150 = \frac{-x}{r}$

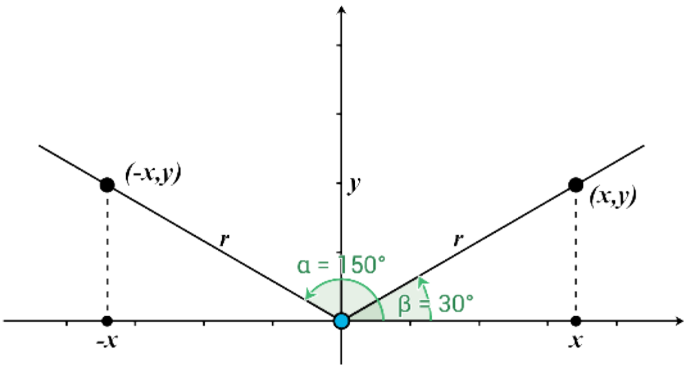
Pero $cos30^{\circ} = \frac{x}{r}$

Dado que $cos30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo que $cos150 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Figura 13

Gráfica de solución de un ángulo de referencia



Nota. Granda, S., 2020.

En la figura se aprecia el recorrido de un punto de referencia P(x,y) del primer al segundo cuadrante donde el signo de las coordenadas cambia y esto a su vez modifica el signo de las funciones trigonométricas del ángulo dado en comparación con el ángulo de referencia. En la solución del siguiente ejemplo se explica paso a paso el proceso a seguir para evaluar las funciones trigonométricas de cualquier ángulo.

Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica: csc(-630°)

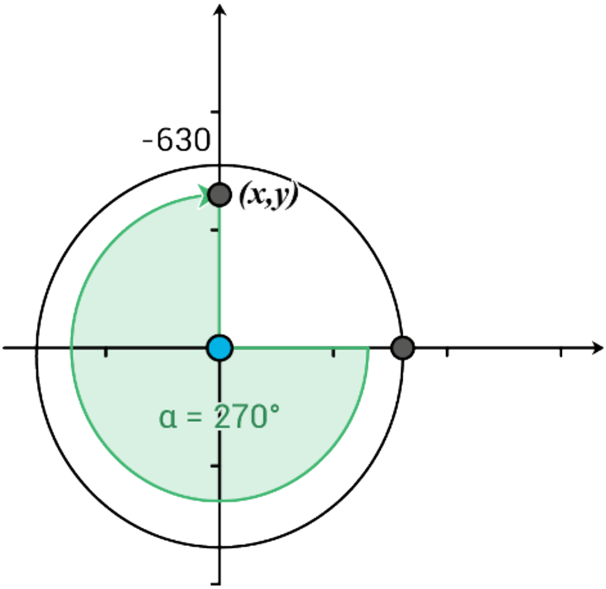
Como usted puede darse cuenta para llegar al ángulo de **-630**, el ángulo medido en posición estándar y en sentido horario, ya que es negativo, debe dar un giro de **-3600** y continuar con un giro de **-2700** para llegar al eje +y donde se ubicará el punto ***P (x,y***).

El ángulo **-6300** es coterminal con el ángulo **270** de y el lado terminal de este ángulo está en el primer cuadrante, eje positivo y. Por tanto, el ángulo de referencia es: **-10 -90** = **-270**, y el valor de la **csc -630** es positivo.

Tenemos **csc -630**0 = **csc -2700** = **- csc 90**0 no está definido.

Figura 14

Gráfica de solución de la evaluación de una función trigonométrica



Nota. Granda, S., 2020.

En esta figura se muestra el ángulo de referencia del ángulo dado en el problema propuesto, su ubicación en la circunferencia unitaria, lo que permite determinar el signo de cada función trigonométrica solicitada y así dar solución al problema planteado.

2.2.2 Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son ecuaciones por medio de las cuales las funciones trigonométricas se relacionan entre sí, ahora estudiaremos identidades para cualquier ángulo, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos, como procedo a explicar en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda ***θ*** para en el cuadrante dado.

$$\tan \theta,\ \cos \theta;\ \theta \text{ en el cuadrante III}$$

Solución: de la identidad pitagórica ***sen 2θ*** + ***cos 2θ*** = **1**, despejamos ***senθ*** y tenemos que: $sen\theta = +\sqrt{1 - cos^2\theta}$. Esto lo reemplazamos en la identidad recíproca $tan\theta = \frac{sin\ \theta}{cos\ \theta}$, tomando en cuenta el signo negativo de la función seno, ya que está en el tercer cuadrante.

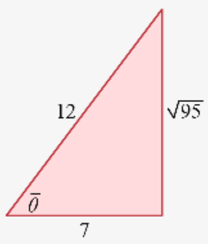
Finalmente se obtiene $tan\theta = -\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{cos\theta}$

Ejemplo 2. Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

$$cos\theta = \frac{7}{12}, sen\theta < 0$$

Figura 15

Gráfica y explicación de resolución del ejemplo 2 de identidades trigonométricas



Trazamos un triángulo donde como usted puede observar el cos $\theta = \frac{7}{12}$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuarto cuadrante.

Obtenemos:

$$sen\ \theta = -\frac{\sqrt{95}}{12} \qquad csc\ \theta = -\frac{12}{\sqrt{95}}$$

$$tan\ \theta = -\frac{\sqrt{95}}{7} \qquad cot\ \theta = -\frac{\sqrt{95}}{12}\ sec\ \theta = \frac{12}{7}$$

Nota. Granda, S., 2020.

En esta figura se muestra el proceso de resolución de un triángulo rectángulo para hallar el cateto faltante y de acuerdo a su ubicación en el cuarto cuadrante, se obtiene el resto de funciones trigonométricas solicitadas.

2.2.3 Áreas de triángulos

Para finalizar esta sección y por ende la presente semana, vamos a estudiar una de las aplicaciones de las funciones trigonométricas que comprenden ángulos que no son necesariamente agudos, para esto es necesario que usted tome en cuenta la explicación brindada por el texto guía en la página 497, donde se indica detalladamente cómo se obtiene la ecuación del área de un triángulo.

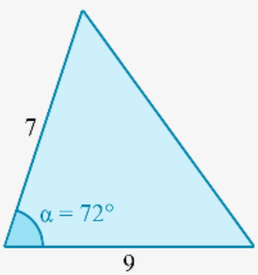
Una vez que usted ya revisó lo solicitado, concluirá conmigo que la ecuación expresa el área ***A*** de un triángulo con lados de longitudes ***a***, y ***b*** y con un ángulo entre ellos ***θ***, es $A = \frac{1}{2}\boldsymbol{absen\theta}$

Ejemplo: encuentre el área del triángulo con la descripción dada.

Un triángulo con lados de longitud 7 y 9 y el ángulo entre ellos de **72°**.

Figura 16

Gráfica y explicación de resolución de ejemplo de área de triángulo



El triángulo tiene lados de longitud de 7 y 9 unidades, con un ángulo entre ellos de 72°. Por tanto

$$A = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen} \theta$$

$$A = \frac{1}{2}\,(7)(9) \operatorname{sen} 72°$$

$$A = \frac{63}{2} \operatorname{sen} 72°$$

$$A = 29.958280$$

$$A \approx 30\ u^2$$

Nota. Granda, S., 2020.

En esta figura se muestra la resolución del problema propuesto, se grafica los datos dados y se determina el área del triángulo aplicando la fórmula explicada en este apartado, recuerde su calculadora debe estar en modo DEG.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo las siguientes actividades:

1. Conteste las interrogantes que se encuentran en la bibliografía recomendada, no olvide ampliar su conocimiento investigando.
2. Le invito a participar del quiz que se presenta a continuación, no olvide ampliar su conocimiento a través de la investigación. ¡Siga explorando y aprendiendo!
   Funciones Trigonométricas de Ángulos
3. Observar atentamente el video titulado Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

   En este vídeo se explican las relaciones trigonométricas para ángulos agudos y todo tipo de ángulo.

4. Revise los contenidos sobre funciones trigonométricas de ángulos, evaluación de funciones trigonométricas de cualquier ángulo, identidades trigonométricas y áreas de triángulos en la sección 6.3 del libro Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011), disponible en la biblioteca virtual de la universidad, donde encontrará los fundamentos teóricos necesarios para resolver ejercicios y problemas de aplicación.
5. Compruebe lo aprendido resolviendo los siguientes ejercicios:

   a. Si el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ está en posición estándar, ***P*** (***x,y***) es un punto sobre el lado terminal de $\boldsymbol{\theta}$, y ***r*** es la distancia del origen a ***P***, entonces:

      i. ***sen*** $\boldsymbol{\theta}$ =________ ***cos*** $\boldsymbol{\theta}$ =_______ ***tan*** $\boldsymbol{\theta}$=______

   b. Complete:

      a. El signo de una función trigonométrica de $\boldsymbol{\theta}$ depende delen el que se encuentre el lado terminal del ángulo $\boldsymbol{\theta}$.
      b. En el segundo cuadrante, ***sen*** $\boldsymbol{\theta}$ es __________ (positivo/ negativo).

c. En el tercer cuadrante, ***cos θ*** es ________ (positivo/ negativo).

d. En el cuarto cuadrante, ***sen θ*** es ________ (positivo/ negativo).

c. Si ***θ*** está en posición estándar, entonces el ángulo de referencia θ ________ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de ***θ*** y el ________ . Así que el ángulo de referencia para ***θ*** = 1000 es θ= ________, y para ***θ*** = 1900 es θ =

d. Si ***θ*** es cualquier ángulo, el valor de una función trigonométrica de ***θ*** es igual, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de . Por lo que ***sen*****100º** = ***sen sen*****190º** = **-** ***sen*** ______ .

e. El área ***A*** de un triángulo con lados de longitudes ***a*** y ***b*** y con el ángulo entre ellos ***θ*** está dada por la fórmula ***A*** = ______ .

Por lo que el área del triángulo con lados de 4 y 7 y el ángulo entre ellos $\theta = 30^{\circ}$ es ______.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al desarrollar estas actividades, ha podido evidenciar su aprendizaje sobre funciones trigonométricas de ángulos. Si ha encontrado alguna dificultad, le sugiero revisar nuevamente la bibliografía recomendada para consolidar los resultados de aprendizaje esperados. No dude en aclarar sus inquietudes con su docente.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Nunca desistas de su sueño. Solo trata de ver las señales que te lleven a él"

¡Siga adelante!

Semana 7

Unidad 2. Funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo

2.3 Funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos

Recuerde que cada función tiene una relación inversa, y que esa relación inversa es una función solo si la función original es uno a uno. Sabemos que las seis funciones trigonométricas básicas son periódicas, y de forma espectacular, más no son uno a uno, por lo que, restringiremos su dominio a un intervalo en el cual sí lo sean y así poder estudiar su comportamiento inverso.

2.3.1 Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Empezamos con la función seno, tomando en cuenta que debemos restringir su dominio a los ángulos del intervalo, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$como lo indico en la tabla de resumen siguiente, la misma que procedo a sintetizar para su aplicación en la resolución de problemas.

Tabla 7

Dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas

Cuadro de resumen de dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas		
Función	**Dominio**	**Rango**
sen^{-1}	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
cos^{-1}	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
tan^{-1}	$\mathbb{R}$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 502), por Stewart, Redlin y Watson, 2017, México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A.

Estimado estudiante, en esta tabla podrá observar cómo sistematizar los dominios y rangos de las funciones trigonométricas inversas. Esto le será de gran ayuda para resolver los problemas de aplicación asignados esta semana.

Pongamos en práctica lo aprendido resolviendo algunos ejemplos. Le recomiendo seguir los procesos paso a paso, utilizando esta guía didáctica y la sección 6.4 de Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) disponible en la biblioteca virtual de la universidad, como referencia.

Ejemplos:

a. Encuentre el valor exacto de $sen^{-1}1$, si está definida. Exprese su respuesta en radianes.

Solución

El ángulo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con seno 1 es $\frac{\pi}{2}$ Por lo tanto,

b. Use la calculadora para encontrar un valor aproximado de $cos^{-1}3$

Solución

Ya que **3 > 1** no está en el dominio de cos^{-1}, $cos^{-1}3$ no está definido.

2.3.2 Solución de ángulos en triángulos rectángulos

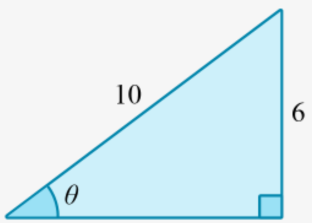
En esta sección resolveremos triángulos por medio de funciones trigonométricas inversas sen^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1} para encontrar la medida del ángulo cuando la razón de las medidas de los lados es desconocida.

Apreciado estudiante, le invito a seguir las explicaciones dadas en la solución de los siguientes problemas de aplicación.

a. Encuentre el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ en grados, redondeado a un decimal.

Figura 17

Gráfica y explicación de resolución 1: ángulos triángulos, rectángulos



Solución

Dado que θ es el ángulo opuesto al lado de longitud 6 y la hipotenusa tiene longitud 10, tenemos

$$sen\ \theta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Ahora podemos usar sen^{-1} para encontrar θ. Recuerde colocar la calculadora en modo ***DEG***.

$$\theta = sin^{-1}\frac{6}{10}$$

$$\theta \approx 36.9^{o}$$

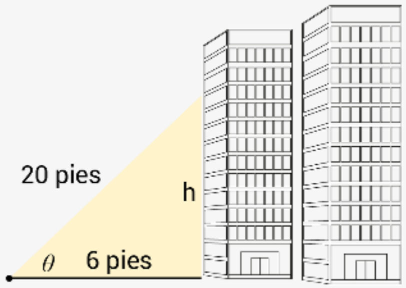
Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 17, se explica la resolución del problema propuesto, a partir del triángulo dado, se procede a determinar el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ con los valores de la hipotenusa y cateto dados, y la razón trigonométrica adecuada, recuerde su calculadora, debe estar en modo **DEG.**

b. Escalera inclinada. Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

Figura 18

Gráfica y explicación de resolución 2: ángulos triángulos, rectángulos



Solución

Primero trazamos un diagrama. si θ es el ángulo entre el suelo y el edificio, entonces

$$cos\ \theta = \frac{6\ pies}{20\ pies}$$

$$cos\ \theta = \frac{3}{10}$$

Ahora usamos cos^{-1} para encontrar θ

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{3}{10}\right)$$

$$h = \sqrt{20^2 - 6^2}$$

$$h = \sqrt{364}$$

$h = 19.08$ pies

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 18 se explica la resolución del problema propuesto, se ha bosquejado la gráfica de del triángulo a partir de los datos dados, se procede a determinar el ángulo ***θ*** con los valores de la hipotenusa y cateto dados, y la razón trigonométrica adecuada, recuerde su calculadora debe estar en modo **DEG**, luego con el teorema de Pitágoras determinamos la altura solicitada.

2.3.3 Evaluación de expresiones que tienen funciones trigonométricas inversas

En esta sección se dará una explicación del proceso para encontrar valores exactos de expresiones como: $cos(sen^{-1}x)$, expresiones que le serán necesarias conforme vaya profundizando en el estudio de la matemática moderna, específicamente el cálculo infinitesimal.

Estimado estudiante, acompáñeme en la solución de los siguientes ejemplos, donde podrá apreciar el uso de las funciones trigonométricas inversas, triángulos rectángulos y el teorema de Pitágoras que le servirán para el aprendizaje de los contenidos de esta sección.

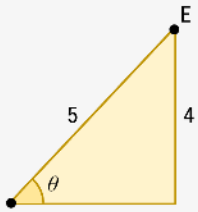
Ejemplo de composición de funciones trigonométricas y sus inversas:

Encuentre el valor exacto de la expresión $cossen\left(-1\frac{4}{5}\right)$

Figura 19

Gráfica y explicación de resolución de ejemplo de composición de funciones trigonométricas y sus inversas

Interpretamos θ como un ángulo y Trazamos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos.



Solución

Sea $\theta\ sen^{1}\frac{4}{5}$. Por lo que θ es el número en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es $\frac{4}{5}$.

En la gráfica usted puede observar que la hipotenusa es 5 y el cateto opuestos es 4, determinamos el cateto restante con el teorema de Pitágoras.

$$x - \sqrt{5^2 - 4^2}$$
$$x - \sqrt{25 - 16}$$
$$x \quad \sqrt{9}$$
$$x - 3$$

De la figura obtenemos

$$cos\left(sen^{1}\frac{4}{5}\right) = cos\ \theta$$

$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

Entonces

$$cos\left(sen^{1}\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 19, se muestra el proceso de resolución de la composición de funciones trigonométricas y sus inversas, es necesario que tome en cuenta estos procesos para resolver los problemas y ejercicios propuestos en la unidad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Compruebe lo aprendido resolviendo las siguientes actividades:

1. Le recomiendo interactuar con las actividades propuestas en el libro de [GeoGebra Funciones Trigonométricas inversas y triángulos rectángulos.]() No olvide profundizar y ampliar su conocimiento

investigando en fuentes adicionales. ¡La investigación es clave para el aprendizaje continuo!

2. Para comprender eficientemente las funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo y que además usted desarrolle los ejercicios y problemas propuestos en las actividades de práctica planteadas en esta semana, le invito a:

    - Observar atentamente el video titulado: Trigonometría. Resolver triángulos. Alturas.

      En este video se explican las funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos.

3. Para profundizar en las funciones trigonométricas inversas (seno, coseno y tangente inversa), resolver ángulos en triángulos rectángulos y evaluar expresiones con funciones trigonométricas inversas, le recomiendo consultar los fundamentos teóricos en la sección 6.4 del libro Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) disponibles en la biblioteca virtual de la universidad, donde encontrará el contenido necesario para abordar eficazmente ejercicios y problemas propuestos.
4. Compruebe lo aprendido resolviendo los ejercicios detallados en Anexo 1. Ejercicios de funciones trigonométricas inversas y triángulos rectángulos

Nota: por favor complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de estas actividades, usted pudo evidenciar su aprendizaje acerca de las funciones trigonométricas de ángulos. Si encontró alguna dificultad, le recomiendo revisar nuevamente la bibliografía y recursos sugeridos para alcanzar los resultados de aprendizaje esperados.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

“El único modo de hacer un gran trabajo, es amar lo que haces”

¡Siga adelante!

5. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la segunda unidad, Funciones Trigonométricas: Método del triángulo rectángulo, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Autoevaluación 2

Instrucción: marque la alternativa correcta.

1. Al convertir el ángulo de 200° en radianes se obtiene:

   a. $\frac{10\pi}{9}$

   b. $\frac{1\pi}{9}$

   c. $\frac{9\pi}{10}$

2. Al convertir el ángulo de $-\frac{3\pi}{2}$ en grados se obtiene:

   a. 2700
   b. 2700
   c. -7200

3. Si calculamos la longitud s del arco circular de radio r = 9 y ángulo central $\theta = \frac{5\pi}{6}$, se obtiene:

a. $s = \frac{15\pi}{2}m$

b. $s = \frac{15\pi}{3}m$

c. $s = \frac{15\pi}{2}m$

4. Al calcular el área del sector circular se toma en cuenta un ángulo central θ = 0.5 rad y radio r = 10 u y se obtiene:

a. 2.5 u2
b. 2.0 u2
c. 1.5 u2

5. Si calculamos el ángulo de referencia para θ = -199° obtenemos:

a. θ= 750

b. θ = -750

c. θ = 2550

6. Al calcular el valor exacto de $sinsin\frac{2\pi}{3}$ se obtiene:

a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

7. Si expresamos tan θ en términos de cos θ, tomando en cuenta que θ está en el III cuadrante, se obtiene:

a. $\pm\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\theta}$

b. $-\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\theta}$

c. $\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\theta}$

8. Si conocemos que el ángulo de 72° está entre dos lados de un triángulo cuyas longitudes son 7 y 9 respectivamente, podemos determinar su área y obtendremos un valor de:

a. 30 u2
b. 10 u2
c. 20 u2

9.
El valor exacto de la expresión $sen^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ en radianes se expresa:

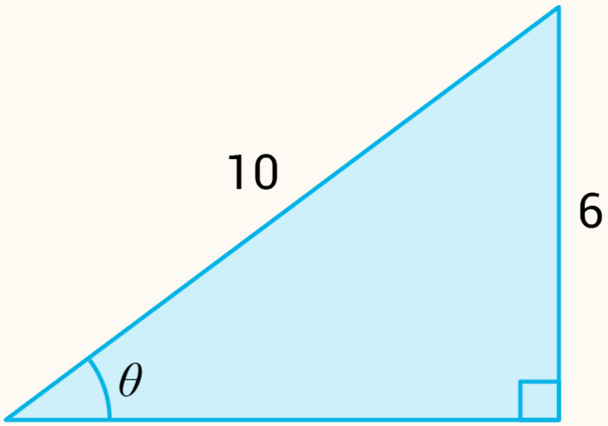
$\frac{\pi}{4}$

a. $\frac{\pi}{4}$

b. $-\frac{\pi}{4}$

c. $\frac{\pi}{2}$

10. Al calcular el valor del ángulo en grados, redondeado a un decimal del triángulo rectángulo, obtenemos:



a. θ = 36.70
b. θ = 36.00
c. θ = 37.00

Ir al solucionario

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Le recomiendo llevar a cabo las siguientes actividades, como trabajo previo a rendir la evaluación presencial del primer bimestre.

- **Actividad 1.** Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el primer bimestre.
- **Actividad 2.** Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.
- **Actividad 3.** Suba el archivo del documento a la EVA en caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.
- **Actividad 4.** Revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello, considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas.
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar sus aprendizajes del primer bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, le sugiero:

a. Revise cada uno de los conceptos estudiados en las dos unidades planificadas y desarrolladas en este primer bimestre.
b. Realice una variedad de ejercicios y problemas de aplicación relacionados con los conceptos, propiedades y leyes abordados en cada unidad. Desarrolle los problemas propuestos al final de cada sección de esta guía didáctica, así como en la bibliografía sugerida, para reforzar su comprensión y dominio del contenido.
c. Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

“¡Pregúntate *si lo que estás haciendo hoy te acerca al lugar en el que quieres estar mañana!*

¡Siga adelante!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Determina las funciones trigonométricas a través del método de la circunferencia o del triángulo rectángulo para modelar y resolver problemas cotidianos.

Con el fin de lograr el resultado de aprendizaje, se destaca la importancia de desarrollar la habilidad para determinar funciones trigonométricas mediante el método de la circunferencia o del triángulo rectángulo, con el propósito de modelar y resolver problemas cotidianos. En este entorno de aprendizaje, se profundizará en la comprensión de la Ley del seno y la Ley del coseno, lo que contribuirá a enriquecer las herramientas trigonométricas utilizadas para abordar situaciones prácticas en la vida diaria.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

Estimado estudiante:

Bienvenidos al segundo bimestre del curso de Sistemas de conocimiento de funciones trigonométricas y su didáctica, en esta segunda parte del periodo académico, profundizaremos nuestros conocimientos sobre la Ley del seno y del coseno y de la trigonometría analítica, tanto en su componente teórico como en sus aplicaciones.

Con estos conocimientos, se facilitará la comprensión de la pedagogía y aplicación de la didáctica y estaremos en condiciones de generar aprendizajes significativos en nuestros estudiantes, quienes podrán resolver situaciones de la vida real aplicando la trigonometría.

Unidad 3. La ley del seno y coseno

Estimado profesional en formación, continuamos estudiando y es momento de aprender la Ley de senos, estas son fórmulas que le ayudarán a encontrar lados y ángulos desconocidos en un triángulo. Le permitirán usar la trigonometría en triángulos que no son rectángulos.

3.1 La ley de los senos

La ley de senos le permitirá hallar los otros dos lados y ángulos de un triángulo cuando usted tenga la siguiente información:

- Dos ángulos y un lado.
- Dos lados y un ángulo no incluido entre esos dos lados.

La Ley de senos puede enunciarse de forma general de la siguiente manera: en cualquier triángulo, la razón entre el seno de un ángulo y el lado opuesto a ese ángulo es igual **a la razón entre el seno de otro ángulo y el lado opuesto a ese ángulo.**

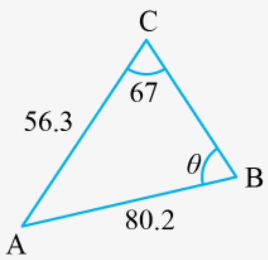
Apreciado estudiante, le invito a desarrollar la aplicación de la Ley de senos en la resolución de los siguientes ejemplos modelo.

Ejemplos modelo

1. **Encontrar un ángulo o un lado.** Use la ley de senos para encontrar el lado x o el ángulo θ indicado.

Figura 20

Gráfica y explicación de resolución: ángulo



Para encontrar el ángulo θ usamos la ley de senos.

$$\frac{\sin\theta}{56.3} = \frac{\sin 67}{80.20}$$

$$\sin\theta = \frac{\sin 67^{o}\,(56.3)}{80.20}$$

$$\sin\theta = \frac{51.82}{80.20}$$

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{51.82}{80.20}\right)$$

$$\theta = 40.25$$

$$\theta \approx 40^{o}$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 20 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos presentados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo ***θ*** aplicando la Ley de senos, y su calculadora debe estar en modo **DEG.**

2. **La Torre Inclinada de Pisa.** El campanario de la catedral de Pisa, Italia, está inclinado 5.6° con respecto a la vertical. Una turista está de pie a 105 m de su base, con la torre inclinada directamente hacia ella. Esta mide el ángulo de elevación a lo alto de la torre y ve que es de 29.2°. Encuentre la longitud de la torre al metro más cercano.

Figura 21

Gráfica y explicación de resolución: La Torre Inclinada de Pisa

Sí $\theta = 5.6^{\circ}$ sabemos que su ángulo complementario mide 84.4°.

Sabiendo que la suma de los ángulos internos de un triángulo es de 180°, tenemos $\alpha = 180^{\circ} - 84.4^{\circ} - 29.2^{\circ}$.

$$\alpha = 66.4^{\circ}$$

Para encontrar la longitud de la torre usamos la ley de senos.

$$\frac{\sin 66.4}{105} = \frac{\sin 29.2^{\circ}}{x}$$

Despejamos x

$$x = \left(\frac{\operatorname{sen} 29.2}{\operatorname{sen} 66.4}\right)(105)$$

$$x = 55.90\ m$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 21 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos presentados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo ***θ*** aplicando la Ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG** y consiguiente a esto se determina la longitud de la torre despejando el valor de esta de la aplicación de la Ley de senos.

3.1.1 El caso ambiguo

Una vez que usted ha interiorizado la Ley de senos en la resolución de triángulos oblicuángulos, analizaremos el caso donde para resolver un triángulo tenemos **lado- lado- ángulo**, aquí puede haber dos triángulos, un triángulo o ningún triángulo, por esta razón, este caso se denomina caso ambiguo.

En el libro de GeoGebra Triángulos oblicuángulos- Ley de senos , se explica detalladamente el caso ambiguo de la ley de senos en triángulos oblicuángulos, centrándose en el escenario LLA. Se muestra cómo, según las longitudes relativas de los lados, pueden surgir dos posibles soluciones, una única solución o ninguna. Revisa este recurso y los ejemplos proporcionados para comprender mejor las variaciones del caso ambiguo. ¡Sigamos aprendiendo juntos!

Ejemplo modelo

1. **Caso de una solución**

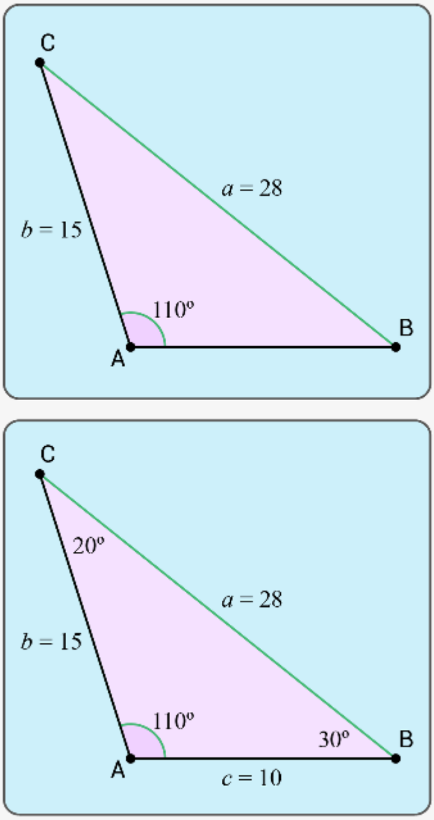
   Use la ley de senos para despejar todos los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

   a = 28 b = 15 $\sphericalangle_B = 110°$

Figura 22

Gráfica y explicación de resolución: caso de una solución

Primero debe trazar el triángulo con la información dada, es un dibujo tentativo porque aún no se conoce los otros ángulos.



Empleando la ley de los senos encontramos el ángulo B.

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{(b)\operatorname{sen} A}{a}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{(15)\operatorname{sen} 110}{28}$$

$$\operatorname{sen} B = 0.5034067611$$

$$B = sen^{-1}(0.5034067611)$$

$$B = 30.225^{\circ}$$

$$B \approx 30^{\circ}$$

Por la sumatoria de los ángulos internos de un triángulo tenemos:

$$A + B + C = 180^{\circ}$$

$$C = 180 - A - B$$

$$C = 180 - 110 - 30$$

$$C = 20^{\circ}$$

Finalmente, hallamos la longitud c, empleando la ley de senos.

$$\frac{\operatorname{sen} 20^{\circ}}{c} = \frac{\sin 110^{\circ}}{28}$$

$$c = \frac{(28)(\operatorname{sen} 20^{\circ})}{\operatorname{sen} 110^{\circ}}$$

$$c = 10$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 22 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo ***θ*** aplicando la Ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG** y consiguiente a esto se determina el cateto faltante despejando el valor de esta de la aplicación de la Ley de senos.

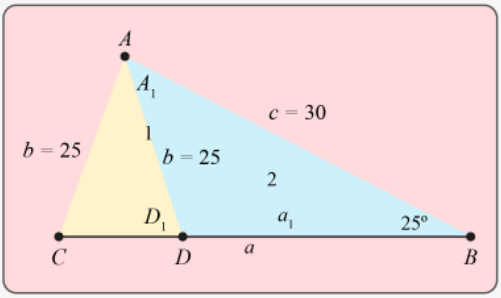
2. **Caso de dos soluciones**

***b* = 25** **c = 30** $\sphericalangle_B = 25^{\circ}$

Figura 23

Gráfica y explicación de resolución: caso de dos soluciones

Primero debe trazar el triángulo con la información dada, es un dibujo tentativo porque aún no se conoce los otros ángulos y lados. En este caso se puede apreciar que el cateto b puede ubicarse en dos posiciones, las que dan origen a los triángulos $\Delta\, ABC$ o Δ_1 y $\Delta\, ADB$ o Δ_2



En este gráfico usted puede visualizar las dos soluciones que tiene este problema.

Resolveremos cada triángulo.

a. ΔABC o Δ_1

Aplicamos ley de senos para determinar la medida del $\measuredangle C$ y $\measuredangle A$

$$\frac{\text{sen } 25^{\circ}}{25} = \frac{\text{sen C}}{30}$$

$$\sin C = \frac{(30)(\sin 25^{\circ})}{25}$$

$$C = 30.47$$

El ángulo A se obtiene

$$\measuredangle A = 180^{\circ} - 25^{\circ} - 30.47^{\circ}$$

$$\measuredangle A = 124.53^{\circ}$$

La longitud del lado a se obtiene por medio de la ley de senos.

$$\frac{\text{sen } 124.53^{\circ}}{a} = \frac{\text{sen } 25^{\circ}}{25}$$

$$a = \frac{(25)(\sin 124.53)}{\sin 25}$$

$$a = 48.73$$

La segunda solución se forma en el triángulo $\Delta ADB\,\Delta$ o Δ_2, aquí se cumple que $\measuredangle C = \measuredangle D_1 =$ 30.47º ya que se trata de un triángulo isóceles, por lo que el ángulo D se obtiene:

$$\measuredangle D = 180^{\circ} - 30.47 = 149.53^{\circ}$$

El ángulo $A_1 = 180^{\circ} - 25^{\circ} - 149.53^{\circ}$

$$A_1 = 5.47^{\circ}$$

Para el cateto a_1 empleamos ley de se senos

$$\frac{\text{sen } 25^{\circ}}{25} = \frac{\text{sen } A_1}{a_1}$$

$$a_1 = \frac{(25)(\text{sen } 5.47^{\circ})}{\text{sen } 25}$$

$$a_1 = 5.64$$

Las dos soluciones están dadas.

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 23 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo del problema, recuerden que se procede a determinar el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ aplicando la Ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG,** en este caso, tenemos dos posibles soluciones.

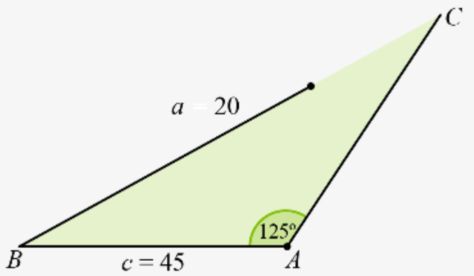
3. **Caso sin solución**

***a* = 20**   ***c* = 45** $\sphericalangle_B = 125^{\circ}$

Figura 24

Gráfica y explicación de resolución: caso sin solución

Primero debemos trazar el triángulo con la información dada.



Para determinar el $\measuredangle C$ empleamos la ley de senos.

$$\frac{\sin 125}{20} = \frac{\text{sen } C}{45}$$

$$sen\ C = \frac{(45)(\text{sen } 125°)}{20}$$

$$\text{sen } C = 1.8430$$

$$C = sin^{-1}(1.8430)$$

$$C = ERROR$$

Puesto que el seno de un ángulo nunca es mayor a 1 concluimos que no hay triángulo que satisfaga las condiciones de este.

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 24 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo del problema, recuerde que se procede a determinar el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ aplicando la Ley de senos y su calculadora debe estar en modo **DEG**, en este caso observamos que no es posible dar una solución.

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

Actividad de aprendizaje recomendada

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las siguientes actividades:

1. Para comprender eficientemente las funciones trigonométricas: método del triángulo rectángulo y que además usted desarrolle los

ejercicios y problemas propuestos en la actividad de práctica planteada en esta semana, le invito a:

- Observar atentamente el video titulado Trigonometría. Teorema de los senos y teorema del coseno.

  En este vídeo se explica la Ley de senos y su aplicación en la solución de problemas del entorno.

2. Revise la bibliografía de referencia y los recursos proporcionados, con especial énfasis en el estudio de la ley de senos y el caso ambiguo. En estos materiales encontrará los fundamentos teóricos necesarios para resolver todos los ejercicios propuestos.
3. Escoja y resuelva problemas de aplicación del ejercicio 6.5 del Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) apartado, Aplicaciones, esto le brindará habilidades cognitivas de orden superior como plantear, aplicar y resolver problemas.

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito"

¡Siga adelante!

Semana 10

Unidad 3. La ley del seno y coseno

3.2 La ley de los cosenos

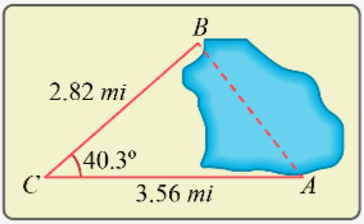
Estimado estudiante, continuamos en esta semana con la solución de un triángulo oblicuo cuando usted tenga los siguientes casos: dos lados y el ángulo entre ellos (LAL) y tres lados (LLL), es aquí donde haremos uso de la Ley de los cosenos, por lo que debe revisar el desarrollo del siguiente ejemplo modelo, que le servirán de referencia para que usted logre un aprendizaje efectivo del tema.

Problema modelo de aplicación

Encontrar un lado. Para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. Encuentre la distancia de un lado a otro del lago usando esta información.

Figura 25

Gráfica y explicación de resolución: encontrar un lado



Solución: Encontramos la distancia $AB = c$, usando la ley de cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$c^2 = (2.82mi)^2 + (3.56mi)^2 - 2(2.82mi)(3.56mi)\cos 40.3^\circ$$

$$c^2 = 5.21\ mi^2$$

$$c = \sqrt{5.21\ mi^2}$$

$$c = 2.30\ mi$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 25 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde usted que se procede a determinar la distancia solicitada por medio de la Ley de cosenos, así mismo, para esto su calculadora debe estar en modo DEG.

3.2.1 Navegación: orientación y rumbo

El rumbo representa la dirección y sentido medidos a partir de los puntos cardinales norte o sur, el ángulo y la posición este u oeste. Esta definición será usada para resolver el siguiente problema de aplicación.

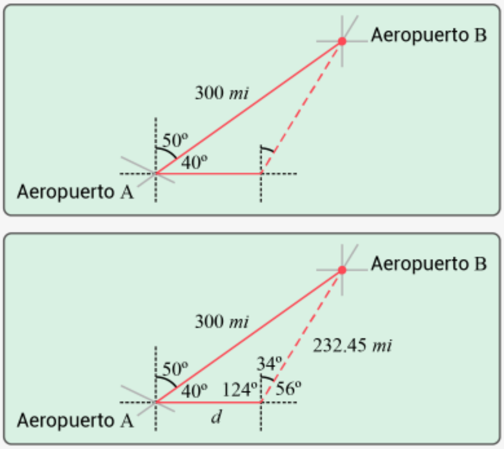
Problema modelo de aplicación

Navegación; el aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50°E (vea la figura). Un piloto que desea volar de A a B se equivoca y vuela en dirección al este a 200 m/h durante 30 minutos, cuando se da cuenta de su error.

a. ¿A qué distancia está el piloto de su destino en el momento en que se percata del error?
b. ¿Qué rumbo debe tomar su avión para llegar al aeropuerto B?

Figura 26

Gráfica y explicación de resolución: navegación



De lo expuesto en el problema sabemos que:

$$v = 200\frac{mi}{h}$$

$$t = 30\ min = 0.5\ h$$

Con esto se determina la distancia del piloto al Este d.

$$d = 200\frac{mi}{h}(0.5h) = 100mi$$

El ángulo entre los catetos de su viaje erróneo es

$$\measuredangle A = 90° - 50° = 40°$$

Ahora tenemos LAL, por lo que debemos aplicar la ley de cosenos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$a^2 = (100)^2 + (300)^2 - 2(100)(300)\cos 40°$$

$$a^2 = 54037.33341$$

$$a = 232.45\ mi$$

$$a = 232.45\ mi$$

para determinar el rumbo que debe tomar el avión para llegar al aeropuerto B empleamos la ley cosenos una vez más.

$$\cos c = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$$

$$\cos c = \frac{(300)^2 - (232.45)^2 - (100)^2}{-2(232.45)(100)}$$

$$\cos c = -0.5585501721$$

$$c = \cos^{-1}(-0.5585501721)$$

$$c = 123.95$$

$$c \approx 124$$

Por la definición de rumbo tenemos que

$$\measuredangle A = 180° - 124° = 56°$$

$$\theta = 90° - 56° = 34°$$

Entonces el rumbo es $N\ 34°\ E$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 26 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde estimado estudiante que se procede a determinar la distancia y el rumbo solicitados por medio de la Ley de cosenos, para esto, su calculadora debe estar en modo DEG.

3.2.2 El área de un triángulo

El área de un triángulo se constituye una aplicación importante de la Ley de cosenos, esta área se determina por medio de las longitudes de sus lados, como se explica en el siguiente problema de aplicación.

Problema modelo de aplicación

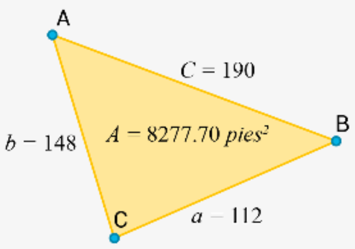
Valor de un terreno. Un terreno en el centro de Columbia está valuado en \$20 el pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitud 112, 148 y 190 pies?

$$A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} \rightarrow F\acute{O}RMULAS\ DE\ HER\acute{O}N$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) \rightarrow semiperimetro$$

Figura 27

Gráfica y explicación de resolución: valor de un terreno



Solución: El semiperímetro de lote es

$$s = \frac{112+148+190}{2} = 225$$

Para encontrar el A empleamos la fórmula de Herón.

$$A = \sqrt{225(225-112)(225-148)(225-190)}$$

$$A = \sqrt{68520375}$$

$$A = 8277.70\ pies^2$$

Finalmente determinamos el costo del terreno.

$$costo\ terreno = A \text{ x } \$20$$

$$costo\ terreno = 8277.70 \text{ x } 20 \approx \$165554$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 27 se explica la resolución del problema propuesto, a partir de los datos dados en el triángulo, recuerde que se procede a determinar el área solicitada por medio de la fórmula de Herón.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos realizando las siguientes actividades:

1. Para comprender eficientemente la Ley de cosenos y que además usted participe del foro académico planteado en esta semana, le recomiendo observar atentamente el video titulado: Trigonometría. Teorema de los senos y teorema del coseno.

   En este video se explica la Ley del coseno y su aplicación en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

2. Elabore un banco de preguntas basándose en los ejercicios y problemas propuestos en esta sección, y proceda a resolverlo. A medida que avance, supere cualquier dificultad mediante la investigación y el apoyo de su docente, quien está disponible para ayudarle a profundizar en los conceptos necesarios.

   Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

   A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

   "La confianza en sí mismo es el primer secreto del éxito"

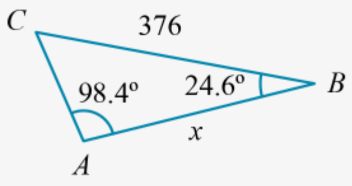
   ¡Siga adelante!

3. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la tercera unidad Ley del seno y del coseno, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Autoevaluación 3

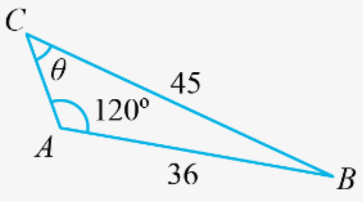
SInstrucción: marque la alternativa correcta.

1. Si empleamos la Ley de senos para encontrar el lado x del triángulo dado, obtenemos:



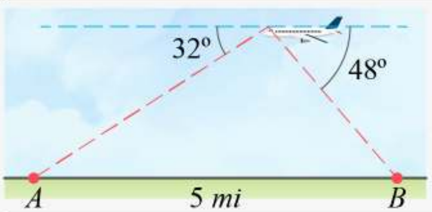
a. 318.8
b. 319.0
c. 320.0

2. Si empleamos la Ley de senos para encontrar el ángulo θ del triángulo dado, obtenemos:



a. 450
b. 440
c. 430

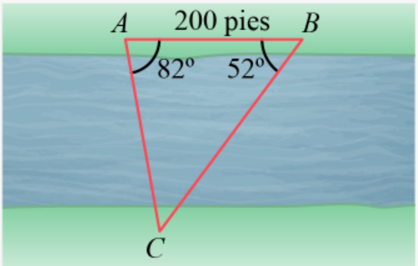
3. Si un piloto está volando sobre una carretera recta. Él determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia, colocadas a 5 millas entre sí, y encuentra que son de 32° y 48°, como se muestra en la figura, entonces la distancia entre el avión y el punto A es:



a. 4.5 mi
b. 3.8 mi
c. 5.0 mi

4. Para hallar la distancia de una orilla a la otra de un río, una experta en topografía escoge los puntos A y B, que están a 200 pies entre sí en un lado del río (vea la figura). A continuación, ella escoge un punto de referencia C en el lado opuesto del río y encuentra que

$\angle BAC \approx 82^\circ \quad y \quad \angle ABC \approx 52^\circ$ La aproximación de la distancia de A a C es:

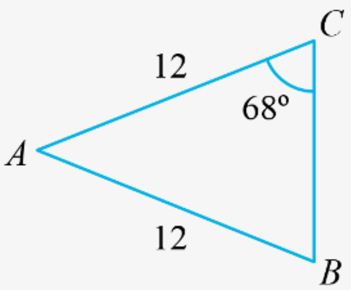


a. $\overline{AC} = 219.09\ pies$

b. $\overline{AC} = 210.00\ pies$

b. $\overline{AC} = 218.09\ pies$

5. Al resolver el triángulo dado aplicando la Ley de senos, el valor del ángulo $\measuredangle A$ y el lado $\overline{CB}$ son:

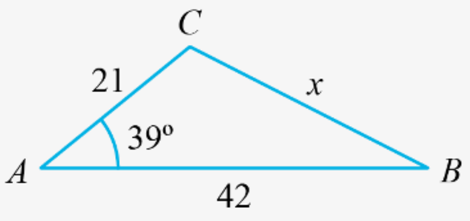


a. $\overline{CB} = 10$ y $\measuredangle A = 45^\circ$

b. $\overline{CB} = 9$ y $\measuredangle A = 45^\circ$

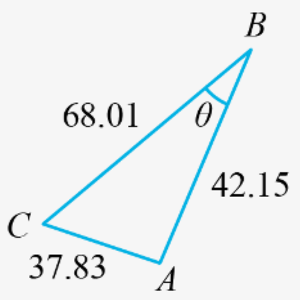
c. $\overline{CB} = 8$ y $\measuredangle A = 43^\circ$

6. Si empleamos la Ley de cosenos para encontrar el lado x del triángulo dado, obtenemos:



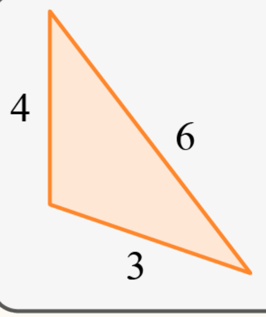
a. 29
b. 30
c. 28

7. Si empleamos la Ley de cosenos para encontrar el ángulo θ del triángulo dado, obtenemos:



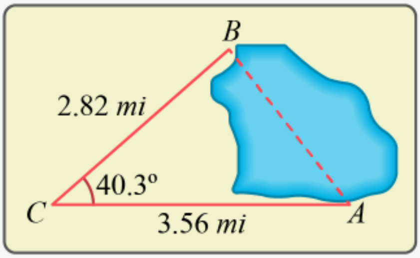
a. 29.890
b. 31.000
c. 27.990

8. Si aplica la **fórmula de Herón** para determinar el área del triángulo de lados, se obtiene:



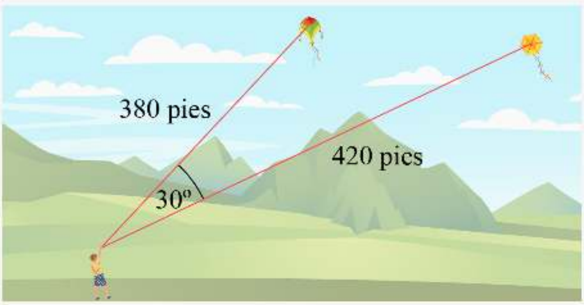
a. 5.33 u2
b. 4.33 u2
c. 6.33 u2

9. Si para hallar la distancia de un lado a otro de un pequeño lago, un topógrafo ha tomado las mediciones que se ilustran. La distancia de un lado a otro del lago usando esta información es:



a. 2.35 *mi*
b. 2.30 *mi*
c. 3.30 *mi*

10. Si un niño está haciendo volar dos cometas al mismo tiempo; tiene 380 pies de cuerda a una de las cometas y 420 pies para la otra y estima que el ángulo entre las dos cuerdas es de 30°. La distancia aproximada entre las cometas es:



a. 209.63 *pies*
b. 211.63 *pies*
c. 210.63 *pies*

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 2:

Aplica los principios e identidades fundamentales de la trigonometría elemental en el estudio de la trigonometría analítica.

Para alcanzar este resultado de aprendizaje, se explorarán conceptos fundamentales de trigonometría analítica, incluyendo identidades trigonométricas, su demostración, y la aplicación de las fórmulas de adición y sustracción. También se estudiarán las fórmulas para ángulos dobles y semiángulos, la conversión de productos a sumas, y la resolución de ecuaciones trigonométricas básicas. Estos conocimientos constituirán la base esencial para el análisis avanzado en trigonometría.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 11

Unidad 4. Trigonometría analítica

En la presente unidad, estimado (a) profesional en formación, tendrá como reto estudiar un enfoque mayormente algebraico a las funciones trigonométricas ya tratadas con anterioridad. No solo es importante que usted conozca sus características geométricas y/o gráficas para la resolución de problemas, si no que, además, deberá conocer las propiedades algebraicas que permitan simplificar, y, como consecuencia, demostrar identidades trigonométricas. Descubriremos en conjunto cada estrategia empleada para llegar a este fin.

¿Está listo? Pues empecemos, le aseguro que será divertido.

4.1 Identidades trigonométricas

A estas alturas, usted ya está familiarizado con muchas de las identidades trigonométricas. Le invito a consultar la infografía titulada “Identidades trigonométricas fundamentales”, donde se presentan de manera visual para referencias en futuros usos.

Identidades trigonométricas fundamentales

En la infografía usted puede observar las identidades trigonométricas fundamentales, las mismas que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica, ya sea en la simplificación o demostración de identidades.

4.1.1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Estimado estudiante, para comprender el proceso de simplificación de expresiones trigonométricas, es necesario que preste vital atención al procedimiento de reescribir la expresión en términos de seno y coseno y la combinación de fracciones utilizando común denominador como estrategias de simplificación.

¿Qué le parece, si nos aventuramos a realizar un ejercicio utilizando estos conceptos? ¡Vamos!

Ejercicio. Escribir la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno y luego simplifique.

$sen\ u + cot\ u cos\ u = sen\ u + \frac{1}{tan\ u} cos\ u$	Aplicando Identidad recíproca
$= sen\ u + \left(\frac{cos\ u}{sen\ u}\right) cos\ u$	Aplicando común denominador

$= \frac{sen^2 u + cos^2 u}{sen\ u}$	Aplicando Identidad recíproca
$= \frac{1}{sen\ u}$	Aplicando identidad de Pitágoras
$= csc\ u$	Aplicando Identidad recíproca

Actividad de aprendizaje recomendada

Realice las siguientes actividades para reforzar sus conocimientos:

1. Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente la simplificación de expresiones trigonométricas y que además usted desarrolle los ejercicios y problemas propuestos en la actividad de práctica planteada en esta semana, le recomiendo:

   - Observar atentamente el video titulado: Simplificar expresiones trigonométricas.

   En este video se explica la trigonometría analítica, específicamente la simplificación de expresiones trigonométricas.

2. Trabaje con la siguiente herramienta Simplificación de expresiones trigonométricas que le ofrece una guía práctica y accesible con explicaciones y ejemplos que facilitan la simplificación de expresiones y resolución de problemas trigonométricos.
3. Elabore un banco de preguntas basándose en los ejercicios y problemas propuestos en esta sección, y proceda a resolverlo. A medida que avance, supere cualquier dificultad mediante la investigación y el apoyo de su docente, quien está disponible para ayudarle a profundizar en los conceptos necesarios.

4. Revise la sección 7.1 del libro Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) disponible en la biblioteca virtual de la universidad, donde encontrará el contenido necesario para abordar eficazmente ejercicios y problemas propuestos.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"El éxito en la vida no se mide por lo que logras, sino por los obstáculos que superas"

¡Siga adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 12

Unidad 4. Trigonometría analítica

4.2 Demostración de identidades trigonométricas

Ahora abordaremos la parte medular del tema. Una vez que se haya familiarizado con la simplificación, podemos demostrar que una ecuación trigonométrica representa una identidad. Para que usted realice una correcta demostración, debe:

- Empezar con un lado.
- Usar identidades conocidas.
- Convertir a senos y cosenos.

Adicionalmente a esto, le recomiendo tener claro el uso de operaciones reversibles para las demostraciones, como se lo indico en los siguientes ejemplos, para que usted comprenda y afiance su conocimiento. *¡Vamos entonces!*

Ejercicio. Verifique la identidad planteada.

$\frac{1-cos\ x}{sen\ x}+\frac{sen\ x}{1-cos\ x}=2csc\ x$	*Empezamos por el lado izquierdo*
$LI=\frac{(1+cos\ x)^2+sen^2x}{sen\ x(1-cos\ x)}$	*Aplicando Denominador común*
$=\frac{1-2cos\ x+cos^2x+sen^2x}{sen\ x(1-cos\ x)}$	*Desarrollando producto notable*
$=\frac{1-2cos\ x+1}{sen\ x(1-cos\ x)}$	*Aplicando identidad pitagórica*
$=\frac{2-2cos\ x}{sen\ x(1-cos\ x)}=\frac{2(1-cos\ x)}{sen\ x(1-cos\ x)}$	*Sumando y factorizando*
$=\frac{2}{sen\ x}=2csc\ x=LD$	*Simplificando y aplicando recíproca*

Como podrá apreciar, mientras mayor sea el número de ejercicios que realice, las identidades vendrán con mayor facilidad a su mente.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Reforcemos el aprendizaje realizando la siguiente actividad:

1. Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente la demostración de identidades trigonométricas y que

además usted responda el cuestionario propuesto en línea en esta semana, recomiendo:

- Observar atentamente el video titulado: Identidades trigonométricas.

En este video se explica la trigonometría analítica, específicamente la simplificación de expresiones trigonométricas.

2. Trabaje con la herramienta Identidades Trigonométricas que le ofrece una guía práctica y accesible con explicaciones y ejemplos que facilitan la demostración de identidades.
3. Elabore un banco de preguntas basado en los ejercicios y problemas propuestos en esta sección y resuélvalo, superando cualquier dificultad mediante la investigación y consulta con su docente.
4. Revise la sección 7.1 del libro Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011), disponible en la biblioteca virtual de la universidad, donde encontrará el contenido necesario para abordar eficazmente ejercicios y problemas propuestos.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"El éxito depende de la preparación previa, y sin ella seguro que llegue el fracaso"

Confucio

¡Siga adelante!

Semana 13

Unidad 4. Trigonometría analítica

Esta semana, estimado(a) profesional en formación, abordaremos las fórmulas de adición y sustracción. A medida que avanzamos, reconocerá que estas fórmulas son fundamentales tanto en cálculo como en física, y complementan lo aprendido previamente. Aprecio sinceramente la dedicación y el esfuerzo que ha demostrado hasta ahora, y le animo a continuar con el mismo entusiasmo en el estudio de estas interesantes temáticas.

4.3 Fórmulas de adición y sustracción

4.3.1 Fórmula de adición y sustracción

Estimado estudiante, esta semana se abordarán las fórmulas de adición y sustracción para el seno, coseno y tangente. Es fundamental que analice la demostración de cada una de estas fórmulas, presentada en la herramienta Trigonometría: seno de la suma y la diferencia de dos ángulos, a partir de este análisis, podrá identificar las claves necesarias para resolver los ejercicios de aplicación correspondientes a esta unidad.

Una vez afianzados en las bases de las fórmulas de adición y sustracción, avancemos a realizar juntos el siguiente ejemplo práctico.

Ejercicio. Encuentre el valor exacto de la expresión:

$$sen\frac{19\pi}{2}$$

Como $\frac{19\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, aplicando la fórmula de la adición seno da

$$sen\frac{19\pi}{2} = sen\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= sen\frac{4\pi}{3}cos\frac{\pi}{4} + cos\frac{4\pi}{3}sen\frac{\pi}{4}$$

$$-\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$- - \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} - \frac{-\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

4.3.2 Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

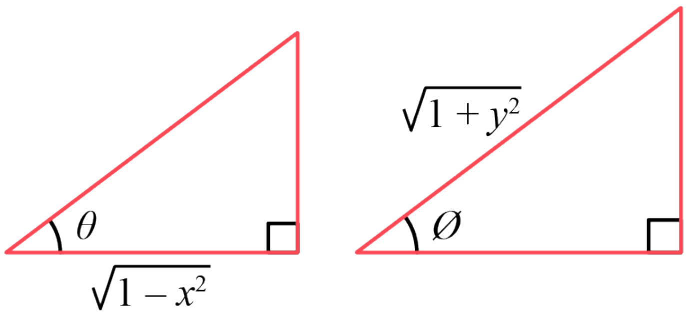
A lo largo de esta semana nos adentraremos en el estudio de las expresiones que involucran funciones trigonométricas inversas. Analizaremos detenidamente el proceso a seguir para evaluarlas correctamente. A continuación, presentamos un ejemplo ilustrativo:

$$cos(sen^{-1}x - tan^{-1}y)$$

Sea $\theta = sen^{-1}x$ y $\phi = tan^{-1}y$, y utilizando los triángulos como estrategia que se muestran en la siguiente figura:

Figura 28

Triángulos



Nota. Tomado de *Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas* [Ilustración], por Granda, S., 2020, p.106, EdiLoja.CC BY 4.0.

De los triángulos tenemos:

$$cos\ \theta = \sqrt{1-x^2}\quad cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\quad sen\theta = x\quad sen\phi = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

De la fórmula de la sustracción para cosenos se tiene:

$$cos(sen^{-1}x - tan^{-1}y) = cos(\theta - \phi)$$

$$= cos\theta\ cos\theta + sen\theta\ sen\phi$$

$$= \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + x\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(\sqrt{1-x^2} + xy)$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Le invito a reforzar sus conocimientos realizando las siguientes actividades:

1. Para comprender eficientemente la trigonometría analítica, específicamente las fórmulas de adición y sustracción y que además usted participe correctamente del foro académico propuesto en esta semana, le recomiendo:
    - Observar atentamente el video Identidad Trigonométrica de la suma y resta de ángulos. Esta herramienta le permitirá repasar los conceptos de la semana y aclarar sus dudas.
2. A partir de la página 512 del texto Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011), disponible en la biblioteca virtual, podrá profundizar en los contenidos estudiados esta semana. Esta referencia le proporcionará las herramientas necesarias para resolver ejercicios y problemas de aplicación.
3. Elabore y resuelva un banco de preguntas basándose en el fundamento teórico, ejercicios y problemas de esta guía y la bibliografía sugerida, superando las dificultades mediante la investigación y la consulta con su docente.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"El éxito en la vida no se mide por lo que logras, sino por los obstáculos que superas"

Confucio.

¡Siga adelante!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 4. Trigonometría analítica

4.4 Fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma

Esta semana trataremos las fórmulas de ángulos múltiples, derivadas de las fórmulas de adición. En la herramienta Open Stax se encuentran estas fórmulas y sus demostraciones, por lo que es importante revisar este material y los ejemplos resueltos con atención. Luego, analizaremos los problemas de esta guía didáctica, para apoyar su aprendizaje exitoso en esta asignatura.

4.4.1 Fórmulas de ángulo doble

Tabla 8
Fórmulas de ángulo doble

Fórmula de seno	Fórmula de coseno	Fórmula de tangente
$sen\ 2x = 2sen\ x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2\ x$	$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 554), por Stewart, Redlin y Watson, 2017, México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A.

En esta tabla usted puede observar las fórmulas del ángulo doble, las mismas que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades que contengan ángulos dobles y posteriormente para resolver ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo modelo

Encuentre ***sin* 2*x*, *cos* 2*x*** y ***tan* 2*x*** a partir de la información dada.

Figura 29

Explicación de Resolución: sin 2x, cos 2x y tan 2x

$$\cos x = \frac{4}{5}, \quad \csc x < 0$$

Para emplear las fórmulas del ángulo doble es necesario determinar el $\operatorname{sen} x$

$$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x}$$

Tomamos el signo negativo ya que θ está en el IV cuadrante.

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{1 - \left(\frac{16}{25}\right)}$$

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{25 - 16}{25}}$$

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$$

También es necesaria la $\tan x$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$

$$\tan x = \frac{-(3)(5)}{(4)(5)}$$

$$\tan x = -\frac{3}{4}$$

Ángulos dobles

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\operatorname{sen} 2x = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos 2x = \frac{16}{25} - \frac{9}{25}$$

$$\cos 2x = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$\tan 2x = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}}$$

$$\tan 2x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{16 - 9}{16}}$$

$$\tan 2x = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}}$$

$$\tan 2x = -\frac{(3)(16)}{(2)(7)}$$

$$\tan 2x = -\frac{24}{7}$$

Nota. Granda, S., 2020.

En la figura 29 se explica la resolución del problema propuesto a partir de los datos presentados. Recuerde estimado estudiante que se procede a determinar la solución empleando las fórmulas del ángulo doble.

4.4.2 Fórmulas de semiángulo

Figura 30

Fórmulas de semiángulo

$\sin\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{2}}$	$\cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos u}{2}}$	$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1+\cos u}$
La opción del signo + *o* – depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$		

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 556) [Ilustración], por Stewart, J. Redlin, L. y Watson, S., 2012, Cengage Learning Editores, CC BY 4.0.

En esta figura se presentan las fórmulas de semiángulo, las cuales serán útiles para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades con semiángulos y, posteriormente, en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo modelo

Use una fórmula de semiángulo apropiada para encontrar el valor exacto de la expresión ***tan* 15º.**

Solución: ya que **15º** es la mitad de **30º,** usted debe utilizar la fórmula de semiángulo de la tangente con ***u* = 30º**, debe escoger el signo + porque **15º** está en el primer cuadrante.

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{sen\ u}$$

$$\tan\frac{30^\circ}{2} = \frac{1-\cos 30^\circ}{sen\ 30^\circ}$$

$$\tan\frac{30^\circ}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{(2)(2-\sqrt{3})}{2\times 1}=2-\sqrt{3}$$

4.4.3 Evaluación de expresiones que contienen funciones trigonométricas inversas

Evaluar una expresión que tiene funciones trigonométricas inversas es una aplicación del uso de las fórmulas de los ángulos múltiples, esto se explica por medio del siguiente ejemplo modelo.

Ejemplo modelo

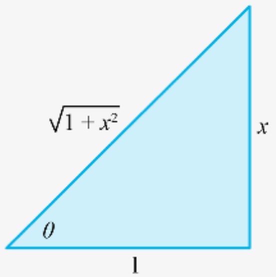
Escriba la expresión $sen(2tan^{-1}x)$ como una expresión algebraica en .

Figura 31

Explicación de Resolución: $sen(2tan^{-1}x)$

Solución

Sea $\theta = tan^{-1}x$ y con esto trazamos el triángulo.



Se necesita de las funciones seno y coseno, entonces:

$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\theta = tan^{-1}x$$

Con el teorema de Pitágoras encontramos la hipotenusa.

$$hipotenusa=\sqrt{1^2+x^2}=\sqrt{x^2+1}$$

se requiere encontrar el $\sin 2\theta$, más del triángulo solo puede obtener funciones trigonométricas de θ, por lo que para hallar $\operatorname{sen} 2\theta$ empleamos las fórmulas de ángulos dobles.

$$sen\ 2\theta = 2\ sen\ \theta\ cos\ \theta$$

$$sen\ 2\theta = 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$sen\ 2\theta = \frac{2x}{\sqrt{(x^2+1)^2}}$$

$$sen\ \theta = \frac{2x}{x^2+1}$$

Nota. Granda S., 2020.

En esta figura se presentan las fórmulas de semiángulo, las cuales serán útiles para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades con semiángulos y, posteriormente, en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

4.4.4 Fórmulas de producto a suma

Figura 32

Fórmulas de producto a suma

$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\text{sen}(u + v) + \text{sen}(u + v)]$	$\cos u \,\text{sen}\, v = \frac{1}{2}[\text{sen}(u + v) - \text{sen}(u - v)]$
$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) - \cos(u - v)]$	$\text{sen}\, u \,\text{sen}\, v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u + v)]$

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 557) [Ilustración], por Stewart, J. Redlin, L. y Watson, S., 2012, Cengage Learning Editores, CC BY 4.0.

En esta figura usted puede observar las fórmulas del producto a suma que le servirán para comprender y aplicar la trigonometría analítica en la demostración de identidades que necesiten de estas fórmulas y posteriormente para resolver ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo modelo

Escriba el producto como una suma: **cos *x* sin 4**

$$u = x \qquad v = 4x$$

$$\cos u \; senv = \frac{1}{2}[sen(u+v) - sen(u-v)]$$

$$\cos u \; sen \; v = \frac{1}{2}[sen(x+4x) - sen(x-4x)]$$

$$\cos u \; sen \; v = \frac{1}{2}[sen(5x) - sen(-3x)]$$

$$\cos u \; sen \; v = \frac{1}{2}[sen(5x) + sen(3x)]$$

Actividad de aprendizaje recomendada

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos realizando las siguientes actividades:

1. Para lograr un aprendizaje significativo en trigonometría analítica, especialmente en las fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma, le recomiendo profundizar en la comprensión de estos conceptos y su aplicación práctica. Este enfoque le permitirá desarrollar habilidades sólidas para el análisis y la resolución de problemas trigonométricos.
2. Observar atentamente el video Deducción de las fórmulas de ángulo doble y ángulo mitad. Este video le será de gran utilidad para reforzar el aprendizaje de trigonometría analítica, ya que proporciona explicaciones visuales y detalladas de las fórmulas clave. Además, facilita un aprendizaje significativo al complementar la teoría con ejemplos prácticos desarrollados paso a paso.
3. Revise la sección 7.3 de Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) en la biblioteca virtual, donde encontrará teoría fundamental sobre fórmulas de ángulo doble, semiángulo y producto a suma para resolver ejercicios y problemas aplicados.
4. Elabore y resuelva un banco de preguntas basándose en el fundamento teórico, ejercicios y problemas de esta guía y la bibliografía sugerida, superando las dificultades mediante la investigación y la consulta con su docente.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Detrás de cada equivocación hay una enseñanza"

¡Siga adelante!

Semana 15

Unidad 4. Trigonometría analítica

4.5 Ecuaciones trigonométricas básicas

En esta última etapa del curso, abordaremos un tema fundamental en trigonometría: la resolución de ecuaciones trigonométricas. A partir de los conceptos estudiados previamente, estableceremos las bases teóricas y aplicaremos diversas técnicas para encontrar las soluciones de estas ecuaciones.

4.5.1 Ecuación trigonométrica

Es una ecuación que contiene expresiones trigonométricas, las identidades con cada número (o ángulo) en el dominio de la variable solución que ya estudiamos, son ejemplos de estas ecuaciones. Si una ecuación trigonométrica no es identidad, con frecuencia hallamos soluciones mediante el uso de técnicas semejantes a las empleadas para ecuaciones algebraicas, es decir, una ecuación de la forma $\boldsymbol{T(\theta) = c}$, donde $\boldsymbol{T}$ es una función trigonométrica y $\boldsymbol{c}$ es una constante.

Ejemplo modelo

1. Resuelva la ecuación $sen\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Para que usted solucione este tipo de ecuaciones, tiene dos posibilidades:

   i. Encontrar las soluciones en un periodo.

      Como es de su conocimiento, el seno tiene un periodo de $\boldsymbol{2\pi}$, lo que debe hacer es encontrar la solución en cualquier intervalo de longitud $\boldsymbol{2\pi}$. Recuerde los valores de las funciones trigonométricas del ángulo de **30º** y **60º**.

Tabla 9

Valores de las funciones trigonométricas

Valores de las funciones trigonométricas			
$\sin 30° = \frac{1}{2}$	$\csc 30° = 2$	$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cos 60° = \frac{1}{2}$	$\sec 60° = 2$
$\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cot 30° = \sqrt{3}$	$\tan 60° = \sqrt{3}$	$\cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Nota. Tomado de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo* (p. 404), por Stewart, Redlin y Watson, 2017, México, D.F., Cengage Learning Editores, S.A.

En la tabla 9 se indican los valores de las funciones trigonométricas, ángulos especiales de **30°** y **60°,** así como de sus funciones trigonométricas inversas, estas le serán de gran utilidad al momento de resolver problemas de aplicación de la trigonometría analítica.

Entonces $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = sen^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 60° = \frac{\pi}{3}$, tiene que tener presente la circunferencia unitaria $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donde en el primer y segundo cuadrante, así usted puede deducir que las soluciones en el intervalo **[0,2π]** son:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

ii. Encontrar todas las soluciones.

Como usted sabe, la función seno repite sus valores cada $\boldsymbol{2\pi}$ unidades, entonces las soluciones de esta ecuación se obtienen sumando múltiplos enteros de $\boldsymbol{2\pi}$ a las soluciones encontradas.

$$\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi : \theta = \frac{2\pi}{3} + 2$$

4.5.2 Solución de ecuaciones trigonométricas por factorización

Si emplea la factorización para resolver una ecuación trigonométrica, estará empleando una de las técnicas más útiles para resolver una ecuación, como lo explicaré en el siguiente ejemplo.

Resuelva la ecuación dada **4 *cos* 2θ - 4 *cos θ* + 1 = 0**

Solución: procede a factorizar el lado izquierdo de la ecuación, ya que se trata de un trinomio cuadrado perfecto.

$$4\cos 2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{(2\cos\theta - 1)^2} = 0$$

$$2\cos\theta - 1 = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Ahora debemos considerar que el coseno tiene un periodo 2π y debe

encontrar las soluciones en el intervalo **[0,2*π*]** que son $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\theta = \frac{2\pi}{3}$, a esto agregarle todas las soluciones posibles, tomando en cuenta que el periodo del coseno se repite cada 2***π*** y obtendríamos las soluciones finales. $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Realice las siguientes actividades para reforzar sus conocimientos:

1. Para comprender eficientemente los procesos de solución de ecuaciones trigonométricas básicas, como parte de la trigonometría analítica, y que usted desarrolle los ejercicios y resuelva los problemas

propuestos en la actividad experimental planificada en esta semana, le recomiendo:

a. Estudiar detenidamente el video Ecuaciones trigonométricas. En este material se aborda de manera exhaustiva la definición de ecuaciones trigonométricas, los métodos de resolución y el número de soluciones posibles. Además, se realiza un repaso de conceptos fundamentales como el círculo trigonométrico, ángulos notables e identidades trigonométricas.
b. Para profundizar en el estudio de las ecuaciones trigonométricas básicas, se recomienda consultar la sección 7.4 del texto Álgebra y Trigonometría de Ramírez (2011) disponible en la biblioteca virtual. En este apartado encontrará los fundamentos teóricos necesarios para abordar la resolución de ejercicios y problemas aplicados.

2. Elabore y resuelva un banco de preguntas basándose en el fundamento teórico, ejercicios y problemas de esta guía y la bibliografía sugerida, superando las dificultades mediante la investigación y la consulta con su docente.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"Detrás de cada equivocación hay una enseñanza"

¡Siga adelante!

3. Estimado estudiante, luego de culminar con el estudio de la cuarta unidad, Trigonometría Analítica, es recomendable que usted realice la autoevaluación de lo aprendido, con la finalidad de retroalimentar aquellas inquietudes más importantes.

Autoevaluación 4

Instrucción: marque la alternativa correcta.

1. Si escribe la expresión trigonométrica tan2x - sec2x en términos de seno y coseno y luego la simplifica, usted obtiene:

   a. 1
   b. -1
   c. 0

2. Si escribe la expresión trigonométrica cos2θ (1 + tan2x) en términos de seno y coseno y luego la simplifica, usted obtiene:

   a. 1
   b. -1
   c. 0

3. Al simplificar la expresión $\frac{1+coscosy}{1+secsecy}$ se obtiene:

   a. tan tan y
   b. cos cos y
   c. y

4. Si usted verifica la identidad, $(1-coscos\beta)(1+coscos\beta)=\frac{1}{csc^2\beta}$ la demostración correcta es:

   a. $(1-\cos\cos\beta)(1+\cos\cos\beta)\rightarrow 1-\cos^2\beta\rightarrow\cos^2\beta\longrightarrow\left(\frac{1}{\csc\csc\beta}\right)^2\rightarrow\frac{1}{\csc^2\theta}$

   b. $(1-\cos\cos\beta)(1+\cos\cos\beta)\rightarrow 1-\cos^2\beta\rightarrow sen^2\beta\longrightarrow\left(\frac{1}{\csc\csc\beta}\right)^2\rightarrow\frac{1}{\csc^2\theta}$

c.
$$(1-\cos\cos\beta)(1+\cos\cos\beta)\rightarrow 1-\cos^2\beta\rightarrow sen^2\beta\longrightarrow\left(\frac{1}{\csc\csc\beta}\right)^2\rightarrow\frac{1}{\csc^2\theta}$$

5. Si usa las fórmulas para la adición de ángulos, el valor exacto de 75º es:

a.
$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b.
$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

c.
$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

6. Si usa las fórmulas para la adición de ángulos, el valor exacto de

$sinsin\frac{19\pi}{12}$ es:

a.
$-\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

b.
$\frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$

c.
$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$

7. Si usa la fórmula de semiángulo apropiada, el valor exacto de la expresión 15º es:

a.
$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

b.
$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

c.
$\frac{1}{3}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

8. Si aplica la fórmula de ángulo doble conveniente y considera que

$x=\frac{15}{13}yx$ está en el cuadrante I, el valor del 2x es:

a.
$\sin \sin 2x=\frac{120}{169}$

b.
$\sin \sin 2x=\frac{102}{169}$

c.
$\sin \sin 2x=\frac{120}{196}$

9. Si resuelve la ecuación . se obtiene las siguientes soluciones:

a.
$\theta=\frac{\pi}{6}y\frac{2}{6}\pi$ y $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \theta=\frac{2}{6}\pi+2k\pi$

b.
$\theta=\frac{\pi}{3}y\frac{2}{3}\pi$ y $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \theta=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$

c.
$\theta=\frac{\pi}{3}y\frac{2}{3}\pi$ y $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad \theta=\frac{2}{3}\pi+2\pi$

10. Si resuelve la ecuación trigonométrica tan tan = 2.5 obtiene:

a. $\theta = 1.91$, $\theta = 1.19 + 2k\pi$
b. $\theta = 1.91$, $\theta = 1.19 + k\pi$
c. $\theta = 2.91$, $\theta = 1.19 + k\pi$

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Le recomiendo llevar a cabo las siguientes actividades, como trabajo previo a rendir la evaluación presencial del segundo bimestre.

- **Actividad 1.** Recupere las actividades de aprendizaje calificadas desarrolladas durante el segundo bimestre.
- **Actividad 2.** Organice un documento que contenga dicha información cuidando la presentación; si lo hizo a mano, puede fotografiar y organizar un documento en PDF.
- **Actividad 3.** Suba el archivo del documento a la EVA caso de ser necesario; este documento le servirá de apoyo para preparar su evaluación presencial en esta semana.
- **Actividad 4.** Revise los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello, considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas.
- Evaluaciones parciales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar sus aprendizajes del segundo bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, le sugiero:

a. Revise cada uno de los conceptos estudiados en las dos unidades planificadas y desarrolladas en este segundo bimestre.
b. Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos en la bibliografía y recursos sugeridos.
c. Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.

A través del chat de tutoría y consultas puede aclarar sus dudas e inquietudes con su docente.

"La derrota no es el peor de los fracasos. No intentarlo es el verdadero fracaso"

George Edward Woodber.

4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	c	$t = \frac{5\pi}{6}$ se encuentra ubicado en el segundo cuadrante y es coterminal con el ángulo $\frac{\pi}{6}$, un ángulo especial por lo que sus coordenadas son $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
2	a	t se encuentra en el tercer cuadrante por lo que $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$.
3	c	P (x, y) está en el eje negativo de x.
4	a	El punto P está en el segundo cuadrante x=-20/29, y=21/29 y r=1.
5	a	El número de referencia $t = \pi/4$ y $t = \frac{3\pi}{4}$ está en el segundo cuadrante, por lo que la coordenada en x es negativa.
6	a	Ya que la amplitud de la función |a|=|1|=1 y el periodo $\frac{2\pi}{1} = 2\pi$, y el desplazamiento horizontal $b = \frac{\pi}{2}$ a la derecha.
7	a	Se observa en la gráfica |a|=4 Periodo=2π b=0.
8	b	La curva tiene |a|=|-4|=4, periodo $\frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y desfase a la izquierda $b = \frac{\pi}{2}$.
9	c	La curva tiene |a|=|2|=2, periodo $\frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{3}$ y frecuencia $\frac{w}{2\pi} = \frac{3}{2\pi}$.
10	b	La función debe tener la forma cos(ωt) y ω=2πf=2π(3)=6π, así obtenemos $y = 2e^{-1.5t}$ cos cos 6πt

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a	$200^0 \times \frac{\pi}{180}^0 = \frac{10\pi}{9}$
2	b	Para convertir de grados a radianes procedemos así: $-\frac{3\pi}{2} \times \frac{180^0}{\pi} = -270^0$
3	c	$S = r\theta = 9 \times \frac{5\pi}{6} = \frac{15\pi}{2}m$
4	a	$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(10)(0.5\ rad)$ entonces A=2.5u².
5	a	El ángulo dado está en el tercer cuadrante, por el ángulo de referencia 180°-105°=75°.
6	a	Este ángulo tiene su lado terminal en el segundo cuadrante, por lo tanto, el ángulo de referencia $\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi-2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ es entonces el sen $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
7	c	Empleando las identidades fundamentales y pitagóricas tenemos: y sen2 θ + $tan\ tan\theta = \frac{\theta}{coscos\ \theta}$ cos2 θ =1. Despejando $sen\ \theta = \sqrt{1 - cos^2\theta}$ finalmente $tantan\ \theta = +\frac{\sqrt{1-cos^2\theta}}{coscos\theta}$.
8	a	El triángulo tiene lados de longitud de 7 y 9 unidades, con un ángulo entre ellos de 72°, por tanto:$A = \frac{1}{2}ab\ sin\ sin\theta$
9	b	El ángulo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con $seno - \frac{\sqrt{2}}{2}$es $-\frac{\pi}{4}$ Por tanto, $sen^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$
10	a	Empleando las funciones trigonométricas $sin\ sin\theta = \frac{6}{10}$ entonces $\theta = sen^{-1}\left(\frac{6}{10}\right) = 36.7$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a	Determinamos el ángulo C=180°-98.4°-24.6°=57° y aplicamos la Ley de senos $\frac{984^o}{376} = \frac{57}{x} \to x = \frac{(\sin \sin 57°)(376)}{98.4°} = 318.8$.
2	b	Determinamos el ángulo θ aplicando la ley de senos $\frac{\theta}{36} = \frac{120}{45} \to \theta = \frac{(\sin \sin 120°)(36)}{45} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ obtenemos: $\theta = sen^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right) = 44°$
3	b	Empleando Ley de senos $\frac{48}{x} = \frac{\sin \sin 100}{5ml}$ entonces: $x = \frac{48(5)}{100°} = 3.8m$
4	a	Empleando Ley de senos $\frac{46°}{200} = \frac{\sin \sin 52°}{AC}$ entonces: $AC = \frac{52°(200)}{46°} = 219.092mi$
5	b	Al tratarse de un triángulo isósceles el $\angle B = 68°$ y al emplear la ley de senos.
6	a	Empleando la Ley de Cosenos x² = c² + b² - 2(c)(b) cos 39° $x = \sqrt{42^2 + 21^2 - 2(42)(21)\cos 39°} = 29$.
7	a	Empleando la Ley de Cosenos b² = a² + c² - 2ac cos θ, θ = $\cos^{-1}\left(\frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac}\right)$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{(37.83)^2-(68.01)^2-(42.15)^2}{-2(68.01)(42.15)}\right), \theta = 29.89°$.
8	b	Para emplear la fórmula de Herón debemos determinar el semiperímetro $s = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} s = \sqrt{6.5\,(6.5-6)\,(6.5-4)\,(6.5-3)} = 5.33$ y luego.
9	b	Empleando la Ley de cosenos AB² = CB² + CA² - 2(CB)(CA) cos 40.3° $AB = \sqrt{3.56^2 + 2.82^2 - 2\,(3.56)\,(2.82)\cos \cos 40.3°} = 2.30mi$.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	c	Empleamos la Ley de Cosenos. $x=\sqrt{420^2+380^2-2\left(420\right)\left(380\right)\cos\cos 30^{\circ}}=210.53\ pie$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	b	Empleando las identidades trigonométricas fundamentales $tan^2x - sec^2x = \frac{sen^2x}{cos^2x} - \frac{1}{cos^2x} = \frac{sen^2x-1}{cos^2x}$ $= \frac{-(1-sen^2x)}{cos^2x} = \frac{-cos^2x}{cos^2x} = -1$
2	b	Empleando las identidades trigonométricas fundamentales $cos^2\theta(1+tan^2x) = cos^2\theta(1+\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta})$ $= \left(\cos^2\theta + \frac{\cos^2\theta sen^2\theta}{\cos^2\theta}\right) = \cos^2\theta + sen^2\theta = 1$
3	a	Empleando las identidades trigonométricas fundamentales $\frac{1+\cos\cos y}{1+\sec\sec y} = \frac{1+\cos\cos y}{1+\frac{1}{\cos\cos y}} = \frac{1+\cos\cos y}{\frac{\cos\cos y+1}{\cos\cos y}}$ $= \frac{(1+\cos\cos y)\cos\cos y}{(1+\cos\cos y)} = \cos\cos y$
4	c	Se verifica la identidad. En el proceso de demostración, se busca respaldar la igualdad entre las expresiones matemáticas vinculadas, aplicando de manera adecuada las reglas y propiedades pertinentes.
5	b	Empleando la fórmula (s+t) = s cos cos t + cos cos s sin sin t (45°+30°) = 45° cos cos 30 + cos cos 45° sen sen 30 (45°+30°) = 45° cos cos 30° + cos cos 45° sen sen 30 $(45^\circ + 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $(45^\circ + 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ $(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
6	a	Empleando la fórmula (s+t) = s cos cos t + cos cos s sen sen t $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{4} coscos \frac{5pi}{3} + coscos \frac{5\pi}{4} sinsin \frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
7	b	Empleando la fórmula del semiángulo $\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\cos u}{2}}$ $\frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\cos u}{2}} \rightarrow u = 30^\circ \rightarrow \frac{30}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\cos 30^\circ}{2}}$ $\frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \rightarrow \frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{1}}}$ $\frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ $\frac{30}{2} = +\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ $\frac{30}{2} = +\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$
8	a	Si el $x = \frac{5}{13}$ está en el cuadrante I se determina $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ entonces cos cos $x = \frac{12}{13}$ 2x = 2 sen sen x cos cos x $2x = 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$
9	b	Dado que el seno tiene un periodo 2π, primero se encuentra la solución en el intervalo [0,2π[, $\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\theta = sen^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\theta = \frac{\pi}{3}\ y\ \theta = \frac{2}{3}\pi$
10	b	Encontramos la solución en un periodo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tan tan θ = 2.5, $\theta = tan^{-1}(2.5) \rightarrow \theta = 1.19$ tomando en cuenta que la tangente tiene periodo π obtenemos todas las soluciones de la ecuación al sumar múltiplos enteros de π así θ=1.19+kπ representa todas las posibles soluciones.
		Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Cole, J. A. & A. Cole, J. (2011). Álgebra y trigonometría con geometría analítica: (13 ed.). Cengage Learning. https://elibro.net/es/lc/bibliotecautpl/titulos/39963

Stewart, J. Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precálculo. Matemáticas para el cálculo. México, D.F. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Islas Salomón, C. A. Colín Uribe, M. P. & Morales Téllez, F. (2017). Geometría y trigonometría: (ed.). Grupo Editorial Éxodo. https://elibro.net/es/ereader/bibliotecautpl/130339

Stewart, J. Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. México, D.F. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Demana, F. Waits, B. Foley, G. y Kennedy, D.(2007). *Precálculo. Gráfico, numérico, algebraico*. México, D.F. Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Swokowski, E. y Cole, J. (2009). *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. México, D.F. Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

6. Anexos

Anexo 1. Ejercicios funciones trigonométricas inversas ytriángulos rectángulos

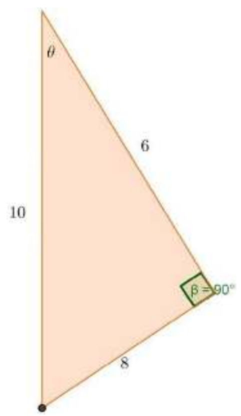
Conteste según corresponda:

1. Para que una función tenga inversa debe ser_______________________.
   Para definir la función inversa restringimos el _______________________
   de la función seno al intervalo_____________________________________.

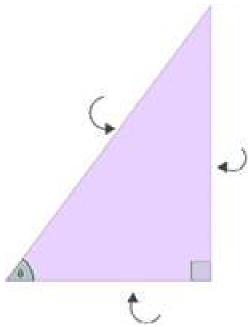
2. Las funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa tienen los siguientes dominios y rangos.

   1. La función sen^{-1} tiene dominio_______________y rango _____________.
   2. La función cos^{-1} tiene dominio_______________y rango _____________.
   3. La función tan^{-1} tiene dominio_______________y rango _____________.

3. En el triángulo que se muestra podemos encontrar el ángulo como sigue.

a. $\theta = sen^{-1}$ _____ b. $\theta = cos^{-1}$ _____ c. $\theta = tan^{-1}$ _____	

4. Para encontrar $sen\left(cos^{-1}\frac{5}{13}\right)$ hacemos que $\theta = cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$ y se completa el triángulo rectángulo que se encuentra en la parte superior de la siguiente columna. Se encuentra que $sen\left(cos^{-1}\frac{5}{13}\right) =$

	$\left(cos^{-1}\frac{5}{13}\right)$-________

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.