Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Itinerario 1- Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes

Guía didáctica

UTPL

Facultad Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Itinerario 1- Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)	VII

Autor:

José Edmundo Sánchez Romero

EDUC_1126

Universidad Técnica Particular de Loja

Itinerario 1- Aplicación de los Conocimientos Matemáticos en la Vida Cotidiana. Medidas de Áreas y Volúmenes

Guía didáctica

José Edmundo Sánchez Romero

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-39-277-0

Año de edición: septiembre, 2021

Edición: primera edición reestructurada en julio 2025 (con un cambio del 60%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Comunicación oral y escrita.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Trabajo en equipo.
- Comunicación en inglés.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3 Competencias del perfil profesional

- Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física mediante la fundamentación teórico-práctico de los sistemas de conocimiento que, faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado.
- Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la

contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

- Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico-experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.
- Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.
- Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.
- Elaborar, ejecutar y evaluar proyectos y/o procesos de investigación que lleven a la recopilación, organización y análisis de información en el ámbito de las matemáticas y la física enfocados a la generación de nuevos conocimientos, habilidades y actitudes que aporten a la solución de problemas prácticos de su comunidad.
- Desarrollar, ejecutar y difundir proyectos pedagógicos y didácticos con metodologías activas e innovadoras, involucrando la matemática y la física, vinculados a la solución de problemas de la realidad y que apoyen la integración de los docentes con el entorno natural y social de la comunidad y del país en general.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

En la actualidad, uno de los grandes desafíos en la formación docente en matemáticas es la desconexión entre los conceptos abstractos del cálculo y su aplicación significativa en situaciones reales. Muchos estudiantes universitarios, futuros docentes, presentan dificultades para comprender cómo los principios matemáticos —como el uso de derivadas para determinar máximos y mínimos— se relacionan con problemas cotidianos como la optimización de espacios con áreas y volúmenes, el uso eficiente de materiales o el diseño estructural en geometría espacial. Esta desconexión limita su capacidad para proponer experiencias de aprendizaje auténticas que vinculen la matemática con la vida diaria de sus futuros estudiantes.

La enseñanza tradicional, en donde se prioriza procedimientos mecánicos, repetitivos y sin suficiente contextualización, ha contribuido para que estos conceptos se perciban como distantes, abstractos o irrelevantes, especialmente en lo referente al cálculo de áreas y volúmenes con criterios de eficiencia.

Frente a esta problemática, se vuelve necesario replantear el enfoque didáctico hacia una perspectiva más contextualizada y aplicada. La presente guía propone abordar la enseñanza de áreas y volúmenes a través de problemas de optimización que integren situaciones de la vida cotidiana, tales como la construcción de cajas, recipientes, el embalaje de objetos o la distribución de recursos en formas espaciales. Al trabajar con problemas de máximos y mínimos desde un enfoque práctico y visual, se busca que los estudiantes no solo desarrollen habilidades técnicas, sino también competencias para modelar, interpretar y argumentar soluciones en contextos reales. Así, se fortalece el vínculo entre el conocimiento matemático y su aplicación pedagógica en la enseñanza escolar.

2. Metodología de aprendizaje

La metodología de esta asignatura se fundamenta en el modelo por competencias de la UTPL y está orientada al desarrollo de aprendizajes contextualizados, integradores, significativos y transferibles. En este marco, se adopta la **Metodología Basada en Problemas (ABP)** como estrategia central de enseñanza, en la que los estudiantes enfrentan situaciones problemáticas reales vinculadas con el cálculo de áreas y volúmenes, aplicando máximos y mínimos. Esta aproximación promueve el desarrollo del pensamiento crítico, la formulación de conjeturas, la modelación matemática y la toma de decisiones fundamentadas en contextos cotidianos.

En coherencia con la **Modalidad en Línea**, las actividades se desarrollan mediante entornos virtuales colaborativos, donde los estudiantes analizan casos, diseñan soluciones, construyen modelos matemáticos y argumentan sus respuestas. Se utilizan herramientas digitales como GeoGebra, Desmos, o WolframAlpha para facilitar la visualización gráfica y la validación de resultados. Además, se integran recursos como foros, portafolios digitales y sesiones síncronas de tutoría que permiten la reflexión conjunta y la retroalimentación continua. Así, la metodología no solo favorece la apropiación del contenido, sino también la consecución de resultados de aprendizaje y el desarrollo de competencias profesionales esenciales para la enseñanza innovadora de la matemática en la educación básica y media.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Reconoce problemas que pueden ser solucionados mediante el cálculo del perímetro, área y volumen.

Para lograr que el estudiante identifique, modelice y resuelva problemas que pueden ser solucionados mediante el cálculo del perímetro, área y volumen, se desarrollarán actividades centradas en la resolución de problemas contextualizados, aplicando la metodología basada en problemas (ABP). Para esto, a través del análisis de situaciones reales —como diseño de envases, distribución de espacios o construcción de cuerpos— el estudiante identificará variables geométricas relevantes y seleccionará estrategias matemáticas adecuadas para la aplicación de máximos y mínimos en cuerpos geométricos como prismas y pirámides.

En el proceso de alcanzar el resultado de aprendizaje será fundamental la utilización de simuladores interactivos, recursos gráficos y plataformas como GeoGebra, los cuales facilitarán la visualización de las formas, sus dimensiones y medidas, permitiendo una comprensión significativa y aplicada de estos conceptos en la vida cotidiana. Lo cual se complementa con la construcción y aplicación de secuencias didácticas referidas a temáticas de modelización sobre problemas de optimización contextualizados a la realidad nacional y mundial.

Los conceptos serán axiomatizados considerando que, la axiomatización matemática significa construir una teoría a partir de un conjunto de axiomas que son proposiciones que se aceptan sin demostración. Lo cual tiene tres implicaciones: primero, definir objetos matemáticos básicos como puntos, rectas, planos, polígonos y poliedros; luego, establecer algunas relaciones entre ellos, como las intersecciones, perpendicularidad, paralelismo, entre algunos otros; finalmente, introducir definiciones formales como la de prisma o pirámide.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

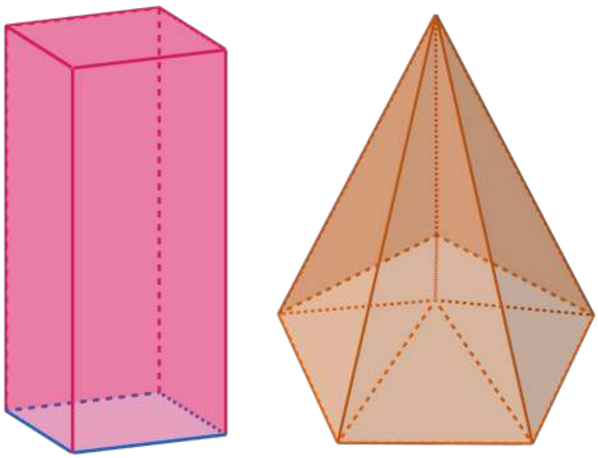
Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

Estimado estudiante, para la aplicación de prismas y pirámides en la modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana -objeto del presente curso- es prioritario desarrollar una adecuada conceptualización de los cuerpos geométricos en cuestión. Para esto, **primero** nos introduciremos en el campo de los objetos geométricos (prismas y pirámides) presentando su definición; **luego**, establecemos algunas relaciones entre los elementos, como las intersecciones, perpendicularidad, paralelismo, entre otros; **finalmente**, se proponen definiciones formales como la de prisma o pirámide. Para facilitar esta introducción, observe la siguiente figura.

Figura 1
Prisma y pirámide



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

1.1. Prismas, historia y sus aplicaciones

Se denomina prisma recto a un sólido geométrico (poliedro) que tiene dos bases congruentes y paralelas que son polígonos regulares, caras laterales que son rectángulos y los vértices son aquellos correspondientes a las bases.

Los elementos que conforman el prisma son: vértices, altura, área lateral y volumen que se definen y deducen como teoremas. Además, las propiedades en los prismas rectos como simetría, paralelismo y perpendicularidad fueron estudiadas en cursos anteriores y se pueden analizar con base en los axiomas básicos iniciales. Los prismas rectos se clasifican según la forma poligonal de las bases: triangular, cuadrangular, rectangular, pentagonal, hexagonal, etc.

Es importante estimado estudiante que, usted tome conciencia de considerar la axiomatización matemática, tanto para aprender como para enseñar, por ejemplo, en la geometría euclidiana, **respecto a los prismas** se puede escribir. Axioma: “Por dos puntos pasa una única recta”. Definición derivada: “Un paralelogramo es un cuadrilátero con dos pares de lados paralelos”. Definición de prisma: “Un prisma pentagonal es un sólido limitado por dos pentágonos paralelos y cinco caras laterales que son paralelogramos”.

1.1.1. Historia de los prismas

En su formación didáctica, conocer y plantear situaciones sobre la historia de los objetos matemáticos es fundamental para mantener motivada una clase, por esa razón, consideramos algunas temáticas relacionadas con la historia de los prismas, mismas que fueron estudiados desde la antigüedad y se remontan a la Grecia clásica, en donde principalmente Euclides -alrededor del 300 a.C.- incluyó en su famosa obra *Los Elementos*. Por ejemplo, al referirse a los prismas los define como "poliedros formados por dos bases paralelas y congruentes, unidas por caras laterales planas.

Estos temas y otros importantes respecto a la aplicación de los prismas, los cuales se desarrollaron desde la antigüedad hasta la actualidad, usted puede apreciarlos en la siguiente infografía:

Historia de los prismas.

En esta línea de tiempo se aprecia con claridad el surgimiento de los prismas antes de Cristo y cómo se fue desarrollando con el transcurso del tiempo, llegando en la actualidad a ser parte de la geometría espacial y topología.

1.1.2. Construcción de los prismas

Para la representación de un prisma, hay dos posibilidades: construir físicamente estos cuerpos geométricos con cartulina o algún otro material; la otra posibilidad, construir digitalmente en alguna plataforma. Al respecto, decimos que la representación tridimensional es en el espacio.

¿Pero, cómo se pueden representar cuerpos geométricos en el espacio?

Para esto, estimado estudiante, antes de entrar en otros detalles, primero debemos entender cómo representar un punto en el espacio, es decir en un sistema ortogonal tridimensional. Para ello, le invito a revisar detenidamente las explicaciones del siguiente video: Vectores y puntos en tres dimensiones (Coordenadas tridimensionales).

En este video se observa cómo se construye un sistema ortogonal en tres dimensiones y cómo se representan puntos, los cuales quedan definidos a través de tres coordenadas (x, y, z). Por ejemplo, el punto A tiene de coordenadas (3, -2, 1) y el punto B tiene por coordenadas (2, 4, 3).

Vale puntualizar que, para trabajar en un sistema tridimensional se puede utilizar la aplicación gratuita GeoGebra en la vista gráfica 3D. Le invito para que practique la utilización de esta aplicación, representando los puntos y experimentando sus distintas posiciones.

1.1.3. Aplicaciones de los prismas

Luego de revisar la definición, los elementos y la historia de los prismas, estamos preparados para conocer sus principales aplicaciones según las diferentes etapas de la historia, hasta llegar a nuestros días.

¿Cuáles son las principales aplicaciones de los prismas?

Existe una variedad marcada de aplicaciones con los prismas, desde los tiempos antes de Cristo en la arquitectura egipcia o mesopotámica (3000 a.C.), pasando por la aplicación en estudios de perspectiva y proporción en el renacimiento (1500 a 1600), llegando a la aplicación de prismas en óptica avanzada (telescopios, cámaras), diseño estructural, y modelado computacional en 3D. en el año 2000. Al respecto, usted puede valorar estas aplicaciones en el transcurso del tiempo en la siguiente infografía:

[Aplicaciones de los prismas.]

En la infografía podemos observar cómo se puede aplicar los cuerpos geométricos rector denominados prismas llegando a la actualidad en donde las estaciones topográficas y simulaciones científicas llaman mucho la atención en los entornos educativos digitales.

Con la finalidad de profundizar el análisis del sistema tridimensional, revise y analice el documento Geometría del espacio y del plano. En este apartado encontrará la composición del sistema de coordenadas tridimensionales, así como existen algunas explicaciones que van desde cómo representar un punto en el espacio hasta la interpretación gráfica de una ecuación.

Es conveniente también que estudie el microvideo "Sistema de coordenadas en tres dimensiones", en donde se explica de forma muy didáctica y concreta los elementos del sistema tridimensional utilizando tres planos que se cortan, así como las características de los puntos en el espacio tridimensional.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de revisar algunos temas introductorios y relacionados con nuestros conocimientos previos, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, aunque no son calificadas, son fundamentales para estudiar los temas siguientes de este curso.

Aprovechando la plataforma gratuita GeoGebra y apoyándose en el microvideo, Puntos en el sistema tridimensional, realice lo siguiente:

1. Represente en un sistema tridimensional el punto referencial A (6, -3, 4), haga una captura de pantalla y escriba el nombre del cuerpo geométrico que se ha formado.
2. Ubique en un sistema tridimensional el punto referencial B (-4, 6, 6), realice una captura de pantalla y anote el nombre del cuerpo geométrico que se ha construido.
3. Determine la medida del largo, del ancho y la profundidad de la figura geométrica formada en un sistema tridimensional con el punto referencial P (4, -4, -8).
4. Construya en la plataforma GeoGebra un prisma que tenga las siguientes medidas: largo = 4 cm, ancho = 6 cm y altura = 5 cm.

Nota. Realice las actividades en un documento Word.

Con el desarrollo de estas cuatro actividades recomendadas, usted podrá representar un punto en el sistema tridimensional, lo cual permitirá construir un paralelepípedo o prisma rectangular: algo sencillo, pero muy valioso para los siguientes temas de estudio. También, se prepara para la construcción de prismas utilizando la plataforma GeoGebra.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 2

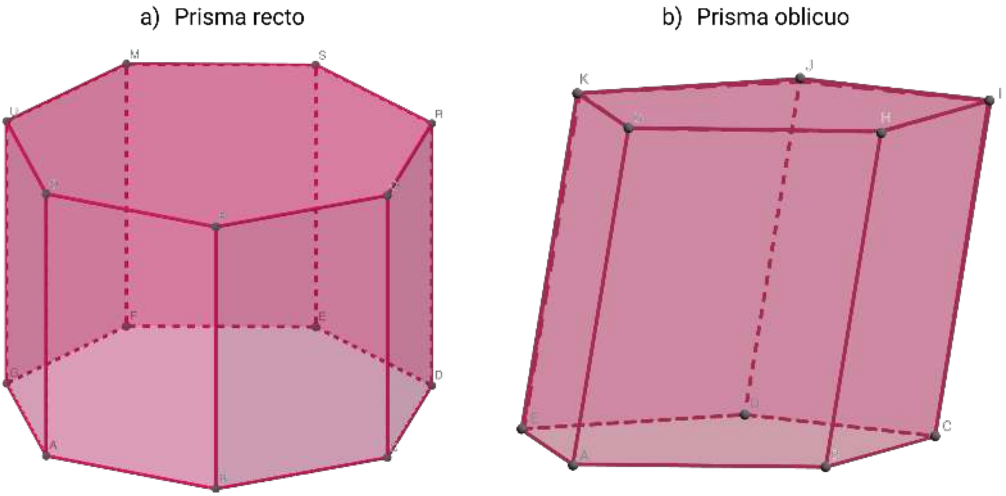
Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

1.2. Tipos de prismas, elementos, área y volumen

Estimado estudiante, recordemos la definición de prisma: **prisma recto** es aquel sólido geométrico (poliedro) que tiene dos bases congruentes en donde las aristas laterales son perpendiculares a las aristas de la base, mientras que **prisma oblicuo** es aquel en donde las aristas laterales son oblicuas a las aristas de la base. En la figura 2 se pueden observar ejemplos de estos dos tipos de prisma.

Figura 2

Tipos de prismas: recto y oblicuo

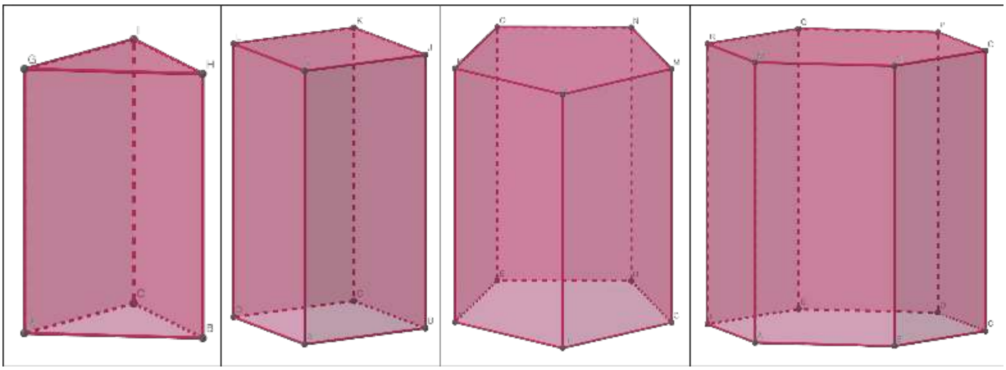


Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Entre los prismas rectos tenemos los prismas con base regular, en donde se observan las dos bases como polígonos regulares de tres o más lados. En estos casos, aparecen algunos prismas especiales como el cubo cuyas seis caras son iguales. A continuación, en la figura 3, se presentan algunos de ellos:

Figura 3

Tipos de prismas rectos



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

1.2.1. Elementos de un prisma

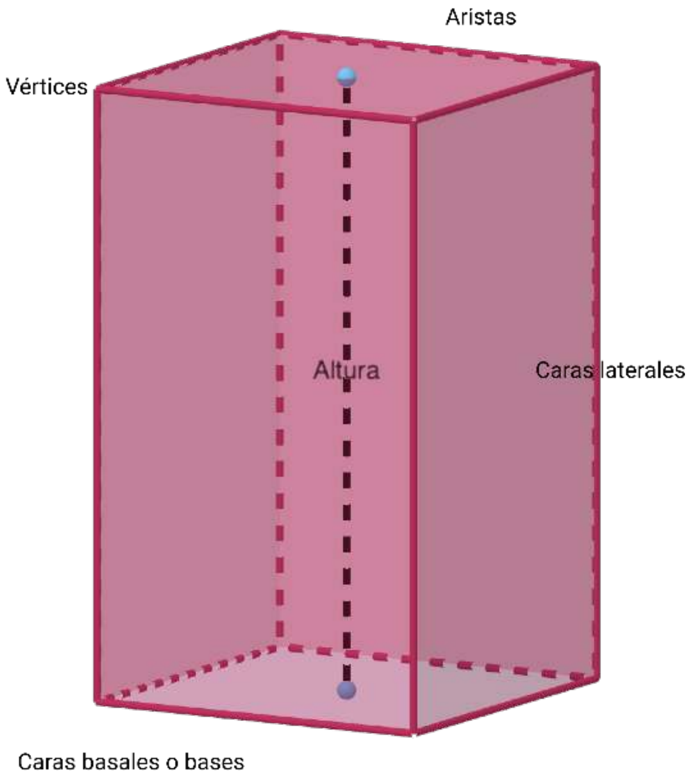
Los prismas son cuerpos geométricos definidos en tres dimensiones y para su construcción se parten de superficies rectangulares que se unen y presentan algunos elementos característicos.

¿Cuáles son los principales elementos de un prisma?

Vale puntualizar que los prismas están definidos en tres dimensiones, por lo tanto, tienen tres medidas: lago, ancho y altura. En la figura 4 se pueden identificar estos elementos de un prisma, tales como: caras basales o simplemente bases, caras laterales, aristas, vértices y la altura. En los prismas con una base regular, se distingue el número de lados de la base y la longitud del lado.

Figura 4

Elementos de un prisma



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

A continuación, se describen cada uno de sus elementos:

- **Las bases**, son dos polígonos congruentes y paralelos. El uno sirve de apoyo y el otro es el opuesto.
- **Caras laterales**, son superficies planas con forma rectangulares y que limitan al cuerpo geométrico. El número de caras laterales depende del número de lados que tenga la base.
- **Aristas**, son los segmentos que se forman al unirse dos caras laterales o caras laterales con las bases.
- **Vértices**, son aquellos puntos que se forman al unirse tres o más aristas. El número de vértices depende del número de lados que tenga la base.

- **Altura**, es la distancia entre una base y la otra, se representa con el segmento de recta que une los puntos que se encuentran en el centro de cada base.

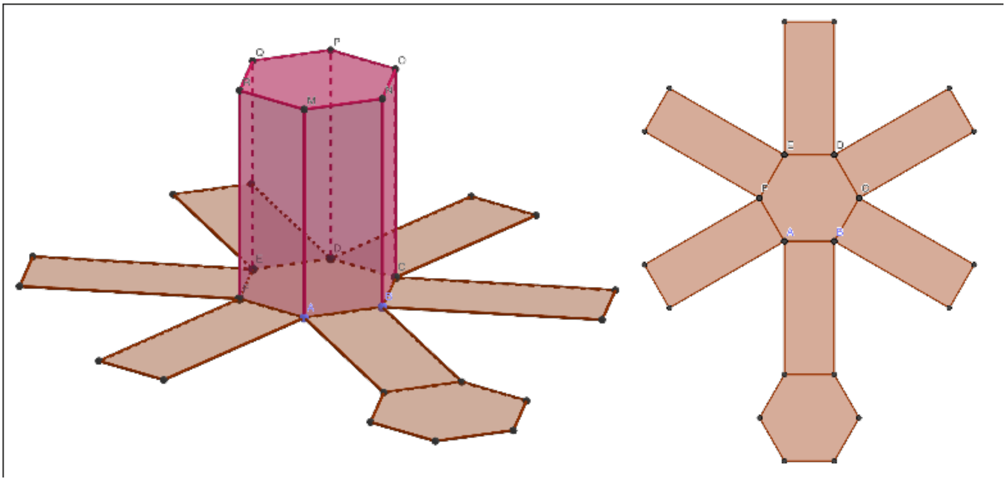
1.2.2. Área de un prisma

Estimado estudiante, un prisma recto se forma a partir de las dos bases congruentes y paralelas entre ellas, mismas que se encuentran unidas con las caras laterales perpendiculares a las bases. Para su dibujo y representación, es conveniente que utilicemos la aplicación GeoGebra, recomiendo el análisis de algún video explicativo al respecto.

El desarrollo de un prisma nos permite ver con claridad que, para calcular el área se debe sumar el área lateral con el área de las dos bases, esta definición se puede interpretar realizando un análisis de la siguiente figura:

Figura 5

Desarrollo de un prisma hexagonal



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Resulta necesario puntualizar que, cuando se habla del área, nos referimos al número de unidades cuadradas correspondiente a una superficie. En consecuencia, para calcular el área total del prisma se debe sumar el área lateral y el área de las bases:

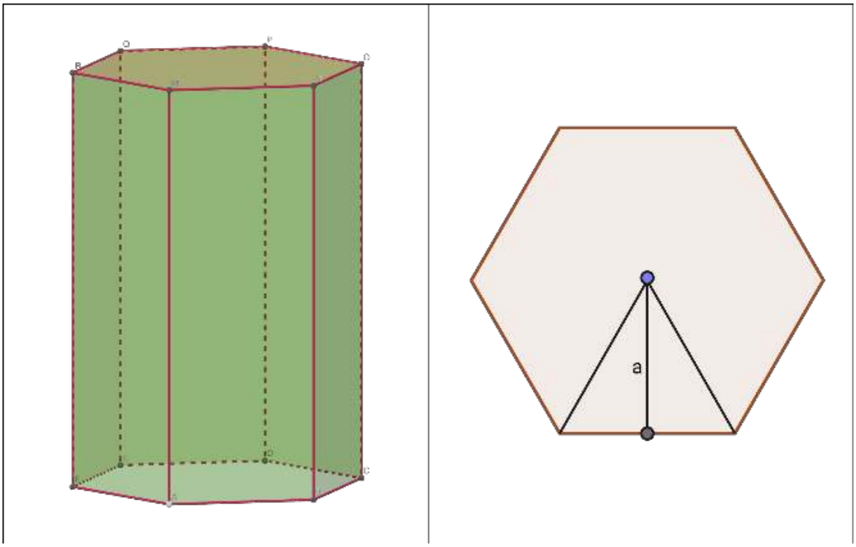
Área del prisma = área lateral + área de las bases

$$A = A_L + 2A_b$$

Ejemplo ilustrativo 1. Calculemos el área de un prisma recto hexagonal, cuyo lado de la base mide 12 cm, si la altura es de 30 cm, tal como se representa en la figura 6 junto con su base.

Figura 6

Prisma recto hexagonal y su base



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Primero, consideramos la fórmula del área total del prisma:

Área del prisma = área lateral + área de las bases

$$A = A_L + 2A_b$$

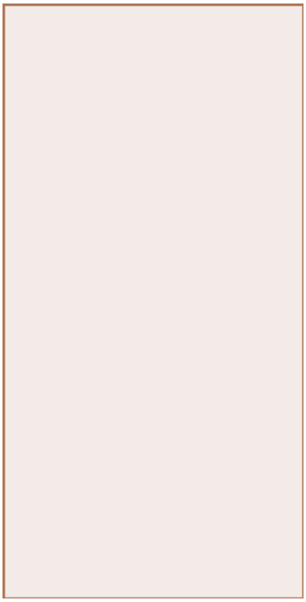
El área lateral es la suma de las áreas de todas las caras laterales. En este caso, son seis, ya que la base es hexagonal, y corresponden a polígonos rectangulares que miden 12 cm por 30 cm, forma que se aprecia en la figura 7. Entonces, se tiene:

Área lateral = 6(12 cm x 30 cm)

Área lateral = 2160 cm^2

Figura 7

Forma rectangular de la cara de un prisma



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

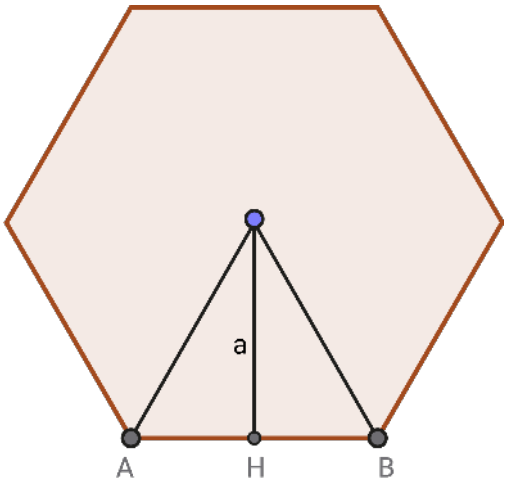
Ahora, como la base del prisma es un hexágono regular cuyo lado $\overline{AB}$ mide 12 cm, calculamos su área, considerando que se forman 6 triángulos equiláteros, como se observa en la siguiente figura. Para esto, calculamos primero el valor de la apotema $(a = \overline{GH})$ y, luego, aplicamos la fórmula del área de un triángulo:

$$\text{Área} = \frac{base \times altura}{dos}$$

$$\acute{A}rea = \frac{b \cdot h}{2}$$

Figura 8

Base de un prisma hexagonal



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Apotema: $a = \sqrt{(\underline{GB})^2 - (\underline{HB})^2} = \sqrt{144 - 36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

Área del triángulo ABG: $A_t = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 6\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}$

Área de la base: $A_b = 6 \times 36\sqrt{3} = 108\sqrt{3}\, cm^2 \approx 187.1\, cm^2$

Entonces, el área del prisma será:

Área del prisma = área lateral + área de las bases

$$A = A_L + 2A_b$$

$$A = 2160\, cm^2 + 2(108\sqrt{3}\, cm^2) = 2160\, cm^2 + 2(187.1) cm^2$$

Respuesta: $A = 2534.2\, cm^2$

1.2.3. Volumen de un prisma

Estimado estudiante, el volumen de un cuerpo geométrico se refiere a la medida (número) en unidades cúbicas que corresponde al espacio ocupado por dicho cuerpo. En esta parte de nuestro curso, estudiaremos principalmente el volumen de los prismas rectos con bases regulares.

Para calcular el volumen de los prismas se multiplica el área de la base por la medida de la altura lo cual se sintetiza en la siguiente fórmula:

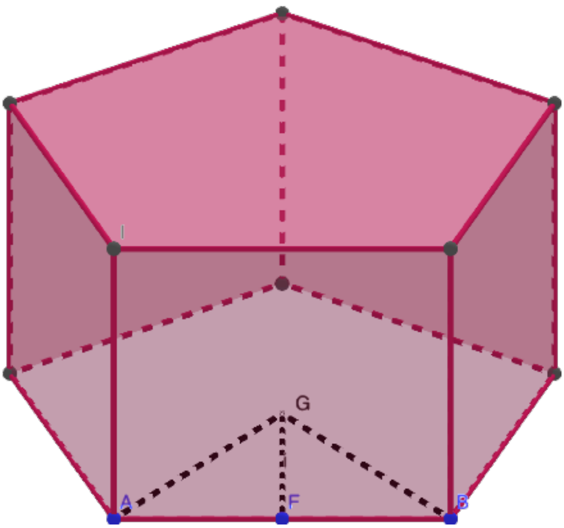
Volumen del prisma = Área de la base x altura

$$V = A_b \times h$$

En la figura 9 se observa un prisma pentagonal, ejemplo de prisma recto con base regular, cuya altura se emplea junto con el área de la base para calcular su volumen.

Figura 9

Prisma pentagonal



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Ejemplo ilustrativo 2. Determinemos el volumen de un prisma rectangular sabiendo que, los lados de la base miden 10 cm y 12 cm. Además, su altura mide 18 cm.

Primero, calculamos el área de la base: $A_b = l \times l = 10\,cm \times 12\,cm = 120\,cm^2$.

Entonces, el volumen será:

Volumen del prisma = Área de la base x altura

$$V = A_b \times h$$

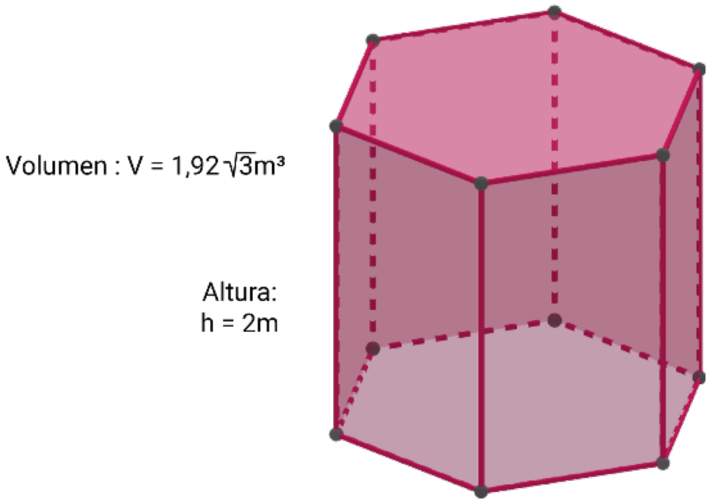
Respuesta: $V = 120\,cm^2 \times 18\,cm = 2160\,cm^3$

Ejemplo ilustrativo 3. Un granero de la hacienda *Zalapa* en Loja tiene la forma de un prisma recto hexagonal, como se observa en la figura 10. Si el granero tiene una altura de 2 m y su volumen es $1.92\sqrt{3}\,m^3$ ¿cuántos centímetros mide el lado de la base?

De la fórmula del volumen, conociendo que la altura es 2 m o 200 cm, podemos calcular el área de la base:

Figura 10

Prisma hexagonal



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Volumen del prisma = Área de la base x altura

$$V = A_b \times h$$

Área de la base = Volumen del prisma dividido entre la altura

$$A_b = \frac{V}{h} = \frac{1.92\sqrt{3}}{2\ m}\ m^3 = \frac{1920000\sqrt{3}}{200\ cm}\ cm^2 = 9600\sqrt{3}\, cm^2$$

Ahora, conociendo el valor de la base, se puede calcular el valor del área de cada triángulo de la base:

$$A = 9600\sqrt{3}\, cm^2 \div 6 = 1600\sqrt{3}\, cm^2$$

Para calcular el valor del lado de la base, consideramos el área de un triángulo:

$$A = \frac{base \cdot apotema}{2} = \frac{b \cdot a}{2}$$

Sustituyendo los valores:

$$1600\sqrt{3} = \frac{l \cdot \left(\frac{1}{2} l\sqrt{3}\right)}{2}$$

De donde se obtiene:

$$l^2 = \frac{4 \cdot 1600\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6400$$

Entonces, el lado de la base mide:

$$l = 80\, cm$$

Respuesta: El lado de la base mide **80 cm**.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar las definiciones básicas de los prismas y sus elementos, así como el cálculo del área de un prisma y el volumen, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, aunque no son calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores.

Estimado estudiante, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL, aplicando los conceptos interiorizados en esta segunda semana, realice lo siguiente:

1. Represente en un sistema tridimensional mediante la plataforma GeoGebra el prisma recto con base cuadrangular que mida 4 unidades de lado y 8 unidades de altura. Luego, presente el desarrollo del prisma y calcule, de manera analítica y digital, su área lateral y su área total. Finalmente, determine analítica y digitalmente el volumen del prisma recto de base cuadrangular.
2. Construya digitalmente con apoyo de GeoGebra un prisma pentagonal con una base regular que tenga 6 unidades de lado y una altura de 10 unidades. Luego, calcule analítica y digitalmente su área total y su volumen.

3. Determine la medida de la altura de un prisma de base regular de forma hexagonal cuyo lado de la base mide 8 cm, sabiendo que el área total del prisma es $192(3+\sqrt{3})\ cm^2$. Apóyese con el GeoGebra, para presentar su desarrollo y, trace, la figura correspondiente.
4. Identifique un cartón de leche con forma de prisma, tome una foto del recipiente, realice manualmente su desarrollo y coloque las siglas **UTPL**; posteriormente, calcule el área y el volumen correspondientes.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted podrá practicar y aplicar la conceptualización de los prismas rectos, lo cual facilita aprendizajes para la vida cotidiana y que serán duraderos y significativos en su futura profesión como docente de matemáticas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta segunda semana, en donde estudiamos la representación de prismas y su desarrollo, así como el cálculo del área lateral y del área total de un prisma, y orientamos el estudio para la aplicación del volumen, estamos preparados para aplicar estos conceptos en problemas de optimización; pero antes, debemos conceptualizar la derivada y su aplicación de máximos y mínimos en este tipo de problemas.

Semana 3

Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

1.3. Derivación, recta tangente, máximos y mínimos

La derivada es una operación matemática con funciones cuya conceptualización tiene dos interpretaciones:

La **primera interpretación** describe la razón de cambio instantáneo entre dos variables en un cierto punto. Algunos casos son las razones de crecimiento de poblaciones, las razones de producción, las razones de flujo de un líquido, la velocidad y la aceleración.

Por ejemplo, el movimiento de un móvil que se desplaza representa una función, en donde la distancia recorrida (variable dependiente) está en función del tiempo transcurrido (variable independiente). La razón entre la distancia y el tiempo nos representa la **velocidad promedio**:

$$Raz\acute{o}n = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Es decir, la velocidad promedio se expresa como:

$$\frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{\triangle s}{\triangle t}$$

¿Pero cuál es la velocidad en cierto instante?

Para encontrar la velocidad instantánea o simplemente la velocidad del móvil en un instante determinado, se calcula el límite del incremento de la distancia cuando tiende a cero. Es decir:

$$v(t) = \frac{s(t+\triangle t)-s(t)}{\triangle t} = s'(t)$$

Esto nos indica que la velocidad instantánea en cierto momento o instante dado es la derivada de la distancia en función del tiempo.

¿Qué otra interpretación tiene la derivada?

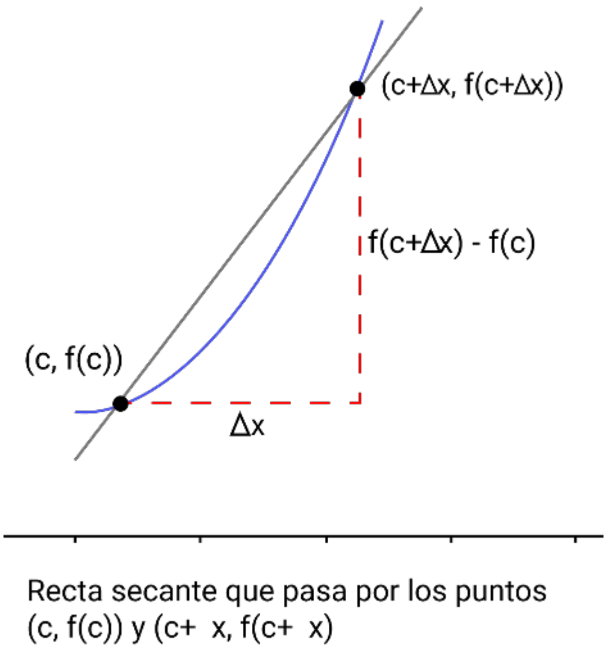
La **otra interpretación** está relacionada con el concepto de la pendiente de una recta tangente a una curva en un punto. La derivada nos permite calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.

1.3.1. Derivada para el cálculo de la pendiente de la recta tangente

Para empezar, visualice la siguiente figura que representa una recta secante a una curva:

Figura 11

Recta secante a una curva



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

El problema de encontrar la recta tangente en un punto se relaciona con el cálculo de la pendiente m en dicho punto.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Aplicada a la gráfica de la figura 11, se tiene:

$$m_{sec} = \frac{f(c+\triangle x) - f(c)}{(c+\triangle x) - c}$$

Esta expresión representa la razón $\frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}}$.

Simplificando:

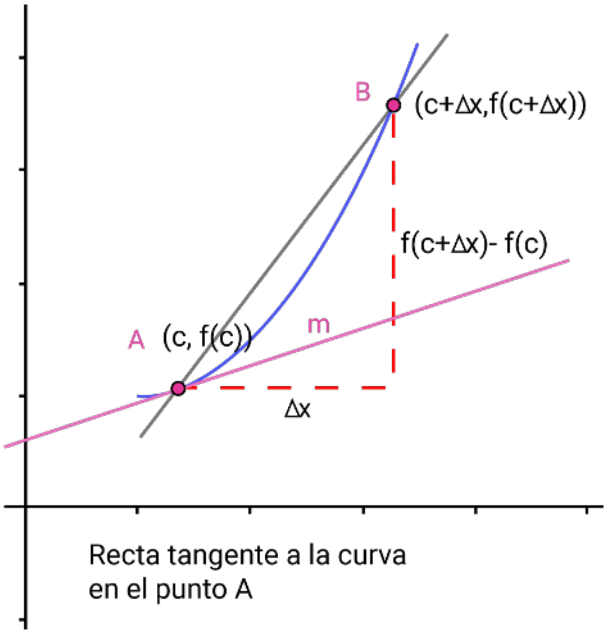
$$m_{sec} = \frac{f(c+\triangle x) - f(c)}{\triangle x}$$

que corresponde a la **pendiente de la secante**.

Pero, ¿qué sucede si el incremento $\triangle x$ tiende a cero? Visualice la siguiente figura:

Figura 12

Recta tangente a una curva



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Es decir, ¿qué sucede cuando el **punto B** se acerca y se confunde con el **punto A**? ¿el $\triangle x$ tiende a cero? ¡Exacto! La tangente que pasa por el punto A se convierte en el límite de la secante. En la figura 12 se ilustra este proceso, mostrando cómo la secante entre A y B pasa a ser tangente cuando $\triangle x$ disminuye hasta cero.

Por esta razón, al analizar la fórmula de la secante:

$$m_{sec} = \frac{f(c+\triangle x)-f(c)}{\triangle x}$$

si consideramos el límite cuando el incremento $\triangle x$ tiende a cero, estamos hablando de la pendiente m de la recta tangente que pasa por un solo punto. Entonces:

$$m_{sec} = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(c+\triangle x)-f(c)}{\triangle x}$$

Esta es la pendiente de la tangente en cierto punto. Este límite, utilizado para la definición de la pendiente de una recta tangente, también se emplea para definir a una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: **la derivada.**

Definición de la derivada de una función:

La derivada de la función f en x es: $f'(x) = \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ siempre y cuando exista ese límite.

En consecuencia, estimado estudiante, podemos afirmar que la derivada de la función f también es otra función que nos proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x, f(x))$, siempre que exista una tangente en dicho punto.

Existen algunas formas para denotar la derivada de una función, entre las más conocidas: $f'(x); \frac{dy}{dx}; \frac{d}{dx}; y'; D_{(x)}$.

1.3.2. Reglas para derivar una función

Para facilitar los procesos de la derivada de una función tenemos algunas reglas, entre las más importantes se encuentran las que se muestran en la siguiente tabla, la cual resume sus expresiones para que pueda consultarlas de forma rápida y aplicarlas en ejercicios y problemas.

Tabla 1
Reglas básicas de derivación

Regla	Expresión
1. Derivada de la constante	$\frac{d}{dx}[c] = 0$
2. Derivada del múltiplo constante	$\frac{d}{dx}[cf] = cf'$
3. Regla de la potencia	$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$
4. Derivada de x	$\frac{d}{dx}[x] = 1$
5. Regla de la suma o resta	$\frac{d}{dx}[f \pm g] = \frac{d}{dx}[f] \pm \frac{d}{dx}[g]$
6. Regla del producto	$\frac{d}{dx}[f \cdot g] = f \cdot \frac{d}{dx}[g] + g \cdot \frac{d}{dx}[f]$
7. Regla del cociente	$\frac{d}{dx}\left[\frac{f}{g}\right] = \frac{g \cdot \frac{d}{dx}[f] - f \cdot \frac{d}{dx}[g]}{(g)^2}$
8. Derivada de funciones trigonométricas	$\frac{d}{dx}[sen\, x] = cos\, x;$ $\frac{d}{dx}[cos\, x] = -sen\, x;$ $\frac{d}{dx}[tan\, x] = sec^2\, x;$ $\frac{d}{dx}[cot\, x] = -csc^2\, x;$ $\frac{d}{dx}[sec\, x] = sec\, x\, tan\, x;$ $\frac{d}{dx}[csc\, x] = -csc\, x\, cot\, x;$
9. Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)u'$

Nota. Sánchez, J., 2025.

Ahora, una vez planteadas algunas reglas para la derivación, mismas que pueden demostrarse mediante la definición de la derivada como el límite de una función cuando el incremento de equis tiene a cero: $\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$; mostraremos su aplicación mediante algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo ilustrativo 4. Calculemos la derivada de la función: $f(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x - 4$.

La derivada se obtiene aplicando sucesivamente las diferentes reglas propuestas en líneas anteriores:

$$f\,'(x) = \frac{d}{dx}2x^4 - \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}3x^2 + \frac{d}{dx}5x - \frac{d}{dx}4$$ (Aplicamos la Regla de la suma o resta)

$$f\,'(x) = 2\frac{d}{dx}x^4 - \frac{d}{dx}x^3 + 3\frac{d}{dx}x^2 + 5\frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}4$$ (Derivada del múltiplo constante)

$$f\,'(x) = 2 \cdot 4 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x^1 + 5 \cdot 1 \cdot x^0 - 0$$ (Aplicamos derivada de una potencia)

Respuesta: $f\,'(x) = 8x^4 - 3x^2 + 6x + 5$

Ejemplo ilustrativo 5. Calculemos la derivada de la función compuesta: $f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x}$.

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 5x}$$ (función dada para derivar)

$$f(x) = (2x^2 - 5x)^{1/2}$$ (reescribimos la función dada)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 5)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2 - 5)$$ (derivamos la función externa)

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x^2 - 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x$$ (derivamos la función interna)

a$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x}{(2x^2-5)^{1/2}}$$ (operando para exponentes positivos)

Respuesta: $f'(x) = \frac{2x}{(2x^2-5)^{1/2}}$

1.3.3. Máximos y mínimos de una función

Entre las aplicaciones más importantes de la derivada está la *solución de problemas de optimización* en donde se requiere hallar la manera adecuada y óptima la solución a un problema planteado. Para su modelización matemática aparecen los conceptos de máximos y mínimos de una función.

Estimado estudiante, estas aplicaciones son fundamentales cuando contextualizamos los temas referidos al área y volumen de los cuerpos geométricos, tanto poliedros como redondos; por ejemplo, cuando se quiere construir una caja con el mayor volumen posible a partir de cierta área de algún material disponible.

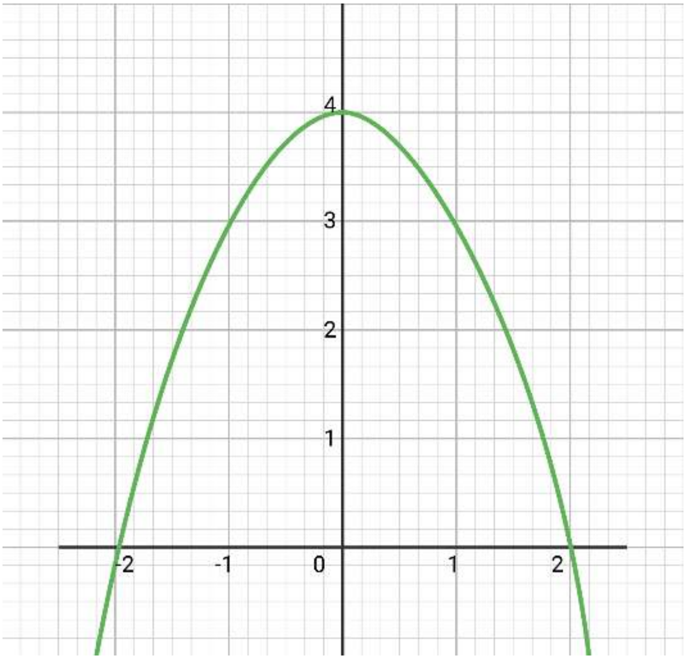
Antes de estudiar estas aplicaciones, conviene recordar cómo se obtiene los valores máximos y mínimos de una función. Se inicia, considerando dos definiciones importantes:

- **Valor máximo:** Una función f tiene un valor máximo absoluto en un intervalo cuando existe un número a en el intervalo de tal manera que $f(a) \geq f(x)$.
- **Valor mínimo:** Una función f tiene un valor mínimo absoluto en un intervalo cuando existe un número a en el intervalo de tal manera que $f(a) \leq f(x)$.

Ejemplo ilustrativo 6. Consideremos la función $f(x) = -x^2 + 4$ y el intervalo (-2, 2). Determinemos gráficamente el valor máximo absoluto de la función en dicho intervalo, tal como se muestra en la siguiente figura:

Figura 13

Valor máximo de la función



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

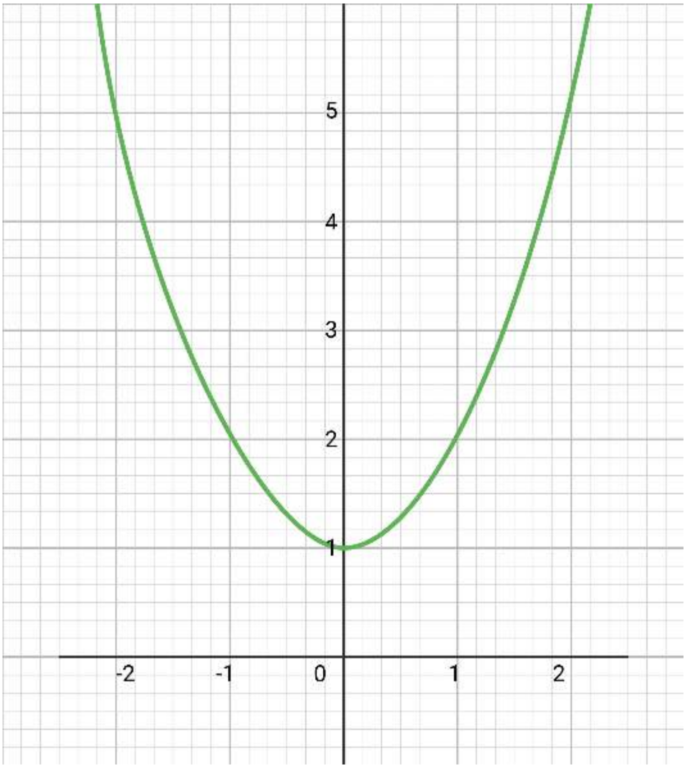
La función $f(x) = -x^2 + 4$ tiene un valor máximo absoluto de 4, el cual se produce cuando x = 0, en el intervalo planteado (-2, 2). Este valor es $f(0) = 4$.

Respuesta

Ejemplo ilustrativo 7. En la función $f(x) = x^2 + 1$ determinemos de forma gráfica el valor mínimo absoluto de la función en dicho intervalo el intervalo (-2, 2). Observe la siguiente figura:

Figura 14

Valor mínimo de la función



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

La función $f(x) = x^2 + 1$ tiene un valor mínimo absoluto de 1 el cual se produce cuando x = 0, en el intervalo planteado (-2, 2). Este valor es $f(0) = 1$.
Respuesta

¿Cómo se calcula el máximo y el mínimo de una función de forma analítica?

Estimado estudiante, la derivada de una función permite encontrar analíticamente los máximos y mínimos de una función, lo cual favorece la resolución de los problemas de optimización. En este curso, estudiaremos principalmente aquellos referidos a las áreas y volúmenes de algunos cuerpos geométricos y sus aplicaciones en la vida real. Para lo cual, se aplica el teorema de Fermat, el cual afirma que, si una función f es continua y tiene un máximo o un mínimo en c, entonces $f'(c) = 0$.

Teorema de Fermat: Si una función f alcanza un máximo o un mínimo localizado en c, y si la derivada $f'(c)$ existe en dicho punto c, entonces $f'(c) = 0$.

Aplicando este teorema de la derivada de una función, se puede calcular analíticamente el máximo de una función. Para ello, se halla la derivada de la función dada, se iguala a cero y se determinan los puntos críticos donde posiblemente se produce un máximo o un mínimo. Este proceso se fundamenta tomando en cuenta que la pendiente es la interpretación geométrica de la derivada en algún punto de una función y, por otro lado, en que la pendiente de la recta tangente horizontal es igual a cero, lo cual se produce en aquellos puntos en donde se tiene un máximo o un mínimo.

Veamos el siguiente ejemplo para ampliar su conocimiento.

Ejemplo ilustrativo 8. Consideremos la función $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 4$ y el intervalo (-4, 4) y calculemos de forma analítica los máximos y mínimos de la función.

Primero, derivamos la función dada:

$$f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 4$$

$$f'(x) = 9x^2 + 18x$$

Luego, igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 9x^2 + 18x = 0$$

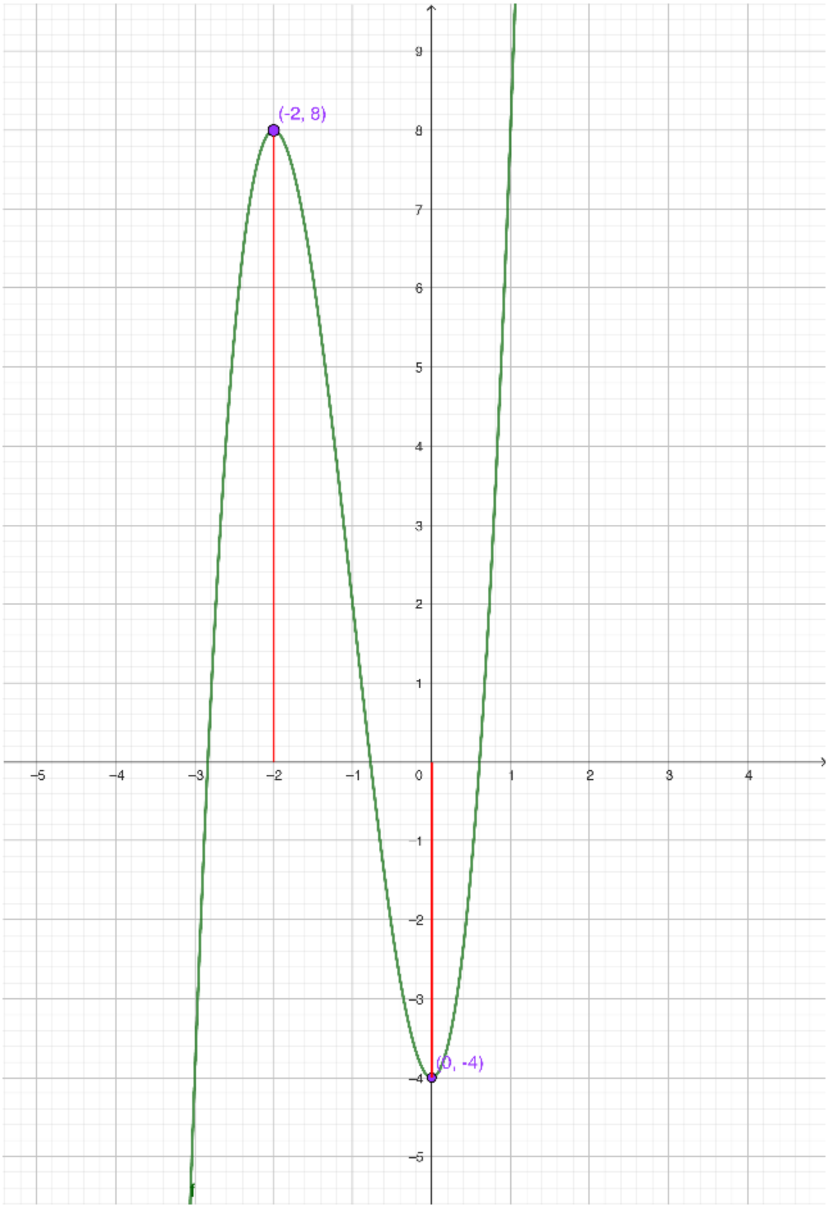
Después, hallamos las raíces de la ecuación:

$$9x(x + 2) = 0$$

En la siguiente figura se representa gráficamente esta función:

Figura 15

Máximo y mínimo de la función: f(x)= 3x³+9x²- 4



Nota. Elaborado con *GeoGebra* [Ilustración], por GeoGebra, 2025, GeoGebra, CC BY 4.0.

Estas raíces se conocen como puntos críticos:

$$x_1 = 0; x_2 = -2$$

Finalmente, determinamos los máximos y los mínimos:

> $f(0) = -4$ que constituye el mínimo de la función en el intervalo (-4, 4) **Respuesta**
>
> $f(-2) = 8$ que constituye el mínimo de la función en el intervalo (-4, 4) **Respuesta**

Todo este proceso se puede corroborar con la gráfica de la función en el intervalo (-4, 4) que se presenta en la figura 15, en donde los máximos y mínimos que corresponden a la variable dependiente f(x) aparecen en color rojo. Se obtiene: el máximo en (-2, 8) y el mínimo en (0, -4).

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar las definiciones básicas de la derivación, sus reglas fundamentales, así como la aplicación para hallar la derivada de una función, llegando a la aplicación de la regla de la cadena, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando algunas actividades que, aunque no son calificadas, son fundamentales para afianzar sus aprendizajes y aplicarlos en los problemas de optimización de la siguiente semana.

Por esta razón, estimado estudiante, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL, aplicando los conceptos interiorizados en esta tercera semana, realice lo siguiente:

1. Explique las dos interpretaciones en la conceptualización de la derivada. Su argumentación debe partir de sendos gráficos y ejemplos ilustrativos que demuestren su interiorización al respecto. Sugiero utilizar un graficador para la interpretación en los dos casos.
2. Construya digitalmente, con apoyo de GeoGebra, un recurso didáctico en donde se observe cómo la secante se convierte en tangente cuando un punto de la curva se acerca a otro, ocasionando el

surgimiento del concepto de derivada cuando el límite del $\triangle x$ tiende a cero.

3. Aplique las reglas de la derivación y determine la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$; $g(x) = \sqrt{2x^4 - 3x^2 - x}$; $h(x) = sen^3 5x$.
4. Calcule los máximos y mínimos, primero de forma analítica y luego de forma gráfica mediante la plataforma GeoGebra, para las funciones $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 4$ y $g(x) = 1 - 4x^2 - 3x^3$.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted podrá practicar y aplicar la conceptualización de la derivada para descubrir los máximos y mínimos de una función, con lo cual está preparado para en la próxima semana desarrollar los problemas de optimización.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta tercera semana, en donde estudiamos la definición, reglas y cálculo de la derivada de una función, así como los procesos para encontrar e interpretar los máximos y mínimos de una función, estamos preparados para aplicar estos conceptos en problemas de optimización.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 4

Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

1.4. Problemas de optimización con prismas

Se denomina “problema de optimización” a aquel cuya resolución es necesaria modelizar aplicando los conceptos de máximo o mínimo de una función; en consecuencia, se emplea el concepto de derivación. Para resolverlo, se debe seguir un proceso algorítmico en donde lo fundamental es contar con la función que modeliza la problemática, realizar la derivación, igualar la derivada a cero para encontrar los puntos críticos y, finalmente, calcular el máximo o el mínimo que será la solución del problema.

Esta aplicación de la derivada de una función es fundamental en nuestro curso, por cuanto permite modelizar y resolver muchos problemas de optimización relacionados con los conceptos de área y volumen de cuerpos geométricos y sólidos de revolución. ¡Adelante! Determinemos el proceso a seguir.

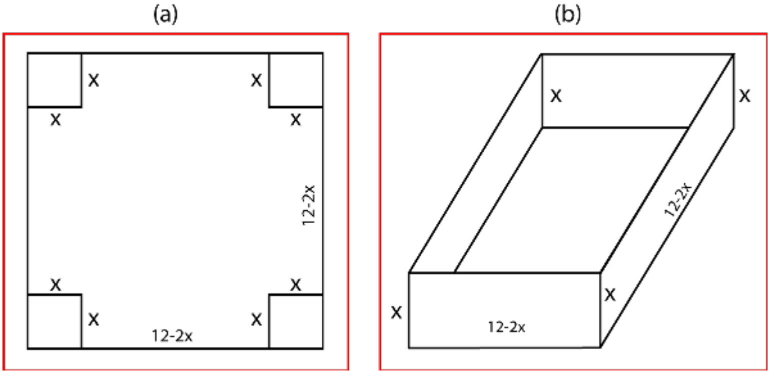
El **proceso de resolución de problemas de optimización** se sintetiza a continuación:

1. Lea el problema a resolver, identificando los datos y la incógnita que se quiere determinar.
2. Construya una función colocando como variable dependiente a la cantidad que se quiere maximizar o minimizar.
3. Reduzca la función anterior a otra en donde se tenga una sola variable independiente, empleando ecuaciones que relacionen los datos dados en el problema (**Función objetivo**).
4. Analice las condiciones dadas para la variable independiente y halle su dominio, es decir, determine los valores que puede tomar o asumir la variable independiente para que el problema o sus condiciones tengan sentido.
5. Determine la derivada de la función objetivo y calcule el valor de los puntos críticos o raíces de la variable independiente.
6. Calcule el valor máximo o mínimo mediante la sustitución del valor de la variable independiente en la función objetivo.

Ejemplo ilustrativo 9. Un comerciante desea construir cajas abiertas de metal a partir de planchas cuadradas que miden 12 cm de lado, cortando trozos cuadrados en las esquinas y doblando los lados (ver figura 16). Determinemos la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener la caja con el máximo volumen.

Figura 16

(a) Base de caja; (b) caja rectangular



Nota. Sánchez, J., 2025.

En la figura anterior se observa la plancha cuadrada y el dibujo de la caja sin tapa que se quiere construir. Si se cortan pedazos cuadrados en las esquinas, el volumen V en cm^3 será:

$$V(x) = (12 - 2x) \cdot (12 - 2x) \cdot x$$
$$V(x) = (144 - 48x + 4x^2) \cdot x$$
$$V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Ahora, si consideramos que el dominio de esta función $V(x)$ está en el intervalo [0, 6] y aplicando el teorema de Fermat concluimos que el volumen de la caja tiene un valor máximo absoluto en dicho intervalo. Por lo que, para determinarlo aplicamos la derivada a la función: $V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$ y luego igualamos a cero.

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$
$$144 - 96x + 12x^2 = 0$$
$$12x^2 - 96x + 144 = 0$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x - 6)(x - 2) = 0$$
$$x_1 = 6; x_2 = 2$$

Por lo tanto, los números críticos del Volumen V son 2 y 6, los cuales están dentro del intervalo cerrado correspondiente al dominio de la función. Entonces, el valor máximo absoluto del volumen debe ocurrir en uno de estos números críticos o en un extremo del intervalo. Por lo que, hallamos los valores: V (0), V (2) y V (6).

$$V(0) = 144 – 96(0) + 12(0)^2 = 144$$
$$V(2) = 144 – 96(2) + 12(2)^2 = 0$$
$$V(6) = 144 – 96(6) + 12(6)^2 = 244\,cm^3$$

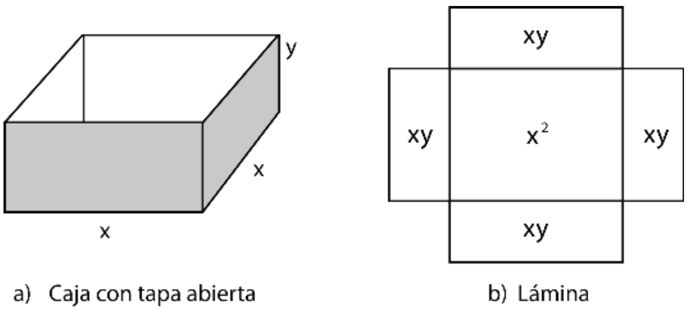
En consecuencia, concluimos que el valor máximo del volumen V en el intervalo [0, 6] es $244\,cm^3$ lo cual ocurre cuando x = 2.

Respuesta: El volumen máximo es de 244 cm^3 y se obtiene cuando la longitud del lado del cuadrado que se corta en las esquinas es de 2 cm.

Ejemplo ilustrativo 10. Un fabricante desea diseñar una caja abierta con base cuadrada a partir de una lámina de 108 cm^2 de superficie, tal como se muestra en la figura 17. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo?

Figura 17

Caja abierta con su desarrollo



Nota. Sánchez, J., 2025.

La función objetivo se plantea con la fórmula del volumen de un prisma recto:

$$V_{(x,y)} = x^2 \cdot y$$

$A = 108\,cm^2 = x^2 + 4xy$	Esta función contiene dos variables independientes, buscamos una relación entre dichas variables.
$y = \frac{108-x^2}{4x}$	De esta igualdad, despejamos la variable y.
$V_{(x,y)} = x^2 \cdot \frac{108-x^2}{4x}$	La variable independiente y escrita en función de x.
$V_{(x,y)} = 27x - \frac{x^3}{4}$	Reemplazando el valor de la variable y.
$V'_{(x,y)} = 27 - \frac{3}{4}x^2$	Esta es la función objetivo, lista para derivar.
$0 = 27 - \frac{3}{4}x^2$	Esta es la primera derivada.
$x^2 - 36 = 0$	Igualamos a cero la primera derivada para encontrar los puntos críticos.
$(x+6)(x-6) = 0$	Ecuación simplificada que será factorizada.
$x_1 = 6; x_2 = -6$	Aplicamos el Teorema del Factor cero para encontrar los posibles puntos críticos.
$Cuando\, x = 6, el\, valor\, de\, y = 3$	Aceptamos el valor crítico x = 6, considerando que x = -6 no corresponde al dominio.
	Estas son las medidas, procedemos a verificar.

Para la verificación, primero calculamos el volumen máximo y luego damos otros valores para verificar que siempre serán menores, en: $V_{(x,y)} = x^2 \cdot y$

VM: Lado base = 6 cm, altura = 3 cm: $V_{(6,3)} = 6^2 \cdot 3 = 108\,cm^3$

V1: Lado base = 8 cm, altura = 1,5 cm: $V_{(8;1,5)} = 8^2 \cdot 1,5 = 96\,cm^3$

V2: Lado base = 4 cm, altura = 5,75 cm: $V_{(4;5,75)} = 4^2 \cdot 5,75 = 92\,cm^3$

Respuesta: El volumen máximo de 108 cm^3 se obtiene cuando la longitud de la base cuadrada mide 6 cm y la altura mide 3 cm.

Estimado estudiante, después de estudiar una de tantas aplicaciones de los valores máximos y mínimos de una función en los prismas con áreas y volúmenes, aplicando el *Teorema de Fermat*, conviene puntualizar que, existe una amplia variedad de problemas al respecto, por esta razón, usted debe desarrollar la mayor cantidad posible.

Al respecto sugiero que estudie el video de aplicación volumen máximo en donde se explica con claridad la conexión entre área, volumen y los conceptos de máximos y mínimos de una función.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte de nuestro estudio, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta cuarta semana, realice lo siguiente:

1. Escriba el enunciado del problema y describa el desarrollo del caso presentado en el video Volumen máximo, en donde se propone un problema de optimización.
2. Determine el volumen máximo de una caja sin tapa, con forma de prisma de base cuadrada, que se puede armar con una plancha de cartón que tiene de área 600 cm^2.
3. Resuelva también el siguiente caso: un comerciante de frutas ecuatorianas desea construir cajas abiertas a partir de planchas rectangulares de cartón que miden 80 cm x 70 cm, cortando trozos cuadrados en las esquinas y doblando los lados. Determine la longitud del lado del cuadrado que se debe cortar para obtener la caja con el máximo volumen.
4. Construya, con ayuda del GeoGebra, una caja abierta con forma de prisma que tenga el mayor volumen posible a partir de una cartulina que mide 70 unidades x 100 unidades.
5. Responda. ¿Aparte de los prismas, existen otros poliedros o cuerpos geométricos que tengan formas similares a las pirámides de Egipto?

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de los prismas rectos en la resolución de problemas con máximos y mínimos relacionados con la optimización, lo cual permitirá que en su docencia futura comparta con sus estudiantes la posibilidad de relacionar la matemática a la vida real de la industria y el comercio.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta cuarta semana, en donde estudiamos las aplicaciones de máximos y mínimos y la primera derivada en problemas con áreas y volúmenes de prismas, nos aprestamos para ingresar al mundo fascinante de las pirámides. ¿Las pirámides fueron construidas por el hombre?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 5

Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

1.5. Definición y área superficial de una pirámide

Primero observemos la belleza que constituyen las pirámides de Egipto (ver figura 18) y que son parte de las cosas más extraordinarias que existen en nuestro planeta.

Figura 18

Pirámides de Egipto

Nota. Tomado de *Tres grandes misterios de las pirámides de Egipto* [Fotografía], por SAPhotog, s.f., Shutterstock, CC BY 4.0.

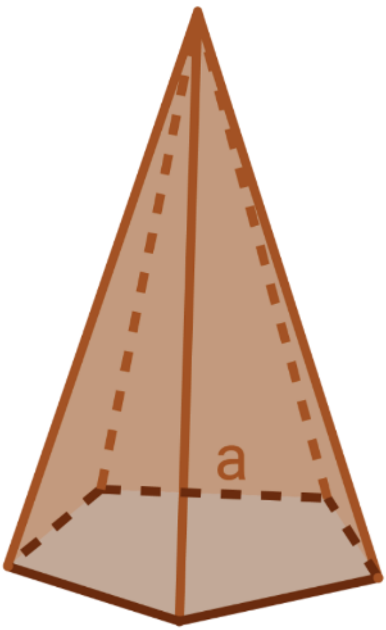
Definitivamente, como lo afirman muchos, las pirámides de Egipto son ¡Un prodigio de las matemáticas y la astronomía! Pero nos preguntamos: **¿Cómo se construyeron las pirámides de Egipto?**

Aunque se han dedicado muchos esfuerzos para contestar esta pregunta, como lo narra Coll (2018), parece que nadie es capaz de demostrar con exactitud cómo ocurrió este proceso. Arquitectos e ingenieros no puede dar una respuesta precisa al respecto. Pero, sobre el objetivo para su construcción, muchos coinciden y afirman que, se debe a que en esos tiempos había la creencia que cuando un faraón moría se convertía en un Dios por lo que disfrutaban del privilegio de ser sepultados en ellas.

1.5.1. Definición de pirámide

Se conoce que, una pirámide es un cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que coinciden en un vértice común. En este curso damos mayor atención a aquellas pirámides que tiene por base un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes. Su definición formal aparece en Alexander y Koeberlein (2013).

Figura 19
Pirámide regular pentagonal



Nota. Sánchez, J., 2025.

La pirámide de la figura 19 es una pirámide recta, la cual se caracteriza porque su base es un pentágono regular, en consecuencia, tiene una base pentagonal de 5 lados, cuenta con 5 caras laterales que son triángulos congruentes, los cuales se unen en la parte superior y forman el vértice de la pirámide. La altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta el centro de la base.

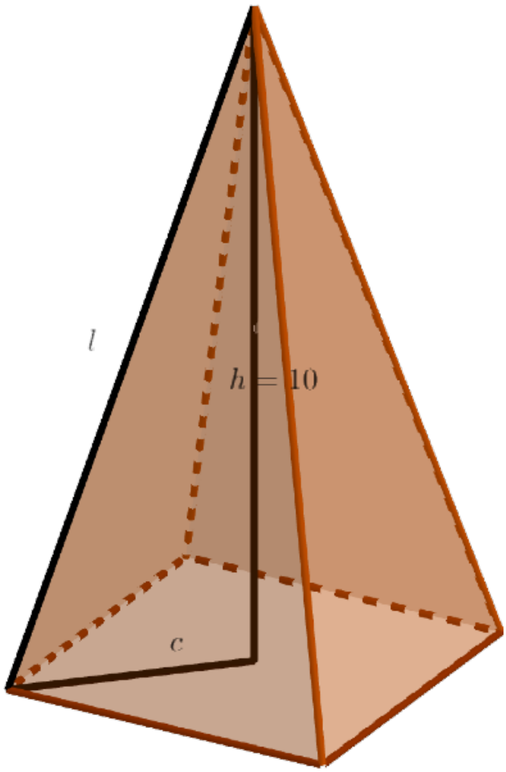
En algunos libros de texto, los autores hablan de “alturas inclinadas”, pero en realidad se refieren a las aristas de la pirámide, las cuales son congruentes en el caso de las pirámides regulares.

Para encontrar la altura de una pirámide regular, partiendo de los lados de la base (arista de la base) y de las aristas de las caras laterales, se aplica el teorema de Pitágoras, previamente se obtiene el valor de la apotema del polígono de la base.

Ejemplo ilustrativo 11. Determinemos el valor de la arista lateral de una pirámide regular cuya altura es 10 cm, sabiendo además que la base es un cuadrado cuyo lado mide 6 cm, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 20

Pirámide cuadrangular



Nota. Sánchez, J., 2025.

Consideremos el triángulo con color negro, en donde el cateto inferior sobre la base es la mitad de la diagonal del cuadrado base. Determinamos su valor y luego aplicamos el Teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa que es la arista lateral de la pirámide.

El cateto sobre la base es la mitad de la diagonal del cuadrado de lado igual a 6 cm, por lo tanto:

$$c = \frac{\sqrt{6^2+6^2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,cm$$

Ahora, determinamos la arista de la pirámide:

$$(Arista)^2 = (altura)^2 + (cateto)^2$$

$$l^2 = h^2 + c^2$$

$$l^2 = 10^2 + (3\sqrt{2})^2$$

$$l^2 = 100 + 18$$

$$l = \sqrt{100 + 18}$$

$$l = \sqrt{118}$$

Respuesta: La arista lateral de la pirámide mide aproximadamente 10,86 cm.

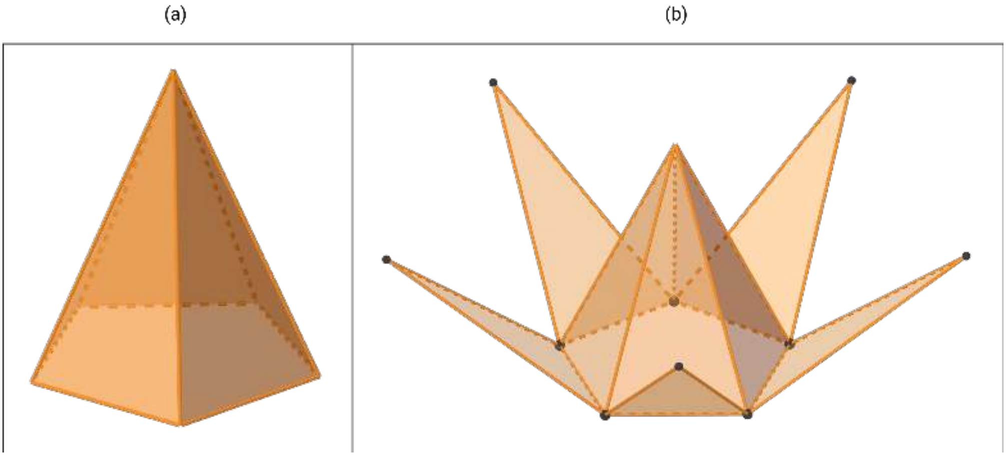
1.5.2. Área superficial de una pirámide

Estimados estudiantes recordemos que, una pirámide regular recta se forma cuando la base es regular y perpendicular a la altura de la pirámide. Para su dibujo y representación es conveniente que utilicemos la aplicación GeoGebra, recomiendo el análisis del video construcción de pirámides, en donde se explica con claridad la construcción de pirámide regulares rectas, partiendo del polígono base en una vista 2D.

El desarrollo de una pirámide nos permite ver con claridad que, para calcular su área se debe sumar el área de las caras laterales (triángulos) con el área de la base. En la siguiente figura se puede observar su construcción:

Figura 21

(a) Prisma pentagonal; (b) desarrollo de una pirámide pentagonal



Nota. Sánchez, J., 2025.

En esta parte, vale puntualizar que cuando se habla del área, nos referimos a un número que representa las unidades cuadradas correspondiente a una superficie. Por lo que, se puede escribir:

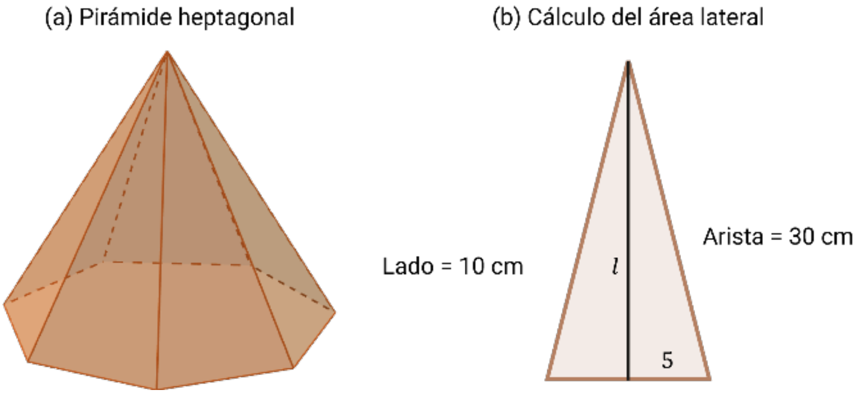
Área del prisma = área lateral (L) + área de la base

Para calcular el área lateral podemos aplicar la fórmula $L = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot l$, sin embargo y considerando que $(n \cdot s)$ es el perímetro del polígono regular, concluimos que $L = \frac{1}{2}l(n \cdot s) = \frac{1}{2}l \cdot P$, en donde P es el perímetro de la base. Sugiero revise los procesos de deducción que se ofrecen en el texto de Alexander y Koeberlein (2013).

Ejemplo ilustrativo 12. Calculemos el área lateral de una pirámide heptagonal cuya base miden 10 cm de lado, sabiendo además que las aristas laterales miden 30 cm. Revise la figura siguiente, donde se muestra la pirámide y su área lateral, para apoyar la resolución del problema.

Figura 22

Pirámide heptagonal y cara lateral



Nota. Sánchez, J., 2025.

Primero, consideramos la fórmula del área lateral:

$$L = \frac{1}{2} l \cdot P$$

Observemos que nos falta conocer el valor de l. Para calcular la altura del triángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = 30^2 - 5^2 = 875 \Rightarrow l = 5\sqrt{35}$$

Ahora que contamos con el valor de la altura inclinada de la pirámide, aplicamos la respectiva fórmula para hallar el área lateral, considerando que el perímetro de la base es el producto del número de lados (7) por la longitud de cada lado (10):

$$L = \frac{1}{2} l \cdot P = \frac{1}{2}(5\sqrt{35})(7 \cdot 10)$$

Respuesta: $L = 175\sqrt{35}\, cm^2$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Luego de estudiar las definiciones básicas de las pirámides y sus elementos, así como el cálculo del área lateral y área total de un prisma, es importante que usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, a pesar de no ser calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores.

Antes de eso, revise la deducción de fórmulas y los ejemplos ilustrativos desarrollados en el texto de Alexander y Koeberlein (2013), a partir de la página 413. Este particular reforzará las habilidades para resolver problemas de aplicación con las áreas de los prismas.

Por lo tanto, estimado estudiante, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL, aplicando los conceptos interiorizados en esta quinta semana, realice lo siguiente:

1. Utilizando GeoGebra, represente en un sistema tridimensional una pirámide triangular cuya base mida 4 unidades en cada lado y 8 unidades de altura.
2. Obtenga el desarrollo de una pirámide pentagonal con base, un pentágono regular de 4 unidades de lado y una altura de 3 unidades.
3. Dibuje, con apoyo de GeoGebra, una pirámide pentagonal cuya base mida 5 unidades en cada lado y tenga una altura de 10 unidades. Luego, calcule el área lateral.
4. Determine la medida de la altura de una pirámide con base cuadrangular de 8 cm de lado, sabiendo que el área de la pirámide es 768 cm^2. Apóyese en el GeoGebra y trace la figura correspondiente.
5. Identifique en el comercio algún producto cuyo empaque tenga la forma de una pirámide y calcule el área total en cm^2.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cinco actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de las pirámides regulares, lo cual facilita aprendizajes que serán duraderos y significativos en su futura profesión como docente de matemáticas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta quinta semana, en donde estudiamos la representación en el sistema tridimensional, definiciones básicas, elementos y el cálculo del área de pirámides, nos preparamos a continuar estudiando el concepto de volumen y de la construcción de pirámides regulares.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 6

Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

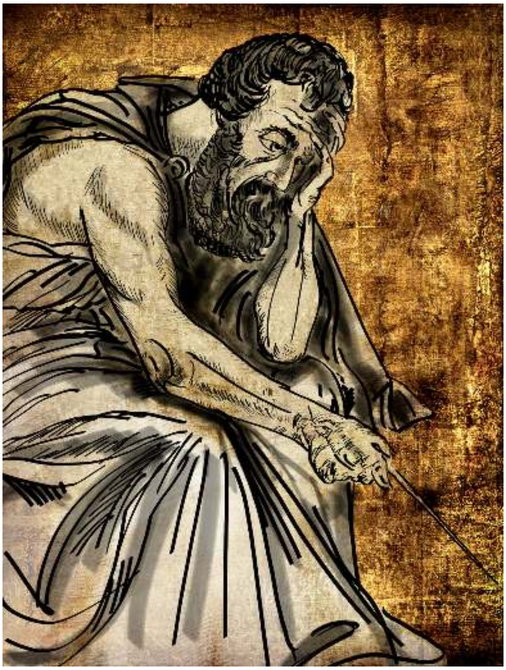
1.6. Volumen y construcción de una pirámide

El estudio del volumen y la construcción de una pirámide permite comprender cómo la matemática se aplica de forma práctica en el análisis y resolución de problemas de la vida cotidiana. A través de este tema, se explora no solo la geometría de esta figura tridimensional, sino también el uso de fórmulas y procedimientos que facilitan calcular su capacidad interna y reproducir su estructura de manera precisa.

1.6.1. Volumen de una pirámide

Figura 23

Arquímedes



Nota. Tomado de *Arquímedes, el matemático e inventor más famoso de la Grecia antigua* [Ilustración], por German Vizulis, 2021, Shutterstock, CC BY 4.0.

Cuando recordamos el concepto de Volumen, no podemos olvidar el nombre de uno de los más grandes hombres de ciencia en la antigüedad, el científico Arquímedes, quien realizó importantes aportes a la Física y a la matemática. Fueron muchos sus aportes, pero alrededor del Volumen existe uno que llama la atención.

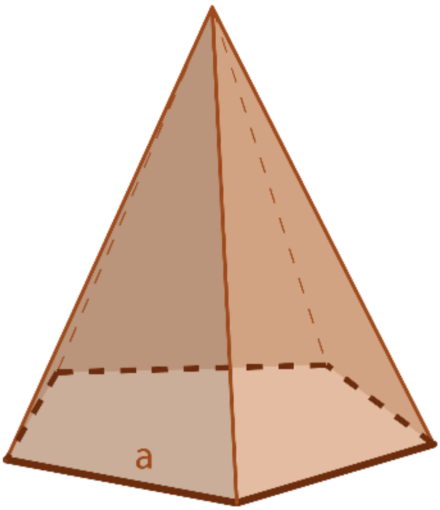
Le invito para que lo disfrute escuchando la narración en el video Eureka, en donde el youtuber de RaizdePi, hace un repaso por la vida de esta figura tan importante para la ciencia, desde cuando se produce el descubrimiento del famoso principio de Arquímedes hasta su muerte.

Entonces, existe una relación directa entre los aportes de Arquímedes y el Volumen de un cuerpo ¿Puede contar cuál es esa relación? Si necesita reforzar el contenido, le invito para que revise nuevamente el video propuesto.

En matemáticas y sus aplicaciones podemos afirmar que, el volumen de un cuerpo está relacionado con un número que representa la cantidad de espacio que ocupa el cuerpo. El volumen se mide en unidades cúbicas. En la siguiente figura se expone un ejemplo de pirámide:

Figura 24

Pirámide regular pentagonal



Nota. Sánchez, J., 2025.

Si B representa el área de la base y h es la altura, es decir la perpendicular trazada desde el vértice hasta el centro de la base, entonces el volumen V de la pirámide es la tercera parte del producto de la base B por la altura h.

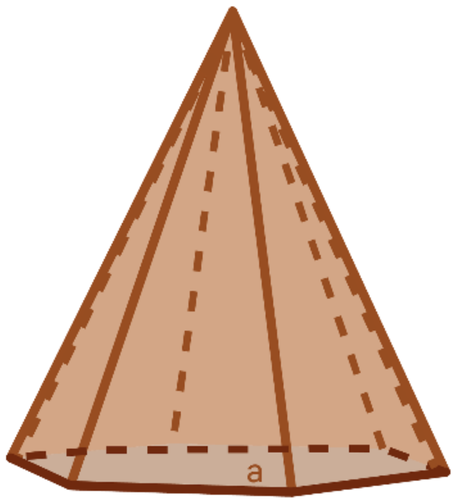
$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

En la figura 24 se puede observar la composición de pirámide regular pentagonal, donde se nota la base y las cinco caras laterales.

Ejemplo ilustrativo 13. Hallemos el volumen de la pirámide —representada en la figura 25— que tiene de base un hexágono regular con 8 cm de lado y una arista lateral de 16 cm.

Figura 25

Pirámide hexagonal

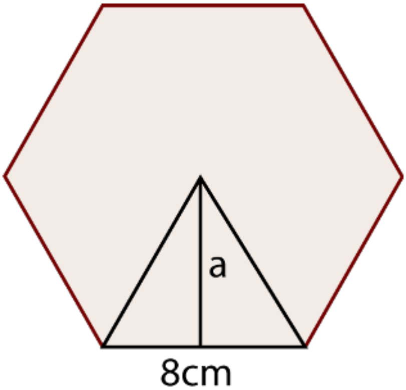


Nota. Sánchez, J., 2025.

Calculamos primero el área de la base hexagonal, para esto se necesita determinar la apotema del hexágono, la cual se señala en la siguiente figura.

Figura 26

Base la pirámide hexagonal



Nota. Sánchez, J., 2025.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

Entonces, el área de la base es:

$$B = \frac{1}{2}aP = \frac{1}{2}4\sqrt{3} \cdot 48 = 96\sqrt{3}\,cm^2$$

Para calcular la altura, aplicamos el teorema de Pitágoras considerando que, la arista lateral sería la hipotenusa igual a 16 cm y el cateto es igual a un lado de la base, entonces:

$$h = \sqrt{16^2 - (8)^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$$

Finalmente, el Volumen de la pirámide hexagonal sería:

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 96\sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 768$$

Respuesta: El volumen de la pirámide es: $V = 768\,cm^3$

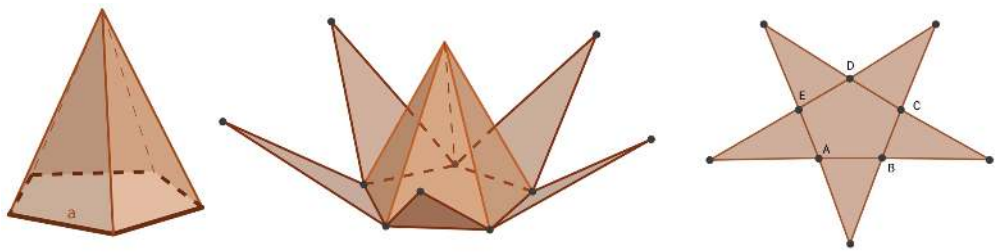
1.6.2. Construcción de una pirámide

Estimado estudiante, para la construcción de una pirámide de manera virtual nos apoyamos en GeoGebra. Al seleccionar la **Vista 3D,** accederemos al sistema tridimensional, en donde realizaremos la construcción y posterior desarrollo de la pirámide que se quiera elaborar. Al respecto, estudiaremos en el video Desarrollo de una pirámide con GeoGebra los pasos a seguir para, primero, construir la pirámide y, luego, apreciar su desarrollo.

Los procesos estudiados para la construcción virtual y posterior desarrollo de una pirámide, permitirán hacerlo de manera manual, para obtener una pirámide regular en físico, utilizando algún material sencillo y económico, como la cartulina. Lo importante es que usted conozca las plantillas para el desarrollo de un prisma y, a partir de ellas, inicie la construcción manual. Apreciemos este desarrollo en las gráficas que se presentan en la figura 27.

Figura 27

Construcción de una pirámide



Nota. Sánchez, J., 2025.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, luego de estudiar las definiciones, elementos y fórmulas para calcular el volumen de pirámides regulares, así como el desarrollo virtual y físico de las mismas es importante que, usted refuerce y consolide su aprendizaje desarrollando las actividades que, a pesar de no ser calificadas, son fundamentales para las aplicaciones posteriores.

Antes de eso, revise la deducción de fórmulas y los ejemplos ilustrativos desarrollados en el texto de Alexander y Koeberlein (2013), a partir de la página 417. Este particular reforzará las habilidades para resolver problemas de aplicación con el volumen de los prismas.

Complemente sus aprendizajes revisando el video referente al Volumen de una pirámide en función de x. Aquí se explica paso a paso el algoritmo para el cálculo del volumen de un prisma en un caso particular muy interesante.

A continuación, estimado estudiante, solicito que con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta sexta semana, realice lo siguiente:

1. Calcule el volumen de una pirámide regular hexagonal que tiene 12 m en su base y una altura de 25 m.
2. Determine el volumen de una pirámide regular heptagonal que tiene 8 cm por lado en su base y una altura de 12 cm.
3. Construya con GeoGebra una pirámide pentagonal regular cuya base mida 4 unidades en cada lado y tenga una altura de 10 unidades. Luego, calcule su volumen.
4. En una pirámide cuadrangular regular, el lado de la base mide 8 cm. Sabiendo que la altura de la pirámide es también de 8 cm, encuentre la arista lateral o altura inclinada.
5. Identifique en el comercio algún producto cuyo empaque tenga la forma de una pirámide y calcule su volumen en cm^3.
6. Construya en físico una pirámide regular de base cuadrangular que tenga un lado de 3 cm y 5 cm de altura.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las seis actividades recomendadas, usted podrá aplicar la conceptualización de las pirámides regulares, su volumen, su desarrollo y su construcción física y virtual, lo cual facilita para aprendizajes que serán duraderos y significativos en su futura profesión como docente de matemáticas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta sexta semana, en donde estudiamos la representación física y virtual de pirámides, su desarrollo, su construcción y el cálculo de volúmenes, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿cuál es el volumen máximo que se puede lograr al construir una pirámide con ciertas medidas de su área? Para responder a esta interrogante, lo invito a la siguiente semana de estudios.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 7

Unidad 1. Aplicación de prismas y pirámides

1.7. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de pirámides

Estimado estudiante, continuamos con el estudio de las aplicaciones de la derivada respecto a la *solución de problemas de optimización*. En esta ocasión, nos referimos a aquellos problemas de máximos y mínimos relacionados con el área y el volumen de una pirámide.

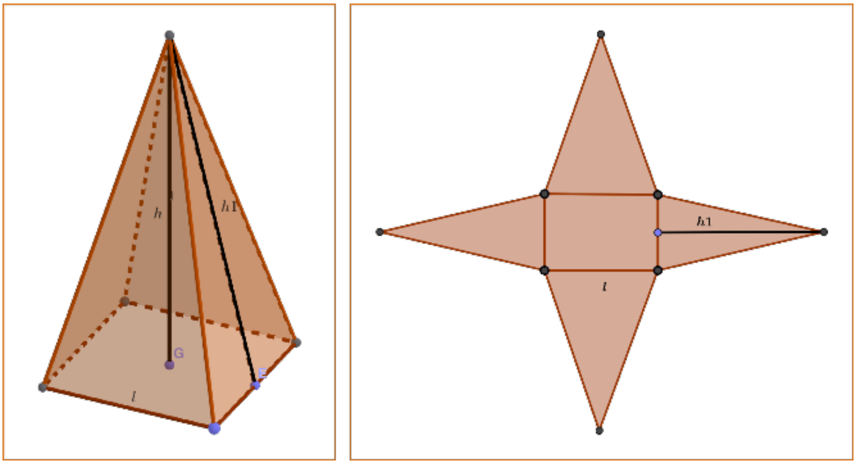
En este tipo de problemas de aplicación de los conceptos de área y volumen de las pirámides es buscar la función que relacione el volumen a maximizar con alguna variable independiente que está inmersa en los datos y cálculos del área.

Ejemplo ilustrativo 14. Determinemos las medidas aproximadas de una carpa con forma de pirámide cuadrangular con máximo volumen que se puede construir a partir de una superficie de lona de 16 metros.

Primero, hacemos una interpretación gráfica escribiendo los datos del problema, tal como se muestra en la figura.

Figura 28

Pirámide cuadrangular



Nota. Sánchez, J., 2025.

Luego, vamos a escribir la función a maximizar, el volumen V:

$$V = \frac{1}{3} Base \cdot altura$$
$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3} l^2 \cdot h$$

Ahora, observamos que el volumen se encuentra en función de otras dos variables, por lo que buscamos relacionar a dichas variables, para esto primero consideremos que el área total de la pirámide (16 m) es la suma de la Base más el área lateral:

$$A = B + L = l^2 + 2lh_1 \text{ (Ecuación 1)}$$

También sabemos que la altura inclinada de la pirámide h_1 es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma y se puede calcular aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h_1{}^2 = h^2 + \frac{l^2}{4}$$

$$h_1 = \sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} \quad \text{(Ecuación 2)}$$

A continuación, reemplazamos la ecuación 2 (h_1) en la ecuación 1:

$$A = l^2 + 2lh_1 = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$A = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

De esta última ecuación despejamos h y luego lo reemplazamos en el volumen que se quiere maximizar:

$$A = l^2 + 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$A - l^2 = 2l\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}}$$

$$\sqrt{h^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{A - l^2}{2l}$$

$$h^2 + \frac{l^2}{4} = \frac{A^2 - 2Al^2 + l^4}{4l^2}$$

$$h^2 = \frac{A^2 - 2Al^2 + l^4}{4l^2} - \frac{l^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l}$$

Seguidamente, reemplazamos el valor de (h) en la función a maximizar:

$$V(l) = \frac{1}{3}l^2 \cdot h$$

$$V(l) = \frac{1}{3}l^2 \cdot \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l}$$

$$V(l) = \frac{1}{6}l \cdot \sqrt{A^2 - 2Al^2}$$

Ahora, sacamos la primera derivada de la función con la finalidad de obtener posteriormente los puntos críticos en donde seguramente se produzca un máximo valor del volumen:

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[l \cdot \frac{1}{2} \cdot (A^2 - 2Al^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot (-4Al) + (A^2 - 2Al^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[l \cdot \frac{1}{2}\frac{-4Al}{(A^2-2Al^2)^{\frac{1}{2}}} + (A^2 - 2Al^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[\frac{-2Al+A^2-2Al^2}{(A^2-2Al^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[\frac{-2Al^2+A^2-2Al^2}{(A^2-2Al^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[\frac{+A^2-4Al^2}{(A^2-2Al^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Reemplazamos A que es el área total de la lona e igual a 16 m^2:

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[\frac{16^2-4\cdot 16l^2}{\sqrt{16^2-2\cdot 16l^2}}\right]$$

Igualamos a cero la primera derivada para hallar los puntos críticos:

$$V'(l) = \frac{1}{6}\left[\frac{16^2-4\cdot 16l^2}{\sqrt{16^2-2\cdot 16l^2}}\right] = 0$$

$$16^2 - 4 \cdot 16l^2 = 0$$

$$l^2 = 4$$

$$(l+2)(l-2) = 0$$

Aplicamos el teorema del factor cero y hallamos los dos puntos críticos:

$$l_1 = 2; l_2 = -2$$

El valor del lado l que se encuentra dentro del dominio [0, 4], es $l_1 = 2\,m$.

Reemplazamos este valor en la fórmula de la altura h y encontramos la altura:

$$h = \frac{\sqrt{A^2 - 2Al^2}}{2l} = \frac{\sqrt{16^2 - 2 \cdot 16(2^2)}}{4} = \frac{\sqrt{128}}{4} = 2.83\,m$$

Respuesta: Por lo tanto, el máximo volumen que se puede obtener con la carpa de superficie 16 m^2 será:

$$V = \frac{1}{3}l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2.83 = 3.77\,m^3$$

Ahora, estimado estudiante, después de estudiar una de tantas aplicaciones de los valores máximos y mínimos de una función con áreas y volúmenes de los prismas aplicando el *Teorema de Fermat*; conviene puntualizar que, existe un amplio número de problemas de optimización, con la finalidad de alcanzar experticia en su aplicación y resolución, usted debe desarrollar la mayor cantidad posible de problemas.

Al respecto sugiero que estudie el video de aplicación volumen máximo, en donde se explica con claridad la conexión entre área, volumen y los conceptos de máximos y mínimos de una función.

A continuación, en el siguiente módulo didáctico le presentamos definiciones ejercicios y videos de construcción de área y volúmenes de las figuras geométricas prismas y pirámides, que resumen los temas vistos en la unidad.

Prismas, pirámides, áreas y volúmenes.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con esos mismos ánimos y ganas por aprender, experimente a través de la aplicación en GeoGebra acerca del volumen máximo de una pirámide, en donde se explica paso a paso el cálculo de las dimensiones de la pirámide de volumen máximo a partir de una superficie o área constante.

En esta parte, estimado estudiante, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta séptima semana, realice lo siguiente:

1. Determine las medidas de la carpa con forma de prisma cuadrangular de mayor volumen que puede construirse a partir de una superficie de lona que tiene un área igual a 20 metros cuadrados. **Sugerencia:** tome en cuenta, también, la base de la pirámide cuadrangular.
2. Establezca las medidas de la carpa con forma de prisma pentagonal de mayor volumen que puede construirse a partir de una superficie de lona que tiene un área igual a 16 metros cuadrados. **Sugerencia:** tome en cuenta, también, la base de la pirámide pentagonal.
3. Determine las medidas de la carpa con forma de prisma hexagonal de mayor volumen que puede construirse a partir de una superficie de lona que tiene un área igual a 24 metros cuadrados. **Sugerencia:** tome en cuenta, también, la base del prisma hexagonal.
4. Escriba el enunciado del problema y luego redacte su desarrollo del caso presentado a través del video Prisma inscrito en pirámide, en donde se propone un problema de optimización aplicando y conectando los conceptos de prisma y pirámide.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de máximos y mínimos en la resolución de problemas prácticos en donde se determinan las medidas de las pirámides de mayor volumen que pueden construirse a partir de ciertas condiciones dadas.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta séptima semana, en donde estudiamos las aplicaciones de máximos y mínimos empleando la primera derivada en problemas relacionados con áreas y volúmenes de pirámides, nos aprestamos para sistematizar todo lo aprendido en este primer bimestre. ¿Usted conoce las actividades que deberá desarrollar en la siguiente semana ocho?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en la última semana de estudio, la invitación para que revise los contenidos del primer bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas.
- Evaluaciones parciales.

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la primera unidad: Aplicación de prismas y pirámides. Esta incluye el sistema tridimensional para la representación de cuerpos, definiciones básicas del prisma, cálculo del área y volumen de un prisma, máximos y mínimos aplicados a áreas y volúmenes de prismas, definiciones y área superficial de una pirámide, volumen y construcción de una pirámide regular, así como máximos y mínimos relacionados con áreas y volúmenes de pirámides.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del primer bimestre y prepararse para la prueba bimestral, sugiero que realice puntualmente lo siguiente:

1. Revise cada uno de los conceptos estudiados en la unidad planificada y desarrollada en este primer bimestre. En cada semana se presentan actividades nuevas a desarrollar.
2. Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes de cada uno de los temas estudiados, desarrollando los problemas propuestos.
3. Para cada uno de los temas estudiados, es muy importante que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.
4. Calcule las medidas del rectángulo de mayor área inscrito en un triángulo isósceles cuya base mide 20 cm y su altura 16 cm.
5. Se tiene una lámina rectangular que mide 80 cm x 60 cm. Se corta en las esquinas cuadradas de lado m y luego se dobla convenientemente para construir una caja abierta. Determine el valor de m para que la caja tenga un volumen máximo.
6. Se quiere caja abierta de volumen máximo a partir de una lámina cuadrada cuyo lado mide 24 cm. Para esto, se cortan cuadrados iguales a partir de las esquinas y se doblan los bordes. ¿Cuáles serán las medidas de la caja?
7. Un exportador lojano, quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de 216 pulgadas cuadradas. ¿Qué medidas posibilitarán una caja con un volumen máximo?

   Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

8. Luego de haber participado activamente de las diferentes actividades propuestas, es hora de poner en práctica los conocimientos

adquiridos a través del desarrollo de la autoevaluación, con ello se evidenciará el dominio acerca de los temas vistos.

Autoevaluación 1

Instrucciones: dentro del cuadro correspondiente, escriba una **V** si es verdadero, una **F** si es falso, o el literal de la opción múltiple que corresponda, para dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. ( ) El estudio de prismas y pirámides, permite el estudio y resolución de problemas de máximos y mínimos, con áreas y volúmenes de las figuras geométricas en el espacio.

2. ( ) El sistema ortogonal tridimensional permite representar un sistema de figuras geométricas lineales.

3. ( ) El sistema tridimensional tiene tres dimensiones representadas por los planos (x, y, z).

4. ( ) El prisma recto es aquel donde las aristas laterales son oblicuas a las aristas de la base.

5. ( ) La derivada tiene dos interpretaciones principales: la razón de cambio instantáneo y la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto.

6. Según el teorema de Fermat, si una función tiene un máximo o mínimo en un punto c, entonces:

   a. $f'(c) > 0$

   b. $f'(c) = 0$

   c. $f'(c) < 0$

7. El cuerpo geométrico que tiene por base un polígono y sus caras laterales son triángulos que coinciden en un vértice común, se llama:

   a. Prisma.
   b. Pirámide.
   c. Cono.

8. El prisma que tiene las aristas laterales oblicuas a las aristas de la base se llama:

   a. Recto.
   b. Oblicuo.
   c. Hexagonal.

9. Hallar el área y el volumen de una pirámide hexagonal en la que la arista de la base mide 3 cm y la arista lateral 5 cm.

   a. $A_T = 46.242\,cm^2$ y $V = 10.392\,cm^3$
   b. $A_T = 10.392\,cm^2$ y $V = 46.242\,cm^3$
   c. $A_T = 40.242\,cm^2$ y $V = 11.392\,cm^3$

10. Calcular el área y el volumen de una pirámide cuadrangular cuya base tiene 4 cm de arista y una altura de 6 cm.

    a. $A_T = 56.592\,cm^2$ y $V = 22\,cm^3$
    b. $A_T = 76.592\,cm^2$ y $V = 42\,cm^3$
    c. $A_T = 66.592\,cm^2$ y $V = 32\,cm^3$

11. Calcular el área y el volumen de un prisma hexagonal en el que la arista de la base mide 14 m y su altura es de 27 m.

a. $A_T = 4286.416\, cm^2$ y $V = 43748.616\, cm^3$

b. $A_T = 3286.416\, cm^2$ y $V = 13748.616\, cm^3$

c. $A_T = 2286.416\, cm^2$ y $V = 23748.616\, cm^3$

12. Hallar el área total y el volumen de un prisma cuadrangular regular cuyo lado de la base mide 1.20 m y la altura de 4 m.

a. $A_T = 20.00\, cm^2$ y $V = 4.00\, cm^3$

b. $A_T = 22.08\, cm^2$ y $V = 5.76\, cm^3$

c. $A_T = 24.08\, cm^2$ y $V = 6.76\, cm^3$

13. Un hombre desea construir una caja metálica abierta. La caja debe tener una base cuadrada, los lados de 9 pulgadas de altura y una capacidad de 5184 cúbicas. Determine el tamaño de la pieza cuadrada de metal que debe de comprar para construir la caja.

a. 576 pulgadas cuadradas.
b. 467 pulgadas cuadradas.
c. 756 pulgadas cuadradas.

14. **Mediante una aplicación web o calculadora gráfica, construya:**

- Un prisma triangular.
- Un prisma cuadrangular.
- Una pirámide de base hexagonal.
- Una pirámide de base pentagonal.

Ir al solucionario

Seguro finalizó exitosamente la autoevaluación planteada. Si surgen dudas en una o más preguntas, vuelva a leer el contenido científico para que identifique la validez de su respuesta.

¡Felicitaciones por su participación … *Continuemos*!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Reconoce problemas que pueden ser solucionados mediante el cálculo del perímetro, área y volumen.

Para lograr que el estudiante identifique, modelice y resuelva problemas que pueden ser solucionados mediante el cálculo del perímetro, área y volumen, se desarrollarán actividades centradas en la resolución de problemas contextualizados, aplicando la metodología basada en problemas (ABP). Para esto, a través del análisis de situaciones reales —como diseño de envases, distribución de espacios o construcción de cuerpos— el estudiante identificará variables geométricas relevantes y seleccionará estrategias matemáticas adecuadas para la aplicación de máximos y mínimos en cuerpos geométricos como prismas y pirámides.

En el proceso de alcanzar el resultado de aprendizaje será fundamental la utilización de simuladores interactivos, recursos gráficos y plataformas como GeoGebra, los cuales facilitarán la visualización de las formas, sus dimensiones y medidas, permitiendo una comprensión significativa y aplicada de estos conceptos en la vida cotidiana. Lo cual se complementa con la construcción y aplicación de secuencias didácticas referidas a temáticas de modelización sobre problemas de optimización contextualizados a la realidad nacional y mundial.

Los conceptos serán axiomatizados considerando que, la axiomatización matemática significa construir una teoría a partir de un conjunto de axiomas que son proposiciones que se aceptan sin demostración. Lo cual tiene tres implicaciones: primero, definir objetos matemáticos básicos como puntos, rectas, planos, polígonos y poliedros; luego, establecer algunas relaciones entre ellos, como las intersecciones, perpendicularidad, paralelismo, entre algunos otros; finalmente, introducir definiciones formales como la de prisma o pirámide.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

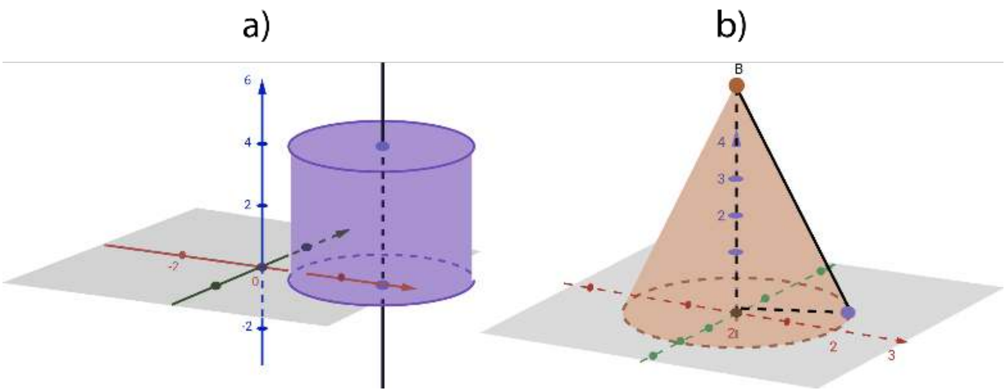
En la segunda unidad de estudio se analizan las diferentes aplicaciones con áreas y volúmenes de cilindros, conos, poliedros y esferas, para lo cual partimos de las definiciones adecuadas y la conceptualización de áreas y volúmenes de estos cuerpos geométricos, sin perder de vista la importancia de relacionar con los problemas de la vida cotidiana, para lo cual se consideran los siguientes temas:

- Cilindros, áreas y volúmenes.
- Conos, áreas y volúmenes.
- Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de cilindros y conos.
- Los poliedros, clasificación, características y aplicación en problemas del entorno.
- Esferas, áreas y volúmenes.
- Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de esferas.

Los cilindros y conos serán objeto de estudio de los primeros temas, los cuales se ilustran en la siguiente figura:

Figura 29

(a) Cilindro; (b) cono



Nota. Sánchez, J., 2025.

Estimado estudiante, al adentramos en el mundo fascinante del estudio de los cilindros, conos, poliedros y esferas, sus áreas y volúmenes, vale orientar nuestros esfuerzos para dar respuesta a los siguientes cuestionamientos: ¿La matemática tiene aplicaciones en la vida real? ¿Cuáles son las características de los poliedros en general? ¿Cuáles son los poliedros más utilizados y aplicados en la vida cotidiana? ¿Cómo se determina el máximo volumen de los cilindros, conos y esferas a partir del área y otras condiciones?

2.1. Cilindro circular recto, área, volumen y su construcción

Estimado estudiante, al iniciar este segundo bimestre estudiamos la definición de cilindro. De manera general se dice que, cilindro es un cuerpo geométrico en donde sus bases son dos círculos, también se define como la superficie cilíndrica que se forma cuando una recta llamada generatriz gira alrededor de un eje. En esta parte, vale aclarar que, al momento de tratar problemas de aplicación se debe diferenciar entre cilindro sólido o cilindro hueco. Observemos la siguiente figura:

Figura 30

Cilindro sólido y cilindro hueco

Nota. Tomado de *Cilindro: características, ejemplos y cómo calcular área y volumen* [Ilustración], por Fernández, C., s.f., Smartick, CC BY 4.0.

En la figura anterior se distingue con claridad la diferencia entre el cilindro sólido (vela encendida) y el cilindro hueco (cartón papel higiénico). Los dos cuerpos corresponden a ejemplos claros de aplicaciones del cilindro en la vida cotidiana.

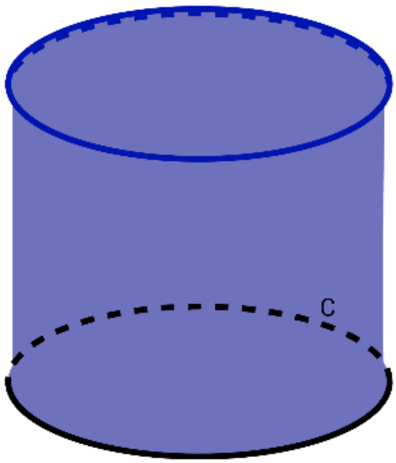
¿Cuál es la definición de un cilindro circular recto?

En la presente materia referente al itinerario: Aplicación de los conocimientos matemáticos de área y medidas, estudiaremos aquellos casos que corresponden al cilindro circular recto, el cual se define como el cuerpo geométrico formado al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados, siendo las bases dos círculos paralelos y cuyo eje de revolución es perpendicular a las bases.

En la figura 31 se muestra la forma general de un cilindro circular recto, tal como se estudia en esta unidad.

Figura 31

Altura de un cilindro



Nota. Sánchez, J., 2025.

La altura (h) del cilindro es la perpendicular que une dos puntos de las bases circulares. El segmento de recta que une los centros de las bases circulares se denomina eje del cilindro. Finalmente, en el cilindro circular recto el eje del cilindro es perpendicular a los planos de las bases circulares.

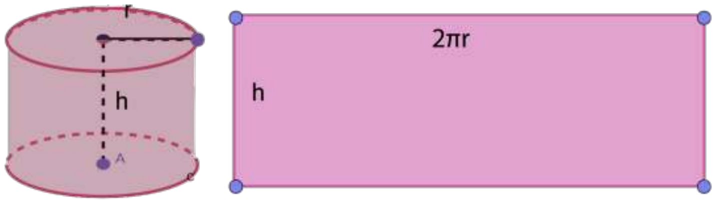
Para la construcción del cilindro a través de la aplicación GeoGebra sugiero revise el video Cómo hacer un cilindro, en donde se explica con claridad la forma para construir el cilindro circular recto.

2.1.1. Área superficial de un cilindro

El área lateral de un cilindro recto es la que corresponde a su superficie lateral y es equivalente al área de un rectángulo que tiene por lados la altura y la longitud de la circunferencia de la base del cilindro, esto se representa de manera gráfica en la siguiente figura:

Figura 32

Área lateral de un cilindro



Nota. Sánchez, J., 2025.

Entonces, el área lateral del cilindro es:

$$L = 2\pi r \cdot h$$

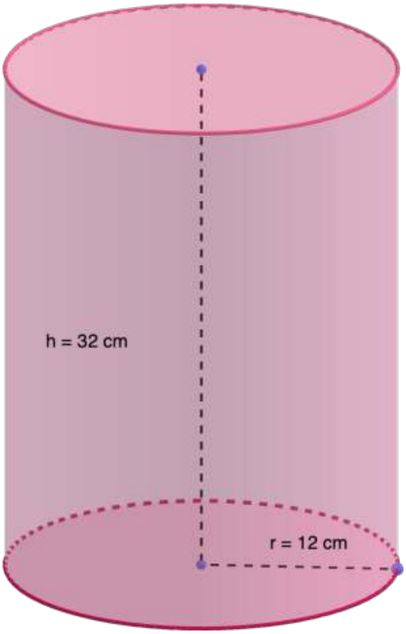
Mientras que el área de todo el cilindro será:

$$A = L + 2B = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

Ejemplo ilustrativo 15. Determinemos el área total exacta del cilindro recto que tiene un radio de 12 cm en su base y una altura de 32 cm, tal como se observa en la siguiente figura:

Figura 33

Área total de un cilindro



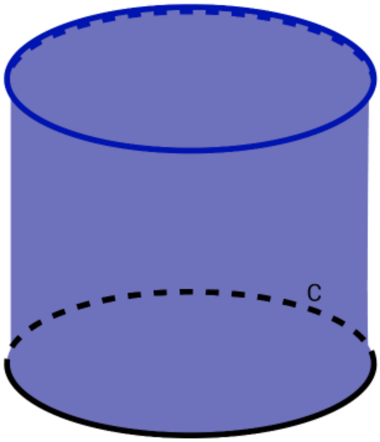
Nota. Sánchez, J., 2025.

$$
\begin{aligned}
A &= L + 2B \\
A &= 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \\
A &= 2\pi 12 \cdot 32 + 2\pi(12)^2 \\
A &= 768\pi + 288\pi \\
A &= 1056\pi\, cm^2
\end{aligned}
$$

2.1.2. Volumen de un cilindro recto

En la siguiente figura se muestra un cilindro, cuya base y altura se emplearán en el cálculo de su volumen.

Figura 34
Volumen de un cilindro



Nota. Sánchez, J., 2025.

Para encontrar el volumen de un cilindro, similar a lo que sucedía con los prismas, se debe multiplicar el área de la base por la altura del cilindro, entonces:

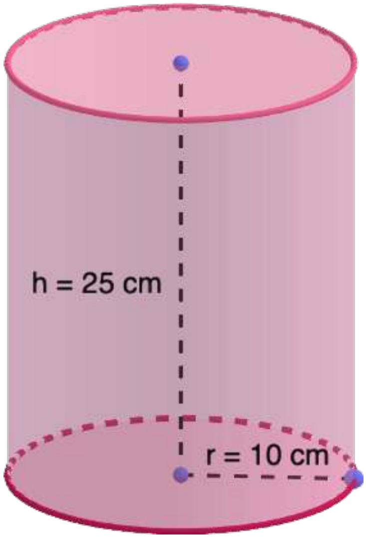
$$V = \text{área de la base por altura}$$

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Ejemplo ilustrativo 16. Determinemos de manera exacta el área total y el volumen de un cilindro cuyo radio de la base es 10 cm y su altura es 25 cm, cuyos datos se presentan en la siguiente figura.

Figura 35

Área y volumen de un cilindro del ejemplo ilustrativo 16



Nota. Sánchez, J., 2025.

Primero, calculamos el área

$$A = L + 2B$$

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$A = 2\pi 10 \cdot 25 + 2\pi (10)^2$$

$$A = 500\pi + 200\pi$$

$$A = 700\pi \, cm^2$$

Ahora calculamos el volumen del cilindro recto

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h = (10)^2 \cdot \pi \cdot 25 = 2500\pi \, cm^3$$

Luego de definir, caracterizar sus elementos más importantes y calcular el área y volumen de los cilindros, se deben reforzar los conocimientos mediante actividades que nos permitan ver la gran aplicación de estos conceptos en la vida cotidiana.

Para finalizar, revise la teoría del texto de Alexander y Koeberlein (2013) y estudie los ejercicios ilustrativos resueltos a partir de la página 424, aquí se explican de manera detallada algunas aplicaciones interesantes del cilindro, su área y el volumen.

Es conveniente que revise también el video acerca de la manera de construir un cilindro de forma manual, en donde se explica la forma de construir un cilindro a partir de una cartulina de formato oficio.

Estimado estudiante, con los mismos ánimos y ganas por aprender de siempre, experimente también a través de la aplicación GeoGebra acerca de la aplicación y resolución de un problema práctico sobre la Construcción de un cilindro en cartulina, en donde se explica paso a paso cómo construir un cilindro y luego la forma de calcular el área lateral, área total y el volumen del cilindro.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Construya a través de la aplicación GeoGebra un cilindro recto que tenga tres unidades de radio en la base y una altura de cinco unidades.
2. Calcule el área lateral, el área total y el volumen del cilindro recto que tiene una altura de 25 cm y una base con un radio de 4 cm.
3. Resuelva los ejercicios cuatro y cinco del libro de Alexander y Koeberlein (2013), que se encuentran en la página 431.
4. Determine un cilindro en objetos o cuerpos de la vida cotidiana, por ejemplo, de un envase de refresco y calcule su área total en cm^2 y el volumen en cm^3.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cilindro, relacionando los conceptos a la vida cotidiana y haciendo que los aprendizajes sean más significativos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta novena semana, en donde estudiamos los conceptos de área y volumen, así como la forma de construir manual y virtualmente los cilindros rectos, además de aplicar los conceptos en objetos de la vida cotidiana, nos aprestamos a estudiar conceptos relacionados con el cono. ¿Conoce cuerpos u objetos de la vida cotidiana que tengan la forma de un cono?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 10

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

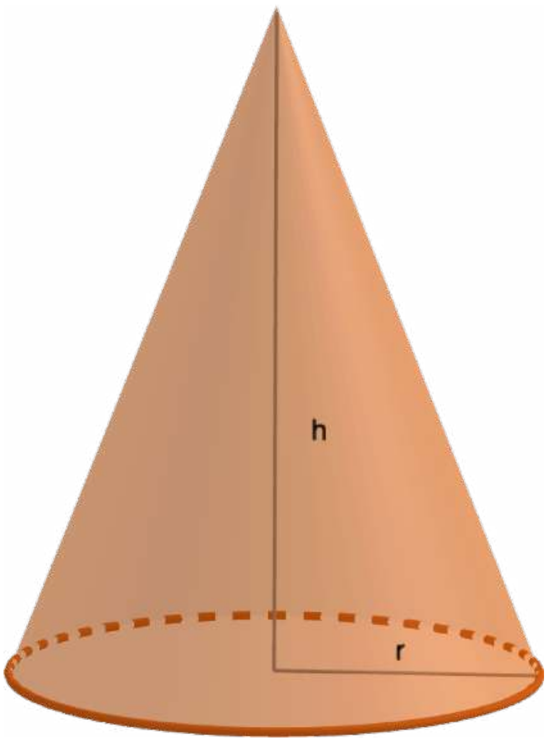
2.2. Los conos, área y volumen

En el presente curso estudiaremos aquellos casos que corresponden al cono circular recto, el cual se define como el cuerpo geométrico formado al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, siendo la base un círculo y cuyo eje de revolución es perpendicular a la base.

El cono circular recto se caracteriza porque tiene por base un círculo, como se muestra en la figura 36.

Figura 36

Área y volumen de un cono



Nota. Sánchez, J., 2025.

La altura del cono (h) es la perpendicular trazada desde el centro de la base y que llega al vértice del cono.

El segmento de recta que une el centro de la base circular con el vértice se denomina eje del cono.

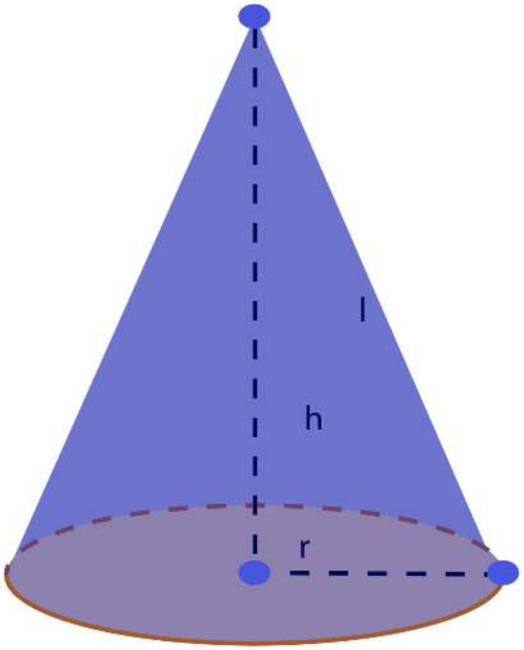
Para la construcción del cono circular recto a través de la aplicación GeoGebra sugiero revise el video Construcción de un cono con deslizadores en donde se explica con claridad la creación de los deslizadores para el radio y para la altura, de tal manera que se puede experimentar cómo varía el área y volumen de un cono con el incremento del radio y de su altura.

2.2.1. Área superficial de un cono

La figura 37 muestra un cono circular recto con sus dimensiones principales, que servirán para el cálculo de su área.

Figura 37

Área superficial de un cono



Nota. Sánchez, J., 2025.

Similar a las consideraciones dadas en la pirámide regular recta, el área lateral de un cono circular recto (L) es: $L = \frac{1}{2} l \cdot C$. En donde l representa la longitud inclinada del cono, h es la altura del cono y r es el radio de la base circular, además C es la longitud de la circunferencia de la base.

Para calcular el área total del cono (A) podemos aplicar la fórmula:

$$A = L + B$$

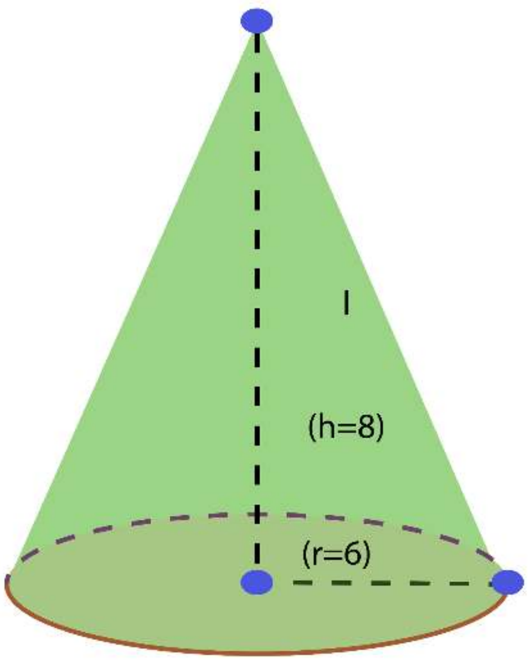
$$A = l\pi r + r^2\pi$$

Para mayor claridad en los procesos de deducción de las fórmulas, sugiero se apoye en las explicaciones dadas en el libro de Alexander y Koeberlein. (2013), en las páginas 427 y 428, aclarando que la simbología cambia solo en la designación del área total del cono, que lo representa por T.

Ejemplo ilustrativo 20. Determinemos el área total exacta del cono circular recto que tiene por base un círculo de radio r = 6 cm, siendo la altura del cono 8 cm, cuyos datos se muestra en la siguiente figura.

Figura 38

Descripción gráfica del ejemplo ilustrativo 20



Nota. Sánchez, J., 2025.

$$A = L + B = l\pi r + r^2\pi$$

Primero observemos que, como dato dado tenemos la altura h del cono, pero en la fórmula trabajamos con la altura inclinada l, por lo tanto, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos su valor:

$$l^2 = h^2 + r^2$$

$$l = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Ahora, luego de obtener el valor de la altura inclinada $l = 10\,cm$ aplicamos la fórmula para encontrar el área total del cono:

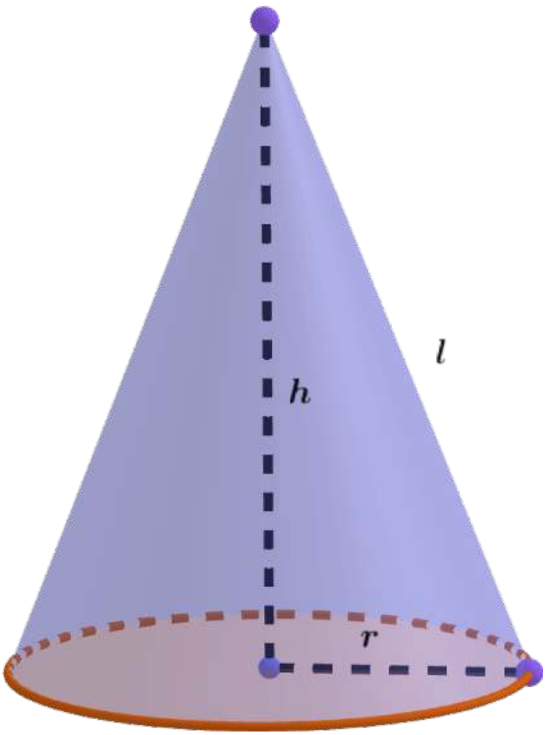
$$\begin{aligned}
A &= L + B = l\pi r + r^2\pi \\
A &= 10\pi \cdot 6 + 6^2 \cdot \pi \\
A &= 60\pi + 36\pi \\
A &= 96\pi\, cm^2
\end{aligned}$$

2.2.2. Volumen de un cono

Para empezar, veamos la siguiente figura, donde se encuentran los elementos principales para calcular el volumen de un cono.

Figura 39

Elementos de la fórmula del volumen de un cono



Nota. Sánchez, J., 2025.

Similar a los razonamientos con las pirámides en donde se determinó que el volumen es $V = \frac{1}{3}B \cdot h$, ahora en el volumen de un cono se debe multiplicar el valor de la base que es el área del círculo $B = \pi \cdot r^2$ por la altura h.

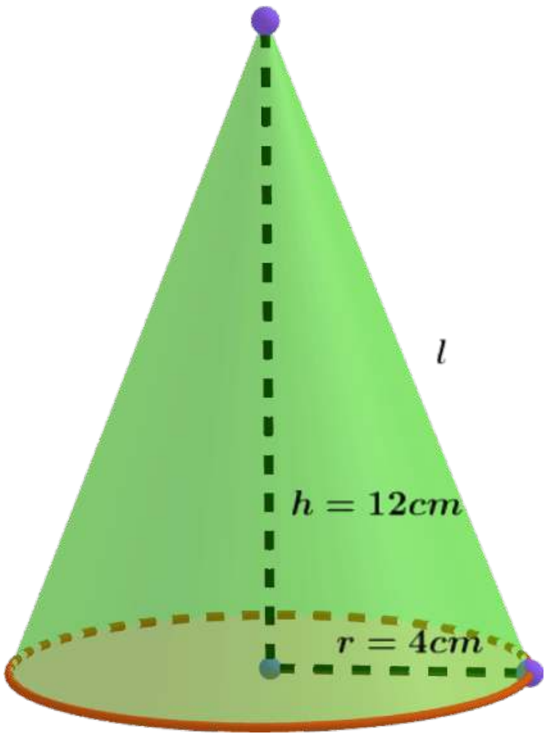
Entonces, el volumen de un cono se determina con la fórmula:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo ilustrativo 21. Calculemos el volumen de un cono cuyo radio en su base mide 4 cm y el valor de la altura es 12cm, cuyos datos se presentan en la figura 40.

Figura 40

Descripción gráfica del ejemplo ilustrativo 21



Nota. Sánchez, J., 2025.

Se debe aclarar que no es necesario calcular el valor de la altura inclinada , por lo que directamente aplicamos los valores en la fórmula del volumen de un cono circular recto:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot (4)^2 \cdot 1$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 1$$

$$V = 64\pi \, cm^3$$

Ahora bien, revise la teoría del cono en el libro de Alexander y Koeberlein (2013) y estudie los ejercicios ilustrativos resueltos a partir de la página 427, aquí se explican de manera detallada algunas aplicaciones interesantes del cono, su área y el volumen.

Es conveniente que revise también el video sobre el cálculo del área y volumen del cono en donde se explica detalladamente y paso a paso todos los procesos al respecto. Además, estimado estudiante, con esos mismos ánimos y ganas de aprender de siempre, experimente y construya un cono en cartulina revisando el video Cómo hacer un cono, en donde se explica, paso a paso, cómo construirlo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Construya a través de la aplicación GeoGebra un cono recto que tenga dos unidades de radio en la base y una altura de cinco unidades.
2. Calcule el área lateral, el área total y el volumen del cono recto que tiene una altura de 25 cm y una base con un radio de 5 cm.

3. Resuelva los ejercicios 20 y 21 del libro de Alexander y Koeberlein (2013), los mismos que se encuentran en la página 432.
4. Determine un cilindro en objetos o cuerpos de la vida cotidiana, por ejemplo, de un cono de helado y calcule su área total en cm^2 y el volumen en cm^3.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cono, relacionando los conceptos a la vida cotidiana y haciendo que los aprendizajes sean más significativos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego de esta décima semana, en donde estudiamos los conceptos de área y volumen, así como la forma de construir manual y virtualmente los conos rectos, además de aplicar los conceptos en objetos de la vida cotidiana, nos aprestamos a estudiar conceptos relacionados con los sólidos de revolución en general. ¿Conoce cuerpos u objetos de la vida cotidiana que tengan la forma de un sólido de revolución?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 11

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

2.3. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de cilindros y conos

Continuando con el estudio de las aplicaciones más importantes de la derivada, entre las cuales tenemos la *solución de problemas de optimización* en esta parte del curso se estudian aquellos casos en donde intervienen los cilindros y los conos.

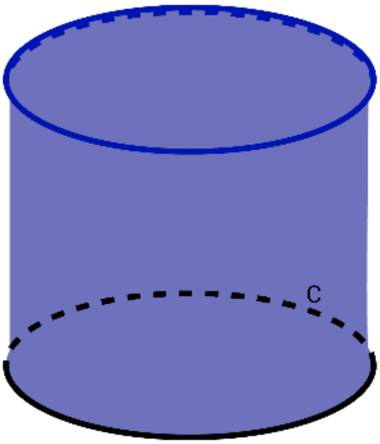
Antes de analizar ejercicios explicativos, conviene recordar las fórmulas del área y volumen de estos cuerpos geométricos:

Área y volumen de un cilindro

En la figura 41 se representa un cilindro, que servirá de referencia para recordar sus fórmulas de área y volumen.

Figura 41

Cilindro



Nota. Sánchez, J., 2025.

$$A = \text{área lateral} + \text{área de las dos bases}$$

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$V = \text{área de la base} \times \text{altura}$$

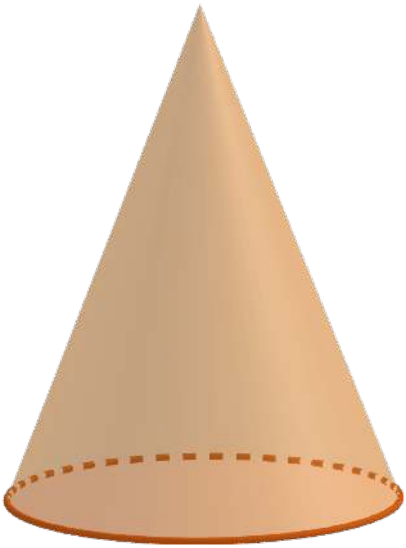
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Área y volumen de un cono

A continuación, en la figura 42 se representa un cono, que servirá de referencia para recordar sus fórmulas de área y volumen.

Figura 42

Cono



Nota. Sánchez, J., 2025.

$$A = \text{área lateral} + \text{área de la base}$$

$$A = \frac{1}{2} l . C + r^2 \cdot \pi$$

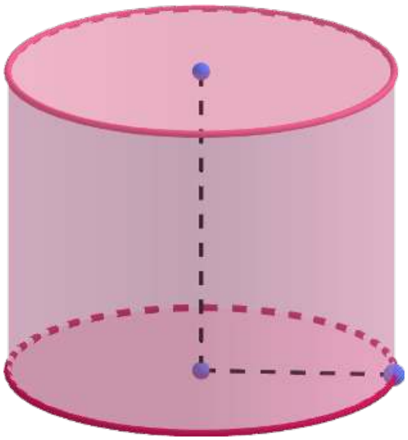
$$V = \text{ Un tercio del área de la base} \times \text{altura}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo ilustrativo 22. Hallemos las medidas del cilindro recto con máximo volumen (ver figura 43) que, se puede construir empleando una plancha de latón cuya área es de 36 cm^2.

Figura 43

Descripción gráfica del ejemplo ilustrativo 22



Nota. Sánchez, J., 2025.

Primero, recordemos que el volumen de un cilindro es igual al producto de la base circular por la altura:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Este volumen es el que se quiere maximizar, pero en esta función tenemos dos variables independientes, por lo que buscaremos una relación entre ellas: radio (r) y altura (h).

Para esto, partamos del área total del prisma que es igual a 36 cm^2:

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

$$36 = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

En esta igualdad, despejamos h:

$$h = \frac{18 - \pi r^2}{\pi r}$$

Entonces, ahora reemplazamos h por su equivalente en la fórmula del volumen a maximizar:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{18-\pi r^2}{\pi r}$$
$$V = 18r - \pi r^3$$

Esta es la fórmula de la función del volumen a maximizar, en donde tenemos una sola variable independiente. Procedemos a encontrar la primera derivada:

$$V' = 18 - 3\pi r^2$$

Aplicamos el teorema de Fermat y hallamos el punto crítico en donde el volumen será un máximo:

$$18 - 3\pi r^2 = 0$$
$$\pi r^2 - 6 = 0$$
$$r_1 = \sqrt{\frac{6}{\pi}}; \;\; r_2 = -\sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

Consideramos el valor positivo del radio, que será el valor de r en donde la función volumen será maximizada. Luego, procedemos a encontrar el valor de la altura:

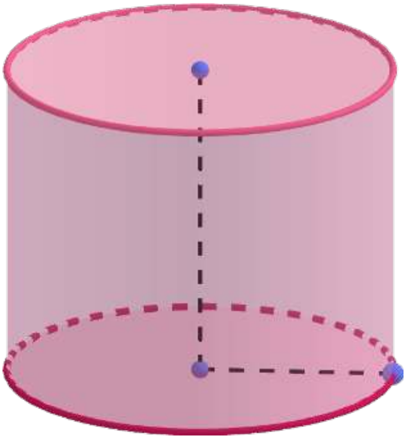
$$h = \frac{18-\pi r^2}{\pi r}$$
$$h = \frac{18-\pi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)^2}{\pi r}$$
$$h = \frac{18-\pi\left(\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right)^2}{\pi\sqrt{\frac{6}{\pi}}}$$
$$h = 2\sqrt{\frac{6}{\pi}}$$

Solución: Las medidas del cilindro recto para obtener el volumen máximo posible han sido: $r = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$ cm y $h = 2\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ cm.

Ejemplo ilustrativo 23. Se trata de construir un recipiente con la forma de un cilindro recto, expuesto en la figura 44, y que tenga un volumen de 40 cm^3. Hallemos las medidas del cilindro para que la cantidad de material empleado (área total) sea mínima.

Figura 44

Descripción gráfica del ejemplo ilustrativo 23



Nota. Sánchez, J., 2025.

En este caso, se desea minimizar el área total del cilindro recto, la cual es:

$$A = \text{área lateral} + \text{área de las dos bases}$$

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

En esta función del área del cilindro, la cual se quiere minimizar, observamos que depende de dos variables: radio (r) y altura (h).

Entonces, buscaremos una relación entre estas variables, considerando además el dato del volumen: V = 40 cm^3.

$$\begin{aligned} V &= r^2 \cdot \pi \cdot h \\ 40 &= r^2 \cdot \pi \cdot h \\ h &= \frac{40}{\pi r^2} \end{aligned}$$

Si reemplazamos este valor en la fórmula del área a minimizar, obtenemos:

$$A = 2\pi r \cdot \frac{40}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$
$$A = \frac{80}{r} + 2\pi r^2$$
$$A = 80r^{-1} + 2\pi r^2$$

Ahora, procedemos a encontrar la primera deriva de la función a minimizar, para encontrar los puntos críticos:

$$A = 80r^{-1} + 2\pi r^2$$
$$A' = -80r^{-2} + 4\pi r$$
$$A' = -\frac{80}{r^2} + 4\pi r$$

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero, según el teorema de Fermat.

$$-\frac{80}{r^2} + 4\pi r = 0$$
$$-80 + 4\pi r^3 = 0$$
$$\pi r^3 - 20 = 0$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$$

En este punto crítico $r = \sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ se produce un valor mínimo del área, por lo que ahora procedemos a encontrar también, el valor de la altura (h) y resolver el problema:

$$h=\frac{40}{\pi r^2}$$
$$h=\frac{40}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}\right)^2}$$
$$h=\frac{40\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}\right)^2\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}$$
$$h=\frac{40\cdot\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}}{\pi\cdot\frac{20}{\pi}}$$
$$h=2\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$$

Solución: Las medidas del cilindro recto que se quiere construir para que, la cantidad de material empleado (área total) sea mínima, son: Radio $r=\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$ y altura $h=2\sqrt[3]{\frac{20}{\pi}}$.

Ahora bien, los respaldos teóricos del cilindro y del cono usted los puede verificar en el libro de Alexander y Koeberlein (2013), sistematizando las fórmulas del área y del volumen, fundamentales para este tipo de aplicaciones.

Además, con la finalidad de profundizar y afianzar los conocimientos en la resolución de problemas prácticos con máximos y mínimos del área y volumen de cilindros y conos, recomiendo analizar el video: Optimización. Área de un cilindro, en donde se explica detalladamente la relación entre las variables independiente como son el radio y la altura. También, acceda al video Dimensiones de un cilindro para que el material sea mínimo, en donde la profesora Lina explica, de manera muy detalladamente y paso a paso, todas las operaciones para encontrar el punto crítico y resolver un problema de minimización del área de un cilindro recto.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Descubra el problema propuesto y anote el desarrollo explicado en el video "Problemas de optimización, máximos y mínimos".
2. Calcule el volumen máximo de un cilindro inscrito dentro de un cono de 18 cm de altura y 6 cm de radio en la base. Los ejes de los dos cuerpos coinciden.
3. Determine las medidas del cilindro recto con máximo volumen que se puede construir empleando una plancha de cartón cuya área es de 48 cm^2.
4. Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro recto y que tenga un volumen de 40 cm^3. Halle las medidas del cilindro para que la cantidad de material empleado (área total) sea mínima.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cono, relacionando los conceptos a la optimización de recursos y a la vida cotidiana. De esta manera, los aprendizajes serán más significativos y perdurables.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego del trabajo de esta semana, en donde estudiamos los conceptos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes, así como la forma de aplicar en problemas de la vida cotidiana, nos aprestamos a estudiar las características de los poliedros regulares en general y hacer una sistematización de sus propiedades. ¿Conoce cuántos vértices tiene un dodecaedro o un icosaedro?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 12

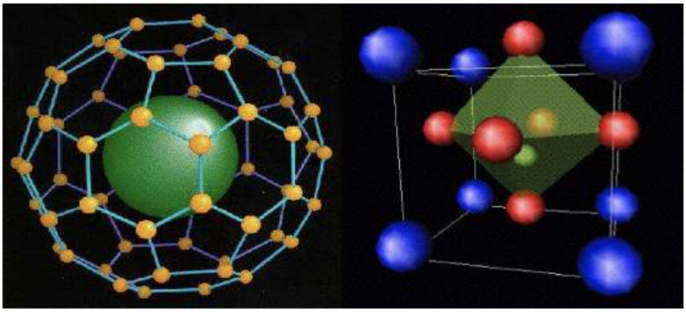
Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

2.4. Los poliedros

Existen varios tipos de cuerpos geométricos que se pueden representar en un espacio tridimensional, caso de los conos, cilindros, paralelepípedos y muchos otros. Entre todos ellos destacan con nitidez los conocidos como **poliedros regulares,** por cuanto toman formas muy peculiares y llamativas. En la figura siguiente se aprecian algunos de ellos que, de manera casi increíble, se presentan en la naturaleza.

Figura 45

Perovskita ABX3 y Fullereno C60



Nota. Tomado de *Poliedros* [Ilustración], por Extremiana, I., Hernández, J. y Rivas, T., 2001, unirioja, CC BY 4.0.

En la figura anterior se pueden apreciar las formas que toman algunos virus, en la parte izquierda se observa un virus envuelto (*herpesvirus*), en donde casi no se distingue la forma poliedral, la cual se aprecia con mayor detalle en la figura de la derecha.

¿Cuáles son los poliedros regulares conocidos?

Un poliedro regular es un cuerpo en el espacio que se caracteriza por tener todos sus lados y ángulos iguales. Existen cinco poliedros regulares conocidos también como **poliedros platónicos**: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. A continuación, se describe las características de cada uno de ellos.

2.4.1. Tetraedro

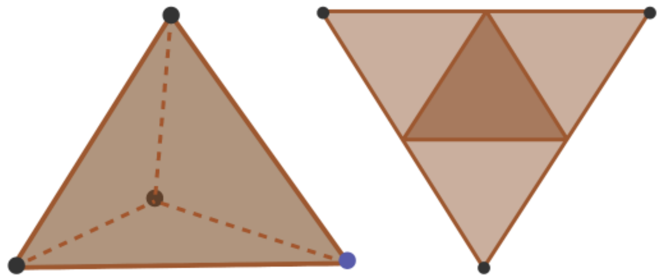
El tetraedro es el primero de los sólidos perfectos o poliedros platónicos, es un poliedro regular de cuatro caras, las mismas que son triángulos equiláteros iguales, que tiene 6 aristas y cuatro vértices en donde concurren tres caras.

Para su construcción virtual en GeoGebra, sugiero que revise el video Cómo crear un tetraedro en GeoGebra, en donde se explica, paso a paso, cómo construir un tetraedro con esta aplicación. Además, se detalla la manera de presentar el desarrollo de un tetraedro regular, dibujo que le facilitará su construcción manual.

En la siguiente figura se expone la forma del tetraedro:

Figura 46

Tetraedro: poliedro platónico de cuatro caras



Nota. Sánchez, J., 2025.

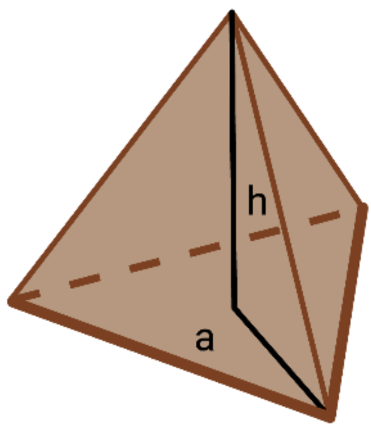
Como se observa en la figura 46, a la izquierda tenemos el dibujo del tetraedro y a la derecha se presenta su desarrollo dibujado con una escala de reducción, en donde se muestran las cuatro caras que son triángulos equiláteros iguales.

2.4.1.1. Área y volumen del tetraedro

Primero, veamos la forma del tetraedro con sus dimensiones en la siguiente figura.

Figura 47

Tetraedro con dimensiones a y h



Nota. Sánchez, J., 2025.

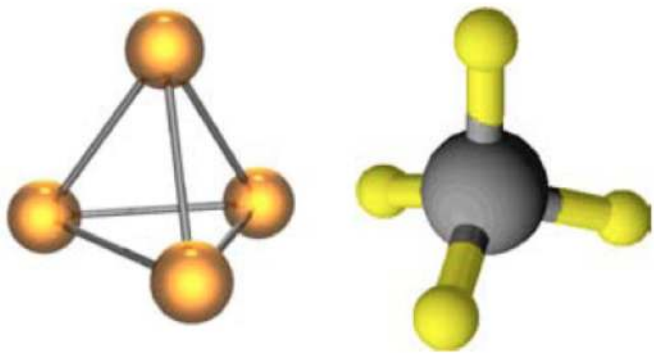
El área de un tetraedro en función de su arista es igual a 4 veces el área de una de sus caras: $A = \sqrt{3}a^2$

Mientras que el volumen del tetraedro en función de la arista se calcula con: $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

En la vida cotidiana, los maestros de química orgánica explican a sus estudiantes, sobre la enorme cantidad de moléculas tetraédricas (ver figura 48), de las cuales se distinguen aquellas que contienen un átomo en el centro del tetraedro y otras que no contienen.

Figura 48

Moléculas tetraédricas sin y con un átomo central



Nota. Tomado de *¡Un tetraedro en mi bolsa!* [Ilustración], por Pérez, A. y Arroyo, R., 2008, SCielo, CC BY 4.0.

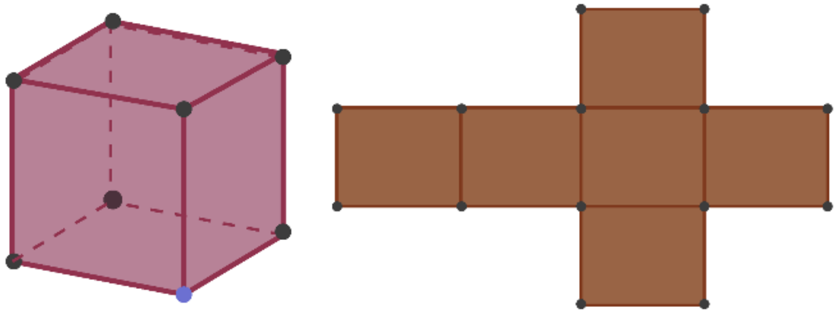
2.4.2. Hexaedro

El segundo poliedro regular parte de los llamados poliedros platónicos, es el hexaedro o vulgarmente conocido como Cubo, como se ilustra en la figura 49. Se caracteriza porque es un poliedro regular de seis caras que son cuadrado iguales o congruentes, tiene 12 aristas y ocho vértices en donde concurren tres caras.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero revise el video Volumen del cubo en GeoGebra, en donde se explica, paso a paso, cómo construir un hexaedro o cubo. Además, la pertinencia de tener un deslizados para experimentar la ampliación y reducción de sus medidas y, finalmente, se explica la forma de obtener el valor del volumen del cubo.

Figura 49

Hexaedro (cubo) y su desarrollo plano



Nota. Sánchez, J., 2025.

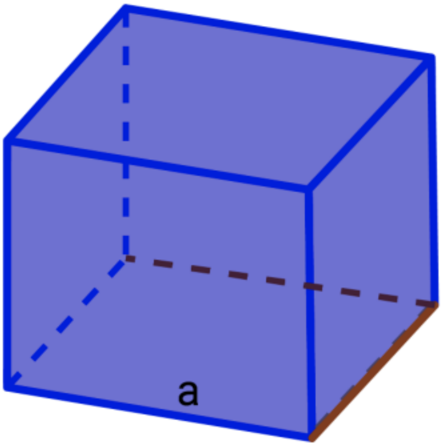
Como puede observar en la figura anterior: a la izquierda aparece el hexaedro conocido generalmente como cubo y a la derecha, con una escala reducida se presenta su desarrollo, en donde se pueden observar las seis caras iguales.

2.4.2.1. Área y volumen de hexaedro

En la siguiente figura se observa un hexaedro, que servirá de referencia para el cálculo de su área y volumen.

Figura 50

Hexaedro



Nota. Sánchez, J., 2025.

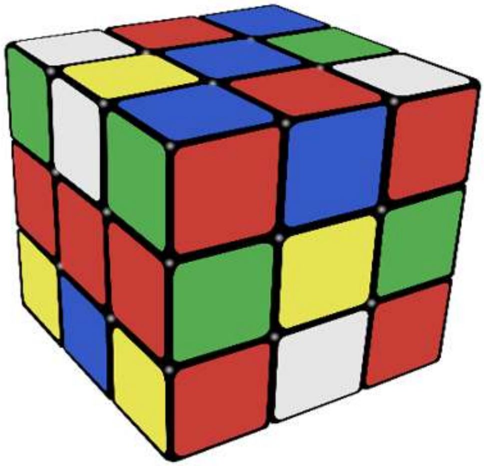
El área de un cubo en función de su arista a es igual a la suma de las áreas de sus seis caras, es decir: $A = 6a^2$.

El volumen de un cubo en función de la arista a se calcula con: $V = a^3$

En la vida cotidiana, la aplicación de los cubos es muy amplia, encontramos diferentes objetos en forma de cubo, uno de los más conocido fue el dado que cumplió un rol fundamental para la formación matemática lúdica de los niños; actualmente es muy conocido el Cubo de Rubik —representado en la figura 51 —, el cual es introducido con mucha frecuencia en las aulas de clase porque mejora la memoria y retención, la creatividad, paciencia y perseverancia y, en general, desarrolla el razonamiento básico para la resolución de problemas.

Figura 51

Cubo de Rubik



Nota. Tomado de *HP: ¿cuántas formas encuentras en el cubo?* [Ilustración], por Heriliam, 2012, overblog, CC BY 4.0.

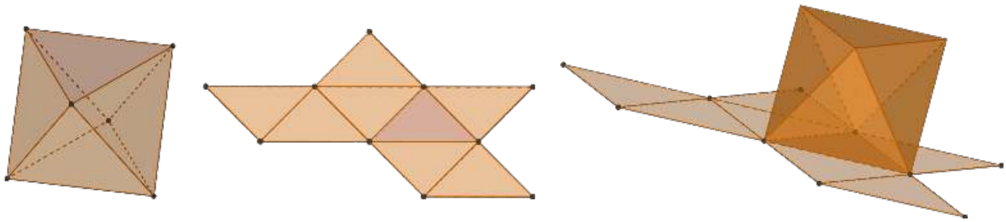
2.4.3. Octaedro

El tercer poliedro platónico es el octaedro, el cual corresponde a uno de los cinco poliedros regulares conocidos hasta hoy, uno de los cinco sólidos perfectos, el cual se caracteriza por tener ocho caras que son triángulos equiláteros congruentes, cuenta con 12 aristas y tiene 6 vértices en donde concurren cuatro caras en cada uno de ellos, tal como se muestra en la figura 52.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero revise el video Octaedro regular, en donde se explica paso a paso cómo construir un octaedro, además se cuenta con claridad cómo obtener su desarrollo y diferenciar sus colores para una mejor apreciación. El dibujo del desarrollo del octaedro nos facilita su construcción manual en físico.

Figura 52

Octaedro y su desarrollo plano



Nota. Sánchez, J., 2025

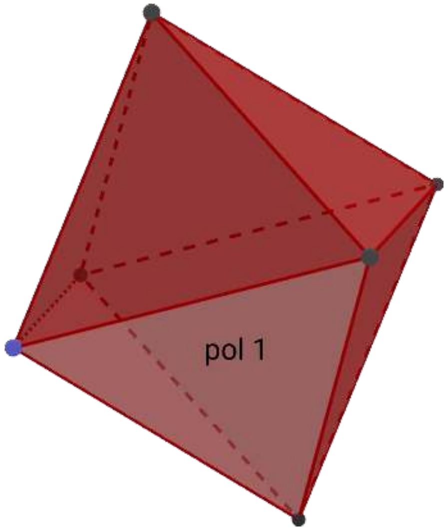
Las figuras anteriores realizadas con GeoGebra confirman la facilidad para la creación virtual de todos los poliedros platónicos, incluyendo en este caso la figura en donde se presenta el poliedro colocado encima de su desarrollo.

2.4.3.1. Área y volumen del octaedro

Para empezar, observe el octaedro de la figura 53, que servirá de referencia para el cálculo de su área y volumen.

Figura 53

Octaedro



Nota. Sánchez, J., 2025.

El área de un octaedro en función de su arista a es igual a la suma de las áreas de sus ocho caras, es decir: $A = 2\sqrt{3}a^2$

El volumen de un octaedro en función de la arista se calcula con: $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}a^3$

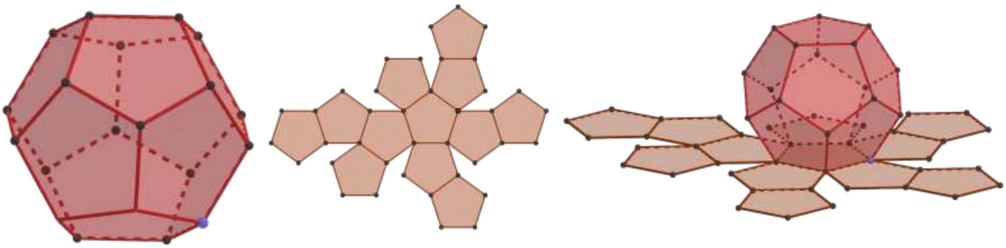
2.4.4. Dodecaedro

El cuarto poliedro platónico es el dodecaedro, uno de los cinco poliedros regulares conocidos hasta hoy, uno de los cinco sólidos perfectos, el cual se caracteriza por tener 12 caras que son pentágonos regulares congruentes, cuenta con 30 aristas y tiene 20 vértices en donde concurren tres caras en cada uno de ellos, tal como se muestra en la figura 54.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero revise el video Dodecaedro en GeoGebra, en donde se explica, paso a paso, cómo construir un dodecaedro. Además, se cuenta con claridad cómo obtener su desarrollo. El dibujo del desarrollo del octaedro nos facilita su construcción manual en físico.

Figura 54

Dodecaedro y su desarrollo plano



Nota. Sánchez, J., 2025.

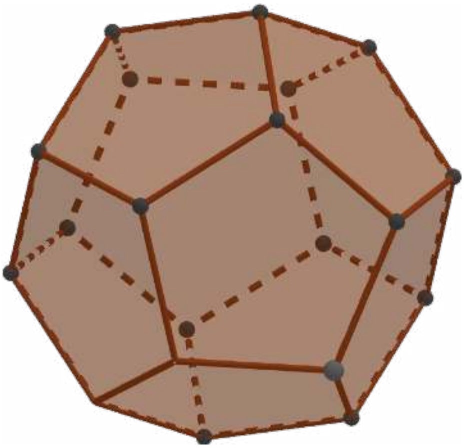
Todas las figuras anteriores han sido obtenidas a través de la aplicación GeoGebra, primero se presenta la construcción del majestuoso dodecaedro con sus 12 caras visibles, a su izquierda tenemos el respectivo desarrollo y en la parte inferior se presenta las dos figuras a la vez. El reto previsto es que, con estas construcciones virtuales nos preparemos para la construcción manual física en algún material como una cartulina.

2.4.4.1. Área y volumen del dodecaedro

En la figura 55 se observa un dodecaedro, que servirá de referencia para el cálculo de su área y volumen.

Figura 55

Dodecaedro



Nota. Sánchez, J., 2025.

El área de un dodecaedro en función de su arista a es igual a la suma de las áreas de sus doce caras pentagonales, es decir: $A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\,a^2$. También se puede aseverar que el valor aproximado del área de un dodecaedro es: $A = 20.68\,a^2$

El volumen de un dodecaedro en función de la arista a se calcula con: $V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})a^3$

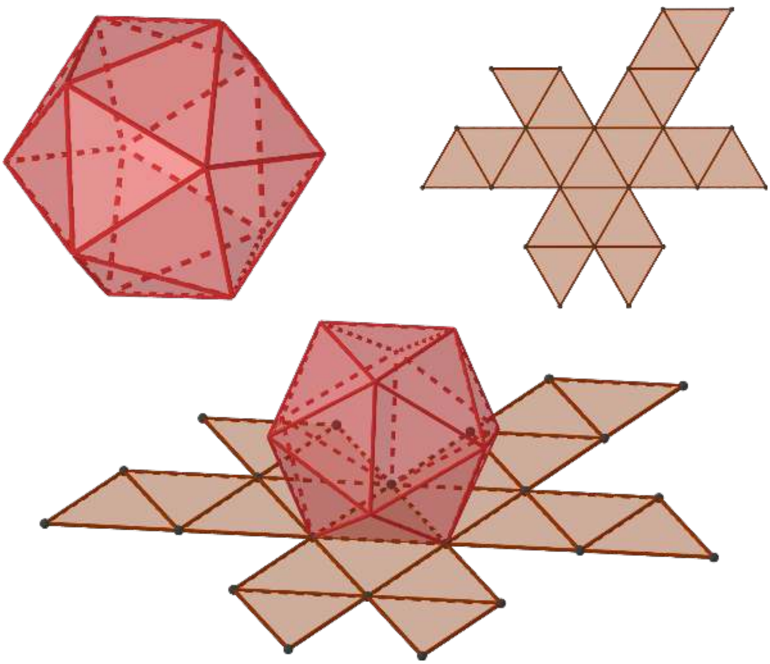
2.4.5. Icosaedro

El quinto poliedro platónico es el icosaedro, uno de los cinco sólidos perfectos descubiertos hace más de dos mil años, el cual se caracteriza por tener 20 caras que son triángulos regulares congruentes, cuenta con 30 aristas y tiene 12 vértices en donde concurren increíblemente cinco caras en cada uno de ellos, tal como se muestra en la figura 56.

Para su construcción virtual en GeoGebra sugiero que revise el video [Poliedros regulares], en donde se explica, paso a paso, cómo construir todos los poliedros regulares o sólidos platónicos, iniciando con la construcción de tetraedro y llegando a la construcción del icosaedro.

Figura 56

Icosaedro y sus desarrollos planos



Nota. Sánchez, J., 2025.

Como se observa en la figura 56, en el primer gráfico de la izquierda se aprecia el poliedro regular icosaedro, con su majestuosidad estructural de 20 caras. A la derecha, se muestra su desarrollo, que despliega todas las caras triangulares congruentes y nos puede guiar para la construcción manual. Debajo de ellos, se presentan unificados: el icosaedro azul sobrepuesto a su desarrollo, lo que permite ver claramente cómo cada triángulo de la plantilla corresponde a una cara del sólido tridimensional.

Ahora bien, es valioso el estudio teórico de los poliedros regulares conocidos también como poliedros platónicos o sólidos perfectos y su construcción virtual por cuanto permitirá la posterior construcción manual y la experimentación de los conceptos matemáticos. Por esta razón, es necesario que usted revise el libro de Alexander y Koeberlein (2013), en las páginas 433 y 435, donde se presenta una síntesis de las principales características.

Además, con la finalidad de experimentar acerca de la construcción de los cinco poliedros a través de GeoGebra, estudie el video Sólidos Platónicos, en donde se detalla el proceso de construcción de estos sólidos perfectos y se presenta también su desarrollo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En esta parte, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Construya virtualmente los cinco poliedros regulares o poliedros platónicos con una arista de 3 unidades en cada uno y su respectivo desarrollo.
2. Utilice la aplicación GeoGebra para construir poliedros regulares con aristas que midan 2 unidades, luego calcule el área de los cinco poliedros regulares.

3. A través de la aplicación GeoGebra construya los poliedros regulares con aristas que midan 5 unidades, luego calcule el volumen de cada uno de ellos.
4. Utilice cartulina gruesa para construir manualmente un tetraedro que mida 3 cm de arista y luego, calcule su área.
5. Construya con cartulina gruesa y de forma manual, un hexaedro regular o cubo que mida 5 cm de arista.
6. Aplique el teorema de Euler: *En todo poliedro, el número de caras más el número de vértices es igual al número de aristas aumentado en dos*, y complete la tabla propuesta, en donde:

   L = número de lados de cada cara.

   M = número de aristas que convergen en cada vértice.

   C = número de caras.

   V = número de vértices.

   A = Número de aristas del poliedro.

Completar: Teorema de Euler

Poliedro regular	L	M	C	V	A
Tetraedro	3				
Octaedro	3				
Icosaedro	3				
Hexaedro	4				
Dodecaedro	5				

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las seis actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de los conceptos de los cinco poliedros regulares, su área y el volumen; además, pudo aplicar la teoría en la construcción virtual y gráfica de los populares poliedros platónicos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego del trabajo de esta semana, en donde estudiamos los conceptos sobre la construcción virtual y manual, así como el cálculo de sus áreas y volúmenes, nos aprestamos a estudiar la conceptualización de las esferas, su construcción virtual y física, haciendo una sistematización de las características más importantes. ¿Conoce cómo construir una esfera con GeoGebra?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 13

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

2.5. Las esferas

En la vida cotidiana nos encontramos a diario con cuerpos de forma esférica: pelotas de *básquet*, *fútbol*, *tenis*, *bola de boliche*, bombillas de Navidad, entre algunas de las más conocidas. Revise la figura 57 para observar algunos de estos ejemplos. Las industrias que producen estos materiales deportivos y comerciales en general aplican la teoría matemática para la construcción de estos cuerpos geométricos que, se caracterizan porque cada uno de los puntos de su superficie, se encuentra a una misma distancia de otro punto llamado centro.

Figura 57

Utilidades en la vida cotidiana de la esfera

Nota. Adaptado de *Bola de baloncesto aislada* [Ilustración], por macrovector, s.f., Freepik; de *Bola de boliche - objeto aislado realista vector moderno sobre fondo blanco* [Ilustración], por boyko.pictures, s.f., Freepik; y de *Juguete de Navidad en espacios en blanco. Ilustración 3D aislada* [Ilustración], por ilin_sergey, s.f., Freepik, CC BY 4.0.

Cuando se considera a la esfera como un cuerpo en el espacio, como lo afirma Alexander y Koeberlein (2013), existen tres formas o manera para definirla:

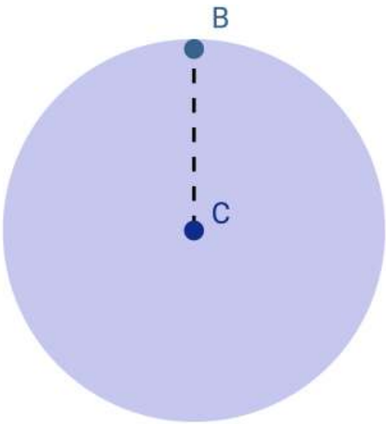
1. La superficie de una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a una distancia fija de otro punto que está en el interior de la esfera.
2. Una esfera es la superficie determinada cuando un círculo o un semicírculo rota alrededor de su diámetro.
3. Una esfera está representada por una superficie que representa el límite teórico de un poliedro regular inscrito cuando su número de caras aumenta infinitamente.

Para nuestro estudio, cuando hablamos de una esfera no referimos al cuerpo sólido en el espacio, en donde cada uno de los puntos de su superficie se encuentran a una distancia fija de otro punto llamado centro, tal como se muestra en la figura 58.

Para construir virtualmente una esfera utilizamos el GeoGebra, recomiendo seguir el proceso sencillo explicado en el video Cómo hacer una esfera en GeoGebra, en donde se parte de un punto y se puede construir una esfera, denotando con centro punto o centro radio.

Figura 58

Construcción de una esfera



Nota. Sánchez, J., 2025.

2.5.1. Área y volumen de las esferas

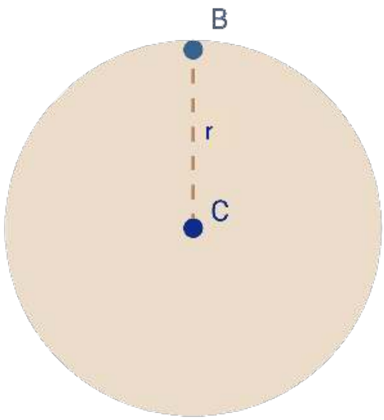
El área superficial de una esfera en función del radio r se calcula mediante la muy conocida fórmula: $A = 4\pi r^2$.

Mientras que, para calcular el volumen de una esfera en función de su radio se puede aplicar: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Analice el esquema que se emplea para hallar el área y volumen de las esferas expuesto en la siguiente figura.

Figura 59

Área y volumen de la esfera

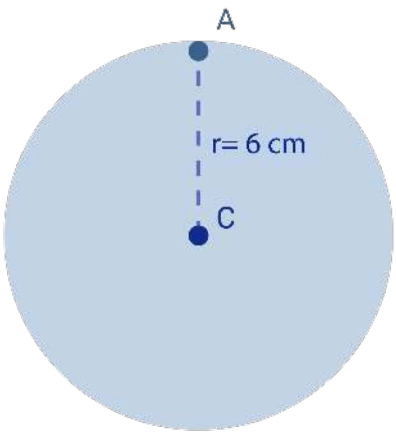


Nota. Sánchez, J., 2025.

Ejemplo ilustrativo 24. Determinemos el área superficial y el volumen de una bombilla navideña con forma esférica que tiene 6 cm de radio, tal como se muestra en la siguiente figura:

Figura 60

Esfera: Descripción gráfica del ejemplo ilustrativo 24



Nota. Sánchez, J., 2025.

El área superficial de la bombilla con forma de esfera y con $r = 6\,cm$, es:

$$A = 4\pi(6\,cm)^2 = 144\pi\,cm^2$$

El volumen de la bombilla navideña con $r = 6\,cm$ es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6\,cm)^3 = 288\pi\,cm^3$$

Las aplicaciones de los conceptos teóricos de la esfera tienen infinidad de aplicaciones. Por esta razón, es necesario que usted revise el libro de Alexander y Koeberlein (2013), en la página 437, en donde se presentan algunos ejercicios ilustrativos con la aplicación del área y el volumen de una esfera.

Además, con la finalidad de experimentar acerca de la construcción de la esfera como un sólido de revolución a través de GeoGebra, estudie el video [Esfera generada por rotación], en donde se detalla la construcción de este sólido de revolución o rotación, además de cómo varía el área superficial y el valor del volumen de la esfera que se construye, cuando varía el radio.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Construya virtualmente con la ayuda de GeoGebra una esfera, aplicando un deslizador para el radio, de tal manera que experimente la variación de la forma esférica de acuerdo con la variación del radio.
2. Utilice la aplicación GeoGebra para construir una esfera de 10 unidades de radio, y calcule el área superficial y su volumen.
3. Calcule el área superficial y el volumen aproximado en centímetros cuadrados y en metros cuadrados, de una pelota de *básquet*.
4. Sabiendo que el volumen aproximado de una pelota de *fútbol* es de 7230 cm^3 determine su radio y, luego, calcule el área superficial.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo apreciar la importancia de la aplicación de los fundamentos teóricos de la esfera, el cálculo del área y el volumen, lo que le permitió consolidar aprendizajes significativos.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego del trabajo de esta semana, en donde estudiamos los conceptos sobre la construcción virtual de la esfera, así como el cálculo de sus áreas y volúmenes, nos aprestamos a estudiar la aplicación de estos conceptos en el cálculo de máximos y mínimos de esferas, conos y cilindros. ¿Cuál es el balón esférico con mayor volumen que se puede construir a partir de una lámina cuadrada de 20 cm de lado?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

2.6. Máximos y mínimos con áreas y volúmenes de esferas, cilindros y conos

Continuando con el estudio de las aplicaciones más importantes de la derivada, entre las cuales tenemos la *solución de problemas de optimización*. En esta parte del curso, se estudian aquellos casos en donde intervienen las esferas, los cilindros y los conos.

Antes de analizar ejemplos ilustrativos, conviene recordar las fórmulas del área y volumen de estos cuerpos geométricos, las cuales se encuentran en la siguiente tabla:

Tabla 2

Máximos y mínimos de cilindros, conos y esfera

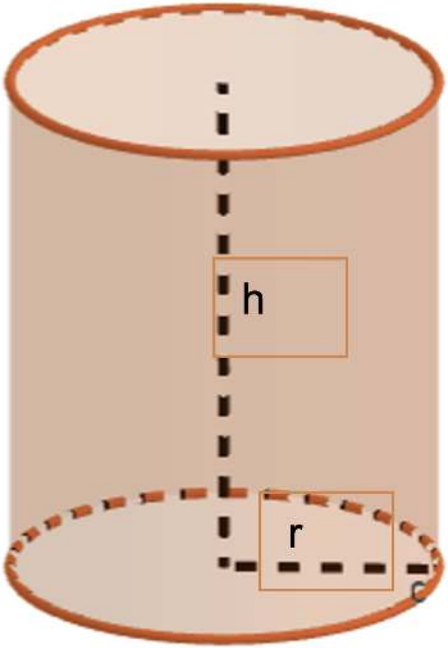
Figura	Representación gráfica	Fórmulas
Cilindros		$A = \text{área lateral} + \text{área de las dos bases}$ $A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ $V = \text{área de la base} \times \text{altura}$ $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$
Conos		$A = \text{área lateral} + \text{área de la base}$ $A = l\pi r + r^2 \cdot \pi$ $V = \text{Un tercio del área de la base} \times \text{altura}$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

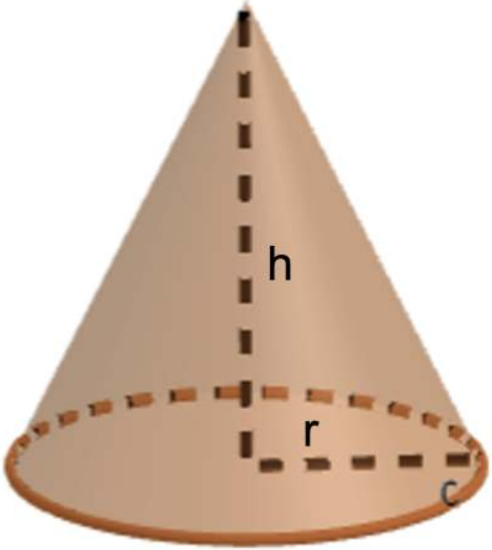
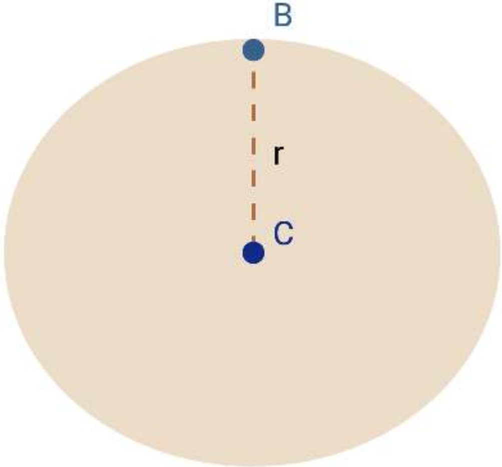
Figura	Representación gráfica	Fórmulas
		
Esferas		El área superficial de una esfera en función del radio r se calcula mediante la fórmula: $A = 4\pi r^2$. Para calcular el volumen de una esfera en función de su radio se puede aplicar: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

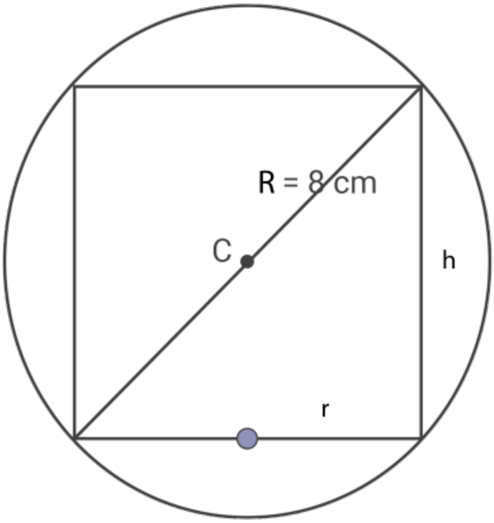
Figura	Representación gráfica	Fórmulas
		

Nota. Sánchez, J., 2025.

Ejemplo ilustrativo 25. Hallemos las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 8 cm, cuyos datos se ilustran en la siguiente figura.

Figura 61

Máximos del cilindro



Nota. Sánchez, J., 2025.

Primero vale señalar que, en la figura 61 se representa una vista frontal del cilindro dentro de la esfera, en donde R es el radio de la esfera, r es el radio de la base del cilindro y h es la altura del cilindro.

Ahora, como se trata de optimizar el volumen del cilindro, debemos escribir la función de su volumen:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

En esta fórmula observamos que, el volumen (variable dependiente) está escrito en función de dos variables independientes, por esta razón, aplicamos geometría para expresar el radio de la base en función de la altura del cilindro. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$(2R)^2 = (2r)^2 + h^2 \text{ ; despejamos } (2r)^2$$

$$(2r)^2 = (2R)^2 - h^2 \text{; reemplazamos } R = 8$$

$$4r^2 = (2 \cdot 8)^2 - h^2;$$

$$r^2 = \frac{256-h^2}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}$$

Reemplazamos este valor en la función volumen:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \left(\frac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V = \frac{1}{4}(256 - h^2) \cdot \pi \cdot h$$

$$V_{(h)} = 64\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Ahora, aplicamos la primera derivada para hallar el punto crítico en donde se produce un máximo:

$$V'_{(h)} = 64\pi - \frac{3\pi h^2}{4}$$

Por el teorema de Fermat igualamos la primera derivada a cero para hallar el punto crítico:

$$64\pi - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$256 - 3h^2 = 0$; Factorizamos

$(16 + \sqrt{3}h)(16 - \sqrt{3}h) = 0$; Aplicamos el teorema del factor cero

$$h_1 = -\frac{16}{\sqrt{3}}; h_2 = \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$$

Considerando que el dominio de la función volumen es (0, 2R), es decir (0, 16), aceptamos el valor de $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, que será el valor en donde se producirá un máximo, por lo que, ahora debemos calcular el valor de r.

$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - h^2}$; en esta fórmula reemplazamos el valor de h

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \frac{256 \cdot 3}{9}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{256 - \frac{256}{3}}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{512}{3}}$$

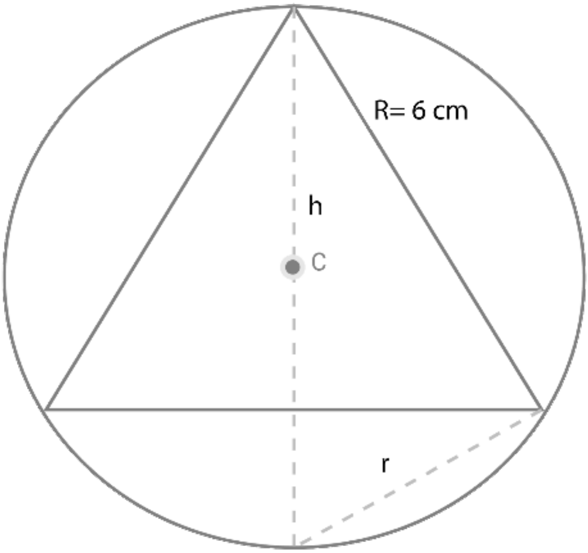
Por lo tanto, las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 8 cm, son:

Solución: Radio de la base: $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{512}{3}}$; Altura del cilindro: $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ejemplo ilustrativo 26. Hallemos las medidas del cono de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera que tiene 6 cm de radio, tal como se muestra en la siguiente figura.

Figura 62

Máximos de una esfera



Nota. Sánchez, J., 2025.

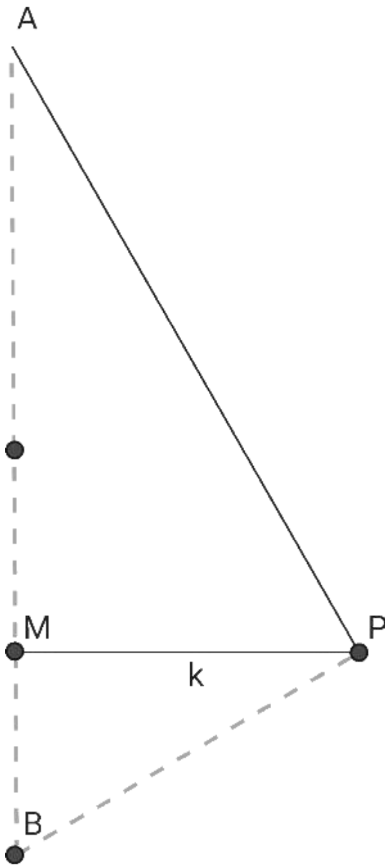
En la figura anterior se representa una vista frontal del cono dentro de la esfera, en donde R es su radio que tiene un valor de 6 cm, r es el radio de la base del cono y h es la altura del cono.

Ahora, como se trata de optimizar el volumen del cono, debemos escribir su función volumen:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Figura 63

Máximos de una esfera (esquema geométrico)



Nota. Sánchez, J., 2025.

Aquí se observa que el volumen del cono depende de los valores del radio r y altura h por lo que, se va a expresar r en términos de h.

Para esto, se considera la figura anterior en donde, por el *teorema de la altura* y considerando que los dos triángulos rectángulos tienen la misma altura, se puede escribir:

$$\frac{AM}{MP} = \frac{MP}{MB}$$

En donde $\frac{h}{r} = \frac{r}{2R-h}$ y de aquí despejamos r

Operando y despejando, se obtiene:

$$r^2 = h(2R - h)$$

Reemplazando esta expresión en la función volumen, nos queda:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h(2R - h) \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3}(2R\pi h^2 - \pi h^3)$$

Sustituimos R = 6 y obtenemos la función volumen en donde la variable independiente es h.

$$V_{(h)} = \frac{1}{3}(12\pi h^2 - \pi h^3)$$

Ahora procedemos a derivar, considerando que el dominio de la función volumen es polinómica y puede tomar cualquier valor en el intervalo (0, 2R) = (0, 12):

$$V'_{(h)} = \frac{1}{3}(24\pi h - 3\pi h^2)$$

Después, aplicamos el teorema de Fermat e igualamos a cero la primera derivada, para hallar los puntos críticos:

$$\frac{1}{3}(24\pi h - 3\pi h^2) = 0$$

Luego de factorizar y operar descubrimos que los puntos críticos son:

$h(8 - h) = 0$; de donde

$$h = 0;\ \ h = 8$$

Aceptamos el valor de h = 8 (altura del cono) en donde se produce un máximo volumen y calculamos el valor correspondiente de su radio:

$$r^2 = h(2R - h)$$

$$r^2 = h(12 - h);\text{; reemplazamos } h = 8$$

$$r^2 = 8(12 - 8)$$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Por lo tanto, las medidas del cono recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio igual a 6 cm, son:

Solución: Radio de la base: $r = 4\sqrt{2}\,cm;$ Altura del cilindro: $h = 8\,cm$

Para profundizar sobre la aplicación de los conceptos del volumen y área de la esfera, cilindro y cono, en los problemas de optimización, usted puede estudiar el video: Volumen máximo del cilindro inscrito en una esfera, en donde se explica, muy detalladamente la manera de optimizar el volumen máximo del cilindro que se inscribe dentro de una esfera de radio R.

Es conveniente además que, revise también el video: Volumen máximo del cono inscrito en una esfera en donde el autor explica con mucha pertinencia la forma de optimizar el máximo volumen del cono inscrito en una esfera de radio R. El estudio de estos dos videos es fundamental en la teorización de este tema.

Actividades de aprendizaje recomendadas

En este momento, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Determine las medidas del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir dentro de una esfera con radio igual a 12 cm.
2. Calcule las medidas del cono recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera que tiene 18 cm de radio.
3. Determine las medidas del cilindro circular recto de mayor área superficial lateral que pueda inscribirse en una esfera de 15 cm de radio.

4. Halle las medidas del cono recto de mayor área superficial lateral que pueda inscribirse en una esfera de 12 cm de radio.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar los conceptos de área y volumen de un cono, cilindro y esfera, relacionando los conceptos a la optimización de recursos y a la vida cotidiana. De esta manera, los aprendizajes serán más significativos y perdurables.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego del trabajo de esta semana, en donde estudiamos los conceptos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes de la esfera, cono y cilindro, nos aprestamos a estudiar el tema más interesante de nuestro curso. ¿Conoce cuáles son los sólidos de revolución más utilizados en la vida cotidiana?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 15

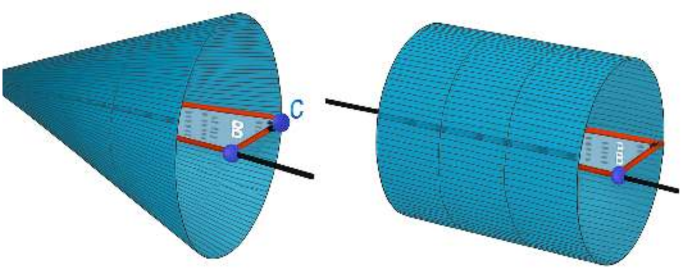
Unidad 2. Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes

2.7. Sólidos de revolución

Los sólidos de revolución son cuerpos geométricos representados en el espacio tridimensional, los cuales se forman o generan al girar una región plana alrededor de un eje, tal como se muestra en la figura 64. Por ejemplo, el cono es un sólido de revolución que se genera cuando un triángulo gira alrededor de uno de sus catetos. Otro ejemplo: el cilindro es un sólido de revolución que se genera cuando un rectángulo rota sobre uno de sus lados.

Figura 64

Sólidos de revolución



Nota. Adaptado de *Sólidos de revolución en un entorno de geometría dinámica* [Ilustración], por Advíncula, E., Valenzuela, M. y Villogas, E., 2017, [Comité Latinoamericano de Matemática Educativa](), CC BY 4.0.

En la figura anterior, para la formación del cono, el triángulo ABC rota alrededor de su cateto AB que se constituye en el eje de rotación. En el otro caso, para la formación del cilindro, el rectángulo ABCD rota alrededor del lado AB que se constituye en el eje de rotación.

¿En dónde se aplican los sólidos de revolución?

Es lógico hacernos la pregunta ¿para qué estudiamos estos temas? para contestar la inquietud vale indicar que, estos sólidos los encontramos en la vida cotidiana, como lo manifiesta León (2017), las superficies de revolución y los sólidos en general se encuentran en la vida diaria en cosas tan simples como macetas, juguetes, árboles, albercas y en cosas un tanto complicadas como saber las medidas de un planeta o conocer el área y volumen para determinar la capacidad máxima, o para saber el valor exacto para obtener la máxima utilidad.

Además, tengamos en cuenta que, al momento de calcular volúmenes y áreas de cuerpos geométricos regulares, desde la antigüedad se aplicaron métodos tradicionales para hacerlo, pero cuando se trata de calcular u obtener áreas superficiales y volúmenes de cuerpos geométricos no regulares, sólo a partir de aplicaciones fundamentadas con el **Cálculo integral** podemos hacerlo. En este mismo sentido, muchas industrias manufactureras aplican los conceptos de las superficies y de los sólidos de revolución para el diseño y producción con una altísima precisión (León, 2017, pág. 3).

¿Cómo se obtienen o construyen los sólidos de revolución?

Los sólidos de revolución dibujados en un plano bidimensional no ofrecen todos los detalles y características de los sólidos de revolución, por esta razón desde hace más de una década, contamos con softwares de Geometría dinámica que nos permiten experimentar y detallar con facilidad sus características y propiedades. El más sobresaliente de estas herramientas para construir y experimentar con sólidos de revolución es GeoGebra.

Al respecto del uso de este programa libre, Advíncula, Luna y Villogas (2017) manifiestan que, el software de geometría dinámica como GeoGebra facilitan la experimentación en los estudiantes, dando oportunidad para que ellos logren explorar, visualizar, descubrir, conjeturar, verificar y comprender las propiedades de las figuras geométricas tridimensionales como los sólidos de revolución.

Por lo expuesto en los párrafos precedentes, es evidente la necesidad que nos adiestremos en la construcción de los sólidos de revolución y calculemos a través de GeoGebra, el área superficial y su volumen.

La construcción de los sólidos de revolución a través de GeoGebra es muy fácil, se debe trabajar en la vista 3D, haciendo rotar la figura poligonal o el área determinada por una función alrededor de un eje determinado. Sugiero revise detenidamente ejemplos propuestos en la web, por ejemplo, en el video: Cómo generar sólidos de revolución, en el que se explica, paso a paso, la manera de rotar a partir de un deslizador configurado en grados.

Estimado alumno, le recomiendo que estudie también el video sobre ejercicios con el tronco de cono en el video: Área y volumen tronco de cono, en donde se explica cómo construir el tronco de cono con la rotación de la gráfica de una función sobre el eje X limitada por dos rectas dadas.

A continuación, en el siguiente módulo didáctico se presentan definiciones, fórmulas de área y volúmenes de las figuras geométricas como esferas, cilindros y conos, y otros temas abordados durante este segundo bimestre. Le invito a revisarlo para profundizar sus conocimientos.

Cilindros, conos, poliedros, esferas, áreas y volúmenes.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Seguidamente, estimado estudiante, con la finalidad de consolidar sus aprendizajes, solicito que, con el entusiasmo característico de un alumno UTPL y aplicando los conceptos interiorizados en esta semana, realice lo siguiente:

1. Construya un cono como sólido de revolución, partiendo de un triángulo rectángulo que mida en sus lados 3, 4 y 5 cm respectivamente, y calcule con GeoGebra el volumen.
2. Construya un cilindro a partir de un rectángulo que mida 6 cm de ancho por 10 cm de largo. Luego, calcule con GeoGebra su volumen.
3. Halle, volumen del tronco de cono formado por la rotación de la gráfica de la función $f(x) = x/2 - 2$ alrededor del eje X y las rectas $x = 6$ y $x = 12$. Construya el sólido con GeoGebra.
4. Determine con GeoGebra el sólido de revolución con la rotación de la región limitada por las curvas $2x = y^2$; $x = 0$, $y = 4$; alrededor del eje Y.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Con el desarrollo de las cuatro actividades recomendadas, usted pudo aplicar la conceptualización de los conceptos de área y volumen de un cono, cilindro y esfera, relacionando los conceptos a la optimización de recursos y a la vida cotidiana, de esta manera los aprendizajes serán más significativos y perdurables.

¡Excelente trabajo, felicitaciones por su esfuerzo y aprendizaje!

Luego del trabajo de esta semana, en donde estudiamos los conceptos de máximos y mínimos de áreas y volúmenes de la esfera, cono y cilindro, nos aprestamos a estudiar el tema más interesante de nuestro curso denominado. ¿Conoce cuáles son los sólidos de revolución más utilizados en la vida cotidiana?

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante, en la última semana de estudio, la invitación para que revise los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

Para ello considere:

- Su diario de notas.
- Actividades de aprendizaje recomendadas.
- Actividades de aprendizaje calificadas.
- Actividades de aprendizaje interactivas; y.,
- Evaluaciones parciales.

La evaluación presencial comprende los conocimientos adquiridos en la segunda unidad sobre cilindros y conos, máximos y mínimos con esferas y volúmenes de cilindros y conos, poliedros, esferas, máximos y mínimos con esferas, y los sólidos de revolución.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Además de las actividades anteriores, para consolidar los aprendizajes del segundo bimestre, y prepararse a la prueba presencial en físico o virtual, sugiero:

1. Revise cada uno de los conceptos estudiados en la unidad planificada y desarrollada en este segundo bimestre.
2. Realice suficientes ejercicios y problemas de aplicación de los diferentes conceptos, propiedades y leyes, de cada una de las unidades estudiadas, desarrollando los problemas propuestos al final de cada unidad del libro de Alexander y Koeberlein (2013).
3. Para cada una de las unidades, es valedero que sistematice el conocimiento aprendido, a través de la construcción de un mapa conceptual o algún otro organizador gráfico que estime conveniente.
4. Se quiere construir un cilindro con un volumen de 24 m^3. ¿Cuáles son las medidas del cilindro para que su área total sea mínima?
5. Determine las medidas (radio de la base y altura) del cilindro circular inscrito en una esfera de 16 cm de radio, de tal manera que, el área del cilindro sea máxima.
6. Halle el área total máxima de un cilindro inscrito en una esfera que tiene un radio que mide 12 cm.
7. Determine las medidas del prisma de base cuadrada con máximo volumen que puede inscribirse en una pirámide de base cuadrada de 10 m de lado y 10 m de altura.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

8. Para comprobar sus conocimientos en los temas estudiados, le invito a realizar la autoevaluación que se describe a continuación:

Autoevaluación 2

Seleccione verdadero o falso en las siguientes proposiciones.

1. ( ) El desplazamiento paralelo de una generatriz (recta) a lo largo de una directriz (curva plana). Cuando la generatriz resulta perpendicular a una directriz que es un círculo, se obtiene un cilindro recto y circular.

2. ( ) El cono es una figura geométrica tridimensional que se constituye al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

3. ( ) La fórmula para encontrar el área lateral del cilindro es:

$$L = 3\pi r \cdot l$$

4. ( ) El área de todo el cilindro se calcula a través de la fórmula:

$$A = L + 3B = 3\pi r \cdot h + 3\pi r^2$$

Identifique la alternativa correcta en las siguientes preguntas.

5. Calcule la cantidad de hojalata que necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 de altura:

   a. A = 7853.98 cm^2
   b. A = 7000.00 cm^2
   c. A = 7500.98 cm^2

6. Halle el volumen del cilindro, si el diámetro es 8 cm y su altura es 5 m:

   a. V = 351 m^3

b. V = 241 m^3

c. V = 251 m^3

7. Determine el área total exacta del cono circular recto que tiene por base un círculo de radio r = 3 cm, siendo la altura del cono 4 cm.

   a. $A = 26\pi\, cm^2$

   b. $A = 36\pi\, cm^2$

   c. $A = 16\pi\, cm^2$

8. Calcule el volumen de un cono cuyo radio en su base mide 2 cm y el valor de la altura es 6 cm.

   a. $V = 4\pi\, cm^3$

   b. $V = 8\pi\, cm^3$

   c. $V = 16\pi\, cm^3$

9. Cuál es la razón entre el radio de la base y la altura que, con el volumen dado, tenga la superficie total mínima:

   a. La relación entre la radio y la altura es: $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$

   b. La relación entre la radio y la altura es: $\frac{r}{h} = \frac{4}{3}$

   c. La relación entre la radio y la altura es: $\frac{r}{h} = \frac{2}{2}$

10. Calcule el área y el volumen de un dodecaedro de 10 cm de arista, sabiendo que la apotema de una de sus caras mide 6.88 cm.

a. $A = 2000\, cm^2 \;\; V = 7000\, cm^3$

b. $A = 1064\, cm^2 \;\; V = 6663.12\, cm^3$

c. $A = 2064\, cm^2 \;\; V = 7663.12\, cm^3$

11. Halla el área total de un octaedro en el que la distancia entre los vértices no contiguos es de 20 cm.

a. $A_t = 600.86\, cm^2$

b. $A_t = 692.86\, cm^2$

c. $A_t = 592.76\, cm^2$

12. **Mediante una aplicación web o calculadora gráfica, construya:**

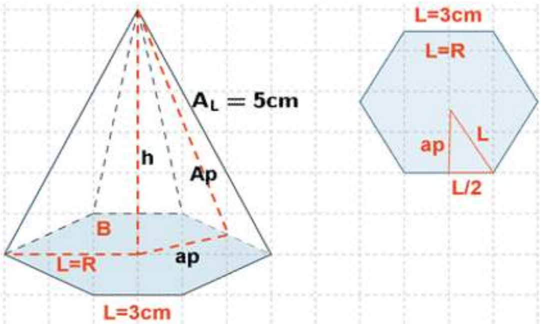
- Un cilindro.
- Un cono.
- Un tetraedro.
- Un hexaedro.

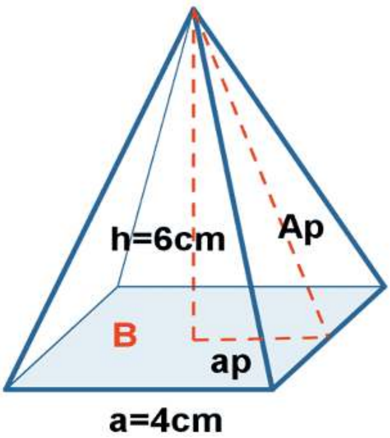
Ir al solucionario

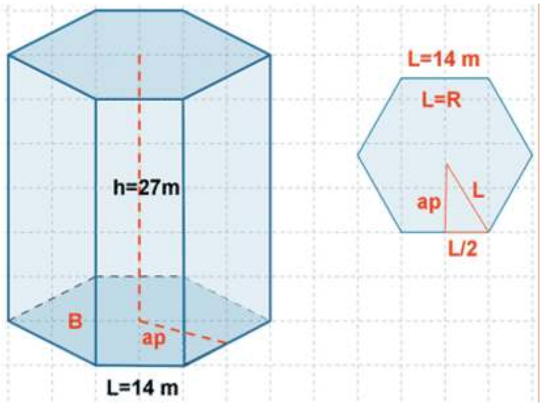
4. Solucionario

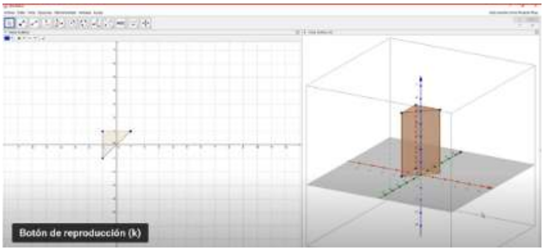
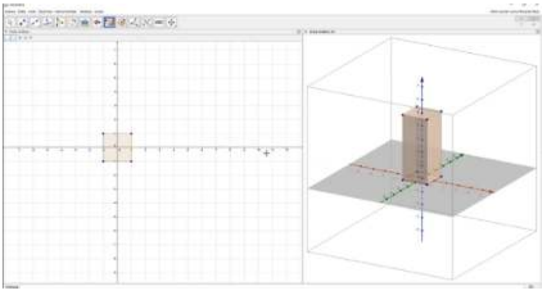
Autoevaluación 1

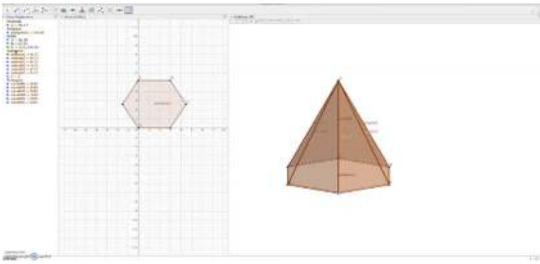
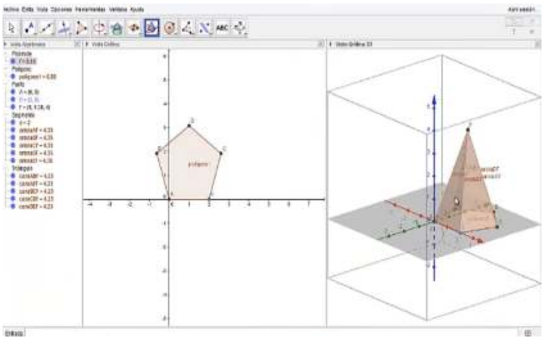
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	Verdadero	Los prismas y pirámides son ideales para problemas de optimización porque sus fórmulas de área y volumen se pueden derivar para encontrar valores máximos o mínimos. Esto es muy útil en ingeniería para minimizar costos de materiales.
2	Falso	El sistema 3D es mucho más versátil. Además de líneas, puede representar puntos, planos, superficies curvas y cualquier objeto tridimensional usando los tres ejes perpendiculares.
3	Verdadero	Los tres ejes (x, y, z) forman tres planos coordenados que dividen el espacio en 8 regiones llamadas octantes. Cada punto se localiza por su distancia a estos planos de referencia.
4	Falso	Recuerda: "recto" significa que las aristas laterales son perpendiculares (90°) a la base. Si están inclinadas, sería un prisma oblicuo. Esta distinción es clave para los cálculos.
5	Verdadero	Estas dos interpretaciones son fundamentales en cálculo. La primera se usa en física (velocidad, aceleración) y economía (tasas de crecimiento), mientras que la segunda es clave en geometría analítica para encontrar tangentes a curvas.
6	b)	En los puntos críticos, la tangente es horizontal, por eso la derivada vale cero. Esto es clave para la optimización.
7	b)	Una pirámide siempre tiene un solo vértice superior donde se encuentran todas las caras triangulares. El número de caras depende del polígono base: triangular (4 caras), cuadrada (5 caras), etc.
8	b)	Un prisma oblicuo tiene sus aristas laterales inclinadas respecto a la base. Esto hace que sea más complejo calcular su área lateral comparada con un prisma recto.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	a)	 $R = L$ $5^2 = h^2 + 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{5^2 - 3^2} \approx 4 \text{ cm}$ P_B = Perimetro de la base. $P_B = n \cdot L \quad \Leftrightarrow \quad P_B = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}$ Ap = Apotema de la piramide a_p = apotema de la base $ap = \frac{L}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ap = \frac{3}{2} = 1{,}5 \text{ cm}$ $Ap^2 = (ap)^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad Ap = \sqrt{(ap)^2 + h^2}$ $Ap = \sqrt{1{,}5^2 + 4^2} \approx 4{,}272 \text{ cm}$ $A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A_L = \frac{18 \cdot 4{,}272}{2} \approx 38{,}448 \text{ cm}^2$ $A_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L^2 \quad \Leftrightarrow \quad A_B = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3^2 = 7{,}794 \text{ cm}^2$ $A_T = A_L + A_B \quad \Leftrightarrow \quad A_T = 38{,}448 + 7{,}794 = 46{,}242 \text{ cm}^2$ $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 7{,}794 \cdot 4 = 10{,}392 \text{ cm}^3$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	c)	 P_B = Perimetro de la base. $P_B = n \cdot L \quad \Leftrightarrow \quad P_B = 4 \cdot 4 = 16$ cm Ap = Apotema de la piramide a_p = apotema de la base $ap = \frac{a}{2} \quad \Leftrightarrow \quad ap = \frac{4}{2} = 2$ cm $Ap^2 = (ap)^2 + h^2 \quad \Leftrightarrow \quad Ap = \sqrt{(ap)^2 + h^2}$ $Ap = \sqrt{2^2 + 6^2} \approx 6{,}324$ cm $A_L = \frac{P_B \cdot Ap}{2} \quad \Leftrightarrow \quad A_L = \frac{16 \cdot 6{,}324}{2} \approx 50{,}592\ cm^2$ $A_T = A_L + A_B \quad \Leftrightarrow \quad A_T = 50{,}592 + 16 = 66{,}592\ cm^2$ $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 6 = 32\ cm^3$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
11	b)	 $R = L$ $P_B = n \cdot L \iff P_B = 6 \cdot 14 = 84\ m$ $L^2 = ap^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \iff ap = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$ $ap = \sqrt{14^2 - \left(\frac{14}{2}\right)^2} \approx 12{,}124\ m$ $A_B = \frac{P_B \cdot ap}{2} \iff A_B = \frac{84 \cdot 12{,}124}{2} = 509{,}208\ m^2$ $A_L = P_B \cdot h \iff A_L = 84 \cdot 27 = 2268\ m^2$ $A_T = 2A_B + A_L \iff A_T = 2 \cdot 509{,}208 + 2268 = 3286{,}416\ m^2$ $V = A_B \cdot h \iff V = 509{,}208 \cdot 27 = 13748{,}616\ m^3$
12	b)	**Explicación:** El área total está formada por dos cuadrados de 1,20 m de lado y 4 rectángulos de (1,20m x 4m) $A_T = 2(1.20\,m)^2 + 4(1.20\,m \times 4\,m)$ $A_T = 2(1.44\,m^2) + 4(4.8\,m^2)$ $A_T = 2.88\,m^2 + 19.2\,m^2$ $A^T = 22.08m^2$ El volumen es el producto entre el área de la base por la altura: $V = (1.20\,m)^2 \times 4\,m$ $V = 1.44m^2 \times 4\,m$ $V = 5.76\,m^3$

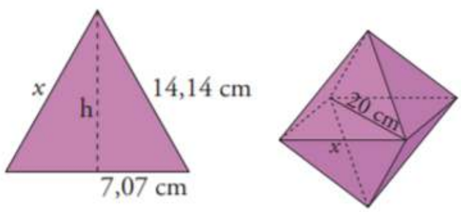
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
13	a)	**Explicación:** Para hallar el tamaño de la pieza metálica, primero se calcula el área de la base cuadrada usando la fórmula del volumen: $V = a^2 * h$ Sustituyendo: $V = a^2 * 9 = 5184$ $a^2 = \frac{5184}{9}$ $a^2 = 576\, pulg^2$ $a = 24\, pulg$ Por lo tanto, el tamaño de la pieza metálica es de 576 pulgadas cuadradas y sus lados miden 24 pulgadas.
14	Prisma triangular	Se observa un prisma con bases triangulares congruentes y caras laterales rectangulares. Sus aristas verticales son paralelas y de igual longitud. 
	Prisma cuadrangular	La figura muestra un prisma con base cuadrada y cuatro caras laterales rectangulares. Todas las aristas verticales tienen la misma medida, formando un sólido regular. 

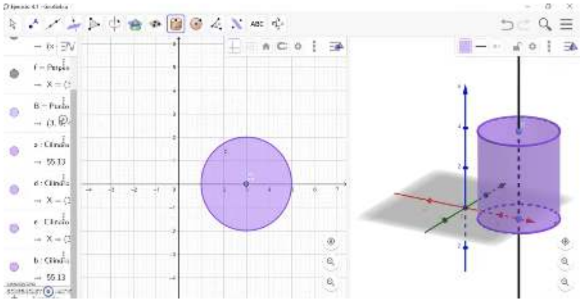
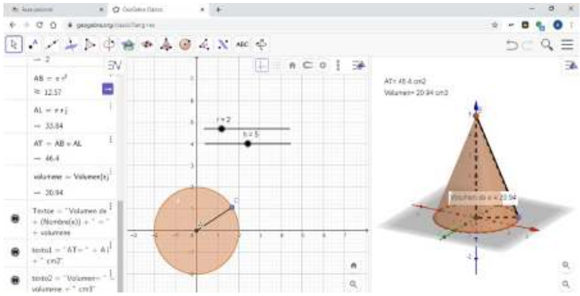
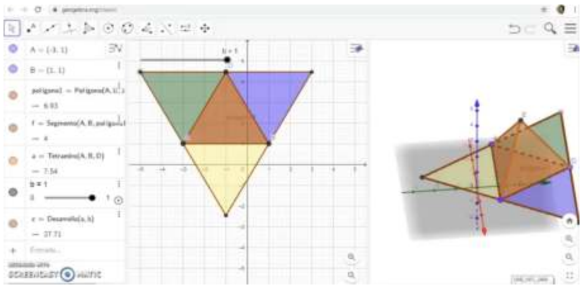
Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
	Pirámide de base hexagonal	Se presenta una pirámide cuya base es un hexágono regular. Todas las aristas laterales se unen en un vértice común, formando caras laterales triangulares. 
	Pirámide de base pentagonal	La figura corresponde a una pirámide con base pentagonal regular. Desde cada vértice de la base, una arista lateral se une al vértice superior, formando cinco caras triangulares. 

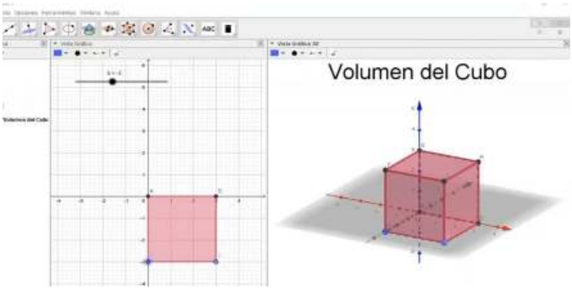
Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	Verdadero	Los prismas y pirámides son ideales para problemas de optimización porque sus fórmulas de área y volumen se pueden derivar para encontrar valores máximos o mínimos. Esto es muy útil en ingeniería para minimizar costos de materiales.
2	Verdadero	Al rotar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos, este se convierte en el eje del cono, mientras la hipotenusa genera la superficie lateral cónica.
3	Falso	El área lateral de un cilindro se calcula como el perímetro de la base multiplicado por la altura. La fórmula correcta involucra 2π, no 3.
4	Falso	El área total incluye el área lateral más las dos bases circulares. Los coeficientes correctos son 2π para el área lateral y 2π para las bases.
5	a)	$A = L + 2B$ $A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$ $A = 2\pi 5 \cdot 20 + 2\pi (5)^2$ $A = 628 + 175.398$ $A = 785.398\, cm^2$ $A = 785.398 \times 10 = 7853.98\, cm^2$
6	c)	$V = r^2 \pi h$ $V = (4m)^2 \pi 5m$ $V = 251\, m^3$
7	b)	$l^2 = h^2 + r^2$ $l = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $A = L + B = l\pi r + r^2\pi$ $A = 5\pi \cdot 4 + 4^2 \cdot \pi$ $A = 20\pi + 16\pi$ $A = 36\pi\, cm^2$
8	c)	$V = 16\pi\, cm^3$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot (2)^2 \cdot 6$ $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 4 \cdot 12$ $V = 16\pi\, cm3$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	a)	$V = \pi r^2; h = \frac{V}{\pi r^2}$ $S_r = 2\pi h + 2\pi r^2$ $S_r = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$ Si la superficie total ha de ser mínima, la derivada respecto al radio se anula en dicho mínimo, es decir: $\frac{-2V}{r} + 4\pi r = 0$ donde $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} + 4\pi r = 0$ y $h = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{V}{2\pi}\right)^2}}$ Por tanto, la relación entre el radio y la altura es $\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$
10	c)	$A = 30 \times a \times ap$ $A = 30 \times 10 \times 6.88$ $A = 2064\, cm^2$ $V = \frac{1}{4}(15 + 7\sqrt{5})10^3$ $V = 7663.12\, cm^3$
11	b)	Observe que la arista del octaedro es el lado de un cuadrado, cuya diagonal mide 20 cm. x = 14,14 cm h = 12,25 cm. $x^2 + x^2 = 20^2$ $x^2 = 200$ $x = \sqrt{200}$ $x = 14.14\, cm$ $h = \sqrt{(14.14)^2 - (7.07)^2}$ $h = 12.25\, cm$ $A_T = 8 \times \frac{14.14 \times 12.25}{2}$ $A_T = 692.86\, cm^2$ 

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
12	Cilindro	Se muestra un cilindro recto formado por dos bases circulares paralelas y una superficie lateral curva. La altura une perpendicularmente los centros de las bases. 
	Cono	La figura representa un cono circular recto, con una base circular y una superficie lateral que converge en un único vértice. La altura va desde el vértice hasta el centro de la base. 
	Tetraedro	Se observa un poliedro regular con cuatro caras triangulares congruentes. Tiene cuatro vértices y seis aristas de igual longitud. 

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
	Hexaedro	La construcción muestra un hexaedro regular (cubo), compuesto por seis caras cuadradas congruentes, doce aristas iguales y ocho vértices. 

Ir a la autoevaluación

5. Glosario

Prisma: es un poliedro que consta de dos caras iguales y paralelas llamadas bases, y de caras laterales que son paralelogramos.

Pirámide: sólido, que tiene por base un polígono cualquiera y cuyas caras, tantas en número como los lados de aquel, son triángulos que se juntan en un solo punto, llamado vértice.

Área: es un concepto métrico que puede permitir asignar una medida a la extensión de una superficie, expresada en matemáticas como unidades de medida denominadas unidades de superficie.

Volumen: corresponde a la medida del espacio que ocupa un cuerpo. La unidad de medida para medir volumen es el metro cúbico (m^3).

Sistema tridimensional: en matemáticas, el sistema tridimensional se representa en el plano cartesiano con los ejes X, Y y Z. Por lo general, en estas representaciones se manejan las formas geométricas de tres dimensiones.

GeoGebra: es un *software* de matemáticas para todo nivel educativo. Reúne dinámicamente geometría, álgebra, estadística y cálculo en registros gráficos, de análisis y de organización en hojas de cálculo.

Máximos y mínimos de una función: en matemáticas, los máximos y mínimos de una función, conocidos colectivamente como extremos de una función, son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos).

Cilindro: es un cuerpo geométrico que está formado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.

Cono: es el cuerpo de revolución obtenido al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.

Poliedros: un poliedro es un cuerpo geométrico de tres dimensiones cuyas caras son polígonos.

Esferas: cuerpo geométrico limitado por una superficie curva cuyos puntos están todos a igual distancia de uno interior llamado centro.

Cilindro circular recto: un cilindro circular recto es aquel cuerpo o sólido geométrico generado por el giro de una región rectangular en torno a uno de sus lados o a uno de sus ejes de simetría.

Tetraedro: el tetraedro es aquel poliedro regular limitado por cuatro regiones triangulares equiláteras congruentes.

Hexaedro: o cubo es un poliedro regular con seis caras cuadradas. Tiene además doce aristas y ocho vértices.

Octaedro: es el poliedro regular con ocho caras que son triángulos equiláteros. Tiene además doce aristas y seis vértices. El poliedro dual del octaedro es un hexaedro cuyos vértices se encuentran en los centros de las caras del primer icosaedro.

Sólidos de revolución: el sólido de revolución es un cuerpo geométrico que se puede formar haciendo girar una superficie plana en torno a una recta a la que se denomina eje.

6. Referencias bibliográficas

Advíncula, E., Luna, M. y Villogas, E. (2017). Sólidos de revolución en un entorno de geometría dinámica. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/solidos-de-revolucion-en-un-entorno-de-geometria-dinamica/

Coll, A. (20 septiembre 2018). Te desvelamos los 3 grandes misterios de las pirámides de Egipto. https://lavozdelmuro.net/misterios-piramides-de-egipto-s0-17-9-18/

Díaz. M., (3 de junio 2015) Paso a paso creación del cubo en GeoGebra 3D. https://www.youtube.com/watch?v=VFEZVp_FgCw

Duvi. (12 de mayo 2016) ¿Cómo graficar superficies en R3(con GeoGebra)? https://www.youtube.com/watch?v=kNA68wrW-rA

Extremiana, J., Hernández, L. y Rivas, M. (2004). Poliedros, Ciencia y Tecnología. https://www.unirioja.es/cu/luhernan/Divul/POLIEDROS/pct.html

Fernández, C. (Mayo, 2021). Smartick. Cilindro: características, ejemplos y cómo calcular área y volumen. https://www.smartick.es/blog/matematicas/geometria/cilindros/

Física Matemática Profe William (2 de agosto 2020). GeoGebra 3D/ Volumen y área de un paralelepípedo Prisma-Vista gráfica 3D. https ://www.youtube.com/watch?v=piOfqdrhL3g

Ge Math (28 de octubre 2020) ¿Cómo graficar sólidos de revolución con GeoGebra? https://www.universoformulas.com/matematicas/geometria/dodecaedro/

León, F. (2017). Aplicaciones de los sólidos y superficies de revolución. https://www.studocu.com/es-mx/document/centro-de-ensenanza-tecnica-y-superior/calculo-integral/ensayos/aplicaciones-de-los-solidos-y-superficies-de-revolucion/3150434/view

MateFácil.(2020). Vectores y puntos en tres dimensiones, con gráfica | Cálculo vectorial. https://www.youtube.com/watch?v=aevLlQfs9hY&t=730s

Matemáticas para Ti (2017). Ejemplos resueltos de áreas y volúmenes de prismas. https://matematicasparaticharito.wordpress.com/2015/05/05/ejemplos-resueltos-de-area-y-volumen-de-prismas/

Pérez, A. y Arroyo, R. (2008). Un tetraedro en mi bolsa. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0187-893X2008000300009

Pi-ensa Matematik.(2018). Cómo ubicar puntos en un sistema de tres dimensiones. https://www.youtube.com/watch?v=5wx73gzPDCg

Rony Online (16 de junio 2021) método anillo arandela/construcción con GeoGebra. https://www.youtube.com/watch?v=co3hzuRQ_uU

Ruiza, M., Fernández, T. y Tamaro, E. (2024). Biografía de Arquímedes. En biografías y Vidas. La enciclopedia biográfica en línea. Barcelona (España). https://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/arquimedes.htm

Universo de fórmulas (2019). Dodecaedro. [Video] https://www.youtube.com/watch?v=vrhGhZFknoI