Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Sistemas de Conocimiento de Ecuaciones y Desigualdades y su Didáctica

Guía didáctica

Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Sistemas de Conocimiento de Ecuaciones y Desigualdades y su Didáctica

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Pedagogía de las Ciencias Experimentales (Pedagogía de las Matemáticas y la Física)	II

Autora:

Myriam Irlanda Arteaga Marín

EDUC_1130

Universidad Técnica Particular de Loja

Sistemas de Conocimiento de Ecuaciones y Desigualdades y su Didáctica

Guía didáctica

Myriam Irlanda Arteaga Marín

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-47-004-1

Año de edición: abril, 2024

Edición: primera edición reestructurada en enero 2025 (con un cambio del 25%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información 8
1.1 Presentación de la asignatura 8
1.2 Competencias genéricas de la UTPL 8
1.3 Competencias del perfil profesional 8
1.4 Problemática que aborda la asignatura 9
2. Metodología de aprendizaje 11
3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje 12
Primer bimestre 12
Resultado de aprendizaje 1: 12
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 12
Semana 1 12
Unidad 1. Ecuaciones 13
1.1. Uso e importancia de las ecuaciones en contextos reales 13
1.2. ¿Qué es una ecuación? 15
1.3. Tipos de ecuaciones 16
Actividades de aprendizaje recomendadas 24
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 25
Semana 2 25
Unidad 1. Ecuaciones 25
1.4. Ecuaciones cuadráticas 26
Actividades de aprendizaje recomendadas 35
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 37
Semana 3 37
Unidad 1. Ecuaciones 37
1.5. Modelos matemáticos 37
Actividades de aprendizaje recomendadas 52
Autoevaluación 1 54
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 60

Semana 4 ..... **60**
Unidad 2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales 60
2.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones 60
2.2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 63
2.3. Modelado con sistemas de ecuaciones lineales 69
Actividades de aprendizaje recomendadas 70
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **72**
Semana 5 ..... **72**
Unidad 2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales 72
2.4. Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas 72
2.5. Modelado de sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas 76
Actividades de aprendizaje recomendadas 79
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **80**
Semana 6 ..... **80**
Unidad 2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales 80
2.6. Matrices en sistemas de ecuaciones 80
2.7. Método de eliminación de Gauss y Gauss–Jordan 84
2.8. Sistemas no lineales 92
Actividades de aprendizaje recomendadas 99
Autoevaluación 2 102
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **108**
Semana 7 ..... **108**
Actividades de aprendizaje recomendadas 108
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **109**
Semana 8 ..... **109**
Actividades finales del bimestre 109
Actividades de aprendizaje recomendadas 109

Segundo bimestre **111**
Resultado de aprendizaje 2: **111**
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **111**
Semana 9 .... **111**
Unidad 3. Desigualdades 112
3.1. Introducción a las desigualdades 112
3.2. Pasos para resolver una desigualdad simple 115
Actividades de aprendizaje recomendadas 117
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **118**
Semana 10 .... **118**
Unidad 3. Desigualdades 118
3.3. Desigualdades no lineales 118
Actividades de aprendizaje recomendadas 126
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **128**
Semana 11 .... **128**
Unidad 3. Desigualdades 128
3.4. Desigualdades avanzadas y modelado con desigualdades 128
Actividades de aprendizaje recomendadas 136
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **138**
Semana 12 .... **138**
Unidad 3. Desigualdades 138
3.5. Representación gráfica de desigualdades 138
Actividades de aprendizaje recomendadas 144
Autoevaluación 3 146
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **152**
Semana 13 .... **152**
Unidad 4. Sistemas de desigualdades 152
4.1. ¿A qué llamamos sistemas de desigualdades? 152
4.2. Comparación entre ecuaciones y desigualdades 153

4.3. Gráficas de desigualdades 154
Actividades de aprendizaje recomendadas 158
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 159
Semana 14 159
Unidad 4. Sistemas de desigualdades........ 159
4.4. Resolución de sistemas de desigualdades 159
4.5. Sistemas de desigualdades lineales........ 163
Actividades de aprendizaje recomendadas 171
Autoevaluación 4........ 173
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 178
Semana 15 178
Actividades finales del bimestre 178
Actividades de aprendizaje recomendadas 178
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 179
Semana 16 179
Actividades finales del bimestre 179
Actividades de aprendizaje recomendadas 179
4. Autoevaluaciones 181
5. Referencias bibliográficas 189
6. Anexos 194

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Vivencia de los valores universales del humanismo de Cristo.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Compromiso e implicación social.
- Comportamiento ético.
- Orientación a la innovación y a la investigación.
- Comunicación oral y escrita.

1.3 Competencias del perfil profesional

1. Diseñar, ejecutar, evaluar y orientar secuencias didácticas con elementos pedagógicos y curriculares orientados a los campos de la matemática y la física, mediante la fundamentación teórico–práctica de los sistemas de conocimiento que faciliten la adaptación a los cambios permanentes de la realidad actual y de un mundo globalizado.
2. Identificar, diseñar e integrar los sistemas de conocimiento de la física y la matemática relacionados con el entorno natural y social de los estudiantes, aplicando metodologías y didácticas específicas que faciliten la

contextualización de estas áreas con la realidad de un mundo globalizado y cambiante.

3. Seleccionar, adaptar y aplicar herramientas tecnológicas apropiadas para el desarrollo de metodologías activas e innovadoras que faciliten la ejecución del proceso de enseñanza aprendizaje mediante talleres práctico–experimentales permanentes, empleando contenidos contextualizados a la realidad estudiantil, nacional y mundial.
4. Seleccionar, adaptar, construir y aplicar criterios, indicadores, técnicas e instrumentos de evaluación idóneos para los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática y la física, considerando diferencias individuales, interculturales e inclusivas; integrando adecuadamente los elementos curriculares, conocimientos, estrategias y metodologías en función de la realidad natural y social del estudiante.
5. Diseñar, ejecutar y evaluar modelos pedagógicos y de organización escolar para brindar soluciones a las diferencias individuales, interculturales e inclusivas, mediante la adaptación de los elementos curriculares y contenidos con estrategias y metodologías adaptadas a la realidad de la comunidad.
6. Elaborar, ejecutar y evaluar proyectos y/o procesos de investigación que lleven a la recopilación, organización y análisis de información en el ámbito de las matemáticas y la física enfocados a la generación de nuevos conocimientos, habilidades y actitudes que aporten a la solución de problemas prácticos de su comunidad.
7. Desarrollar, ejecutar y difundir proyectos pedagógicos y didácticos con metodologías activas e innovadoras, involucrando la matemática y la física, vinculados a la solución de problemas de la realidad y que apoyen la integración de los docentes con el entorno natural y social de la comunidad y del país en general.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

Esta asignatura de fundamentos teóricos aborda la problemática de cómo enseñar y aprender efectivamente los sistemas de conocimiento vinculados a ecuaciones, desigualdades y sus aplicaciones en contextos educativos. Particularmente, se enfoca en los procesos cognitivos asociados a la comprensión conceptual y resolución de problemas matemáticos relacionados con ecuaciones y desigualdades. Asimismo, estudia las dificultades frecuentes que encuentran los estudiantes al trabajar con estos Sistemas simbólicos.

En cuanto a los sujetos y contextos implicados, considera a estudiantes de secundaria y educación media como receptores de estas competencias matemáticas aplicadas. Así también, a los docentes en formación de básica y bachillerato como diseñadores de estrategias didácticas efectivas para la enseñanza de este contenido matemático.

Respecto al aprendizaje, propone el desarrollo de habilidades de modelamiento y resolución de problemas del mundo real mediante el lenguaje de ecuaciones y desigualdades. A la vez, explora metodologías didácticas, como el Aprendizaje Basado en Problemas e indagación, para mejorar la comprensión y aplicación de estos sistemas por los estudiantes.

En síntesis, esta asignatura estudia cómo potenciar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones, desigualdades y sus aplicaciones en contextos educativos reales.

2. Metodología de aprendizaje

La metodología de aprendizaje para la asignatura “Sistemas de Conocimiento de Ecuaciones y Desigualdades y su Didáctica” se fundamenta en el enfoque del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Este método coloca al estudiante como protagonista principal de su proceso educativo, orientándolo hacia la exploración, investigación y reflexión para desarrollar soluciones a problemas planteados. En este contexto, el estudiante se convierte en el motor activo de su formación profesional, asumiendo con responsabilidad el rol central en la construcción de su conocimiento. Rodríguez Sáenz (2017), plantea que el Aprendizaje Basado en Problemas desafía al estudiantado a aprender y aprender a pensar, ya sea de manera grupal o individual, para dar posibles soluciones a problemas presentados, y a su vez esta solución sirva como iniciativa para reconocer los temas o contenidos temáticos de estudio.

La evaluación considerará tanto el procedimiento de resolución de problemas como los resultados, mediante rúbricas alineadas con objetivos de aprendizaje. Esto permitirá valorar la capacidad de aplicar los conceptos matemáticos a situaciones reales.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

Determina los principios y leyes de las igualdades para modelar y resolver problemas empleando los sistemas de ecuaciones.

Para alcanzar este resultado de aprendizaje, los estudiantes explorarán los fundamentos de las ecuaciones e igualdades a través de estudios teóricos y ejercicios prácticos. Aplicarán leyes y principios matemáticos para formular y resolver sistemas de ecuaciones, relacionándolos con situaciones reales y problemas concretos, fomentando así un aprendizaje significativo y el desarrollo de habilidades analíticas y de resolución de problemas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Bienvenidos al curso de “Sistemas de Conocimientos de Ecuaciones y Desigualdades y su Didáctica”. Esta asignatura es una ventana al razonamiento lógico y a la resolución de problemas, habilidades esenciales que llevarán consigo en su camino como maestros y formadores.

Los invito a abrazar el proceso de aprendizaje con pasión y determinación, recuerden que cada conocimiento adquirido aquí será un pilar fundamental en su formación profesional. ¡¡Empecemos!!

1.1. Uso e importancia de las ecuaciones en contextos reales

Esta semana vamos a abordar un tema que puede parecer un poco abstracto al principio, pero que está presente en muchos aspectos de nuestra vida diaria: la importancia de las ecuaciones matemáticas en contextos reales.

Imagine que las matemáticas son un lenguaje que nos permite describir, analizar y predecir fenómenos en el mundo. En este lenguaje, las ecuaciones son como frases que expresan relaciones entre diferentes cantidades. Las ecuaciones son fundamentales porque nos permiten formalizar y entender estas relaciones.

Las ecuaciones se aplican en diferentes campos, en economía, se utilizan para modelar y predecir comportamientos económicos. Por ejemplo, la ley de la demanda puede expresarse como $Q_d = a - bP$, donde Q_d es la cantidad demandada de un bien, *P* es el precio del bien, *a* y *b* y son constantes que dependen de las características específicas del mercado. Esta ecuación nos permite predecir cómo cambiará la demanda de un bien cuando cambie su precio.

A continuación, se presentan algunos ejemplos sobre el uso de las ecuaciones en diferentes contextos.

- **Solución de problemas:** pensemos que tiene un auto que consume 7 litros de gasolina cada 100 kilómetros y quiere saber cuánta gasolina necesita para un viaje de 450 kilómetros. Puede usar una ecuación simple para resolverlo: $\frac{7}{100} = \frac{x}{450}$. Resolviendo esta ecuación obtiene que $x = 31.5$, por lo tanto, necesita 31.5 litros de gasolina para el viaje.
- **Ciencia y tecnología:** un ejemplo en física es la ley de Ohm, V = IR, que se usa para calcular el Voltaje (V), la Corriente (I) y la Resistencia (R) en un circuito eléctrico. En tecnología, un algoritmo de aprendizaje automático

puede utilizar ecuaciones matemáticas para predecir, por ejemplo, si un correo electrónico es "*spam*" o no.

- **Economía y negocios:** las empresas utilizan ecuaciones matemáticas para calcular el punto de equilibrio, es decir, el punto en el que los costos totales son iguales a los ingresos totales. Esta información es crucial para entender cuánto necesita vender una empresa para empezar a obtener ganancias.
- **Ingeniería:** en ingeniería civil, las ecuaciones son usadas para calcular la carga máxima que una estructura puede soportar. Por ejemplo, la ley de Hooke $(F = kx)$ se utiliza para entender la deformación de un material bajo la influencia de una fuerza.
- **Medicina:** un médico puede usar la fórmula de Cockcroft–Gault para estimar la tasa de filtración glomerular y evaluar la función renal de un paciente. Esta ecuación utiliza información sobre la edad, el peso, el sexo y los niveles de creatinina en la sangre del paciente.
- **Toma de decisiones cotidianas:** imagine que está comparando dos planes de telefonía móvil. Uno tiene un costo fijo de $30 al mes con llamadas a $0.10 por minuto, y el otro es de $50 al mes, pero con llamadas gratuitas. Si habla 300 minutos al mes, puede usar ecuaciones para determinar cuál es más económico. En el primer caso, pagarías $\$30 + 300 * \$0.10 = \$60$, mientras que en el segundo caso pagarías solo $50. Por lo tanto, el segundo plan sería más económico para usted.

En sí, las ecuaciones matemáticas son poderosas porque nos permiten cuantificar y predecir. Nos proporcionan una manera de tomar decisiones basadas en datos y conocimientos, en lugar de conjeturas. Así que, la próxima vez que vea una ecuación, recuerde: es más que un conjunto de números y símbolos. Es una herramienta que se puede usar para entender mejor el mundo a su alrededor.

1.2. ¿Qué es una ecuación?

1.2.1. Definición y componentes

Vamos a hablar sobre algo fundamental en las matemáticas: las ecuaciones. ¿Pero qué es una ecuación? Formalmente, una ecuación es una igualdad que contiene una o más incógnitas. Suena sencillo, ¿verdad? Pero veamos un ejemplo para entenderlo mejor: $2x + 3 = 7$. Esta expresión es una ecuación porque establece una igualdad (el signo "=") e incluye una incógnita (*x*). El objetivo de una ecuación es encontrar el valor o los valores de la incógnita que hacen que ambos lados de la igualdad sean verdaderos.

Una vez que hemos visto la definición de una ecuación, ahora, profundicemos en los componentes de esta. Una ecuación consta de tres partes principales: las incógnitas, los coeficientes y los términos independientes. Consideremos la ecuación $3x - 5 = 10$. Aquí, (*x*) es la incógnita, es el número que estamos tratando de descubrir. El coeficiente es 3, y es el número que multiplica a la incógnita. Finalmente, – 5 y 10 son términos independientes y son valores fijos en la ecuación.

1.2.2. ¿Qué es?, y ¿qué no es una ecuación?

Vamos a identificar qué es y qué no es una ecuación. Recordemos, una ecuación es una igualdad con una o más incógnitas. Por ejemplo, $5x = 15$ es una ecuación, porque tiene una incógnita (*x*) y un signo de igualdad. Sin embargo, $5x + 3 > 2$ no es una ecuación, sino una desigualdad. No establece una igualdad, sino una relación de mayor o menor. Otro ejemplo, 2 + 3 tampoco es una ecuación, ya que no tiene ninguna incógnita.

1.2.3. Propiedades de las ecuaciones

Ahora veamos las propiedades de las ecuaciones. Estas propiedades nos ayudan a simplificar y resolver ecuaciones (Stewart et al., 2017):

- *Propiedad reflexiva:* una ecuación siempre es igual a sí misma. Por ejemplo, si *a* = *b* , entonces *b* = *a*.
- *Propiedad transitiva:* si *a* = *b* y *b* = *c*, entonces *a* = *c*.
- *Propiedad de igualdad*: si *a* = *b*, entonces *a* + *c* = *b* + *c*. Esto significa que podemos agregar o sustraer la misma cantidad en ambos lados de una ecuación, sin cambiar la igualdad.
- *Propiedad del producto:* si *a* = *b*, entonces *ac* = *bc*. Esta propiedad nos dice que, si multiplicamos ambos lados de una ecuación por el mismo número, los lados siguen siendo iguales.
- *Propiedad de la división:* al igual que con la multiplicación, si dividimos ambos lados de una ecuación para el mismo número (distinto de cero), los lados siguen siendo iguales. Por ejemplo, si *a* = *b*, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

1.3. Tipos de ecuaciones

Existen diferentes tipos de ecuaciones que debemos conocer. Tenemos las **ecuaciones lineales**, que son de primer grado y se pueden representar como una línea recta, por ejemplo, $3x + 2 = 8$. También existen las **ecuaciones cuadráticas**, que son de segundo grado, por ejemplo, $x^2 - 3x + 2 = 0$. En estas últimas, la incógnita está al cuadrado. Además, hay **ecuaciones exponenciales**, donde la incógnita está en el exponente, por ejemplo, $2^x = 8$. Cada tipo de ecuación tiene sus propias técnicas de resolución. Veamos a continuación la tabla 1 en la cual se muestran algunos ejemplos de ecuaciones básicas.

Tabla 1
Tipos de ecuaciones

Ecuación	Tipo de ecuación	¿Por qué?
$2x+4=4$	Lineal	El exponente de la variable es 1.
$3x^3=\frac{3}{4}x+4$	No lineal	El exponente de la variable es 3.
$5x=\frac{5}{2}x-6$	Lineal	El exponente de la variable es 1.
$\sqrt{x}-8=0$	No lineal	El exponente de la variable es $\frac{1}{2}$, ya que, la raíz se sustituye como potencia con ese valor.
$x-7=\frac{x}{5}$	Lineal	El exponente de la variable es 1.
$3x-\frac{2}{x}=8$	No lineal	Al eliminar la x en el denominador, la ecuación queda de esta manera: $3x^2-2=8x$.

Nota. Arteaga, M., 2023.

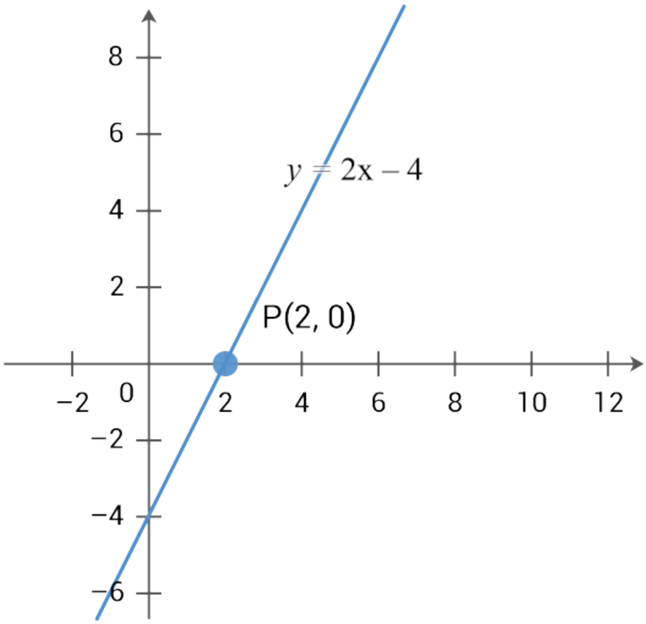
1.3.1. Resolución de ecuaciones

Resolver una ecuación significa encontrar el valor de la incógnita que hace que la ecuación sea verdadera. Vamos a considerar un ejemplo simple: $2x=8$. Para resolver, debemos deshacernos del coeficiente de la incógnita, lo que hacemos, dividiendo ambos lados de la ecuación para 2. Esto nos da $x=\frac{8}{2}$, por lo que *x* = 4. Si sustituimos *x* = 4 en la ecuación original, vemos que ambos lados son iguales. Entonces, *x* = 4 es la solución a nuestra ecuación.

De forma adicional al proceso analítico indicado anteriormente, también se puede resolver una ecuación de forma gráfica. Cuando trazamos una ecuación en un gráfico, la solución es el punto o los puntos donde la línea de la ecuación cruza el eje *x*. Por ejemplo, si trazamos la ecuación *y* = 2*x* – 4, veremos que la línea cruza el eje *x* en el punto $x=2$. Por lo tanto, la solución gráfica de esta ecuación es $x = 2$. ¿Por qué? Porque en ese punto, el valor es de cero, lo que significa que $0 = 2x - 4$, que es precisamente nuestra ecuación original (ver figura 1).

Figura 1

Ecuación lineal



Nota. Arteaga, M., 2024.

Veamos a continuación un ejemplo sobre el proceso de resolución de ecuaciones:

Ejercicio 1.1. Analicemos paso a paso la resolución de la siguiente ecuación: $4x - 2 = 2x + 3$.

$4x - 2 = 2x + 3$	Ecuación inicial.
$4x - 2x = 2 + 3$	Restamos 2x a ambos y sumamos 2 a ambos lados para aislar x.

$2x = 5$	Simplificamos.
$x = \frac{5}{2}$	Dividimos ambos lados para 2.
$x = 2.5$	Finalmente, x= 2.5 es la solución de la ecuación

Por lo tanto, la solución de la ecuación $4x - 2 = 2x + 3$ es $x = \frac{5}{2} = 2.5$.

Verifiquemos a continuación este resultado en la ecuación original.

$x = 2.5$	Solución encontrada anteriormente.
$4(2.5) - 2 = 2(2.5) + 3$	Sustituimos x=25 en la ecuación original.
$10 - 2 = 5 + 3$	Simplificamos cada lado.
$8 = 8$	Ambos lados son iguales, por lo que la solución es correcta.

1.3.2. Planteamiento y solución de problemas

A continuación, se presentan algunos ejemplos que se pueden resolver mediante este tipo de ecuaciones, es importante tener en cuenta que, la comprensión y el planteamiento del problema mediante una ecuación es lo más relevante para la solución de este.

Ejercicio 1.2. Tenemos un lote de terreno rectangular de 116 metros de perímetro. Sabemos que un lado tiene 18 metros más que el otro. Determine la ecuación para calcular el valor de cada lado.

Primero, recordemos que el Perímetro (P) de un rectángulo se calcula como el doble de la suma de sus lados (Longitud (L) y Ancho (A)): $P = 2L + 2A$.

En el problema, sabemos que el perímetro es de 116 metros. También sabemos que un lado (lo llamaremos longitud) tiene 18 metros más que el otro (que será el ancho). Entonces podemos escribir $L = A + 18$.

Podemos sustituir L en la ecuación del perímetro para obtener la ecuación y calcular el valor de cada lado.

$L = A + 18$	La longitud del terreno (L) es 18 metros más largo que eL ancho (A). Por lo tanto, $L = A + 18$.
$P = 2L + 2A$	La fórmula general para el perímetro es $P = 2L + 2A$.
$116 = 2(A + 18) + 2A$	El perímetro P es de 116 metros. Sustituimos P con 116 y L con A + 18 en la ecuación del perímetro.
$116 = 2A + 36 + 2A$	Obtenemos la ecuación simplificada.
$116 = 4A + 36$	Resolvemos para encontrar el ancho (A) del terreno.
$A = 20$	
$L = A + 18$	Sustituimos A=20 en la ecuación $L = A + 18$ para encontrar L

Solución: el lote de terreno tiene una longitud *L* de 38 metros y un ancho *A* de 20 metros.

Ejercicio 1.3. Imagine que tiene una alcancía y está ahorrando dinero. Inicia con $30 dólares. Cada semana, ahorra $15 dólares. Después de cierto número de semanas (las cuales representaremos con *x*), quiere saber cuándo tendrá $120 dólares.

La ecuación $30 + 15*x* = $120 representa las características del ejercicio.

Ahora resolvamos esta ecuación paso a paso:

$30x + 15x = 120$	Ecuación que represente el total ahorrado después X semanas. El total será $30 iniciales más $15 de ahorro por semana.
$15x = 120 - 30$	Restamos $30 de ambos lados para despejar el término con x.
$15x = 90$	
$x = \frac{90}{15}$	Dividimos ambos lados para 15 luego encontramos el número de semanas x.
$x = 6$	

Solución: después de 6 semanas, tendrá $120 dólares en la alcancía.

Ejercicio 1.4. Imagine que es un economista trabajando para una empresa que produce y vende zapatos. La empresa vende cada par de zapatos a un precio de $80 dólares y los costos fijos (alquiler, salarios, etc.) son de $20000 dólares al mes. Cada par de zapatos cuesta \$20 dólares para fabricar (costos variables). Quiere saber cuántos pares de zapatos necesita vender la empresa para cubrir sus costos (es decir, para alcanzar el punto de equilibrio).

La ecuación para el punto de equilibrio es: $80x = 20x + 20000$, donde x es la cantidad de zapatos que la empresa necesita vender.

Ahora, resolvemos la ecuación.

$80x = 20000 + 20x$	Establecemos una ecuación donde los ingresos de la venta de x pares de zapatos (80x) sean iguales a los costos fijos, más costos variables.
$60x = 20000$	Restamos 20x de ambos lados de la ecuación para despejar el término x.
$x = \frac{20000}{60}$	La empresa necesita vender aproximadamente 333.33 pares de zapatos para alcanzar el punto de equilibrio.

$$X = 333.33$$

Solución: dado que no puede vender 0.33 de un par de zapatos, la empresa necesita vender 334 pares de zapatos para cubrir sus costos. Por lo tanto, para alcanzar el punto de equilibrio, la empresa necesita vender 334 pares de zapatos en un mes.

Ejercicio 1.5. Suponga que está planeando una fiesta de cumpleaños y tiene un presupuesto de \$100 dólares. Quiere comprar pasteles y helados para sus invitados. Cada pastel cuesta \$20 dólares y cada helado cuesta \$5 dólares. Si desea comprar al menos 3 pasteles, ¿cuántos helados puede comprar?

Podemos establecer la ecuación 20*p* + 5*h* = 100, donde *p* es la cantidad de pasteles y *h* es la cantidad de helados.

Como se quiere comprar al menos 3 pasteles, podemos sustituir *p* = 3 en la ecuación.

$20p + 5h = 100$	El presupuesto total ($100) en función del precio de los pasteles (p) y helados (h).
$p \geq 3$	Desea comprar al menos 3 pasteles para tu fiesta de cumpleaños, lo que nos da esta desigualdad.
$20(3) + 5h = 100$	Si compra el mínimo de 3 pasteles, podemos sustituir este valor en la primera ecuación.
$h = \frac{100-60}{5} = \frac{40}{5}$	Resolviendo para h, encontramos que si compras 3 pasteles, puedes comprar 8 helados con el dinero restante de tu presupuesto.
$h = 8$	

Solución: si compra 3 pasteles, puede comprar 8 helados para mantenerte dentro de tu presupuesto de $100 dólares.

En resumen, esta semana hemos estudiado las ecuaciones. Hemos comprendido la importancia que estas tienen en la descripción, análisis y predicción de fenómenos en la vida cotidiana. Recuerden que las ecuaciones son igualdades que contienen una o más incógnitas y nos sirven como herramientas para formalizar y entender relaciones matemáticas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para comprender de mejor manera los conocimientos adquiridos, le invito a desarrollar las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "Resolución de ecuaciones" estudiados en la semana 1 lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas, las cuales incluyen la revisión de videos, que tienen como finalidad proporcionar una comprensión integral y diversificada de las ecuaciones y desigualdades, abordando desde conceptos básicos hasta aspectos más avanzados y específicos como las ecuaciones con fracciones.

   - Observar atentamente los siguientes videos:

     - Ecuaciones de primer grado | 3 sencillos pasos.
     - Solución de ecuaciones | resolver una ecuación | introducción .
     - Problemas de ecuaciones de primer grado con fracciones | recorrido | ClassWiz .

   Tras la revisión de las herramientas educativas antes indicadas, se sugiere aplicar activamente los conceptos aprendidos a través de una serie de ejercicios y problemas prácticos, esto permitirá evaluar su comprensión y habilidades de resolución con el fin de identificar áreas de fortaleza y aspectos que necesitan mayor práctica o clarificación para una comprensión más profunda de los temas.

2. **Actividad de modelado matemático.** Resolver el siguiente problema:

   "Una empresa de transporte cuenta con dos tipos de vehículos para entregas, camionetas y camiones. Las camionetas pueden transportar hasta 2 toneladas de carga y los camiones hasta 9 toneladas. La empresa debe entregar 11 toneladas de materiales a una construcción. ¿Cuántos vehículos de cada tipo se deben utilizar para cumplir la entrega?

Plantear el modelo de ecuación lineal correspondiente y presentar la solución que dé respuesta a la interrogante del problema.

3. **Actividad de indagación sobre el uso de ecuaciones lineales**. Busque 3 situaciones de la vida cotidiana donde se apliquen ecuaciones lineales para modelar un problema y cómo se resuelve la ecuación en cada caso.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Felicitaciones por completar las actividades propuestas. Es crucial reflexionar sobre cómo los conceptos matemáticos, como las ecuaciones lineales y el modelado matemático, no son solo teorías abstractas, sino herramientas poderosas para comprender y resolver problemas reales.

Mientras trabajan en estas actividades, lo importante no es solo llegar a la respuesta correcta, sino también el proceso de pensamiento que se utiliza para llegar allí. ¿Cómo formulan las ecuaciones a partir de una situación dada?, ¿cómo determinan qué método es el más adecuado para resolver una ecuación en un contexto particular? Esta capacidad de análisis es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 2

Unidad 1. Ecuaciones

Iniciamos la segunda semana de nuestro estudio, nos corresponde revisar lo referente a las ecuaciones cuadráticas. Este tema es crucial para entender la estructura y resolución de problemas matemáticos más complejos. A través de este estudio, reforzaremos sus habilidades analíticas y profundizaremos en su comprensión de las matemáticas. Como futuros educadores, será esencial entender y transmitir estas habilidades a sus estudiantes.

1.4. Ecuaciones cuadráticas

1.4.1. Definición de una ecuación cuadrática

Las ecuaciones cuadráticas son expresiones matemáticas que han sido utilizadas durante siglos y siguen siendo relevantes hoy en día. Una ecuación cuadrática es una ecuación polinómica de segundo grado. La forma general de una ecuación cuadrática es: $ax^2 + bx + c = 0$, donde *a*, *b*, y *c* son coeficientes y *x* es la variable. Aquí, *a* no puede ser igual a 0 (Stewart et al., 2017).

Ahora bien, ¿por qué decimos que es de segundo grado? El "grado" se refiere al exponente más alto en la ecuación, que en este caso es $2(x^2)$. De ahí que se denomine ecuación de segundo grado.

Las ecuaciones cuadráticas tienen características únicas. Por ejemplo, tienen exactamente dos soluciones, que pueden ser reales o complejas. Esto es algo que explicaremos con más profundidad a medida que avancemos en este tema.

1.4.2. Métodos de solución de una ecuación cuadrática

Hemos llegado a una parte importante del estudio de las ecuaciones cuadráticas: los métodos para resolverlas. Existen cuatro métodos para encontrar la solución de una ecuación cuadrática: factorización, fórmula cuadrática, método gráfico y completar el cuadrado. A continuación, en el siguiente módulo didáctico: Métodos para resolver una ecuación cuadrática.

[Métodos para resolver una ecuación cuadrática]

1.4.3. Casos particulares de ecuaciones cuadráticas

1.4.3.1. Ecuación cuadrática incompleta

Vamos a explorar ahora un caso particular de las ecuaciones cuadráticas, las ecuaciones cuadráticas incompletas. Una ecuación cuadrática incompleta es aquella en la que uno de los coeficientes *b* o *c* en la ecuación general $ax^2 + bx + c = 0$ es igual a cero. La ausencia de uno de estos términos simplifica la resolución de la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 4 = 0$ es una ecuación cuadrática incompleta. Aquí, $b = 0$ y $c = -4$. Para resolverla, simplemente aislamos x^2 y luego tomamos la raíz cuadrada de ambos lados. Es decir, $x^2 = 4$, por lo que $x = \pm 2$.

Como se podrá dar cuenta, este tipo de ecuaciones son más fáciles de resolver.

Ejercicio 1.6. Resolver la siguiente ecuación cuadrática $x^2 - 12x = 0$.

La ecuación cuadrática general se escribe como $ax^2 + bx + c = 0$. En nuestro caso, $a = 1$, $b = -12$, y $c = 0$.

Para resolver esta ecuación, utilizaremos el método de factorización. Este método implica transformar la ecuación cuadrática en un producto de factores, establecer cada factor igual a cero y resolver para *x*. Comencemos:

$x^2 - 12x = 0$	Esta es la ecuación cuadrática original.
$x(x - 12) = 0$	Factorizamos la ecuación, tomando x como factor común.
$x = 0$	Luego, establecemos cada factor igual a cero.

$x - 12 = 0$

$x_1 = 0$ Resolvemos cada ecuación para encontrar los valores de x.

$x_2 = 12$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - 12x = 0$ son $x_1 = 0$ y $x_2 = 12$.

1.4.3.2. Ecuación cuadrática con radical

Resolver ecuaciones que incluyen radicales puede parecer complicado, pero no lo es. Tomemos por ejemplo la ecuación $\sqrt{x} - 3 = 0$. Para resolverla, primero debemos deshacernos del radical. Para ello, podemos reordenar nuestra ecuación de esta manera: $\sqrt{x} = 3$ y elevar al cuadrado ambas partes de la ecuación: $(\sqrt{x})^2 = 3^2$ Ahora, podemos obtener la solución: *x* = 9.

Recuerde siempre verificar las soluciones al final, ya que a veces, al elevar al cuadrado, podemos introducir soluciones extras que no son válidas para la ecuación original.

Ejercicio 1.7. Resolver la ecuación cuadrática $\sqrt{x} = x - 2$. Tenga en cuenta que para resolver esta ecuación debemos eliminar el radical elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación, y luego proceder como lo haríamos con cualquier ecuación cuadrática.

$\sqrt{x} = x - 2$ Esta es la ecuación cuadrática que vamos a resolver.

$(\sqrt{x})^2 = (x - 2)^2$ Elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación para eliminar el radical.

$x = x^2 - 4x + 4$	Resuelva el cuadrado en el lado derecho.
$x^2 - 5x + 4 = 0$	Reste x de ambos lados para poner la ecuación en forma estándar.
$(x-4)(x-1) = 0$	Factorice el lado izquierdo de la ecuación.
$x_1 = 4; x_2 = 1$	Resuelva x aplicando la propiedad del producto igual a cero.

Recordemos que cuando trabajamos con radicales, debemos revisar nuestras soluciones en la ecuación original para asegurarnos de que son válidas. Para este caso, ambas soluciones son válidas, por lo tanto, las soluciones finales para la ecuación son $x_1 = 4$ y $x_2 = 1$.

1.4.3.3. Ecuaciones cuadráticas que no tienen solución

Ahora, exploraremos una situación interesante en la que una ecuación cuadrática no tiene solución. Recordemos el discriminante en la fórmula cuadrática, el término $b^2 - 4ac$. Este nos indica el tipo de soluciones que tendrá la ecuación, si el valor del discriminante es $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución.

Es importante entender que, en este caso, hablamos de no tener soluciones en los números reales. En el conjunto de los números complejos, siempre existirán soluciones.

Veamos el siguiente ejemplo.

Ejercicio 1.8. Realice el cálculo del discriminante para la siguiente ecuación cuadrática: $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 4 = 0$, luego comprobar la solución mediante un gráfico.

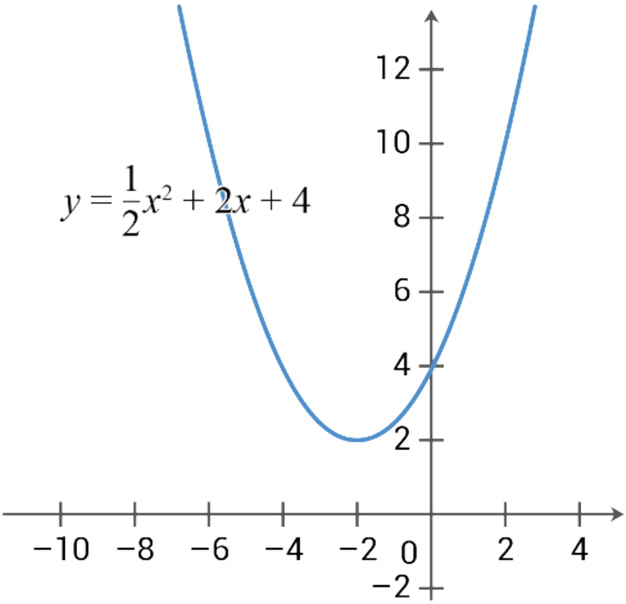
Calculemos el discriminante usando la fórmula $b^2 - 4ac$:

$D = b^2 - 4ac$	Esta es la fórmula para calcular el discriminante.
$D = 2^2 - 4 * \left(\frac{1}{2}\right) * 4$	Sustituimos a=1/2, b=2 y c =4 en la fórmula.
$D = 4 - 8$	Realizamos las operaciones indicadas.
$D = -4$	El discriminante es negativo.

El discriminante es −4 (negativo). Esto significa que la ecuación no tiene soluciones reales, es decir, la gráfica de la función no corta el eje x (figura 2).

Figura 2

Ecuación cuadrática. Ejercicio 1.12



Nota. Arteaga, M., 2024.

1.4.3.4. Ecuación cuadrática que contiene expresiones fraccionarias

Para resolver ecuaciones que contienen fracciones es necesario manejar correctamente los denominadores, esta es la clave para facilitar y simplificar este proceso. Consideremos, por ejemplo, la ecuación $\frac{x}{2} - 1 = 0$, si se reduce la misma a la forma $x - 2 = 0$, tendríamos una ecuación cuadrática mucho más manejable. (Ver tabla 2).

Tabla 2
Simplificación de expresiones con fracciones

Resultado	Descripción
$\frac{x}{2} - 1 = 0$	Ecuación inicial
$2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right) = 2 \cdot (0)$	Multiplicamos ambos lados x 2
$\frac{(2) \cdot x}{2} - (2) \cdot 1 = 2 \cdot (0)$	Multiplicamos cada elemento x 2
$x - 2 = 0$	Obtenemos la ecuación final

Nota. Arteaga, M., 2023.

El truco aquí es siempre simplificar primero la ecuación para que se pueda usar los métodos que ya se conocen para resolverla.

Ejercicio 1.9. Resolver la ecuación cuadrática $\frac{1}{x^2} - 3\frac{1}{x} + 2 = 0$.

$1\frac{1}{x^2} - 3\frac{1}{z} + 2 = 0$	Es nuestra ecuación original.
$x^2\left(\frac{1}{x^2} - 3\frac{1}{z} + 2\right) = 0$	Multiplicamos toda la ecuación por x^2
$1 - 3x + 2x^2 = 0$	Distribuimos x^2 en cada término.

$2x^2 - 3x + 1 = 0$	Reordenamos los términos de mayor a menor en potencia de x
$a = 2, b = -3, c = 1$	Identificamos los coeficientes de la ecuación cuadrática.
$D = b^2 - 4ac$	Definimos el discriminante (D) de la ecuación.
$D = (-3)^2 - 4(2)(1)$	Sustituimos los coeficientes en la fórmula del discriminante.
$D = 9 - 8 = 1$	Obtenemos el valor del discriminante.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 \pm 1}{4}$	Sustituimos a, b y el valor del discriminante en la fórmula.
$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$	Hallamos los valores de x

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación cuadrática $\frac{1}{x^2} - 3\frac{1}{x} + 2 = 0$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = \frac{1}{2}$.

1.4.3.5. Ecuación cuadrática que contiene valor absoluto

Las ecuaciones con valor absoluto pueden parecer difíciles a primera vista, pero si recuerda que el valor absoluto de un número representa su distancia al origen en la línea de los números reales, será más fácil.

Considere, por ejemplo, la ecuación $|x|-2=0$. Podemos resolverla considerando los dos posibles casos: $x-2=0$ y $-x-2=0$. Resolviendo estas dos ecuaciones cuadráticas, obtendremos las soluciones de la ecuación original.

Ejercicio 1.10. Resolver la siguiente ecuación cuadrática $|3x+5|=1$.

La ecuación tiene dos soluciones posibles: $a=b$ o $a=-b$. Esto se debe a que el valor absoluto de un número es la distancia entre ese número y cero en la recta numérica, sin tener en cuenta la dirección. Por lo tanto, debemos resolver dos ecuaciones para encontrar el valor de $x: 3x+5=1$ y $3x+5=-1$.

Veamos esto, paso a paso:

Para la primera ecuación $3x+5=1$:

$3x+5=1$	Esta es la segunda ecuación que debemos resolver.
$3x=1-5$	Restamos 5 de ambos lados de la ecuación para aislar 3x.
$3x=-4$	Realizamos la operación indicada.
$x=-\frac{4}{3}$	Dividimos ambos lados de la ecuación para 3, luego resolvemos x.

Para la segunda ecuación $3x+5=-1$:

$3x+5=-1$	Esta es la segunda ecuación que debemos resolver.
$3x=-1-5$	Restamos 5 de ambos lados de la ecuación para aislar 3x.
$3x=-6$	Realizamos la operación indicada.

$x = -\frac{6}{3} = -2$ Dividimos ambos lados de la ecuación para 3, luego resolvemos x.

En resumen, las soluciones de la ecuación son $x_1 = \frac{-4}{3}$ y $x_2 = -2$.

1.4.4. Método de Pólya para resolver problemas matemáticos

Es importante que el estudiante comprenda que la resolución de problemas no se trata simplemente de memorizar fórmulas y aplicarlas. Al contrario, es un proceso creativo y analítico que requiere de habilidades de pensamiento crítico y la capacidad de adaptarse a nuevas situaciones. El método de Pólya se compone de cuatro pasos fundamentales que se deben seguir para la resolución de problemas: Comprender el problema, desarrollar un plan, ejecutar el plan y, por último, revisar la solución obtenida (Pólya, 2015).

Al **comprender el problema**, el estudiante debe asegurarse de entender exactamente qué se le está pidiendo. ¿Qué información se proporciona?, ¿Qué se necesita encontrar o demostrar? Aquí es donde se identifican las incógnitas y se decodifican las palabras y símbolos matemáticos.

El segundo paso es **desarrollar un plan**. Se debe pensar en cómo se puede llegar desde la información dada hasta la solución deseada. ¿Existe algún teorema, fórmula o principio que pueda ser aplicado?

Una vez que se ha desarrollado un plan, se debe **ejecutar** el mismo. Aquí es donde se hacen los cálculos, se dibujan los gráficos o se implementan las operaciones necesarias para obtener la solución.

Finalmente, y a menudo se pasa por alto, es la etapa de **revisión**. Aquí es donde el estudiante verifica que su solución es coherente con lo que se pedía en el problema y que no haya cometido errores en el camino.

Este método no solo es útil para las matemáticas, sino también para muchas situaciones de la vida real que requieren resolución de problemas.

A continuación, en la siguiente infografía se explican los cuatro pasos del Método de Pólya para resolver problemas matemáticos.

[Método de Polya para resolver problemas matemáticos]

Para finalizar, lo invito a revisar el [anexo 1], para que pueda profundizar el tema de ecuaciones cuadráticas a través de varios ejercicios.

En resumen, a lo largo de la semana 2, hemos estudiado las ecuaciones cuadráticas. Empezamos por entender su definición y reconocer su forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, hemos explorado varios métodos para resolverlas: desde la factorización, pasando por la fórmula general, el método de completar el cuadrado, hasta la representación gráfica. Es fundamental que recuerden el papel del discriminante, ya que nos da pistas sobre la naturaleza de las soluciones sin resolver toda la ecuación. También nos adentramos en casos particulares de ecuaciones cuadráticas, tales como: las incompletas, las que contienen radicales y las que tienen valor absoluto.

Por último, pero no menos importante, revisamos el método de 4 pasos de Pólya, que nos brinda una estructura para abordar y resolver problemas matemáticos. Continuemos aplicando y practicando estos conocimientos en los ejercicios y actividades propuestas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para consolidar lo aprendido, lo invito a desarrollar las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "Ecuaciones cuadráticas" estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. La revisión tiene como finalidad proporcionar una comprensión clara y accesible de los conceptos básicos de las

ecuaciones cuadráticas, asegurando la adquisición de una base firme antes de avanzar hacia aspectos más complejos:

- Observar atentamente los siguientes videos:
  - Aprende ecuaciones cuadráticas desde cero | introducción.
  - Discriminante de una ecuación cuadrática.

Tras explorar estas herramientas educativas, es importante reflexionar sobre cómo han integrado este nuevo conocimiento en su comprensión global de las matemáticas. ¿Cómo se conecta lo aprendido sobre ecuaciones cuadráticas y discriminantes con sus conocimientos previos sobre ecuaciones en general? Los animo a aplicar estos conceptos a problemas de la vida real o ejercicios matemáticos adicionales. La práctica es esencial para consolidar el aprendizaje.

2. Resuelve la ecuación cuadrática $x^2-5x+6=0$ utilizando los siguientes métodos: factorización, completar el cuadrado, fórmula general y utilizar GeoGebra para verificar el método gráfico.
3. **Modelado matemático**. Un farol chino (cometa) requiere 64 m² de tela para su confección. Si la tela se corta formando 4 paneles idénticos en forma de cuadrados, ¿cuál es la longitud de cada lado de los paneles?
4. **Resolver diversos tipos de ecuaciones cuadráticas**

- Ecuación cuadrática incompleta: $x^2-9=0$.
- Ecuación cuadrática con radicales: $\sqrt{x+1}=x-1$.
- Ecuación cuadrática con exponentes fraccionarios:

$$x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}+1=0$$

- Ecuación cuadrática con valor absoluto: $|x^2-4x+3|=3$.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al resolver las ecuaciones propuestas utilizando distintos métodos, ha explorado diversas técnicas matemáticas. Es importante reconocer cómo cada método ofrece una perspectiva única y cómo algunos pueden ser más adecuados que otros en diferentes situaciones. La verificación con GeoGebra proporciona una valiosa visualización gráfica que complementa tu comprensión algebraica.

En el problema del farol chino, han aplicado conceptos de ecuaciones cuadráticas a una situación práctica de la vida real. Este tipo de ejercicios fortalece su habilidad para traducir problemas del mundo real en modelos matemáticos. Reflexione sobre cómo el entendimiento matemático puede aplicarse en otros contextos prácticos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 3

Unidad 1. Ecuaciones

Seguimos avanzando, en esta semana nos enfocaremos en el estudio de un tema de gran importancia: "Los modelos matemáticos" este concepto constituye la base de muchos aspectos de las ciencias y las matemáticas. El objetivo es entender la naturaleza de los modelos matemáticos, cómo se desarrollan y aplican. Nos enfocaremos en cómo estas herramientas abstractas nos ayudan a comprender y resolver problemas en el mundo real.

1.5. Modelos matemáticos

Un modelo matemático es una representación de situaciones del mundo real a través de las matemáticas, específicamente ecuaciones. Pensemos en la ecuación de una línea recta, $y = mx + b$. Aquí, *y* puede ser cualquier fenómeno que estemos estudiando, y *x* una variable que influye en ese fenómeno.

Los modelos matemáticos como este son importantes para entender cómo ciertos elementos interactúan y varían entre sí. Al aplicar estos modelos en situaciones reales, podemos obtener una valiosa perspectiva y realizar predicciones.

1.5.1. Tipos de modelos matemáticos

Un modelo matemático, como ya hemos dicho, es una representación de un sistema o un fenómeno del mundo real a través de ecuaciones matemáticas. Hay diferentes tipos de modelos que se adaptan a diversas situaciones y problemas:

- **Modelos lineales:** estos son probablemente los modelos matemáticos más simples y ampliamente utilizados. Se basan en una relación directa entre las variables. Un ejemplo común es la ecuación de una línea recta: $y = mx + b$. En este modelo, cualquier cambio en *x* produce un cambio proporcional en *y*. Estos modelos son útiles cuando las variables están relacionadas de manera constante y predecible.
- **Modelos no lineales:** a diferencia de los modelos lineales, los modelos no lineales representan relaciones que no son directamente proporcionales. Un ejemplo es la ecuación cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$. En este caso, *y* no cambia de manera lineal con *x*, sino que depende del cuadrado de x. Este tipo de modelos son útiles cuando las relaciones entre las variables son más complejas y no necesariamente constantes.

Además de estos, existen otros tipos de modelos matemáticos más avanzados que se utilizan en campos específicos de estudio. Sin embargo, en nuestra unidad, nos centraremos en los modelos lineales y no lineales y cómo se pueden usar para representar y resolver problemas del mundo real a través de ecuaciones.

1.5.2. Creación de un modelo matemático

De acuerdo con lo que sustenta Stewart (2017), se plantean los siguientes pasos para crear modelos matemáticos:

1. **Identificar la variable:** este es el primer paso para comenzar a formar un modelo matemático. Se debe aprender a identificar cuál es la variable desconocida que se necesita encontrar. Esta variable puede representar cualquier cantidad que se desconoce en el problema, como la cantidad de objetos, el tiempo que transcurre, la distancia recorrida; en un problema de negocios, por ejemplo, puedes tener variables como costos, precios, demanda, etc.
2. **Transformar palabras en expresiones algebraicas:** los problemas del mundo real suelen presentarse en forma de palabras, no de ecuaciones. Por tanto, necesitamos aprender cómo convertir estas palabras en expresiones algebraicas. Por ejemplo, la frase "dos veces un número" puede ser representada como "$2x$" en álgebra.
3. **Formular el modelo:** aquí es donde realmente se comienza a construir el modelo matemático, generalmente en forma de una ecuación o sistema de ecuaciones que describe las relaciones entre las variables, es decir, una vez que las variables y las expresiones algebraicas han sido identificadas, se las puede combinar para formar una ecuación. Este modelo representará la relación entre las distintas cantidades en el problema.
4. **Resolver la ecuación y verificar su respuesta:** finalmente, se debe resolver la ecuación para encontrar la variable desconocida. Esto puede implicar verificar la solución en el modelo y verificar que los resultados sean razonables y coherentes con la información que se tiene.

1.5.3. Ejercicios sobre creación de modelos matemáticos

A la presente fase la vamos a denominar: "Aplicación de un modelo matemático", usaremos las ecuaciones para resolver problemas reales y llevaremos a la práctica los cuatro pasos para la creación de modelos indicados anteriormente.

Ejercicio 1.11. Una biblioteca escolar desea adquirir nuevos libros para su sección de literatura juvenil. Cada libro tiene un costo de $15. La biblioteca cuenta con un presupuesto de $3000. Además, por cada 10 libros que compre, la editorial ofrece un descuento de $5 en el total de la compra.

¿Cuántos libros puede adquirir la biblioteca con su presupuesto?

Paso 1. Identificar la variable

C_i, P, D, L	Definimos Cl como el costo de cada libro (15), P el presupuesto (3000), D como cl descuento por cada IO librcx (5) y L como cl número de libros que la biblioteca puede comprar.

Paso 2. Transformar palabras en expresiones algebraicas

$C_i = 15$	La variable Cl representa cl costo de cada libro, que en este caso es 15.
$P = 3000$	La variable p representa el presupuesto de la biblioteca, que en este caso es de 3000.
$D = 5/10$	La variable D representa el descuento que se aplica por cada 10 libros, que en de 5. Como el descuento se aplica cada 10 libros, lo dividimos para 10, obteniendo 0.5.
$L = P/(C_i—D)$	Esta ecuación representa el número de libros que la biblioteca puede comprar con el presupuesto disponible, tomando en cuenta el descuento que se aplica por cada 10 libros.

Paso 3. Formulación del modelo

$L = 3000/(15—0.5)$	Sustituimos las variables en la ecuación con los valores del problema.

Paso 4. Resolución de la ecuación y verificación de la respuesta.

$L = 3000/14.5$	Realizamos las operaciones de resta en la ecuación.
$L \approx 207$	Resolviendo la ecuación, encontramos que la biblioteca puede comprar aproximadamente 207 libros. Sin embargo, dado que no podemos tener un número fraccionario de libros, debemos redondear este número al número entero más cercano.

Solución: con el presupuesto actual y tomando en cuenta el descuento, la biblioteca puede comprar 207 libros para su sección de literatura juvenil. Recuerde que este modelo es una simplificación y en la práctica los descuentos pueden aplicarse de manera diferente dependiendo de las políticas de la editorial.

A continuación, vamos a realizar algunos ejercicios:

Ejercicio 1.12. Defina el contenido de las siguientes oraciones (lenguaje natural), mediante expresiones algebraicas.

Tabla 3
Ejemplo de expresiones algebraicas

Oración (Lenguaje Natural)	Expresión Algebraica
La suma de tres enteros pares consecutivos; n = primer entero de los tres	$n + (n + 2) + (n + 4)$
La suma de los cuadrados de dos enteros consecutivos; n = primer entero de los dos	$n^2 + (n + 1)^2$

Oración (Lenguaje Natural)	Expresión Algebraica
El interés obtenido sobre una inversión luego de un año al 2.5 % de interés simple por año; *x* = número de dólares invertidos.	$0.025x$
El área (en *pies*^{2}) de un rectángulo que mide cuatro veces más de largo que de ancho; a=ancho del rectángulo (en pies).	$4a \times a = 4a^2\ pies^2$

Nota. Arteaga, M., 2023.

En los siguientes **ejercicios** trabajaremos en la solución de problemas aplicando los pasos estudiados en esta unidad.

Ejercicio 1.13. Un acertijo. Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, le plantea el siguiente acertijo a un columnista de chismes. “Hace siete años yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad”. ¿Cuál es la edad del actor?

Paso 1. Identificar la variable

$a = ?, h = ?$ La edad actual del actor (a) y la edad actual de la hija (h) son las variables desconocidas que debemos encontrar.

Paso 2. Transformar palabras en expresiones algebraicas

$a — 7 = 11 * (h — 7)$ A partir del texto, obtenemos la primera ecuación que indica que hace 7 años, el actor tenía 11 veces la edad que tenía su hija en ese entonces.

$a = 4 * h$ La segunda ecuación indica que la edad actual del actor es cuatro veces la edad actual de su hija.

Paso 3. Formulación del modelo

$a—7 = 11 * (h—7)$	Estas dos ecuaciones representan nuestro modelo matemático
$a = 4 \cdot h$	

Paso 4. Resolución de la ecuación y verificación de la respuesta.

$a - 7 = 11h - 77$	Primero la primera ecuación.
$a = 4h$	Dejamos la segunda ecuación tal como está.
$4h - 7 = 11h - 77$	Sustituimos a por 4h en la primera ecuación.
$-7 + 77 = 11h - 4h$	Reorganizamos la ecuación.
$70 = 7h$	Simplificamos la ecuación.
$h = 10$	Despejamos h. La hija tiene 10 años.
$a = 4 * 10$	Sustituimos h en la segunda ecuación para encontrar a.
$a = 40$	El actor tiene 40 años.

Para verificar las soluciones, podemos sustituir las edades encontradas en las ecuaciones originales para asegurarnos de que se cumplan.

Las ecuaciones originales son:

- Hace 7 años, el actor tenía 11 veces la edad de su hija: $(a-7) = 11 \cdot (h-7)$
- Actualmente, el actor tiene 4 veces la edad de su hija: $a = 4 \cdot h$.

Hemos encontrado que la hija tiene 10 años (*h* = 10) y el actor tiene 40 años (*a* = 40). Ahora verificamos estas edades en las ecuaciones.

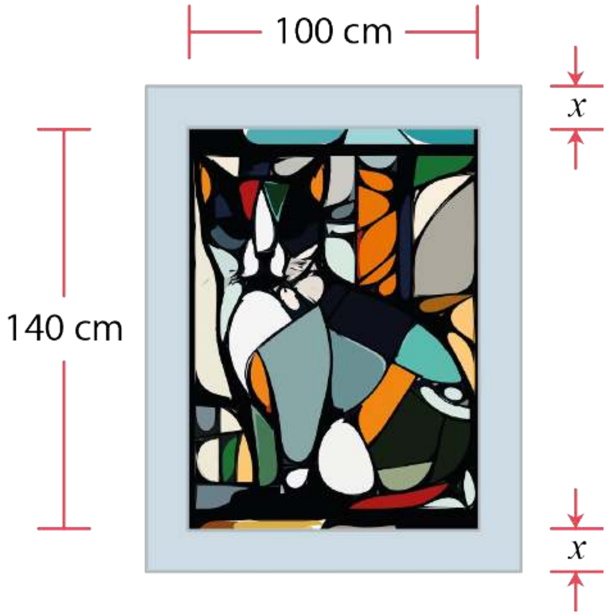
- Hace 7 años, el actor tenía 33 años y su hija tenía 3 años. Y 33 es 11 veces 3, por lo tanto, esta ecuación se cumple.
- Actualmente, el actor tiene 4 veces la edad de su hija, es decir, 40 es 4 veces 10, entonces esta ecuación también se cumple.

Finalmente, hemos verificado correctamente nuestras soluciones. Las edades que encontramos son consistentes con las condiciones del problema original, por lo que podemos estar seguros de que son correctas.

Ejercicio 1.14. Dimensiones de un cartel. Un cartel rectangular tiene una superficie impresa de 100 por 140 cm y una franja sin dibujo de ancho uniforme en los bordes. El perímetro del cartel es 1.5 veces el perímetro de la superficie impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja sin dibujo?

Figura 3

Dimensiones de un cartel. Ejercicio 1.23



Nota. Tomado de *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (7th ed.)* (p. 77), por Stewart et al., 2017, Cengage Learning.

Paso 1. Identificar la variable

$L_I = 100$ El largo de la superficie impresa es L_I=100 cm.

$A_I = 140$ El ancho de la superficie impresa es A_I=140 cm.

$x = ?$ Estamos buscando el ancho de la franja x.

Paso 2. Transformar palabras en expresiones algebraicas

$P_I = 2 \times (L_I + A_I)$ El perímetro de la superficie impresa P_I es la suma del largo y el ancho, multiplicado por 2.

$L_T = L_I + 2x$	El largo total L_T del cartel es el largo de la superficie impresa, más dos veces el ancho de la franja.
$A_T=A_I+2x$	El ancho total A_T del cartel, el ancho de la superficie impresa más dos veces, el ancho de la franja.
$P_T=2\times(L_T+A_T)$	El perímetro total P_T del cartel es la suma del largo y el ancho totales, multiplicado por 2.
$P_T=1.5\times P_I$	El perímetro del cartel es 1.5 veces el perímetro de la superficie impresa.

Paso 3. Formulación del modelo

$2\times(L_I+2x+A_I+2x)$ $=1.5\times2\times(L_I+A_I)$	Esta ecuación representa nuestro modelo matemático:

Paso 4. Resolución de la ecuación y verificación de la respuesta

$2\times(L_I+4x+A_I)=3\times(L_I+A_I)$ $2L_I+8x+2A_I=3L_I+3A_I$	Agrupamos términos similares.
$8x=L_I+A_I$	Reorganizamos la ecuación para despejar x.
$8x=240$	Sustituimos los valores de LI y AI en la ecuación.

$x=30$	Dividimos ambos lados para 8 para encontrar x.

Solución: el ancho de la franja sin dibujo es de 30 cm. Para verificar nuestra respuesta, podemos sustituir *x* en nuestras ecuaciones originales y comprobar que se cumplan, lo cual demostrará que nuestra respuesta es correcta.

Ejercicio 1.15. Inversiones Phyllis invirtió 12 000 dólares, una parte de los cuales gana una tasa de interés simple del 4.5 % al año y el resto gana una tasa del 4 % al año. Después de 1 año, el interés total ganado sobre estas inversiones fue de 525 dólares. ¿Cuánto dinero invirtió en cada una de las tasas?

Paso 1. Identificar la variable

$I_T=1200$	La inversión total conocida (IT = 12000 dólares)
$I_{4.5}=?$	Las inversiones al 4.5 ($I_{4.5}$) y al 4 (I_4) son las variables desconocidas que estamos buscando.
$I_4=?$	

Paso 2. Transformar palabras en expresiones algebraicas

$I_T=I_{4.5}+I_4$	La inversión total es la suma de las inversiones $I_{4.5}$, I_4.
$0.045 \cdot I_{4.5}+0.04 \cdot I_4=525$	El interés total ganado es la suma de los intereses de las dos inversiones. El interés ganado en cada inversión es la tasa de interés por la cantidad de la inversión.

Paso 3. Formulación del modelo

$I_{4.5}+I_4=1200$	Estas dos ecuaciones representan nuestro modelo matemático.

Paso 4. Resolución de la ecuación y verificación de la respuesta

$I_4=12000-I_{4.5}$	Despejamos I_4 de la primera ecuación.
$0.045\cdot I_{4.5}+0.04\cdot(12000-I_{4.5})=525$	Sustituimos I_4 por 12000 - $I_{4.5}$ en la segunda ecuación
$0.045I_{4.5}+0.04I_{4.5}=525-480$	Reorganizamos la ecuación
$0.005I_{4.5}=45$	Simplificamos la ecuación.
$I_{4.5}=\frac{45}{0.005}=9000$	Resolvemos para $I_{4.5}$.
$I_4=12000-9000$	Sustituimos $I_{4.5}$ en la primera ecuación para encontrar I_4.
$I_4=3000$	

Solución: Phyllis invirtió 9000 dólares al 4.5 % y 3000 dólares al 4 %. Para verificar nuestra respuesta, podemos sustituir $I_{4.5\%}$ y $I_{4\%}$ en nuestras ecuaciones originales y comprobar que se cumplan, esto permite demostrar que las soluciones son válidas.

Ejercicio 1.16. Educación. En una clase de 25 alumnos, la calificación promedio es 84. Seis estudiantes de la clase obtuvieron una calificación máxima de 100, y tres estudiantes recibieron una calificación de 60. ¿Cuál es el promedio de calificaciones del resto de los estudiantes?

Paso 1. Identificar la variable

$N_{total} = 25$	El número total de estudiantes es conocido ($N_{total} = 25$).
$P_{total} = 84$	La calificación promedio de la clase es conocida ($P_{total} = 84$).
$N_{100} = 6$	La cantidad de estudiantes que obtuvieron 100 y 60 conocidas es ($N_{100} = 6; N_{60} = 3$).
$N_{60} = 3$	
$P_{resto} =?$	Estamos buscando el promedio.

Paso 2. palabras en expresiones algebraicas

$N_{resto} = N_{total} - \cap_{100} - \cap_{60}$	El número de estudiantes restantes es la diferencia entre el total y los que obtuvieron 100 y 60.
$P_{\text{total}} = \frac{N100 \cdot 100 + N60 \cdot 60 + Nresto \cdot Presto}{Ntotal}$	El promedio de la clase es la suma de todas las calificaciones dividida por el número total de estudiantes.

Paso 3. Formulación del modelo

N_{resto}=25−6−3.

Estas dos ecuaciones representan nuestro modelo matemático.

$$84 = \frac{6 \cdot 100 + 3 \cdot 60 + Nresto \cdot Presto}{25}$$

Paso 4. Resolución de la ecuación y verificación de la respuesta

$$N_{resto} = 16$$

Sustituimos los valores en la primera ecuación para obtener el número de estudiantes restantes.

$$2100 = 600 + 180 + 16 \cdot P_{resto}$$

Multiplicamos ambos lados de la segunda ecuación por 25 y sustituimos los valores.

$$1320 = 160 \cdot P_{resto}$$

Reorganizamos la ecuación para despejar P_{resto}

$$P_{resto} = \frac{1320}{16} = 82.5$$

Despejamos y resolvemos P_{resto}

Solución: el promedio de calificaciones del resto de los estudiantes es 82.5. Para verificar nuestra respuesta, podemos sustituir P_{resto} y N_{resto} en nuestras ecuaciones originales y comprobar que se cumplan.

Ejercicio 1.17. Salarios. Una ejecutiva de una compañía de ingeniería gana un salario mensual más un bono de Navidad de 8500 dólares. Si ella gana un total de 97300 dólares por año, ¿cuál es su salario mensual?

Paso 1. Identificar la variable

$S_{total} = 97300$	El salario total anual es conocido ($S_{total} = 97300$).
$B_{navidad} = 8500$	El bono de Navidad es conocido ($B_{navidad} = 8500$).
$S_{mensual} =?$	Estamos buscando el salario mensual ($S_{mensual} =?$)

Paso 2. Transformar palabras en expresiones algebraicas

$S_{anual} = 12 \cdot S_{mensual}$	El salario anual sin incluir el bono es el salario mensual multiplicado por 12.
$S_{total} = S_{anual} + B_{navida}$	El salario total anual, la suma del salario anual y el bono de Navidad.

Paso 3. Formulación del modelo

$97300 = 12 \cdot S_{mensual} + 8500$	Esta ecuación representa nuestro modelo matemático.

Paso 4. Resolución de la ecuación y verificación de la respuesta

$88700 = 12 \cdot S_{mensual}$	Reorganizamos la ecuación para despejar $S_{mensual}$
$S_{mensual} = 8870012 = 7391.67$	Despejamos y resolvemos $S_{mensual}$

Solución: el salario mensual de la ejecutiva es de 7391.67 dólares. Para verificar nuestra respuesta, podemos sustituir $S_{mensual}$ $ en nuestra ecuación original y comprobar que la respuesta es correcta.

Hemos concluido la semana 3, donde estudiamos el concepto de modelo matemático, un pilar fundamental en el estudio de las ecuaciones. Es esencial recordar que un modelo matemático es una representación de situaciones reales a través de ecuaciones. Aprendimos sobre los tipos de modelos, principalmente los lineales y no lineales, y cómo se relacionan con fenómenos del mundo real. Además, hemos seguido una guía estructurada para la creación de estos modelos: Identificación de variables, transformación de palabras en expresiones algebraicas, formulación del modelo y su resolución. Espero que hayan practicado y comprendido los ejercicios de creación de modelos matemáticos, estos son fundamentales para aplicar lo aprendido. ¡Excelente trabajo y sigamos adelante!

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con el propósito de comprender de mejor manera los conocimientos adquiridos, lo invito a resolver las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "Modelos matemáticos y guía para crear modelos matemáticos" estudiados esta semana lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas, las cuales tienen como objetivo principal fortalecer la comprensión y habilidad en el manejo de ecuaciones lineales a través de ejemplos prácticos y explicaciones paso a paso, podrán aprenden a identificar, plantear y resolver problemas de la vida real y matemáticos utilizando ecuaciones

   - Revisar atentamente los siguientes videos:

     - Plantear y resolver problemas de ecuaciones lineales.
     - Solución de problemas con ecuaciones de primer grado | ejemplo 1 .

   Felicitaciones por explorar estas herramientas educativas. Es esencial que se reflexione sobre cómo los conceptos aprendidos se aplican en la resolución de problemas reales. ¿Puede identificar situaciones en tu vida diaria donde las ecuaciones lineales serían útiles?, ¿al estudiar estas herramientas educativas, considera cómo ha mejorado en la formulación y resolución de ecuaciones lineales?, ¿encuentra más fácil ahora identificar las variables y plantear una ecuación a partir de un problema dado?

2. Responda la siguiente pregunta: ¿cómo puede el modelado matemático ayudar a comprender y resolver problemas de la vida cotidiana?
3. Todo modelo matemático se basa en supuestos. ¿Cuáles son las limitaciones de estos supuestos en la modelación de problemas reales?, ¿cómo podrían estos supuestos afectar las conclusiones o soluciones derivadas del modelo?
4. **Problema: planificación de un evento**

   Se está organizando un evento y se necesita alquilar sillas. La empresa de alquiler cobra una tarifa fija de 50 dólares por el transporte y 2 dólares por cada silla. Si su presupuesto total para el alquiler de sillas es de 150 dólares, ¿cuántas sillas puede alquilar?

5. **Problema: trayectoria de un balón**

   Un niño lanza un balón al aire. La Altura h en metros del balón en función del Tiempo t en segundos se puede modelar con la ecuación $h = -5t^2 + 20t + 1$. ¿En qué momento alcanzará el balón su altura máxima y cuál será esa altura?

   Modelo matemático: usar la ecuación cuadrática dada.

   Objetivo: encontrar el vértice de la parábola, que representa el tiempo y la altura máximos.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al abordar la pregunta sobre cómo el modelado matemático ayuda a resolver problemas cotidianos, se evidencia la relevancia práctica de las matemáticas. Es importante reconocer que los modelos matemáticos son herramientas poderosas para simplificar y analizar situaciones complejas, permitiéndonos tomar decisiones informadas y racionales. Al reflexionar sobre las limitaciones y supuestos en el modelado matemático, han desarrollado una comprensión crítica de que todo modelo es una simplificación de la realidad. Esta comprensión es clave para aplicar los modelos matemáticos de manera efectiva y consciente, siendo capaces de identificar cuándo un modelo puede o no ser aplicable.

6. Realice la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 1

Para resolver la siguiente evaluación se solicita leer comprensivamente, razonar, resolver y seleccionar la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el coeficiente de "x" en "$4x - 2 = 10$"?

   a. 2.
   b. −2.
   c. 4.
   d. 10.

2. Si "$2x = 10$", ¿cuál es el valor de "x"?

   a. 2.
   b. 5.
   c. 10.
   d. 20.

3. ¿Cuál es un ejemplo de ecuación cuadrática?

a. $x + 3 = 7.$

b. $x^2 - 3x + 2 = 0.$

c. $2^x = 8.$

d. $3x - 7 = 0.$

4. Si “$y = 3x - 5$”, ¿cuál es el valor de “y” cuando “$x = 2$”?

a. 1.
b. 0.
c. 6.
d. −1.

5. Si “$4x + 2 = 14$”, ¿cuál es el valor de “x”?

a. 2.
b. 3.
c. 4.
d. 5.

6. ¿Qué indica un discriminante negativo?

a. No tiene solución.
b. Dos soluciones complejas.
c. Dos soluciones reales.
d. Una solución real.

7. Si $b^2 - 4ac = 0$, ¿cuántas soluciones tiene la ecuación?

a. Dos soluciones diferentes.
b. Ninguna solución.
c. Una solución repetida.
d. Infinitas soluciones.

8. Dada la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$, ¿cuál es su solución?

a. $x = 3$.

b. $x = -3$.

c. $x = 6$.

d. $x = 0$.

9. Resuelva la ecuación $x^2 - 4x = 0$.

a. $x = 0, x = 4$.

b. $x = 2, x = -2$.

c. $x = 4, x = -4$.

d. $x = 0, x = 2$.

10. Para la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$, ¿cuál es el discriminante?

a. 16.
b. 13.
c. 12.
d. 8.

11. ¿Qué es un modelo matemático?

a. Representación de situaciones reales usando palabras.
b. Relación entre dos o más variables.
c. Representación de situaciones reales usando ecuaciones.
d. Una ecuación compleja.

12. La ecuación "$y = mx + b$" corresponde a un modelo...

a. Lineal.
b. No lineal.
c. Cuadrático.
d. Exponencial.

13. Si un problema dice "tres veces un número", ¿cómo se representa algebraicamente?

a. $x/3$.
b. $3x$
c. $x + 3$.
d. $x - 3$.

14. Un negocio vende camisetas a $20 cada una. Si “x” es el número de camisetas, ¿cuál es el modelo matemático para los ingresos?

    a. $y = 20x$.

    b. $y = x/20$.

    c. $y = x + 20$.

    d. $y = 20 – x$.

15. Una empresa tiene un costo fijo de $500 y un costo variable de $10 por producto. Si “p” es el número de productos, ¿cuál es el modelo del costo total?

    a. $C = 500 + 10p$.

    b. $C = 10p$.

    c. $C = 500p$.

    d. $C = 500 – 10p$.

16. Ordene los pasos para resolver una ecuación lineal simple.

    a. Despeja la incógnita.
    b. Evalúa el resultado.
    c. Identifica la ecuación.
    d. Aplica operaciones inversas.
    e. Simplifica la ecuación.

17. Ordene los pasos para resolver un problema utilizando una ecuación cuadrática.

   a. Plantea la ecuación cuadrática a partir del problema.
   b. Determina las soluciones de la ecuación.
   c. Interpreta las soluciones en el contexto del problema.
   d. Identifica los datos y las incógnitas del problema.
   e. Verifica la validez de las soluciones.

18. Ordene los tipos de ecuaciones según su complejidad creciente.

   a. Ecuaciones lineales.
   b. Ecuaciones cuadráticas.
   c. Ecuaciones exponenciales.
   d. Ecuaciones con radicales.
   e. Ecuaciones con valor absoluto.

19. Ordene los pasos para aplicar la fórmula cuadrática en una ecuación cuadrática.

   a. Calcula el discriminante.
   b. Sustituye a, b, y c en la fórmula.
   c. Identifica los valores de a, b, y c.
   d. Evalúa las raíces de la ecuación.
   e. Aplica la fórmula cuadrática.

20. Ordene los elementos de una ecuación cuadrática.

   a. Término independiente.
   b. Coeficiente del término cuadrático.
   c. Variable.
   d. Coeficiente del término lineal.
   e. Signo igual.

Ir al solucionario

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 4

Esta semana nos dedicamos al estudio de los "Sistemas de ecuaciones". Un tema fundamental que va más allá de simples números y variables, sirven de base para llevar a cabo numerosos procesos y decisiones en distintas disciplinas. Como futuros profesionales en las Ciencias de la Educación, es de vital importancia que comprendan no solo cómo resolver estos sistemas, sino también cómo enseñarlos y contextualizar su importancia en la vida cotidiana. Juntos, exploraremos sus fundamentos, aplicaciones y su relevancia en el mundo educativo.

Unidad 2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

2.1. Introducción a los sistemas de ecuaciones

2.1.1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

En nuestra vida cotidiana, a menudo nos encontramos con problemas que involucran más de una incógnita. ¿Cómo podríamos abordar esos desafíos? Los sistemas de ecuaciones nos ofrecen una herramienta poderosa para hacerlo.

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. La idea es encontrar los valores de esas incógnitas que satisfagan todas las ecuaciones simultáneamente.

Considere, por ejemplo, el sistema:

$$\left\{\frac{x+y=7}{x-2y=1}\right.$$

La solución para este sistema será aquel par de valores (*x*,*y*) que hagan que ambas ecuaciones sean verdaderas al mismo tiempo, veamos el siguiente **ejemplo**:

$$\left\{\frac{5+2=7}{5-2(2)=1}\right.$$

Para: $x = 5\,;\, y = 2$

Resolviendo sistemas como este, pueden enfrentarse a situaciones del mundo real en las que, por ejemplo, dos productos tienen diferentes costos y, al comprar varios de cada uno, se desea saber cuánto se gastó en total.

2.1.2. Diferencia entre sistemas lineales y no lineales

Recordemos que anteriormente hemos visto qué es un sistema de ecuaciones. Ahora, nos vamos a centrar en cómo distinguir entre sistemas lineales y no lineales, lo que nos ayudará a aplicar las técnicas adecuadas para resolverlos.

Un **sistema lineal** se compone exclusivamente de ecuaciones lineales, las cuales no tienen potencias (superiores al 1) ni funciones de las incógnitas. Un ejemplo clásico es:

$$\{x + y = 5; \quad 2x - y = 3$$

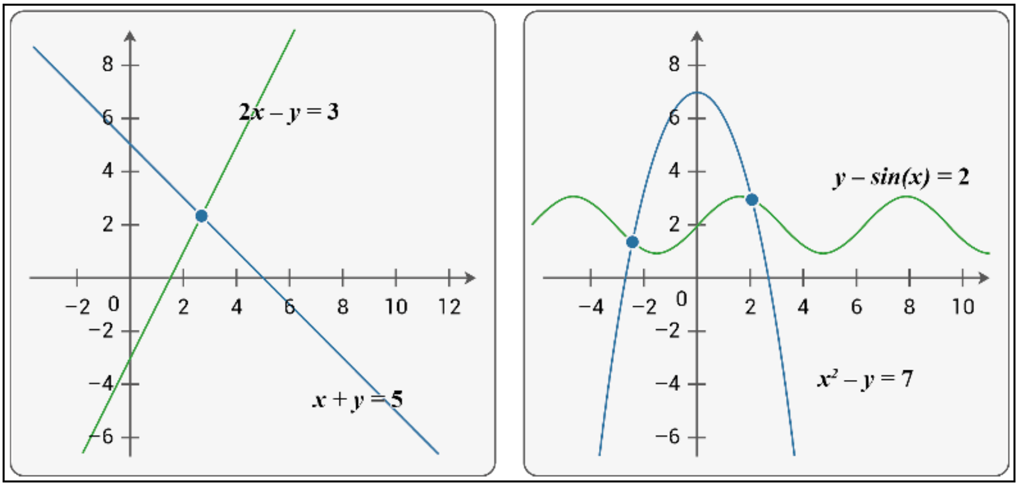
Por otro lado, un **sistema no lineal** tiene al menos una ecuación que no es lineal, es decir, puede presentar potencias mayores, raíces, funciones trigonométricas, entre otros. Considere el siguiente ejemplo:

$$\{x^2 + y = 7y - sen\,(x) = 2$$

Mientras que los sistemas lineales tienen técnicas de resolución más estandarizadas, los no lineales pueden requerir métodos más avanzados. Al abordar problemas reales, es crucial reconocer qué tipo de sistema enfrentamos para elegir el enfoque correcto.

Figura 4

Sistemas de ecuaciones. (a) lineal, (b) no lineal



Nota. Arteaga, M., 2024.

2.1.3. Número de soluciones de un sistema de ecuaciones

Luego de comprender la diferencia entre sistemas lineales y no lineales, es esencial determinar cuántas soluciones tiene un sistema. Esta información es vital para interpretar el contexto y las posibles respuestas a un problema (Stewart et al., 2017).

Para **sistemas lineales** de dos ecuaciones con dos incógnitas, podemos visualizar la situación como dos rectas en un plano, en este escenario se pueden presentar tres posibles casos:

1. Las rectas se cruzan en un punto: hay una única solución.

$$\{4x + 3y = 18 \quad 5x - 6y = 3$$

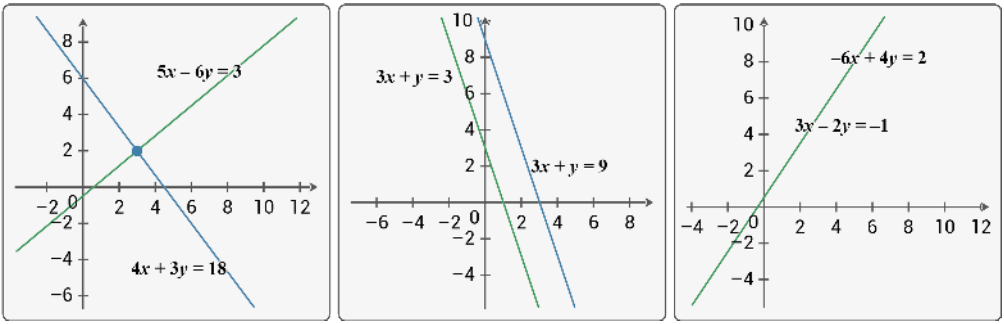
2. Las rectas son paralelas: no hay solución, pues nunca se intersecan.

$$\{3x + y = 9 \quad 3x + y = 3$$

3. Las rectas coinciden: hay infinitas soluciones, ya que, cualquier punto de una recta es también punto de la otra. $\{-6x + 4y = 2 \ \ 3x - 2y = -1$

Figura 5

Sistemas de ecuaciones lineales. (a) una solución, (b) no tiene solución, (c) soluciones infinitas



Nota. Arteaga, M., 2024.

Para sistemas **no lineales**, la determinación es más compleja y dependerá de las características particulares de las ecuaciones involucradas.

Es esencial saber cuántas soluciones tiene un sistema, ya que nos da una idea del comportamiento y naturaleza de las ecuaciones involucradas. En la práctica, esto nos ayudará a seleccionar la estrategia adecuada para resolver e interpretar el sistema.

2.2. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Luego de haber estudiado los fundamentos de los sistemas de ecuaciones, vamos a revisar los métodos de solución, que básicamente se sintetizan en tres: gráfico, sustitución y eliminación.

2.2.1. Método gráfico

Alguna vez, al mirar la intersección de dos líneas en un plano, ¿se ha preguntado qué representan esos puntos de encuentro?, en esta lección, exploraremos precisamente esto.

Cuando hablamos de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, básicamente nos referimos a un conjunto de dos ecuaciones que involucran dos variables. Estas ecuaciones se pueden representar gráficamente como líneas en un plano cartesiano.

El *método gráfico* consiste en dibujar estas ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas. Si las líneas se cruzan, ese punto de intersección es la solución del sistema. Es así que, si tenemos un sistema:

$$\{y = ax + b \quad y = cx + d$$

Donde *a*, *b*, *c* y *d* son constantes, la solución es el punto (*x*,*y*) donde las dos rectas se cruzan.

Es importante notar que no todos los sistemas tienen una única solución. Si las líneas **son paralelas**, el sistema no tiene solución. Si las **líneas coinciden**, hay infinitas soluciones.

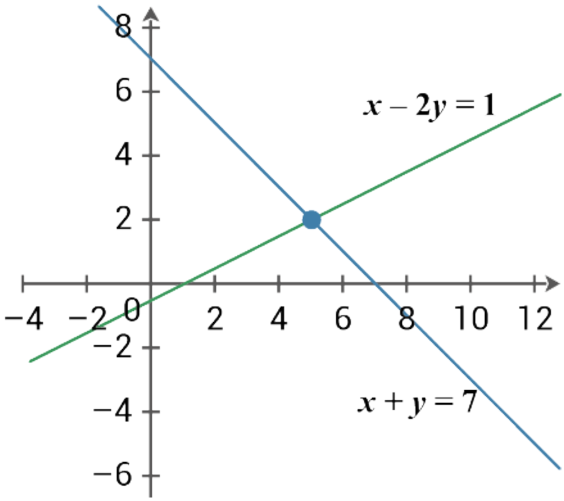
Vamos a revisar lo visto anteriormente con un **ejercicio**, dibuje las ecuaciones y encuentre ese punto especial de intersección. Recuerde verificar sus soluciones al sustituir los valores en las ecuaciones originales.

Ejercicio 2.1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método gráfico.

$$\{x - 2y = 1 \quad x + y = 7$$

Figura 6

Método gráfico para solución de sistemas de ecuaciones



Nota. Arteaga, M., 2024.

Como podemos ver, las líneas se cortan aproximadamente en las coordenadas *x* = 5 y *y* = 2. Las cuales representan la solución del sistema.

2.2.2. Método de sustitución

Sin duda de que, al graficar las ecuaciones, se habrá preguntado: ¿existe una forma más "directa"de encontrar la solución sin tener que depender del dibujo? ¡La respuesta es sí, y eso es lo que aprenderemos ahora con el método de sustitución!

Supongamos que tenemos un sistema como el siguiente:

$$\{y = ax + b \quad y = cx + d$$

Para aplicar el método de sustitución, despejamos una de las incógnitas, digamos x, de una ecuación y sustituimos ese valor en la otra ecuación. Así, eliminamos una variable y resolvemos una ecuación con una sola incógnita.

Por **ejemplo**, si despejamos x en términos de *y* de la primera ecuación y lo sustituimos en la segunda, nos quedará una ecuación con solo *y*. Una vez resuelto, ese valor de y se sustituye en una de las ecuaciones originales para encontrar x.

$$x = \frac{y-b}{a}$$

$$y = c\left(\frac{y-b}{a}\right) + d$$

Este método es especialmente útil cuando graficar resulta complicado o poco práctico. Y aunque las gráficas nos dan una excelente visión de la solución, el método de sustitución nos ofrece precisión. Ahora realicemos el siguiente ejercicio y comparemos los resultados con el método gráfico.

Ejercicio 2.2. *Resolver el sistema x + y = 7 y x − 2y = 1 por el método de sustitución.*

$\{x + y = 7(Ec.1)\ \ x - 2y = 1(Ec.2)$	Aquí se presenta el sistema de ecuaciones a resolver.
$x = 7 - y$	Despejamos x de la (Ec.1)
$(7 - y) - 2y = 1$	Sustituimos x en la (Ec.2). Reemplazamos por x por 7 - y.
$7 - 3y = 1$	Distribuimos los términos de la última ecuación.
$-3y = -6$	

$y = 2$	Despejamos y dividimos ambos lados de la ecuación por -3.
$x = 5$	Sustituimos el valor de y en la ecuación (Ec.1) para encontrar el valor de x.

La solución del sistema de ecuaciones es $x = 5$ y $y = 2$.

2.2.3. Método por eliminación

Hemos visto la representación gráfica y el método de sustitución. El método de **eliminación** consiste precisamente en "eliminar" una de las variables y resolver el sistema.

Dado el sistema:

$$\{ax + by = c \quad dx + ey = f$$

El objetivo es sumar o restar las ecuaciones de tal manera que una de las variables se elimine. Por ejemplo, si multiplicamos la segunda ecuación por un número adecuado y la sumamos a la primera, podemos hacer que los términos de "x" se eliminen entre sí.

Una vez que hemos eliminado una variable, tenemos una ecuación con una sola incógnita que podemos resolver fácilmente. Luego, sustituimos el valor obtenido en una de las ecuaciones originales para encontrar la otra incógnita. Revisemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.3. Resolver el sistema $x + y = 7$ y $x - 2y = 1$ por el método de eliminación.

$\{x + y = 7 \quad x - 2y = 1$	Estas son las ecuaciones originales que queremos resolver.
$2(x + y) = 2(7)$	Multiplicamos la primera ecuación por 2 para que el coeficiente de y sea 2 y pueda cancelarse al restarla con la segunda ecuación.
$\frac{(2x+2y=14x-2y=1)}{(3x=15)}$	Sumamos las ecuaciones para eliminar la variable.
$x = 5$	Resolvemos la ecuación resultante para x.
$5 + y = 7$	Sustituimos el valor de x en la primera ecuación para obtener el valor de y.
$y = 2$	

Como hemos podido ver en el proceso, la solución es $x = 5$ y $y = 2$.

Los sistemas de ecuaciones lineales son importantes en el estudio de las matemáticas y su aplicación en diversas disciplinas. Comprender cómo resolverlos es fundamental para los estudiantes. A continuación, se explican tres métodos clásicos: el gráfico, el de sustitución y el de eliminación.

- **Método gráfico:** este método implica dibujar las ecuaciones como líneas en un plano cartesiano. La solución del sistema es el punto donde estas líneas se cruzan. Es efectivo para visualizar la relación entre las ecuaciones y es ideal para sistemas con soluciones claras y distintas.
- **Método de sustitución:** el método de sustitución comienza resolviendo una de las ecuaciones para una variable y sustituyendo esta solución en la otra

ecuación. Es particularmente útil cuando una de las ecuaciones es fácil de resolver para una variable.

- **Método de eliminación:** en el método de eliminación, se manipulan las ecuaciones para cancelar una de las variables, facilitando la resolución de la otra. Este método es efectivo para sistemas donde la suma o resta de ecuaciones puede simplificar el problema.

2.3. Modelado con sistemas de ecuaciones lineales

El proceso de convertir situaciones del mundo real en expresiones matemáticas nos permite resolver problemas de forma sistemática y precisa. Los sistemas de ecuaciones lineales son herramientas poderosas en este proceso. Vamos a entender claramente cómo modelar problemas reales a través de los siguientes pasos (Stewart et al., 2017):

1. **Identificación de incógnitas**

   Todo comienza con la identificación de las incógnitas. Estas representan elementos desconocidos que necesitamos descubrir. Imagine un problema donde queremos saber cuántas entradas de adultos y niños se vendieron para un concierto. En este caso, las incógnitas podrían ser *x* para adultos y *y* para niños.

2. **Expresar cantidades desconocidas**

   Ahora, necesitamos conectar las incógnitas con la información que poseemos. Supongamos que una entrada para adulto cuesta *a* y para niño b. Si un cliente compró entradas de ambos tipos, el costo total podría representarse como $ax + by$.

3. **Establecer un sistema de ecuaciones**

   Con la relación anterior, formamos ecuaciones basadas en la información dada. Si, por ejemplo, se vendieron 100 entradas en total y se recaudaron 2000 unidades monetarias, nuestras ecuaciones podrían ser:

$$\{x + y = 100 \quad ax + by = 2000$$

4. **Resolver e interpretar**

   Utilice métodos como sustitución o eliminación para encontrar la solución. Una vez obtenido el valor de las incógnitas, podemos interpretar el resultado en el contexto original. Quizás se vendieron 60 entradas para adultos y 40 para niños. A continuación, le invito revisar la siguiente infografía para ampliar sus conocimientos.

Pasos del modelado de sistemas de ecuaciones lineales

Para comprender de mejor manera vamos a plantear dos problemas y modelarlos como sistema de ecuaciones, los cuales se encuentran en el anexo 2.

Al concluir la cuarta semana, es importante reflexionar sobre lo aprendido. Hemos abordado los sistemas de ecuaciones, una herramienta indispensable en el análisis de situaciones con múltiples incógnitas. Es esencial recordar la diferencia entre sistemas lineales y no lineales y reconocer que, mientras los primeros tienen técnicas de resolución más estandarizadas, los segundos pueden ser más complejos. Hemos explorado métodos gráficos, de sustitución y eliminación, cada uno con sus propias ventajas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para comprender de mejor manera los conocimientos adquiridos, le invito a resolver los siguientes ejercicios y actividades.

1. Para profundizar el tema sobre "*Sistemas de ecuaciones y modelado con sistemas de ecuaciones*", revise las siguientes herramientas educativas. Las herramientas educativas sugeridas tienen como objetivo fomentar el desarrollo de habilidades de resolución de

sistemas de ecuaciones a través de la adquisición de las destrezas en el uso del método de sustitución.

- Método de sustitución para un sistema de ecuaciones.
- Enseñar a los alumnos de educación secundaria a resolver sistemas de ecuaciones.

Luego de haber revisado estas herramientas educativas, es importante reflexionar sobre cómo ha incorporado los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones en su conjunto de habilidades matemáticas.

2. **Actividad de resolución de sistemas por diversos métodos**

   Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando dos métodos distintos: sustitución, gráfico o eliminación. Compare sus resultados para verificar su consistencia.

   Sistema 1: $\{x + y = 10; \;\; 2x - y = 4$

   Sistema 2: $\{3x - 2y = 5; \quad 5x + 4y = -2$

3. **Problema de aplicación real – presupuesto familiar**

   Una familia tiene un presupuesto mensual de $5000. Deciden gastar una parte en entretenimiento y el resto en ahorros. Si el monto destinado a ahorros es el doble que el de entretenimiento, ¿cuánto gastan en cada categoría?

4. **Actividad de reflexión y discusión**

   - ¿Cómo pueden los sistemas de ecuaciones ayudar a resolver problemas complejos en distintos campos como la economía, la ingeniería o la ciencia?
   - Reflexione sobre un problema de su entorno que podría modelarse y resolverse mediante un sistema de ecuaciones lineales. Describa el problema y explique cómo plantearía el sistema.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al resolver los sistemas de ecuaciones utilizando diferentes métodos, ha demostrado una comprensión versátil de las técnicas matemáticas. Es importante reconocer que cada método tiene sus ventajas y situaciones en las que es más eficaz. Al comparar los resultados obtenidos por diferentes métodos, valida su comprensión y asegura la precisión de sus soluciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 5

Unidad 2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

Bienvenidos a la semana 5, en esta ocasión nos corresponde revisar los "Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas". Es importante, identificar las estrategias que nos permitan la comprensión y solución de problemas que involucran múltiples variables. Al final de esta semana, espero que hayan adquirido una comprensión clara y sólida de cómo resolver estos sistemas.

2.4. Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos incógnitas

Estamos a punto de explorar cómo múltiples variables pueden interactuar entre sí. En nuestra vida cotidiana, a menudo enfrentamos situaciones que requieren considerar más de dos variables simultáneamente. Del mismo modo, en matemáticas, hay problemas que involucran muchas variables. Por ejemplo, considera la ecuación $3x + 2y - z = 5$. Aquí, x, y y z son incógnitas que deben ser determinadas.

Entonces, ¿cómo abordamos estos sistemas? Al igual que con dos incógnitas, emplearemos técnicas de eliminación y sustitución. Pero ahora, la interacción entre estas variables introduce una nueva dimensión a nuestra comprensión.

A continuación, les invito a revisar el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones de tres incógnitas.

$\{3x + 2y + z = 1 \quad 5x + 3y + 4z = 2 \quad x + y - z = 1$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \quad (\text{Ec.1}) \\ 5x + 3y + 4z = 2 \quad (\text{Ec.2}) \\ x + y - z = 1 \quad (\text{Ec.3}) \end{cases}$$

Presentamos el sistema de ecuaciones lineales que deseamos resolver.

$$\begin{array}{c} 3x+2y+z=1(Ec.1) \\ -3x-3y+3z=-3(Ec.3)\times-3 \\ \hline -y+4z=-2(Ec.4) \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación 3 por −3 y la sumamos a la ecuación 1. Como resultado, obtenemos la ecuación 4: $-y + 4z =-2$.

$$\begin{array}{c} 5x+3y+4z=2(Ec.2 \\ -5x-5y+5z=-5(Ec.3)\times-5 \\ \hline -2y+9z=-3(Ec.5) \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación 3 por −5 y la sumamos a la ecuación 2. Como resultado, obtenemos la ecuación 5: $-2y + 9z = -3$.

$$\begin{array}{c} -2y+9z=-3(Ec.5) \\ 2y-8z=4(Ec.4)\times-2 \\ \hline z=1 \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación 4 por -2 y la sumamos a la ecuación 5. Como resultado, obtenemos el valor de z: $z = 1$.

$$-y + 4z = -2(Ec.4)$$
$$-y + 4(1) = -2$$
$$y = 6$$

Sustituimos el valor de $z = 1$ en la ecuación 4 para encontrar el valor de $y = 6$.

$$3x + 2y + z = 1(Ec.1)$$
$$3x + 2(6) + 1 = 1$$
$$x = -4$$

Sustituimos los valores de $y = 6$ y $z = 1$ en la ecuación 1 para encontrar el valor de $x = -4$

Una vez que hemos desarrollado el proceso, vemos que la **solución** del sistema es *x* = −4 ; *y* = 6 ; *z* = 1.

2.4.1. Método de Gauss. Transformación a sistema triangular y sustitución hacia atrás

El objetivo principal de este método es transformar nuestro sistema original en uno triangular, utilizando operaciones elementales en las filas. Imagine que tiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Al aplicar el método **de Gauss**, busca transformar su sistema en una forma donde la primera ecuación tenga tres incógnitas, la segunda solo dos y la tercera solo una, de la siguiente manera:

$$\{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{33}z = b_3$$

Una vez que hemos transformado el sistema a esta forma triangular, aplicamos la sustitución hacia atrás. Esto significa que, comenzando desde la última ecuación (la más sencilla), encontrarás el valor de la última incógnita (*z* en este caso). Posteriormente, se usa este valor para encontrar la siguiente incógnita (*y*), y así sucesivamente hasta determinar todas las incógnitas del sistema. Revisemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 2.5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones mediante la sustitución hacia atrás.

$$\{x + y + z = 3 \quad y + 2z = -1 \quad z = -1$$

$\begin{cases} x + y + z = 3 \quad (\text{Ec.1}) \\ y + 2z = -1 \quad (\text{Ec.2}) \\ z = -1 \quad (\text{Ec.3}) \end{cases}$	Presentación del sistema de ecuaciones dado. Está compuesto por tres ecuaciones lineales con tres incógnitas: x, y y z.
$y + 2z = -1 (Ec.2)$ $y + 2(-1) = -1$ $y = 1$	Sustituimos el valor de $z = -1$ en la ecuación 2 para encontrar el valor de $y = 1$.

$$x + y + z = 3(Ec.1)$$
$$x + 1 - 1 = 3$$
$$x = 3$$

Sustituimos valores de $y = 1$ y $z = -1$ en la ecuación 1 para encontrar el valor de $x = 3$.

Una vez que hemos desarrollado el proceso, vemos que la **solución** del sistema es $x = 3; y = 1; z =-1$.

Ejercicio 2.6. Transformar el siguiente sistema de ecuaciones a un "sistema triangular" y luego resolver mediante la sustitución hacia atrás.

$$\{3x + y + z = 4 \quad - x + y + 2z = 0 \quad x - 2y - z = -1$$

$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 & (\text{Ec.1}) \\ -x + y + 2z = 0 & (\text{Ec.2}) \\ x - 2y - z = -1 & (\text{Ec.3}) \end{cases}$$

Presentación del sistema de ecuaciones dado. Está compuesto por tres ecuaciones lineales con tres incógnitas: x, y y z.

$$\begin{array}{c} 3x+y+z=4(Ec.1) \\ -3x+3y+6z=0(Ec.2)\times 3 \\ \hline 4y+7z=4(Ec.4) \end{array}$$

Para eliminar x, multiplicamos la ecuación 2 por 3 y sumamos la ecuación 1.

$$\begin{array}{c} -x+y+2z=0(Ec.2) \\ x-2y-z=-1(Ec.3) \\ \hline -y+z=-1(Ec.5) \end{array}$$

Para eliminar x, sumamos la ecuación 2 y la ecuación 3.

$$\begin{array}{c} 4y+7z=4(Ec.4) \\ -4y+4z=-4(Ec.5) \\ \hline 11z=0 \\ z=0 \end{array}$$

Para eliminar y, multiplicamos la ecuación 5 por 4, y sumamos la ecuación 4, como resultado, obtenemos el valor de: z=0.

$$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \\ 4y + 7z = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Finalmente, presentamos el sistema reducido a la forma triangular.

Hasta este punto hemos obtenido un “sistema triangular”. A continuación, aplicaremos el método de sustitución hacia atrás.

$\begin{cases} 3x + y + z = 4 \quad (\text{Ec.1}) \\ 4y + 7z = 4 \quad (\text{Ec.2}) \\ z = 0 \quad (\text{Ec.3}) \end{cases}$	Presentamos el sistema de ecuaciones inicial.
$4y + 7(0) = 4(Ec.2)$ $y = 1$	Sustituimos el valor de z de la (Ec.3) en la (Ec.2) para encontrar el valor de $y = 1$.
$3x + 1 + 0 = 4(Ec.1)$ $x = 1$	Sustituimos los valores de y y z en la (Ec.1) para encontrar el valor de $x = 1$.

Finalmente, hemos obtenido la solución del sistema: $x = 1; y = 1; z = 0$.

2.5. Modelado de sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas

Luego de tener claro el proceso para resolver los sistemas de ecuaciones con varias incógnitas y familiarizándonos con el método de Gauss, llegamos a un punto crítico: ¿cómo representar situaciones reales mediante estos sistemas?

El **modelado matemático** implica traducir problemas del mundo real a un lenguaje matemático. Imagine que gestiona una tienda y desea saber cuántos productos de ciertos tipos se vendieron. Las ventas podrían estar representadas por ecuaciones que consideran el precio de cada producto y el total recaudado. Si vendió tres productos (A, B, y C) y conoce sus precios, pero solo sabe cuánto dinero ha ganado en total, podría formular un sistema como:

$$a_1 A + a_2 B + a_3 C = b_1$$

Aquí, *A*, *B*, y *C* representan las cantidades vendidas de cada producto, y a_1, a_2 y a_3 sus respectivos precios.

Es importante considerar que el poder del modelado está en transformar problemas cotidianos en ecuaciones. Una vez hecho esto, como ya hemos revisado, técnicas como el método de Gauss pueden ser empleadas para encontrar soluciones.

Ejercicio 2.7. Un comerciante vende quesos de tres tipos: curado, semicurado y tierno. Los precios de cada uno de ellos son \$12/kg, \$10/kg y \$9/ kg, respectivamente. Se sabe que el total de kilos vendidos es 44, que el importe total de la venta son 436 dólares y que el número de kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado. ¿Cuántos kilos de cada clase vendió el comerciante?

$$x = \text{Kilos de queso vendido} \cdot \left(\frac{\$12}{kg}\right)$$

$$y = \text{Kilos de queso semicurado vendido} \cdot \left(\frac{\$10}{kg}\right)$$

$$z = \text{Kilos de queso tierno vendido} \cdot \left(\frac{\$9}{kg}\right)$$

- Se sabe que el total de kilos vendidos es 44: $x + y + z = 44$.
- Los precios son \$12 /kg, \$10/kg y \$9/ kg respectivamente y que el importe total de la venta es 436 dólares: $12x + 10y + 9z = 436$.
- Los kilos vendidos del queso semicurado es el doble que del curado: $y = 2x$.

Dadas estas 3 ecuaciones procedemos a plantear y resolver el sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 44 \quad (\text{Ec.}1) \\ 12x + 10y + 9z = 436 \quad (\text{Ec.}2) \\ -2x + y = 0 \quad (\text{Ec.}3) \end{cases}$$

Presentamos el sistema de ecuaciones inicial que vamos a resolver.

$$3x + z = 44(Ec.4))$$
$$32x + 9z = 436(Ec.5)$$

Despejamos y de la ecuación $3(y = 2x)$, y luego sustituimos en las ecuaciones 1 y 2 para obtener las ecuaciones 4 y 5.

$$\begin{array}{l} -27x - 9z = -396 (Ec.4) \times -9 \\ \underline{\;\;32x + 9z = 436\;\;} \\ \;\;\;5x \qquad\quad = 40 \\ \\ \qquad\qquad x = 8 \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación 4 por -9 y la sumamos a la ecuación 5 para eliminar la variable z, y obtener x 8.

$$3(8) + z = 44(Ec.4)$$
$$z = 20$$

Sustituimos el valor de x en la ecuación 4 para encontrar el valor de $z = 20$.

$$-2(8) + y = 0(Ec.3)$$
$$y = 16$$

Sustituimos el valor de en la ecuación 3 para encontrar el valor de $y = 16$.

Solución: luego de realizar el proceso para resolver el sistema de ecuaciones correspondiente al problema, se tienen las siguientes soluciones: $x = 8; y = 16; z = 20$.

Hemos concluido una semana importante en nuestro estudio de los sistemas de ecuaciones. Se ha profundizado en sistemas lineales con más de dos incógnitas, lo que nos ha permitido aumentar nuestra visión matemática. Es vital recordar que hemos aprendido a enfrentar estos sistemas empleando técnicas como la eliminación y sustitución. El método de Gauss ha sido fundamental, permitiéndonos transformar sistemas a una forma triangular y aplicar la sustitución hacia atrás.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para consolidar los conocimientos adquiridos, le invito a resolver las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "*Resolución de sistemas de ecuaciones con varias incógnitas*" estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. La finalidad es proporcionar una comprensión sólida y práctica de cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales con múltiples incógnitas.

   - Sistemas de ecuaciones 3x3 | método de eliminación.
   - Sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas.
   - Sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

   Luego de haber revisado estas herramientas educativas sobre sistemas de ecuaciones lineales, es importante que evalúe su habilidad para seguir los pasos del método de eliminación y su capacidad para aplicar estos conceptos en problemas cotidianos. Continúe practicando con ejercicios adicionales y busque aplicar estos conocimientos en situaciones reales, la práctica constante y la aplicación práctica son esenciales para consolidar su comprensión.

2. **Aplicación del método de Gauss.** Utilice el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones. Recuerde transformar cada sistema a su forma escalonada reducida.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y - z = -1 \\ 2x + y + z = 7 \end{cases}$$

3. **Problema de aplicación real**

   Plantear un sistema de 3 ecuaciones lineales para representar este problema: "Ana, Martín y Felipe desean comprar juntos una pizza familiar en partes iguales para cenar. Si Ana tiene $15 para poner, Martín tiene el doble que Ana para contribuir y Felipe puede poner máximo $35, ¿cuánto debe costar la pizza como máximo para que los 3 amigos puedan comprarla en partes iguales?”

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al utilizar el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones, ha dado un paso importante en el desarrollo de sus habilidades de resolución de problemas matemáticos. Es crucial que reflexione sobre cómo ha aplicado el proceso de formar una matriz escalonada reducida y cómo ha interpretado las soluciones de estos sistemas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 6

Unidad 2. Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

Estamos ya a punto de concluir el estudio de la unidad 2, lo han hecho muy bien. Estamos ya en la sexta semana de nuestro curso. En esta ocasión, vamos a revisar las matrices y su relación con los sistemas de ecuaciones. Las matrices no son solo conjuntos de números, sino herramientas matemáticas que nos permiten representar y resolver sistemas de ecuaciones de manera eficiente.

2.6. Matrices en sistemas de ecuaciones

2.6.1. Conceptos y componentes de una matriz

A menudo, en matemáticas, es necesario representar y manejar información en un formato estructurado. Por tanto, aquí es donde las matrices muestran su utilidad.

Una matriz es un arreglo rectangular de números dispuestos en filas y columnas. Por ejemplo, observemos la siguiente matriz *A*:

$$A = \left[\frac{23}{45} \right]$$

Aquí, A es una matriz de 2x2. El número 2 en la primera fila y columna es un **elemento** de la matriz.

Veamos a continuación un ejemplo que guarda la información de un contexto real en una matriz.

Ejercicio 2.8. Se quiere representar el número de estudiantes que aprobaron, reprobaron y quedaron pendientes en tres cursos diferentes: Matemáticas, Historia y Biología durante un semestre.

Tabla 4
Matriz "Promoción de estudiantes – Asignaturas"

	Matemáticas	Historia	Biología	Total, por estado
Aprobados	**25**	**30**	**28**	83
Reprobados	**5**	**3**	**7**	15
Pendientes	**3**	**2**	**0**	5
Total, por Curso	33	35	35	103

Nota. Arteaga, M., 2023.

Esta es una forma práctica de ver y analizar el comportamiento académico de los estudiantes en estas tres asignaturas, cada valor que representan los aprobados, reprobados y pendientes de cada una de las asignaturas corresponden a un elemento de una matriz.

2.6.2. Matriz aumentada

Recordemos la matriz que presentamos anteriormente, un arreglo rectangular de números organizados en filas y columnas. Ahora, revisemos un tipo especial de matriz que se relaciona directamente con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales: *la matriz aumentada*.

Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\{3x + y + z; -x + y + 2z = 0; x - 2y - z = -1$$

Podemos representar este sistema mediante una matriz aumentada, de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & | & 4 \\ -1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Observemos el símbolo vertical "|", este separa los coeficientes de las variables en la matriz del término constante en el sistema de ecuaciones. Gracias a la matriz aumentada, podemos manipular fácilmente las ecuaciones y avanzar hacia la solución.

2.6.3. Operaciones elementales de matrices

Ahora que conocemos la matriz aumentada, es esencial entender cómo manipular estas matrices para resolver sistemas de ecuaciones. Esto nos lleva a las "Operaciones elementales de matrices" (Stewart et al., 2017). Revisemos las operaciones que podemos realizar en una matriz:

1. **Intercambio de filas**: podemos intercambiar la posición de dos filas:

   $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ Si tenemos la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 6 \\ 4 & 5 & | & 10 \end{bmatrix}$ y al intercambiar las filas, obtendremos: $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & | & 10 \\ 2 & 3 & | & 6 \end{bmatrix}$

2. **Multiplicar una fila por un escalar**: por ejemplo, podemos multiplicar la primera fila por 2 $(F_1 \times 2)$, y esto afectará a todos los elementos de esa fila, así: $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & | & 20 \\ 2 & 3 & | & 6 \end{bmatrix}$
3. **Sumar o restar filas**: si sumamos la fila 1 a la fila 2, reemplazamos la fila 2 con el resultado $(F_1 = F_2 + F_2)$ Nos queda como resultado: $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & | & 20 \\ 10 & 13 & | & 26 \end{bmatrix}$

Estas operaciones nos ayudan a manipular y simplificar la matriz aumentada para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones. Para obtener una explicación clara, le invito a revisar la siguiente infografía donde se explican los Fundamentos de operaciones elementales en matrices.

Fundamentos de operaciones elementales en matrices

Ejercicio 2.9. *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones aplicando las operaciones sobre matrices estudiadas.*

$$\{x + y + z = 1; 2x + 3y - 4z = 9; x - y + z = -1$$

Nos interesa realizar las operaciones necesarias para obtener un sistema triangular, de la siguiente manera:

A partir del sistema de ecuaciones original generamos nuestra matriz adjunta.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -4 & | & 9 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Actualizar la Fila2 con esta operación $Fila2 = Fila2 - (2) \times (Fila1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -4 & | & 9 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} F2 = F2 - 2 \times F1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -6 & | & 7 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$$

Actualizar la Fila3 restando la Fila3 menos la Fila1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -6 & | & 7 \\ 1 & -1 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} F3 = F3 - F1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -6 & | & 7 \\ 0 & -2 & 0 & | & -2 \end{bmatrix}$$

Una vez que hemos obtenido el sistema triangular equivalente, vamos a aplicar el método de sustitución hacia atrás.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (\text{Ec.}1) \\ y - 6z = 7 & (\text{Ec.}2) \\ -2y = -2 & (\text{Ec.}3) \end{cases}$$

Para iniciar, vamos a resolver la ecuación 3 para despejar y.

$$\begin{aligned} y &= 1 \\ y - 6z &= 7 \quad (\text{Ec.}2) \\ 1 - 6z &= 7 \\ -6z &= 6; z = -1 \end{aligned}$$

Sustituimos $y = 1$ en la ecuación 2 para encontrar z.

$$\begin{aligned} x + 1 - 1 &= 1 \ (\text{Ec.}1) \\ x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

Sustituimos $y = 1$ y $z = -1$ en la ecuación 1 para determinar x.

Luego de realizar las operaciones, las soluciones del sistema son: *x* = 1 ; *y* = 1 ; *z* = −1.

2.7. Método de eliminación de Gauss y Gauss–Jordan

Luego de haber estudiado las operaciones elementales de matrices, podemos ampliar nuestro conocimiento respecto a dos técnicas fundamentales para resolver sistemas de ecuaciones: el “método de eliminación de Gauss” y el “método de Gauss–Jordan” (Stewart et al., 2017).

Primero, consideremos el "método de eliminación de Gauss". La idea central es usar operaciones elementales para transformar la matriz aumentada en una **matriz triangular superior**. *Esto significa que, debajo de la diagonal principal, todos los elementos son cero*. Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida esta forma, es fácil resolver el sistema de ecuaciones mediante sustitución regresiva.

El **método de Gauss–Jordan** lleva este proceso un paso más allá. Además de transformar la matriz en triangular superior, continuamos con las operaciones hasta tener una matriz diagonal (y en algunos casos una matriz identidad en el lado izquierdo del símbolo vertical). Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \end{bmatrix}$$

Aquí, *x* y *y* serían las soluciones al sistema. En este punto, el sistema es directamente legible.

Ambos métodos hacen uso extensivo de las operaciones elementales que aprendimos anteriormente. A medida que practiquen, ganarán destreza y comprenderán cómo estos métodos simplifican la tarea de resolver Sistemas de ecuaciones. Revisemos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 2.10. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss.

$$\{x + y - z = 2; 3x + 3y + z = 2; x + z = 3$$

Matriz aumentada original:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Actualizamos la Fila2 con esta Operación: $Fila2 = Fila2 - (3) \times Fila1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 3 & 3 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} F2 = F2 - 3 \times F1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & -4 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Actualizamos la Fila3 con esta operación: $Fila3 = Fila3 - Fila1$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & -4 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix} F3 = F3 - F1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos la segunda y tercera fila.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 4 & | & -4 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \end{bmatrix} F2 \leftrightarrow F3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4 & | & -4 \end{bmatrix}$$

A continuación, resolvemos el sistema por el método de sustitución hacia atrás.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 & (\text{Ec.}1) \\ -y + 2z = 1 & (\text{Ec.}2) \\ 4z = -4 & (\text{Ec.}3) \end{cases}$$

Para iniciar, vamos a resolver la ecuación 3 para despejar z.

$$\begin{aligned} z &= -1 \\ -y + 2(-1) &= 1 \quad (\text{Ec.}2) \\ -y &= 1 + 2 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

Sustituimos $z = 1$ en la ecuación 2 para encontrar y.

$$x + (-3) - (-1) = 2 \text{ (Ec.1)}$$
$$x - 3 + 1 = 1$$
$$x = 2 + 2$$
$$x = 4$$

Sustituimos $y = -3$ y $z = -1$ en la ecuación 1 para determinar $x = 4$.

La **solución** al sistema es: $x = 4; y = -3; z = -1$.

Ejercicio 2.11. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de eliminación de Gauss–Jordan.

$$\{x + y + 2z = 4; 3x - y + 2z = 8; 2x - 2y - 3z = -2$$

Iniciamos con nuestra matriz original. Para convertir en ceros los primeros elementos de la Fila2 y Fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 3 & -1 & 2 & | & 8 \\ 2 & -2 & -3 & | & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F2 = F2 - 3F1 \\ F3 = F3 - 2F1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -4 & -4 & | & -4 \\ 0 & -4 & -7 & | & -10 \end{bmatrix}$$

Para convertir en 1 el segundo elemento de la Fila2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -4 & -4 & | & -4 \\ 0 & -4 & -7 & | & -10 \end{bmatrix} F2 = \frac{F2}{-4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -4 & -7 & | & -10 \end{bmatrix}$$

Para convertir en cero el segundo elemento de la Fila3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -4 & -7 & | & -10 \end{bmatrix} F3 = F3 + 4F2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{bmatrix}$$

Para convertir en 1 el tercer elemento de la Fila3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -3 & | & -6 \end{bmatrix} F3 = \frac{F3}{-3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Para convertir en cero el tercer elemento de la Fila1 y Fila2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F1 = F1 - 2F3 \\ F2 = F2 - F3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Para convertir en cero el segundo elemento de la Fila1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} F1 = F1 - F2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

La última matriz tiene forma escalonada reducida (matriz identidad), con lo cual tenemos la solución del sistema: $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$.

2.7.1. Reconocimiento de sistemas inconsistentes o dependientes

Tras abordar los métodos de Gauss y Gauss–Jordan, es esencial reconocer que no todos los sistemas de ecuaciones tienen una única solución.

Algunos sistemas pueden ser **inconsistentes** o **dependientes**.

Un sistema **inconsistente** no tiene solución. Esto puede reconocerse cuando, al aplicar los métodos que hemos estudiado, obtenemos una fila en la matriz que sugiere una contradicción, como, por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 5 \end{bmatrix}$$

La segunda fila indica que $0x + 0y = 5$, lo cual es claramente falso. Ninguna combinación de y hará esa ecuación verdadera.

Un sistema **dependiente**, por otro lado, tiene infinitas soluciones. Si durante nuestros métodos obtenemos una fila de ceros en el lado izquierdo y cero en el lado derecho del símbolo "|", así como se observa en el ejemplo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto sugiere que una de nuestras ecuaciones es redundante y el sistema tiene múltiples soluciones válidas. Al usar los métodos de Gauss y Gauss– Jordan, estas situaciones serán evidentes. Es importante reconocerlas y entender qué significan en el contexto del sistema que estamos analizando.

En el ámbito de las ecuaciones lineales, los sistemas inconsistentes y dependientes juegan un rol crucial en el análisis y la comprensión de soluciones. Estos conceptos son fundamentales para identificar si un sistema de ecuaciones tiene solución y, de ser así, cuántas soluciones existen. A continuación, se explicará de forma detallada y sencilla cómo reconocer y entender estos sistemas cuando se resuelven mediante matrices, proporcionando una visión integral de su significado y su impacto en el proceso de resolución:

- **Paso 1. Identificar sistemas inconsistentes:** un sistema de ecuaciones es inconsistente cuando no tiene solución. Esto ocurre generalmente cuando las ecuaciones representan líneas paralelas, que no se intersecan en ningún punto. En términos de matrices, esto se identifica cuando, después de aplicar operaciones elementales, se obtiene una fila con todos sus elementos cero, excepto el término independiente. Esta situación indica que el sistema no tiene soluciones posibles.
- **Paso 2. Análisis de matrices y soluciones:** el análisis de la matriz resultante tras aplicar operaciones elementales es crucial para determinar la naturaleza del sistema. La presencia de filas contradictorias o redundantes nos proporciona información valiosa sobre la consistencia y dependencia del sistema. Este paso implica examinar detenidamente la matriz transformada para identificar estas características y concluir sobre el tipo de sistema que estamos analizando.

- **Conclusión:** asegurarse de que el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones sea correcto es especialmente importante cuando nos enfrentamos a sistemas inconsistentes o dependientes. Reconocer y entender estas características no solo evita errores en la solución, sino que también proporciona un conocimiento más profundo de las relaciones lineales y sus propiedades. Esta comprensión es fundamental para aplicar correctamente las técnicas de resolución de sistemas lineales en la práctica matemática.

2.7.2. Ejemplos de modelado de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices

Veamos a continuación un ejemplo sobre cómo modelar problemas mediante matrices y la solución mediante los métodos estudiados.

Ejercicio 2.12. Un hotel adquirió un total de 200 unidades entre almohadas, mantas y edredones, gastando un total de 7500 dólares. El precio de una almohada es de 16 dólares, el de una manta es de 50 dólares y el de un edredón es de 80 dólares. Además, el número de almohadas compradas es igual al número de mantas más el número de edredones. ¿Cuántas almohadas, mantas y edredones han comprado el hotel?

x = Cantidad de almohadas.

y = Cantidad de mantas.

z = Cantidad de edredones.

$$\{x + y + z = 200; 16x + 50y + 80z = 7500; x - y - z = -0$$

Iniciamos el proceso con nuestra matriz original. Para obtener un cero en la entrada superior izquierda de la Fila3, la Fila1 a la Fila3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 200 \\ 16 & 50 & 80 & | & 7500 \\ 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} F3 = F3 - F1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 200 \\ 16 & 50 & 80 & | & 7500 \\ 1 & -2 & -2 & | & -200 \end{bmatrix}$$

Para obtener un cero en la entrada superior izquierda de la Fila2, restamos 16 veces la Fila1 a la Fila2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 200 \\ 16 & 50 & 80 & | & 7500 \\ 1 & -2 & -2 & | & -200 \end{bmatrix} F2 = F2 - 16 \times F1$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 200 \\ 0 & 34 & 64 & | & 4300 \\ 0 & -2 & -2 & | & -200 \end{bmatrix}$$

Para obtener un cero en la segunda entrada de la Fila1, sumamos la mitad de la Fila3 a la Fila1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 200 \\ 0 & 34 & 64 & | & 4300 \\ 0 & -2 & -2 & | & -200 \end{bmatrix} F1 = F1 + \frac{F3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 100 \\ 0 & 34 & 64 & | & 4300 \\ 0 & -2 & -2 & | & -200 \end{bmatrix}$$

Para obtener un cero en la segunda entrada de la Fila3, multiplicamos la Fila3 por 17 y luego sumamos la Fila2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 100 \\ 0 & 34 & 64 & | & 4300 \\ 0 & -2 & -2 & | & -200 \end{bmatrix} F3 = 17 \times F3 + F2$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 100 \\ 0 & 34 & 64 & | & 4300 \\ 0 & 0 & 30 & | & 900 \end{bmatrix}$$

Para obtener un cero en la tercera entrada dc la Fila2, multiplicamos la Fila3 por 64 y luego restamos ese resultado de la Fila2 (previamente hemos dividido para 30 la Fila3).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 100 \\ 0 & 34 & 64 & | & 4300 \\ 0 & 0 & 30 & | & 900 \end{bmatrix} F2 = F2 - 64 \times F3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 100 \\ 0 & 34 & 0 & | & 2380 \\ 0 & 0 & 1 & | & 30 \end{bmatrix}$$

Finalmente, dividimos para 34 la Fila2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 34 & 0 & 2380 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right] F2 = \frac{F2}{34} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array}\right]$$

Solución: el hotel adquirió 100 almohadas, 70 mantas y 30 libras de edredones.

2.8. Sistemas no lineales

Estimado estudiante, continuemos con la revisión de este interesante tema respecto a los sistemas no lineales.

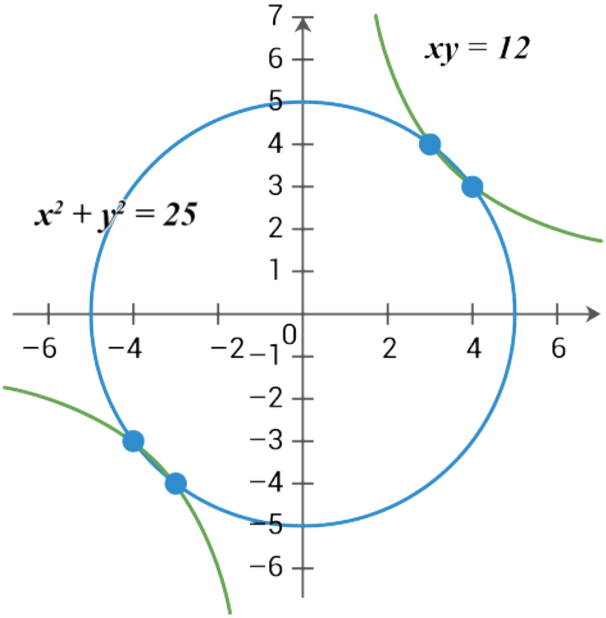
Un sistema de ecuaciones no lineales se compone de al menos dos ecuaciones con dos incógnitas, donde al menos una de las ecuaciones no es lineal. Es decir, no se ajusta a la forma general *ax* + *by* = *c*. Estas ecuaciones pueden incluir términos elevados a potencias, productos de variables, funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, entre otras (Stewart et al., 2017).

Por ejemplo, el sistema:

$$\{x^2 + y^2 = 25 \quad xy = 12$$

Figura 7

Sistema de ecuaciones no lineales



Nota. Arteaga, M., 2024.

En el desarrollo de este tema, ampliaremos nuestra capacidad analítica y resolveremos ejercicios prácticos para consolidar la comprensión de estos. Será de gran importancia tener en cuenta las propiedades y técnicas de solución, las cuales revisamos a continuación:

2.8.1. Método gráfico

Anteriormente, estudiamos la naturaleza y composición de los sistemas de ecuaciones no lineales. Ahora, revisaremos una de las técnicas más intuitivas para resolverlos: el **método gráfico**.

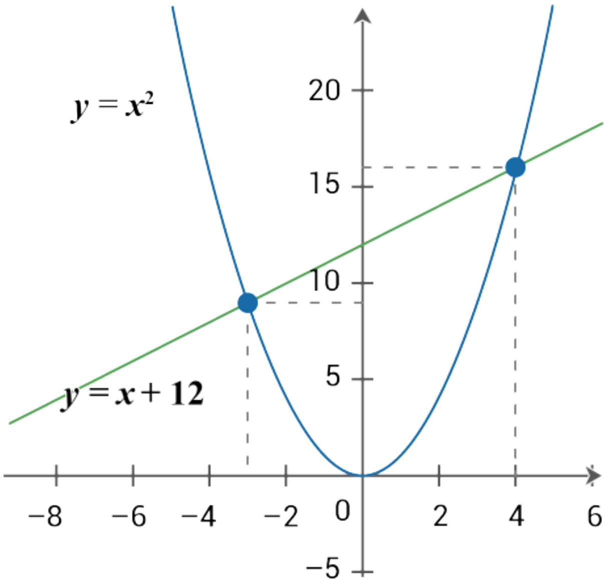
Al igual que con sistemas lineales, el método gráfico para sistemas no lineales implica representar las ecuaciones en un plano cartesiano. Sin embargo, en lugar de líneas rectas, podremos encontrarnos con curvas, parábolas, círculos, entre otras formas. El punto o puntos donde estas gráficas se intersecan representan las soluciones del sistema.

Consideremos el siguiente sistema:

$$\{y = x^2 \quad y = x + 12$$

Figura 8

Método gráfico para solución de sistemas de ecuaciones no lineales



Nota. Arteaga, M., 2024.

Al graficar, la primera ecuación nos da una parábola, y la segunda, una recta. Los puntos de intersección entre estas figuras son las soluciones del sistema.

El método gráfico, a pesar de ser visual y didáctico, tiene limitaciones. No siempre es preciso encontrar soluciones exactas debido a las restricciones del dibujo. Sin embargo, nos brinda una valiosa intuición sobre la naturaleza de las soluciones y cómo se relacionan las ecuaciones en el sistema.

2.8.2. Método de sustitución

Luego de haber estudiado el método gráfico, que nos ofrece una representación visual del sistema, avanzamos hacia una técnica más algebraica: el **método de sustitución**. Este método, al igual que en sistemas lineales, se basa en despejar una incógnita en términos de la otra, para luego sustituirla en la segunda ecuación.

Vamos a resolver el sistema anterior por este método:

$$\{y = x^2 \qquad y = x + 12$$

$\begin{cases} y=x^2 & (Ec.1) \\ y=x+12 & (Ec.2) \end{cases}$	Estas son las ecuaciones originales.
$x^2 = x + 12$	Igualamos (Ec. 1) y (Ec.2) para encontrar x.
$x2 - x - 12 = 0$ $(x - 4)(x + 3) = 0$	Reescribimos y factorizamos la ecuación.
$x_1 = 4, x_2 = -3$	Soluciones del sistema.
$y = x2$ $y_1 = 16, y_2 = 9$	Reemplazamos x en Ec.1 para encontrar y.

Dicho sistema podría tener más de una solución, lo cual se relaciona con lo que vimos en el método gráfico: múltiples puntos de intersección entre las gráficas. Una vez obtenidas las soluciones para x, se sustituyen en la ecuación despejada para hallar los correspondientes valores de y.

2.8.3. Método de eliminación

El **método de eliminación** consiste en combinar las ecuaciones de tal manera que una de las incógnitas sea eliminada, dejándonos con una ecuación con una sola incógnita que podemos resolver.

Vamos a resolver el siguiente el sistema por el método de eliminación:

$\{x^2 - 2y = 1; x^2 + 5y = 29$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2y = 1 \quad (Ec.1) \\ x^2 + 5y = 29 \quad (Ec.2) \\ \hline 7y = 28 \;;\; y = 4 \end{array}$$

Restando la primera ecuación de la segunda, eliminamos x^2.

$$x^2 - 2(4) = 1 (Ec.1)$$
$$x^2 = 1 + 8$$
$$x^2 = 9$$

Sustituimos $y = 4$ en la (Ec.1) para obtener $x^2 = 9$.

$$x = \pm 3$$
$$y = 4$$

Las soluciones del sistema son: $x = 3, \;\; y = 4 \;\; y \;\; x = -3, \;\; y = 4$

A continuación, le invito a examinar la infografía que le proporcionará una comprensión más profunda acerca de los Métodos de solución de sistemas no lineales.

Métodos de solución de sistemas no lineales

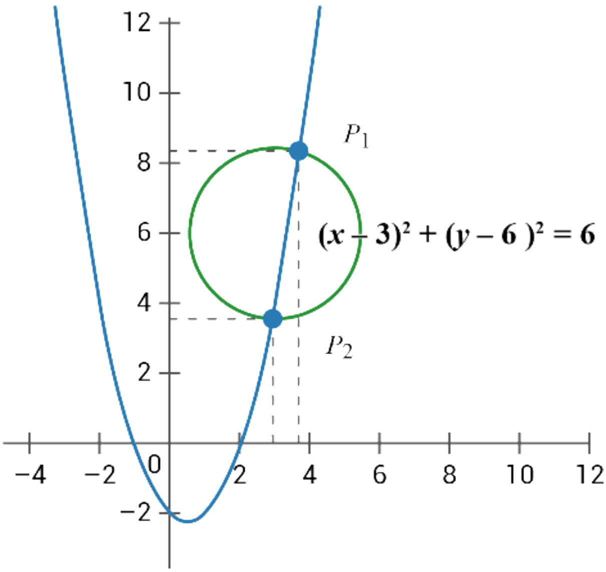
2.8.4. Ejercicios sobre solución de sistemas de ecuaciones no lineales

A continuación, vamos a resolver algunos ejemplos de sistemas de ecuaciones no lineales.

Ejercicio 2.13. Resolver por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

Figura 9

Solución a sistema de ecuaciones no lineales



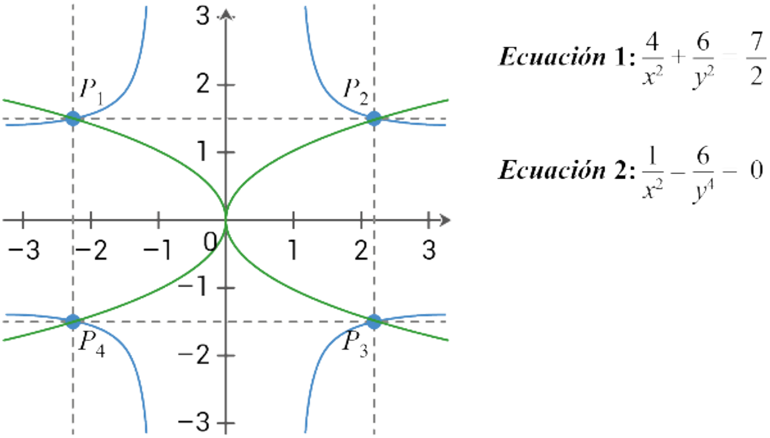
Nota. Arteaga, M., 2024.

De acuerdo con el método gráfico, la solución aproximada es: P_1 = (3.75; 8.33) y P_2 = (2.91; 3.55).

Ejercicio 2.14. Resolver por el método gráfico el siguiente sistema de ecuaciones no lineales.

Figura 10

Solución a sistema de ecuaciones no lineales



Nota. Arteaga, M., 2024.

Según el gráfico, la solución aproximada es:

$P_1 = (-2.27; 1.51)$.

$P_2 = (2.21; 1.49)$.

$P_3 = (2.23; -1.49)$, y

$P_4 = (-2.24; -1.5)$.

Concluimos una semana significativa en la que estudiamos los sistemas de ecuaciones no lineales. Es fundamental recordar que estos sistemas difieren de los lineales en que no se ajustan estrictamente a la forma: $ax + by = c$;en su lugar, integran términos con potencias, productos de variables y funciones variadas. Espero que hayan consolidado estos conceptos y estén listos para aplicarlos en ejercicios prácticos.

Al culminar la semana 6, es importante recordar y consolidar lo aprendido. Hemos abordado el estudio de las matrices y cómo estas se relacionan con los sistemas de ecuaciones. Comenzamos con los conceptos básicos y componentes de una matriz, permitiéndonos visualizar información estructurada y esencial. Seguidamente, revisamos la matriz aumentada, una herramienta vital en la resolución de sistemas. Las operaciones elementales de matrices nos ofrecieron técnicas para manipular matrices, y con el método de eliminación de Gauss y Gauss–Jordan, aprendimos a simplificar y resolver sistemas de ecuaciones.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para reforzar sus conocimientos sobre los temas estudiados, lo invito a realizar las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "*Matrices y métodos de solución de ecuaciones mediante matrices*" estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. La finalidad de estas herramientas educativas, que incluyen explicaciones sobre matrices, el método de Gauss y Gauss–Jordan para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, es proporcionar una comprensión integral de los conceptos matemáticos avanzados y sus aplicaciones prácticas.

   - Qué es una matriz | Sistemas de ecuaciones.
   - Solución de un sistema de 3x3 método de Gauss | ejemplo 1.
   - Gauss–Jordan/ única solución: sistema de ecuaciones lineales.

   Luego de haber revisado los videos de aprendizaje sugeridos, es importante que reflexione sobre cómo estos conceptos matemáticos se vinculan y se aplican en la resolución de problemas complejos.

   Aplique estos métodos en diferentes tipos de sistemas de ecuaciones y reflexione sobre su utilidad en problemas reales.

2. **Actividad: operaciones básicas con matrices.** Realice las siguientes operaciones con matrices. Esta actividad ayudará a afianzar las habilidades básicas en manejo de matrices.

   - **Suma de matrices:**

Dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ calcular A+B.

- **Producto de matrices:**

Dadas $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ calcular CD.

3. **Actividad: método de Gauss y Gauss–Jordan**

Utilice el método de Gauss y luego Gauss–Jordan para resolver el siguiente sistema de ecuaciones. Compare ambos métodos y discuta sus diferencias y similitudes en términos de pasos y eficiencia.

Sistema de ecuaciones:

$$\{x + 2y - z = 4; \;\; 2x - y + 3z = -6; \;\; -x + 3y + 2z = 7$$

4. **Problema de aplicación real – análisis económico**

Un analista económico está estudiando el flujo de dinero entre tres sectores: agricultura, manufactura y servicios. El flujo de dinero en millones de dólares se puede representar por una matriz de transacciones. Si la matriz de transacciones es $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ donde representa M_{ij} el dinero que fluye del sector i al sector j, realice un análisis del flujo total entre los sectores.

Al completar las actividades propuestas, con seguridad pudo abordar aspectos fundamentales de álgebra lineal y la resolución de sistemas de ecuaciones. Al realizar operaciones básicas con matrices, ha establecido una base sólida para entender cómo se pueden manipular y utilizar estas estructuras matemáticas en contextos diversos. La comparación entre los métodos de Gauss y Gauss–Jordan te ha permitido apreciar diferentes técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones, mejorando su comprensión.

5. Para reforzar los conocimientos sobre "*Solución de sistemas de ecuaciones no lineales*" estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. El propósito es reforzar la comprensión conceptual y procedimental de los sistemas de ecuaciones donde al menos una ecuación es de segundo grado, así como los métodos algebraicos y gráficos para su resolución.

    - Sistemas de ecuaciones no lineales con una ecuación de segundo grado.
    - Sistemas de ecuaciones no lineales – con una ecuación de segundo grado.

    A través de estos videotutoriales usted pudo afianzar los conceptos revisados en clases sobre sistemas de ecuaciones con una ecuación cuadrática. Las explicaciones secuenciadas, con terminología clara y ejemplos guiados, facilitan la comprensión del tema.

6. **Actividad: método gráfico**

    Grafique las siguientes ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas y encuentre las soluciones al sistema (los puntos de intersección).

    1. $\{y = x^2; \;\; y = 4 - x$
    2. $\{y = x^2 + 2x - 3; \;\; y = 2x$

7. **Investigación y reflexión**

    - ¿Por qué es importante aprender a resolver sistemas de ecuaciones no lineales? Proporcione ejemplos de cómo estos sistemas pueden aparecer en la vida real.
    - Reflexione sobre un problema en tu entorno que pueda ser modelado por un sistema de ecuaciones no lineales. Describa el problema y las ecuaciones que podrían modelar.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al completar la actividad de método gráfico y actividad de investigación y reflexión, ha avanzado significativamente en su comprensión de los sistemas de ecuaciones no lineales. Al graficar y encontrar las soluciones a sistemas de ecuaciones mediante el método gráfico, ha desarrollado una habilidad práctica valiosa, que le permite visualizar y comprender mejor las relaciones entre diferentes funciones matemáticas.

Ahora que ha desarrollado las actividades propuestas sobre sistemas de ecuaciones no lineales, es importante consolidar lo trabajado a través de algunas reflexiones guiadas. Le invito a revisar sus procedimientos y soluciones, tanto del ejercicio gráfico como del análisis sobre aplicaciones reales de estos sistemas.

8. Realice la autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 2

Para resolver la siguiente evaluación se solicita leer comprensivamente, razonar, resolver y seleccionar la respuesta correcta.

1. ¿Qué es un sistema de ecuaciones?

   a. Conjunto de dos o más incógnitas.
   b. Conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas.
   c. Herramienta para resolver desigualdades.
   d. Método para resolver funciones.

2. ¿Cuál es la diferencia principal entre un sistema lineal y uno no lineal?

   a. La forma de graficarlos.
   b. El número de soluciones.
   c. Las potencias y funciones de las incógnitas.
   d. El número de incógnitas.

3. En un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas, si las rectas coinciden, ¿cuántas soluciones hay?

   a. Ninguna.
   b. Una.
   c. Dos.
   d. Infinitas.

4. Si un sistema tiene la ecuación “$y = 2x$” y otra “$y = x + 3$”, utilizando el método gráfico, ¿en qué punto se intersecan?

   a. (3,6).
   b. (1,2).
   c. (3,5).
   d. (2,4).

5. En un problema de modelado, si se vendieron 5 entradas de adulto a $3 cada una y x entradas de niño a $2, ¿cuál ecuación representa el costo total de $21?

   a. $5x + 2 = 21$.
   b. $3x + 10 = 21$.
   c. $5 + 2x = 21$.
   d. $15 + 2x = 21$.

6. ¿Cuál es la esencia del método por eliminación?

   a. Graficar las ecuaciones.
   b. Despejar y sustituir incógnitas.
   c. Sumar o restar ecuaciones para eliminar una variable.

d. Utilizar matrices.

7. Si tiene el sistema "$y = x + 1$" y "$y = 2x - 1$", usando el método de eliminación, ¿qué resultado obtiene sumando ambas ecuaciones?

a. $2y = 3x$.

b. $y = 3x$.

c. $2y = 3$.

d. $y = 3$.

8. En la ecuación "$3x + 2y - z = 5$", ¿cuántas incógnitas hay?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.

9. ¿Qué forma adopta un sistema después de aplicar el método de Gauss?

a. Diagonal.
b. Circular.
c. Triangular.
d. Rectangular.

10. ¿Qué es la sustitución hacia atrás en el contexto de sistemas de ecuaciones?

a. Un tipo de ecuación.
b. Un método gráfico.

c. Un proceso iterativo.
d. Resolver desde la última ecuación.

11. ¿Qué representa el modelado matemático?

a. Crear gráficos.
b. Traducir problemas reales a matemáticas.
c. Estudiar geometría.
d. Aplicar el teorema de Pitágoras.

12. Aplicando el método de Gauss a "$x + y = 5$" y "$x - y = 1$", ¿cuál es el valor de y?

a. 1.
b. 2.
c. 3.
d. 4.

13. Usando el modelado matemático, si un producto A cuesta $5, B $3 y C $2, y se venden "$x$", "$y$" y "$z$" unidades respectivamente, ¿cuál es la ecuación para el total recaudado?

a. $5x + 3y = T$.

b. $5x + 2y + 3z = T$.

c. $5x + 3y + 2z = T$.

d. $x + y + z = T$.

14. ¿Qué es una matriz?

    a. Un polinomio.
    b. Una función.
    c. Un arreglo rectangular de números.
    d. Un vector.

15. El método de Gauss transforma la matriz en:

    a. Matriz identidad.
    b. Matriz triangular superior.
    c. Matriz triangular inferior.
    d. Matriz transpuesta.

16. Ordene los pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico.

    a. Dibuja cada ecuación en el mismo sistema de coordenadas.
    b. Identifica el punto de intersección como la solución.
    c. Verifica la solución sustituyendo en las ecuaciones originales.
    d. Expresa las ecuaciones en forma de rectas.
    e. Determina si las líneas son paralelas, coincidentes o se cruzan.

17. Ordene los pasos del método de sustitución para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

    a. Sustituye el valor despejado en la otra ecuación.
    b. Despeja una incógnita en una ecuación.
    c. Sustituye el valor hallado para encontrar la otra incógnita.
    d. Resuelve la ecuación resultante para una incógnita.
    e. Elige una ecuación para comenzar.

18. Ordene las etapas para modelar un problema real usando sistemas de ecuaciones lineales.

    a. Identificar las incógnitas del problema.

b. Expresar las cantidades desconocidas en términos de estas incógnitas.
c. Establecer un sistema de ecuaciones basado en la información dada.
d. Resolver el sistema usando un método adecuado.
e. Interpretar las soluciones en el contexto del problema.

19. Ordene los pasos para resolver sistemas lineales usando el método de eliminación.

   a. Sumar o restar ecuaciones para eliminar una variable.
   b. Resolver para la variable restante.
   c. Sustituir el valor encontrado en una de las ecuaciones originales.
   d. Elegir las ecuaciones para comenzar el proceso.
   e. Encontrar la segunda variable.

20. Ordene las etapas de reconocimiento de sistemas inconsistentes o dependientes.

   a. Determinar si hay soluciones múltiples o ninguna.
   b. Analizar la forma final de la matriz tras aplicar métodos de resolución.
   c. Identificar la estructura del sistema de ecuaciones.
   d. Reconocer filas de ceros en la matriz resultante.
   e. Comprender el significado de estas características en el contexto del problema.

Ir al solucionario

Semana 7

Es muy grato haber compartido con ustedes este primer bimestre en la asignatura de "Sistemas de Conocimientos de Ecuaciones y Desigualdades". Durante estas semanas, hemos aprendido una variedad de temas, desde los fundamentos de las ecuaciones, pasando por las técnicas de solución de ecuaciones cuadráticas, hasta la introducción a sistemas de ecuaciones con varias incógnitas.

Entiendo que el camino del aprendizaje tiene sus altos y bajos, por tanto, les invito a tomar un momento para revisar aquellos contenidos que requieren más atención, así como las autoevaluaciones que no hayan sido completadas. Cada uno de estos temas es una parte fundamental en su formación académica. Le invito a revisar el siguiente módulo didáctico denominado Retroalimentación de contenidos del bimestre I para recordar los temas tratados en este tiempo.

Retroalimentación de contenidos del bimestre I

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para reforzar sus conocimientos es importante que desarrolle las siguientes actividades:

1. Desarrolle las autoevaluaciones propuestas en este primer bimestre.
2. Revise las herramientas educativas propuestas al final de cada semana.
3. Realice los ejercicios propuestos al final de cada semana.
4. Revise los temas donde tenga alguna dificultad.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al concluir las actividades de autoevaluación, revisión de herramientas educativas, realización de ejercicios semanales y repaso de temas específicos, ha dado pasos significativos en su proceso de aprendizaje. Es esencial que reflexione sobre cómo cada una de estas actividades ha contribuido a reforzar su comprensión de los conceptos estudiados.

La autoevaluación le permite medir su progreso y entender mejor sus fortalezas y áreas que necesitan mejora.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Nos encontramos en la recta final de este bimestre y quiero invitarles a revisar con detenimiento todo lo aprendido. Es importante que se sientan seguros y estén preparados para la "evaluación bimestral", es en donde se refleja el conocimiento y la dedicación que han demostrado en cada tema de estudio.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, considere las siguientes actividades para culminar con éxito este bimestre:

1. Participe en la video colaboración donde se realizará un repaso para el examen bimestral.
2. Examen bimestral. Revise el horario de exámenes donde se especifican día y hora de evaluación.
3. Se sugiere dedicar el tiempo necesario para revisar cada tema y resolver dudas antes de la evaluación.

Los animo a desarrollar la "evaluación bimestral" con la confianza de que han dado lo mejor de sí mismos. Recuerden que el aprendizaje es un proceso en su formación.

¡Les deseo mucho éxito en esta evaluación!

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2:

Determina los principios y leyes de las desigualdades para modelar y resolver problemas empleando los sistemas de desigualdades.

Para lograr este resultado de aprendizaje, nos centraremos en aprender y aplicar conceptos fundamentales de inecuaciones y desigualdades.

Mediante la resolución de sistemas de inecuaciones, serán capaces de relacionar los conocimientos adquiridos con situaciones prácticas y problemas del mundo real, promoviendo el pensamiento crítico y el desarrollo de estrategias efectivas para modelar y resolver desigualdades.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

Esta semana trabajaremos en el estratégico campo de las desigualdades. Las desigualdades nos presentan una vista panorámica de relaciones matemáticas que no son exactamente iguales, pero que poseen límites y rangos. El objetivo es comprender sus fundamentos y explorar cómo estos conceptos se aplican en distintas situaciones.

3.1. Introducción a las desigualdades

3.1.1. La recta real

En nuestro día a día, nos encontramos con situaciones donde no todo es exactamente igual. Este es el principio detrás de las desigualdades.

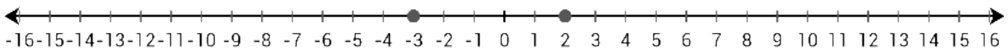
Para visualizar y entender estos conceptos, recurrimos a una herramienta esencial: la *recta real.*

La **recta real** es una línea recta sobre la que cada punto representa un número real. Esta recta nos ayuda a ubicar números, estableciendo una correspondencia uno a uno con los números reales. Matemáticamente, podemos representarla mediante el conjunto *R*.

La **recta real** inicia en el punto cero, y se extiende infinitamente en ambas direcciones. Los números a la derecha del cero son positivos, y a la izquierda, negativos. Por ejemplo, el número 2 se representa con un punto situado a la derecha del 0, y el número – 3 a la izquierda.

Figura 11

Representación de la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

Pero, ¿cuál es la importancia de esta recta en las desigualdades? Definitivamente, las desigualdades a menudo involucran rangos de números, y la recta real nos permite visualizar y representar estos rangos claramente.

Por **ejemplo**, la desigualdad $x > 2$ implica todos los números a la derecha del punto 2 en nuestra recta. Al trabajar con desigualdades, es fundamental familiarizarse con la recta real. No solo nos proporciona una herramienta visual, sino que también refuerza nuestra comprensión sobre la relación entre diferentes números reales.

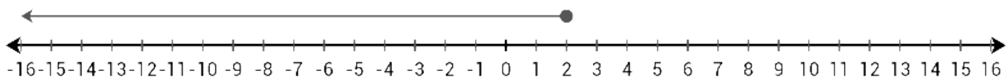
Ejercicio 3.1. Resolver la inecuación $5x + 4 \leq 14$ y representar las respuestas en la recta real:

$5x + 4 \leq 14$	Esta es la inecuación original.
$5x + 4 - 4 \leq 14 - 4$	Restamos 4 a ambos lados de la inecuación.
$5x \leq 10$	Simplificamos la inecuación.
$x \leq 2$	Dividimos ambos lados para 5, luego se despeja x.

La solución anterior se visualiza de la siguiente manera en la recta real:

Figura 12

Recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

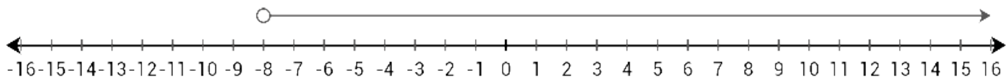
Las soluciones de la desigualdad son todos los valores menores e iguales a 2, es decir, en el intervalo $(-\infty, 2]$.

Ejercicio 3.2. Resolver la inecuación $\frac{2x-5}{3} \leq x + 1$ y representar las respuestas en la recta real:

$\frac{2x-5}{3} < x+1$	Esta es la inecuación original.
$3 \times \frac{2x-5}{3} < 3 \times (x+1)$	Multiplicamos ambos lados por 3 para eliminar el denominador.
$2x - 5 < 3x + 3$ $-x < 8$	Simplificamos la inecuación.
$x > -8$	Multiplicamos por -1 e invertimos el signo de la inecuación.

Figura 13

Representación gráfica de la desigualdad x> -8



Nota. Arteaga, M., 2023.

Las soluciones de la desigualdad son todos los valores mayores a −8, es decir, en el intervalo $(-8, \infty)$.

3.1.2. ¿Qué es una desigualdad?

Una **desigualdad** es una relación entre dos expresiones matemáticas que indica si una es menor, menor o igual, mayor, o mayor o igual que la otra (Stewart et al., 2017). En términos simples, mientras que una ecuación establece que dos cantidades son iguales (por ejemplo, $x = 5$), una desigualdad señala que una cantidad es mayor o menor que otra (como $x > 3$ o $x \leq 4$).

Los principales **símbolos** de desigualdad son:

- Mayor que: >

- Menor que: $<$
- Mayor o igual que: $\geq$
- Menor o igual que: $\leq$

Relacionándolo con la recta real, una desigualdad como $x > 2$se representa con todos los puntos a la derecha del 2, indicando que x puede ser cualquier número mayor que ese valor.

Mientras que las ecuaciones nos ofrecen soluciones precisas, las desigualdades nos proporcionan un rango de soluciones. Ambas son herramientas cruciales en matemáticas y, en conjunto con la recta real, nos permiten visualizar y entender relaciones entre números y expresiones.

$5x + 4 = 6$ Ecuación.

$5x + 4 \geq 6$ Inecuación.

3.2. Pasos para resolver una desigualdad simple

A medida que exploramos las desigualdades y su representación en la recta real, surge una pregunta esencial: ¿cómo resolvemos una desigualdad? Si bien las desigualdades y las ecuaciones comparten similitudes, el proceso de resolución varía en algunos aspectos, veamos a continuación los siguientes pasos para resolver una desigualdad simple (Stewart et al., 2017):

1. **Simplificar:** al igual que en las ecuaciones, es fundamental simplificar ambos lados de la desigualdad. Por ejemplo, si tenemos $2x + 4 > 10$, el primer paso es restar 4 en ambos lados para obtener $2x > 6$.
2. **Despejar la variable:** divide o multiplica para/por el coeficiente necesario para que la variable quede sola. Usando el ejemplo anterior, dividimos ambos lados para 2: $x > 3$.

Un aspecto para tener en cuenta: si multiplicas o divides ambos lados de una desigualdad por/para un número negativo, el signo de la desigualdad se invierte.

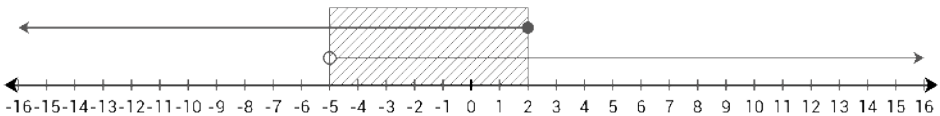
Ahora, si enfrentamos **desigualdades simultáneas**, como $x > 2$ y $x \leq 5$, la solución es el conjunto de valores que satisface **ambas** desigualdades. En la recta real, esto se vería como un segmento que va desde el 2 (sin incluir) hasta el 5 (incluido).

Ejercicio 3.3. Dada la desigualdad: $12 > -3 - 3x \geq -9$

$12 > -3 - 3x$	Primera inecuación.
$15 > -3x$	Sumamos 3 a ambos lados.
$-5 < x$	Dividimos por -3 e invertimos el signo.
$-3 - 3x \geq -9$	Segunda inecuación.
$-3x \geq -6$	Sumamos 3 a ambos lados.
$x \leq 2$	Dividimos para -3 e invertimos el signo.

Figura 14

Gráficas de desigualdades



Nota. Arteaga, M., 2023.

Las **soluciones** de las desigualdades simultáneas son todos los valores mayores a −5 y menores e iguales a 2, es decir, en el intervalo $(-5; 2]$.

Practicar y familiarizarse con estos pasos y conceptos es fundamental. Recuerden siempre visualizar las soluciones en la recta real para tener una mejor comprensión.

Esta semana hemos iniciado el estudio de las desigualdades, un aspecto fundamental en las matemáticas. Empezamos comprendiendo la recta real, esa herramienta indispensable que nos permite ubicar y relacionar números reales. La recta nos ayudó a visualizar los rangos de números que se asocian a cada desigualdad.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para reforzar sus conocimientos sobre los temas estudiados, lo invito a realizar las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "Introducción a las desigualdades y la recta real" estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. El propósito es reforzar la comprensión conceptual relacionada con desigualdades, inecuaciones e intervalos, abarcando definiciones, tipos, formas de resolver algebraica y gráficamente, así como aplicaciones en la recta numérica.

    - Intervalos introducción | tipos de intervalos.
    - Inecuaciones de primer grado – lineales | ejemplo 1.
    - Introducción a las desigualdades.
    - 01. ¿Qué es una desigualdad? (Soluciones, intervalos, gráfica, etc.).

    Luego de revisar las herramientas educativas antes sugeridas con seguridad, usted pudo aclarar y consolidar conceptos clave referidos a tipos de desigualdades, métodos de resolución algebraica y representación gráfica en la recta numérica.

2. **Le invito a resolver desigualdades lineales:**

    Resuelva las siguientes desigualdades lineales y representa las soluciones en la recta real.

    - $3x - 4 > 5$

- $2 - 5x \leq 7$
- $-3x + 6 \geq -3$

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

Al abordar las actividades de resolución de desigualdades lineales y su representación en la recta real, ha fortalecido habilidades cruciales en el análisis matemático. Resolver desigualdades permite practicar y comprender cómo manipular y simplificar expresiones matemáticas para encontrar rangos de soluciones, en lugar de valores únicos. Esta capacidad de trabajar con desigualdades es esencial, ya que refleja situaciones de la vida real, donde las soluciones pueden no ser precisas, sino que existen dentro de un rango. Representar estas soluciones en la recta real no solo fortalece su comprensión de las relaciones numéricas, sino que también desarrolla su habilidad para visualizar y conceptualizar estas relaciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 10

Unidad 3. Desigualdades

Ahora nos corresponde revisar lo relacionado con las "Desigualdades no lineales". Estas no solo son fundamentales en diversos campos científicos, sino que también representan una herramienta para comprender y analizar situaciones y problemas complejos en la vida cotidiana. El objetivo es brindarles una visión clara y concisa de esta temática. ¡Iniciemos!

3.3. Desigualdades no lineales

Las desigualdades lineales son aquellas que involucran expresiones lineales. Por ejemplo, $3x + 2 \leq 11$. Son llamadas "lineales" porque su gráfica en un sistema de coordenadas es una línea recta.

Por otro lado, las *desigualdades no lineales* son aquellas que pueden incluir términos con exponentes diferentes de 1 o funciones que no son lineales. Por ejemplo, $x^2 + 2x > 3$. La gráfica de estas desigualdades no da como resultado una línea recta, sino que puede ser una curva o incluso una superficie en más dimensiones.

3.3.1. Pasos para resolver desigualdades no lineales

Veamos a continuación los pasos para resolver desigualdades no lineales, el conocimiento previo relacionado con ecuaciones es muy importante para abordar este tema.

1. *Mueva todos los términos a un lado.* Recordando nuestro acercamiento anterior a las desigualdades, es esencial simplificar el problema lo máximo posible. Al igual que con las ecuaciones, queremos tener la desigualdad en una forma estándar.

   Por ejemplo, para $x^2 - 5x > 6$, querríamos tener todos los términos a un lado: $x^2 - 5x - 6 > 0$.

2. *Factorizar*. Este proceso nos ayuda a descomponer la desigualdad y, en muchos casos, facilita encontrar las soluciones.

   Continuando con el ejemplo anterior, podríamos factorizar la expresión cuadrática a: $(x - 6)(x + 1) > 0$.

3. *Encuentre los intervalos*. Este paso es crucial para determinar dónde nuestra desigualdad se cumple. Usando las raíces de nuestra factorización, podemos determinar intervalos de prueba. Para $(x - 6)(x + 1) > 0$, nuestros intervalos estarían determinados por – 1 y 6.
4. *Resuelva*. Con los intervalos en mano, evaluamos la desigualdad en puntos estratégicos dentro de estos intervalos. Si escogemos *x* = 0 (que está entre – 1 y 6), y sustituimos en nuestra desigualdad, vemos que se cumple. Por lo tanto, este intervalo es parte de nuestra solución.

En la presente infografía, se detalla información relacionada con los Cuatro pasos para resolver desigualdades no lineales. Le invito a revisarla cuidadosamente, ya que seguramente les resultará muy beneficiosa.

[Cuatro pasos para resolver desigualdades no lineales]

3.3.2. Desigualdades cuadráticas

Al profundizar en las desigualdades no lineales, encontramos un tipo particularmente común: las desigualdades cuadráticas. Estas involucran polinomios de segundo grado, que ya hemos visto en ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Sin embargo, ahora nos enfrentamos con desigualdades, como $ax^2 + bx + c > 0$ *o* $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Recuerden, el proceso comienza, como ya lo hemos estudiado, moviendo todos los términos a un lado. Luego, factorizamos si es posible. Por ejemplo, $x^2 – 3x – 4 > 0$, al factorizar, obtenemos $(x – 4)(x + 1) > 0$.

Determinar los intervalos de solución sigue siendo esencial. Las raíces de nuestra factorización nos ayudan a definir estos intervalos. Después, como ya lo sabemos, probamos un valor dentro de cada intervalo.

Para $(x – 4)(x + 1) > 0$, los intervalos son determinados por – 1 y 4. Si escogemos *x* = 0, la desigualdad se cumple, siendo este intervalo parte de nuestra solución.

Ejercicio 3.4. Resolver la siguiente inecuación cuadrática: $x^2 > 3(x + 6)$

1. Determinar las raíces o puntos críticos.

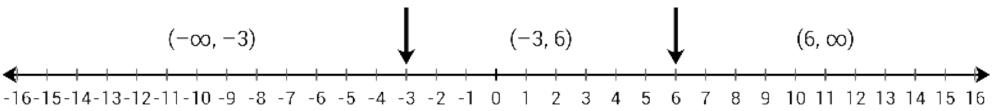
$x^2 > 3x + 8$	Inecuación original.
$x^2 - 3x - 18 > 0$	Expandir y simplificar la expresión.
$(x - 6)(x + 3) > 0$	Factorizar el polinomio.

$x_1 = 6; x_2 = -3$ Determinar las raíces.

Estos números dividen la recta real en los intervalos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 6)$ y $(6, \infty)$.

Figura 15

Representación de la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

2. Evaluamos en los intervalos

En la siguiente tabla observamos el siguiente paso para resolver una inecuación cuadrática, el cual es evaluar en los intervalos.

Tabla 5

Evaluación en los intervalos

Intervalo	Ejemplo	Cálculo con el ejemplo	Resultado del producto	Conclusión
$x < -3$	$x = -4$	$(-4 - 6)(-4 + 3)$	10	**Mayor que cero**
$-3 < x < 6$	$x = 0$	$(0 - 6)(0 + 3)$	-18	Menor que cero
$x > 6$	$x = 7$	$(7 - 6)(7 + 3)$	10	**Mayor que cero**

Nota. Arteaga, M., 2023.

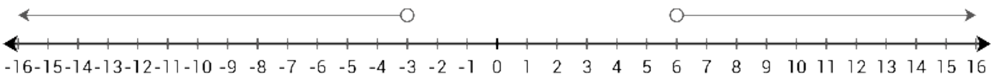
3. Construir la solución

Para determinar la solución, examinamos el signo de esta inecuación en los intervalos definidos por las raíces $x = 6$ y $x = -3$.

La inecuación $(x-6)(x+3) > 0$ es verdadera en los intervalos donde el producto es positivo, es decir, cuando $x < -3 \cup x > 6$.

Figura 16

Representación de desigualdades en la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

3.3.3. Desigualdades con factores repetidos

Las desigualdades con factores repetidos presentan una singularidad en su solución debido a la multiplicidad de las raíces. Supongamos que tenemos una desigualdad como $x^3 - 3x^2 \geq 0$. Al factorizar, obtenemos $x^2(x-3) \geq 0$.

Aquí, el factor x^2 se repite, lo que afecta cómo interpretamos los intervalos.

Para $x^2(x-3) \geq 0$, las soluciones serían *x* = 0 (una raíz doble) y *x* = 3. Al probar los intervalos, encontramos que la solución es $x \leq 0 \;\; y \;\; x \geq 3$.

Veamos a continuación un ejemplo con más detalle:

Ejercicio 3.5. Resolver la siguiente inecuación:

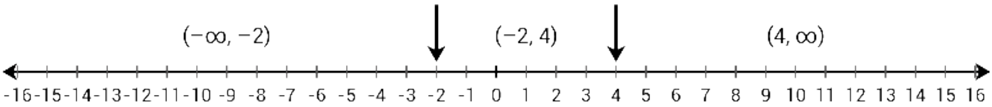
$$(x-4)(x+2)^2 > 0$$

1. Determinar las raíces o puntos críticos

$(x-4)\cdot(x+2)^2 = 0$	Encontramos los puntos donde la expresión.
$x_1 = 4; \quad x_2 = -2$	Los puntos críticos. $x_1 = 4$ y $x_2 = -2$

Figura 17

Representación de intervalos en la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

2. Evaluamos en los intervalos $(-\infty,-2),(-2,4)\ \ y\ \ (4,\infty)$.

En la siguiente tabla observamos el siguiente paso para resolver una inecuación, el cual es evaluar los intervalos.

Tabla 6

Evaluación de los intervalos

Intervalo	Ejemplo	Cálculo con el ejemplo	Resultado del producto	Conclusión
$x < -2$	$x = -3$	$(-3 -4)\ (-3 + 2)^2$	-7	Producto negativo
$-2 < x < 4$	$x = 0$	$(0 - 4)\ (0 + 2)^2$	-16	Producto negativo
$x > 4$	$x = 5$	$(5 - 4)\ (5 + 2)^2$	49	**Producto positivo**

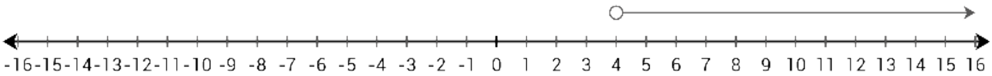
Nota. Arteaga, M., 2023.

3. Construir la solución

La inecuación $(x-4)(x+2)^2>0$ es verdadera en los intervalos donde el producto es positivo, es decir, cuando $x>4$. Por lo tanto, la solución es: $(4,\infty)$.

Figura 18

Representación de la solución de una desigualdad en la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

3.3.4. Desigualdades con cocientes

En estas desigualdades, la presencia de un denominador añade complejidad. Es esencial asegurarse de que el denominador nunca sea cero.

Supongamos que tenemos $\frac{x^2-4}{x-2} > 0$. Al factorizar el numerador, obtenemos $\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} > 0$. Pero tenga en cuenta que, a pesar de que *x* - 2 se cancela, **no podemos hacer** *x* = 2, ya que el denominador sería cero. La solución es *x* > -2 excluyendo *x* = 2.

Ejercicio 3.6. Resolver la siguiente inecuación: $\frac{2x+6}{x-2} < 0$

Como ya están todos los términos al lado izquierdo $\frac{2x+6}{x-2} < 0$

Factorizamos $\frac{2(x+3)}{x-2} < 0$

1. Determinar las raíces o puntos críticos

$2x + 6 = 0$ Encontrar donde el numerador cero.

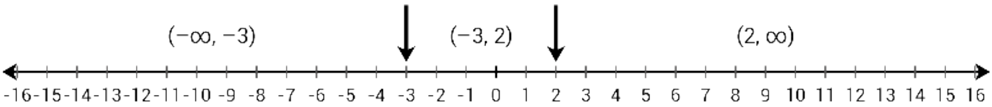
$x = -3$ El numerador es cero en $x_1 = -3$.

$x - 2 = 0$ Encontrar donde el denominador es cero.

$x = 2$ El denominador es cero en $x_2 = 2$.

Figura 19

Representación de intervalos en la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

2. Evaluamos en los intervalos $(-\infty,-3),(-3,2)\ \ y\ \ (2,\infty)$.

En la siguiente tabla observamos el siguiente paso para resolver una inecuación, el cual es evaluar en los intervalos.

Tabla 7

Evaluación en los intervalos

Intervalo	Ejemplo	Cálculo con el ejemplo	Resultado del producto	Conclusión
$x <—3$	−4	$\frac{2(-4)+6}{-4-2}$	$\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$	Producto positivo
$—3 < x < 2$	0	$\frac{2(0)+6}{0-2}$	$\frac{6}{-2}=-3$	**Producto negativo**
$x < 2$	3	$\frac{2(3)+6}{3-2}$	$\frac{12}{1}=12$	Producto positivo

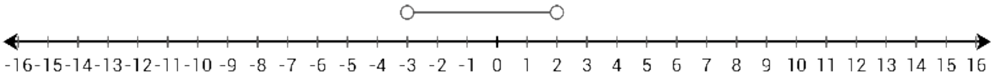
Nota. Arteaga, M., 2023.

3. Construir la solución

Queremos saber cuándo $\frac{2x+6}{x-2} < 0$. Por la tabla, podemos ver que la fracción es negativa en el intervalo $-3 < x < 2$. Pero, recordemos que no puede ser 2, ya que haría el denominador cero. Entonces, la solución a la inecuación es: $-3 < x < 2$. Esto se puede escribir en notación de intervalo como: (− 3, 2).

Figura 20

Representación gráfica de un intervalo en la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

Concluimos la semana 10, donde estudiamos el mundo de las desigualdades no lineales. Es esencial recordar que, a diferencia de las lineales, las desigualdades no lineales pueden tener gráficas que no sean rectas, como curvas o superficies en más dimensiones. Hemos aprendido los pasos para resolverlas: desde la simplificación y factorización hasta la determinación y prueba de intervalos. Continúen practicando y consolidando este conocimiento, que es fundamental para su futuro como estudiantes y profesionales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Para reforzar sus conocimientos sobre los temas estudiados, lo invito a realizar las siguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre *"Desigualdades no lineales"* estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. El objetivo es reforzar el aprendizaje relacionado con la resolución algebraica y gráfica de inecuaciones lineales y cuadráticas, incluyendo casos con fracciones.

   - Inecuaciones cuadráticas solución | ejemplo 1.
   - Desigualdades cuadráticas – ejercicio 1.
   - Inecuaciones de primer grado – lineales con fracciones| ejemplo.

   Las herramientas educativas sugeridas con sus explicaciones guiadas, ejemplos resueltos y ejercicios propuestos sobre inecuaciones lineales y cuadráticas, sin duda le permitieron interiorizar de mejor manera las técnicas de resolución tanto simbólica como gráfica. Se recomienda una actitud proactiva, resolviendo en paralelo los casos, comparándolos luego con las soluciones dadas e identificando aspectos que necesita reforzar.

2. Resuelva las siguientes desigualdades cuadráticas y represente las soluciones en la recta numérica.

   - $x^2 - 4x + 3 > 0$
   - $x^2 + 2x - 8 \leq 0$

3. Resuelva las siguientes desigualdades que involucran a los cocientes. Considere los valores críticos y pruebe intervalos para determinar las soluciones.

   - $\frac{x-2}{x+3} > 0$
   - $\frac{2x^2-5x-3}{x^2-4} \geq 0$

4. Resuelva las siguientes desigualdades que incluyen factores repetidos.

   - $x^2(x-3) \leq 0$
   - $(x+2)^2(x-5) > 0$

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al abordar la resolución de desigualdades cuadráticas, desigualdades con cocientes y desigualdades con factores repetidos, y representar sus soluciones en la recta numérica, ha demostrado una comprensión integral de conceptos matemáticos avanzados y su aplicación práctica.

Semana 11

Unidad 3. Desigualdades

El objetivo de esta semana es brindarles una visión integral de cómo las desigualdades se aplican en contextos avanzados y cómo modelar situaciones reales utilizando estas herramientas. Esta comprensión será esencial para su futuro pedagógico, permitiéndoles impartir conocimientos matemáticos con aplicaciones prácticas.

3.4. Desigualdades avanzadas y modelado con desigualdades

3.4.1. Desigualdades con valor absoluto

Para iniciar es necesario centrarnos en un concepto importante: el **valor absoluto**. En nuestro día a día, usamos este concepto para denotar la “distancia” sin considerar la dirección, como cuando decimos que dos lugares están a “5 kilómetros de distancia”, sin especificar en qué dirección.

El **valor absoluto** de un número se representa mediante el símbolo |*x*|. Matemáticamente, |*x*| se define como:

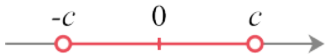
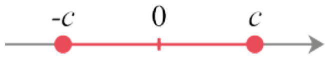
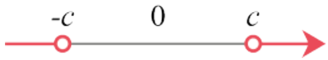
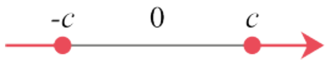
$$\{x \quad si \quad x \geq 0 \quad -x \quad si \quad x < 0$$

Es decir, siempre nos da un resultado positivo o cero.

Al enfrentarnos a desigualdades que involucran valor absoluto, es vital comprender que estamos tratando con dos posibles escenarios debido a la naturaleza bifurcada de la definición. Por **ejemplo**, al resolver $|x| < a$, estamos buscando soluciones para $-a < x < a$ (Stewart et al., 2017). En la siguiente tabla podemos observar con más detalle las desigualdades, su forma equivalente y la gráfica respectiva:

Tabla 8

Desigualdades con valor absoluto

N.	Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1.	$\lvert x\rvert < c$	$-c < x < c$	
2.	$\lvert x\rvert \leq c$	$-c \leq x \leq c$	
3.	$\lvert x\rvert > c$	$x < —c$ o $c < x$	
4.	$\lvert x\rvert \geq c$	$x \leq c$ o $c \leq x$	

Nota. Arteaga, M., 2023.

Para resolver desigualdades con valor absoluto, se debe tener en cuenta:

1. Escribir dos desigualdades, una para el caso positivo y otra para el caso negativo.
2. Resolver ambas desigualdades de manera independiente.
3. Combinar las soluciones para obtener el resultado final.

Revisemos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3.7. Resolver la desigualdad: $\lvert 3x+2\rvert < 4$

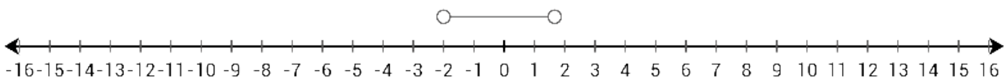
$-4 < 3x+2 < 4$	Transformación inicial según: $—a < x < a$.
$3x+2 < 4$	Primero resolvemos para $3x+2 < 4$.
$3x < 2$	Restando 2 a ambos lados.
$x < \frac{2}{3}$	Dividiendo ambos lados para 3.

$3x + 2 > -4$	Luego resolvemos para $3x + 2 >— 4$.
$3x > -6$	Restando 2 a ambos lados.
$x > -2$	Dividiendo ambos lados para 3.

Entonces, las soluciones son $x > -2$ y $x < \frac{2}{3}$, que es equivalente a decir que $-2 < x < \frac{2}{3}$. Esto se puede escribir en notación de intervalo como: $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

Figura 21

Representación gráfica de un intervalo abierto en la recta real



Nota. Arteaga, M., 2023.

3.4.2. Modelado con desigualdades

Luego de tener claro el concepto de desigualdades y, en especial, las que involucran el valor absoluto, vamos a ver cómo estas herramientas se aplican en el mundo real. Las desigualdades no son solo abstracciones matemáticas; son representaciones de situaciones donde hay límites o restricciones. Analicemos los siguientes **ejemplos** prácticos:

- Pensemos, en un presupuesto. Si tienes \$200 para gastar en libros y un libro cuesta *x*, podríamos expresar esta situación como $x \leq 200$. Aquí, la desigualdad nos indica que no podemos gastar más de \$200.
- Cuando necesitamos mantener algo dentro de un cierto rango. Imagina que eres un agricultor y tienes plantas que necesitan temperaturas entre 20 °C y 30 °C para su desarrollo. Esto se traduciría en la desigualdad $20 \leq t \leq 30$, donde *t* representa la temperatura.

- Imagine que está organizando un evento y el local tiene un límite de 150 personas debido a regulaciones de seguridad. Si ya ha invitado a 100 personas, pero aún espera las respuestas de personas más, ¿cómo representaría esta situación usando una desigualdad? La respuesta a esta interrogante es: $100 + p \leq 150$.

La habilidad de modelar situaciones prácticas con desigualdades permitirá, como futuros educadores, mostrar a sus estudiantes la relevancia de las matemáticas en la vida diaria. Es un nexo entre lo abstracto y lo concreto (Stewart et al., 2017).

Ejercicio 3.8. Un maestro tiene un sistema de calificación para sus alumnos basado en puntos. Cada tarea o actividad que el alumno realiza le otorga ciertos puntos. Si un estudiante consigue entre 70 y 100 puntos en total, aprueba el curso. Si Juan ha realizado tareas que suman *x* puntos y aún le queda una tarea que le puede dar un máximo de 20 puntos, ¿qué intervalo de puntos, *x*, tiene actualmente Juan para tener la posibilidad de aprobar el curso después de completar la última tarea?

Juan necesita entre 70 y 100 puntos para aprobar. Si la última tarea le da hasta 20 puntos, entonces la desigualdad que representa la situación es: $70 \geq x + 20 \geq 100$.

$70 \geq x + 20$	Restamos 20 a ambos lados de la inecuación.
$50 \geq x$	Resultado de la primera inecuación.
$x + 20 \geq 100$	Restamos 20 a ambos lados de la inecuación.
$x \geq 80$	Resultado de la segunda inecuación.

Solución: para tener la posibilidad de aprobar el curso después de completar la última tarea, Juan debe tener actualmente entre 50 y 80 puntos, es decir, el intervalo es [50, 80].

Ejercicio 3.9. Supongamos que una empresa de fabricación produce camisetas. El costo para producir camisetas es $C(x) = 2x + 50$ dólares. La empresa quiere mantener sus costos de producción entre $100 y $250 al mes. ¿Qué intervalo de camisetas, *x*, puede producir la empresa para mantener sus costos de producción entre $100 y $250?

Para resolver el problema, debemos encontrar el valor de x que satisface la siguiente desigualdad: $100 \leq 2x + 50 \leq 250$.

$100 \leq 2x+50$	Restamos 50 a ambos lados de la inecuación.
$50 \leq 2x$	Dividimos ambos lados para 2.
$25 \leq x$	Resultado de la primera inecuación.
$2x + 50 \leq 250$	Restamos 50 a ambos lados de la inecuación.
$2x \leq 200$	Dividimos ambos lados para 2.
$x \leq 100$	Resultado de la segunda inecuación.

Solución: para que la empresa mantenga sus costos de producción entre $100 y $250, deben producir entre 25 y 100 camisetas, es decir, el intervalo es $[25, 100]$.

Realicemos a continuación algunos ejercicios.

Ejercicio 3.10. *Planes de llamadas internacionales*. Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas internacionales.

- Plan A: 25 dólares por mes y 5 centavos por minuto.
- Plan B: 5 dólares por mes y 12 centavos por minuto.

¿Para qué intervalo de minutos de llamadas internacionales será financieramente más ventajoso el plan B?

Asumiendo que *x* es el número de minutos de llamadas internacionales.

Tabla 9
Planes de llamadas internacionales

	Costo fijo	Costo por minuto	Ecuación
Plan A	\$25	\$0.05	$P_A = 25 + 0.05x$
Plan B	\$5	\$0.12	$P_B = 25 + 0.05x$

Nota. Arteaga, M., 2023.

Queremos encontrar el intervalo de minutos para el cual el plan B es más barato que el plan A. Esto significa: $P_B < P_A$

$$5 + 0.12x < 25 + 0.05x$$

Resolviendo la desigualdad, obtenemos que: $x < 285.71$.

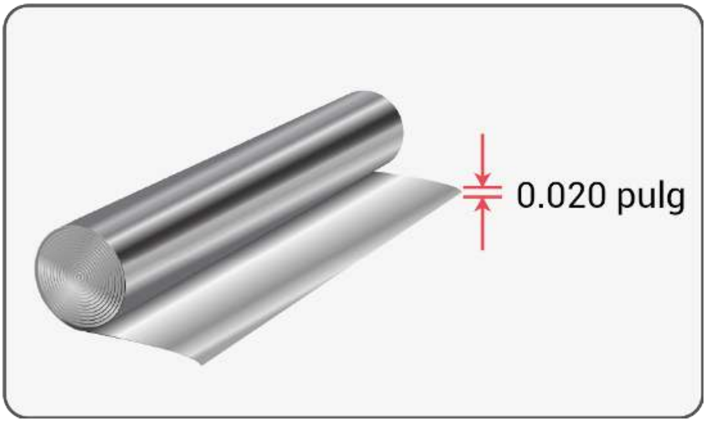
Solución: el plan B es más ventajoso para menos de 285 minutos de llamadas internacionales al mes.

Ejercicio 3.11. *Grueso de un laminado.* Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con base de nylon) de 0.020 pulgadas de grosor con una tolerancia de 0.003 pulgadas.

1. Encuentre una desigualdad que contenga valores absolutos que describa el intervalo del posible grueso para el laminado.
2. Resuelva la desigualdad que haya encontrado en el inciso a).

Figura 22

Grueso de un laminado. Ejercicio 3.11



Nota. Tomado de *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo (7th ed.) (p. 91)*, por Stewart et al., 2017, Cengage Learning.

La tolerancia es la cantidad máxima que se permite desviar del grosor especificado. En este caso, el grosor especificado es de 0.020 pulgadas y la tolerancia es de 0.003 pulgadas. Esto significa que el grosor del laminado puede ser 0.003 pulgadas más gruesas o 0.003 pulgadas más delgadas que el especificado.

Si representa el grosor real del laminado, la diferencia entre el grosor real y el grosor especificado es *x* – 0.020 pulgadas. Dado que esta diferencia no debe exceder la tolerancia, en valores absolutos, esto se representa como:

$$|x - 0.020| \leq 0.003$$

$x - 0.020 \leq 0.003$	Sumamos 0.020 a ambos lados de la inecuación.
$x \leq 0.003$	Resultado de la primera inecuación.
$x - 0.020 \geq -0.003$	Sumamos 0.020 a ambos lados de la inecuación.

$x \geq 0.017$	Resultado de la segunda inecuación.

Solución: el grosor del laminado puede variar entre 0.017 pulgadas y 0.023 pulgadas. $(0.017 \leq x \leq 0.023)$.

Ejercicio 3.12. Rendimiento de gasolina g. El rendimiento de gasolina (medido en millas/gal) para un auto en particular, manejado a v mi/h, está dado por la fórmula $g = 10 + 0.9v – 0.01v^2$, mientras v se halle entre 10 y 75 mi/h. ¿Para qué intervalo de velocidades el rendimiento del vehículo será de 30 mi/gal o mejor?

$g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$	Tenemos la ecuación del rendimiento g.
$g \geq 30$ $10 + 0.9v - 0.01v^2 \geq 30$ $0.9v - 0.01v^2 \geq 20$	Podemos reemplazar g en la desigualdad que modela el problema planteado.
$100(0.9v - 0.01v^2) \geq 100(20)$ $90v - v^2 \geq 2000$	Multiplicamos cada término por 100 para deshacernos del coeficiente decimal.
$v^2 - 90v + 2000 \leq 0$	Multiplicamos por -1 la ecuación para ordenar los términos, se debe invertir el operador de desigualdad.

Esta es una desigualdad cuadrática. La solución de esta desigualdad nos dará el intervalo de velocidades que satisface el rendimiento de 30 mi/gal o superior.

Para resolver esta desigualdad, primero necesitamos encontrar las raíces (si existen) de la ecuación cuadrática:

$v_1 = 40$ $v_2 = 50$	Usando la factorización, encontramos las raíces del polinomio.
$(v-40)(v-50) \leq 0$	Para determinar dónde está la inecuación negativa, evaluamos un valor entre las raíces.
$40 \leq v \leq 50$	La inecuación es satisfecha en el intervalo $40 \leq v \leq 50$

Solución: la velocidad debe estar entre 40 mi/h y 50 mi/h para que el vehículo tenga un rendimiento de 30 mi/gal o mejor $40 \leq v \leq 50$.

Hemos culminado la semana 11 y es esencial recordar la relevancia del valor absoluto y cómo representa la "distancia" sin considerar dirección. Al utilizar desigualdades con valor absoluto, siempre consideremos los dos escenarios posibles: el positivo y el negativo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades y ejercicios que se describen a continuación:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "*Modelado de contextos reales mediante desigualdades*" estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. La finalidad es reforzar los conocimientos necesarios para resolver problemas cotidianos y de contexto educativo que involucren plantear y solucionar algebraica y gráficamente desigualdades lineales y con valor

    - Desigualdades con valor absoluto – caso 1.
    - Lenguaje algebraico | introducción.
    - Inecuaciones con valor absoluto | ejemplo 1.
    - Solución de problemas con ecuaciones de primer grado | ejemplo 1.

Al revisar estos videos sobre desigualdades con valor absoluto, lenguaje algebraico, inecuaciones y solución de problemas con ecuaciones de primer grado, es esencial que reflexione sobre cómo ha integrado estos conceptos en su comprensión global de las matemáticas.

2. Resuelva las siguientes desigualdades con valor absoluto y represente las soluciones en la recta numérica.

    - $|x-3| < 5|x-3| < 5$
    - $|2x+4| \geq 6|2x+4| \geq 6$

3. Modele los siguientes problemas utilizando desigualdades y luego resuélvalos.

    - **Problema 1. U**n estudiante necesita al menos un 70 % en su examen final para aprobar la asignatura. Si el examen vale el 40 % de la nota final y el estudiante tiene un promedio del 65 % antes del examen, ¿cuál es el rango de notas que debe obtener en el examen final para aprobar la asignatura?
    - **Problema 2. U**na empresa de telefonía móvil ofrece un plan que incluye hasta 500 minutos de llamadas al mes. Por cada minuto adicional, se cobra una tarifa. Si un usuario no desea gastar más de $50 en minutos adicionales, cada minuto adicional cuesta $0.10, ¿cuántos minutos adicionales como máximo puede usar?

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Luego de desarrollar los ejercicios y problemas propuestos sobre desigualdades con valor absoluto y su aplicación a situaciones prácticas, es importante realizar una autorreflexión para afianzar los aprendizajes.

Semana 12

Unidad 3. Desigualdades

En esta ocasión, abordaremos el tema sobre la representación gráfica de desigualdades. Esta herramienta nos permitirá visualizar y comprender mejor la naturaleza y soluciones de las desigualdades matemáticas. Es esencial, no solo para una formación matemática sólida, sino también para desarrollar habilidades analíticas y críticas en la educación.

3.5. Representación gráfica de desigualdades

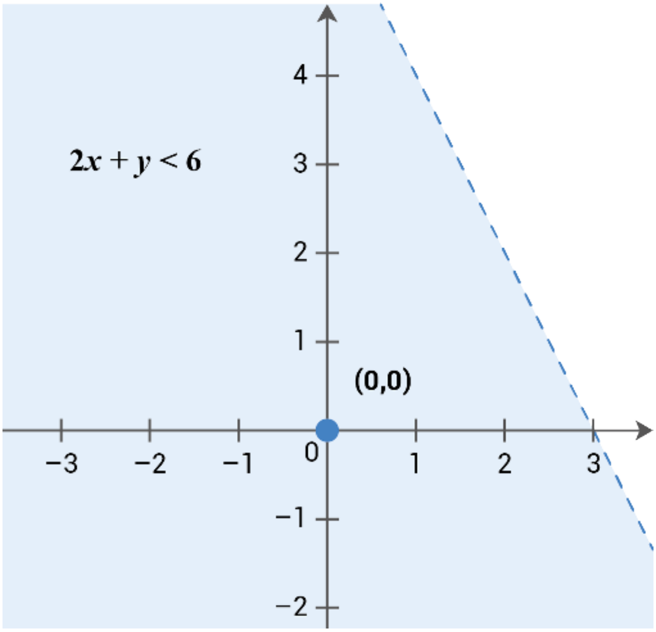
En el estudio de las desigualdades, es esencial comprender su representación gráfica, al ser una herramienta poderosa que nos permite visualizar y analizar su comportamiento. El **plano cartesiano** se convierte en nuestra principal herramienta para este fin. Compuesto por dos ejes perpendiculares, el eje *x* y el eje *y*, nos permite ubicar cualquier punto (*x*,*y*) y representar gráficamente ecuaciones e inecuaciones.

Una **desigualdad lineal** en dos variables, por ejemplo, $ax + by \leq c$, puede representarse como una semirrecta o un semiplano, dependiendo del signo de la desigualdad. Para esto, primero graficamos la ecuación $ax + by = 0$ como si fuera una recta. Luego, determinamos qué lado del plano satisface la desigualdad.

Revisemos el siguiente ejercicio que nos ilustra este proceso: representar $2x + y < 6$. Primero, se dibuja la recta $2x + y = 6$. Luego, escogemos un punto *test*, como (0,0), y lo sustituimos en la desigualdad. Si satisface la condición, ese lado del plano es la solución.

Figura 23

Representación gráfica de desigualdades



Nota. Arteaga, M., 2024.

La habilidad de visualizar estas desigualdades en el plano cartesiano enriquecerá nuestro análisis y comprensión de problemas más complejos.

3.5.1. Desigualdades gráficas en una variable

Respecto a las representaciones gráficas de desigualdades, ahora nos enfocaremos en desigualdades con una sola variable. Al igual que con ecuaciones, las desigualdades en una variable se pueden visualizar en un espacio gráfico, en este caso, la **recta real**.

La recta real es una línea horizontal donde cada punto representa un número real. Para representar la desigualdad $x > 2$, por ejemplo, señalamos un punto abierto en el 2 (indicando que 2 no está incluido) y sombreamos hacia la derecha, mostrando todos los números mayores que 2.

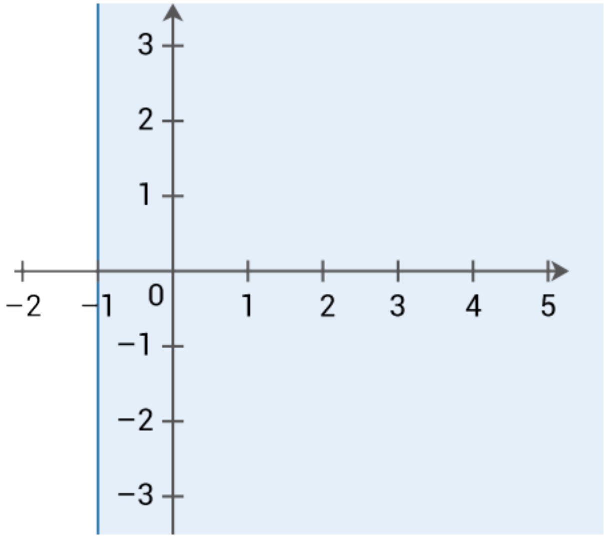
De manera similar, $x \leq -1$ se representa con un punto cerrado en − 1 (ya que − 1 está incluido en la solución) y un sombreado hacia la izquierda, cubriendo todos los números menores o iguales a − 1. Revisemos los siguientes ejercicios:

Ejercicio 3.13. *Graficar la desigualdad*: $x \geq -1$

Resolvemos utilizando la calculadora gráfica:

Figura 24

Desigualdad de una variable (x)



Nota. Arteaga, M., 2024.

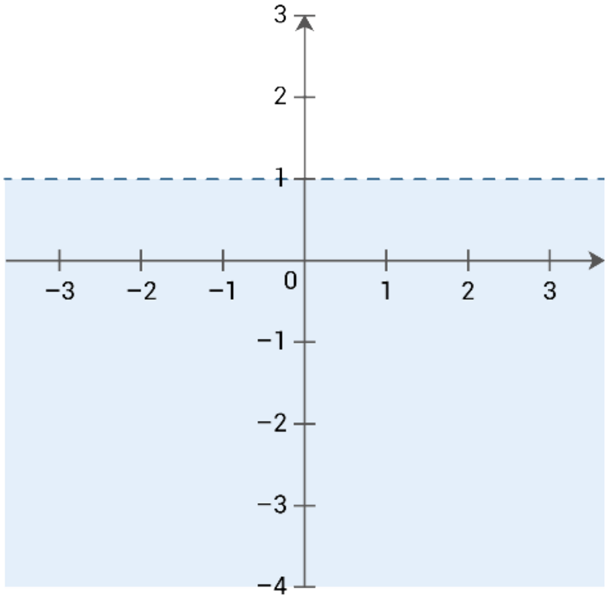
La solución de la desigualdad es $[-1, \infty)$

Ejercicio 3.14. *Graficar la desigualdad:* $y < 1$

Graficamos utilizando la calculadora gráfica:

Figura 25

Grueso de un laminado. Ejercicio 3.11



Nota. Arteaga, M., 2024.

La solución de la desigualdad es $(1, -\infty)$

3.5.2. Desigualdades gráficas con dos variables

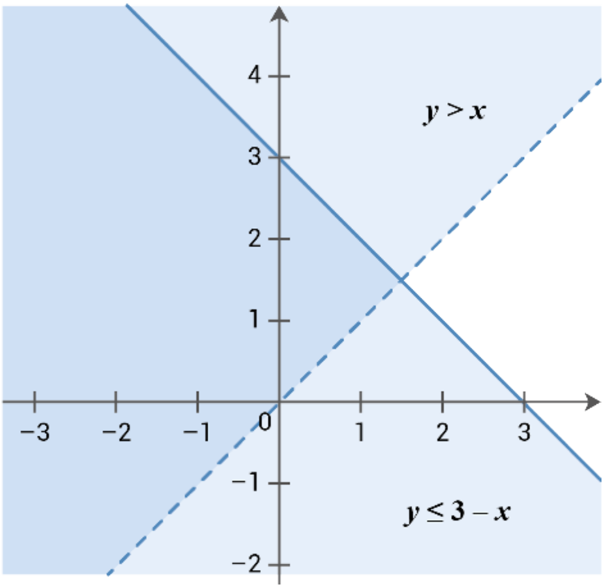
Profundizando en nuestro estudio, ahora exploraremos las desigualdades con **dos variables**. Recordando nuestra incursión en el plano cartesiano, utilizaremos ese mismo espacio bidimensional para visualizar estas desigualdades.

Al representar una desigualdad como $ax + by < c$, no estamos marcando solo una línea (como hacíamos con ecuaciones), sino que estamos identificando una **zona entera** del plano como solución. Esta zona es un semiplano, separado por la línea de la ecuación correspondiente $ax + by = c$.

¿Y si tenemos más de una desigualdad? Aquí es donde entra en juego la intersección. Imaginemos que se nos pide representar las soluciones de las desigualdades $x + y \leq 3$ y $y > x$. Al graficar ambas en el plano cartesiano, la **zona de solución** será donde ambas zonas se superponen.

Figura 26

Desigualdades con dos variables



Nota. Arteaga, M., 2024.

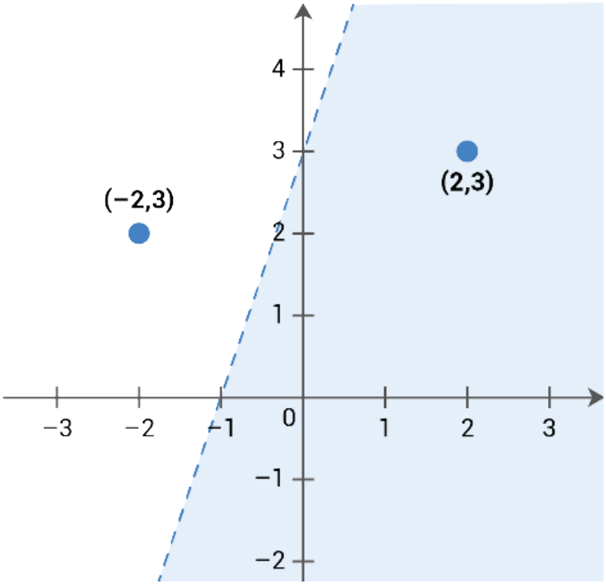
La habilidad de combinar y discernir zonas de solución entre varias desigualdades es esencial, ya que nos permite entender sistemas de desigualdades y, en situaciones prácticas, determinar soluciones factibles a problemas complejos. Revisemos el siguiente ejemplo:

Ejercicio 3.15. *Graficar la desigualdad*: $y < 3x + 3$

Graficamos utilizando el plano cartesiano:

Figura 27

Región factible de una desigualdad



Nota. Arteaga, M., 2024.

La línea límite es la recta $y = 3x + 3$, y está punteada porque nuestro término es “menor que,” no “menor o igual que”.

Para identificar la región límite, la región donde la desigualdad es verdadera, probamos dos pares de coordenadas, uno en cada lado de la línea límite, (2, 3) y (−2, 3).

Si sustituimos cada par ordenado (2, 3) y (−2, 3) en la desigualdad.

Tabla 10
Evaluación para determinar la región factible

Par ordenado	Evaluación	Resultado
(2,3)	$y < 3x + 3$ $3 < 3(2) + 3$ $3 < 9$	Es una declaración **Verdadera**, debemos sombrear el área hacia la derecha de la recta.
(−2,3)	$y < 3x + 3$ $3 < 3(-2) + 3$ $3 < -3$	Es una declaración **Falsa**, no debemos sombrear el área hacia la izquierda de la recta, por lo que el punto (−2,3) no está dentro del conjunto solución.

Nota. Arteaga, M., 2023.

La solución de la desigualdad es $x > \frac{y-3}{3}$, esto se puede escribir en notación de intervalo como: $(\frac{y-3}{3}, \infty)$.

Hemos culminado la semana 12, una etapa esencial en nuestro proceso de aprendizaje. En ella, profundizamos en la utilización del plano cartesiano para desigualdades lineales en dos variables, identificando semiplanos y puntos de intersección. También exploramos las desigualdades en una sola variable, usando la recta real para visualizar soluciones.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades y ejercicios que se describen a continuación:

1. Para reforzar los conocimientos sobre “Solución gráfica de desigualdades” estudiados esta semana, lo invito a revisar las siguientes herramientas educativas. Estas herramientas educativas buscan reforzar la capacidad para poder representar gráficamente en un plano cartesiano desigualdades e inecuaciones lineales, tanto de

una como de dos variables, convirtiendo expresiones simbólicas en región de solución mediante el sombreado correspondiente.

- Cómo graficar desigualdades de una y dos variables (Canal: Academia Internet).
- Como graficar una desigualdad lineal en dos variables, (Canal: L Math).
- Gráfica de una inecuación lineal con dos variables, (Canal: Abel Esteban Ortega Luna).

Luego de revisar estas herramientas educativas sobre cómo graficar desigualdades e inecuaciones lineales de una y dos variables, usted ha potenciado la habilidad de representar gráficamente desigualdades y comprender mejor las relaciones matemáticas y las restricciones de los problemas, ha reforzado la interpretación y traducción geométrica de estas expresiones algebraicas.

2. Represente gráficamente las siguientes desigualdades en la recta numérica.

   - $x > -3$
   - $x \leq 5$
   - $-2 < x \leq 4$

3. Grafique las siguientes desigualdades en el plano cartesiano y sombrear las regiones de solución.

   - $y > 2x + 3$
   - $y \leq x^2 - 4$
   - $x + y < 5$

4. Actividad de reflexión y discusión

   ¿Cómo puede la representación gráfica de desigualdades ayudar en la toma de decisiones en situaciones reales? Proporcione ejemplos específicos.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al completar las actividades de representación gráfica de desigualdades en la recta numérica y en el plano cartesiano, así como reflexionar sobre la aplicación de estas habilidades en la toma de decisiones en situaciones reales, ha desarrollado una comprensión integral y práctica de cómo las desigualdades se visualizan y se aplican en diversos contextos.

5. Para evaluar sus conocimientos, le invito a desarrollar la siguiente autoevaluación

Autoevaluación 3

Para resolver la siguiente evaluación se solicita leer comprensivamente, razonar, resolver y seleccionar la respuesta correcta:

1. Si $x = 4$, ¿cuál de las siguientes desigualdades es verdadera?

   a. $x > 5$.

   b. $x < 5$.

   c. $x \geq 5$.

   d. $x > 4$.

2. ¿Cuál es el resultado de $2x > 8$?

   a. $x > 4$.

   b. $x < 4$.

c. $x = 4$.

d. $x \leq 4$.

3. Si multiplicamos ambos lados de $x > 2$ por −1, ¿cuál es el resultado?

   a. $x < 2$.

   b. $x > 2$.

   c. $x = 2$.

   d. $x \geq 2$.

4. ¿Cuál de estos es un ejemplo de inecuación?

   a. 5x=10.
   b. 5x+5=15.
   c. 5x+5>10.
   d. 5x−5=0.

5. ¿Cuál es el primer paso para resolver desigualdades no lineales?

   a. Factorizar.
   b. Encuentra intervalos.
   c. Resuelve.
   d. Mueva todos los términos a un lado.

6. En la desigualdad "$x^2 - 4 > 0$", ¿cuál es su factorización?

a. $x(x - 4)$.

b. $(x - 2)(x + 2)$.

c. $(x - 4)^2$.

d. $x(x + 4)$.

7. ¿Qué es esencial al tratar desigualdades con cocientes?

a. El numerador sea positivo.
b. El denominador nunca sea cero.
c. El cociente sea mayor que 1.
d. El numerador sea mayor que el denominador.

8. Si "$(x - 2)(x + 4) < 0$", ¿cuál es una solución correcta?

a. $x > 2$ y $x < -4$.

b. $x < 2$ y $x > -4$.

c. $x > 2$ y $x < -4$.

d. $x < 2$ y $x > 4$.

9. ¿Cuál es el propósito principal de modelar con desigualdades?

a. Para resolver ecuaciones.

b. Para representar restricciones.
c. Para sumar números.
d. Para encontrar el valor absoluto.

10. Si una planta necesita temperaturas entre 15 °C y 25 °C, ¿cuál desigualdad la representa?

a. $15 < t < 25$.

b. $t < 15 \ \ o \ \ t > 25$.

c. $t > 15 \ \ y \ \ t < 25$.

d. $t \geq 25 \ \ y \ \ t \leq 15$.

11. Si un local tiene límite de 150 personas y hay n personas, ¿cuál desigualdad es correcta?

a. $n \geq 150$.

b. $n = 150$.

c. $n \leq 150$.

d. $n > 150$.

12. ¿Cómo se resuelven desigualdades con valor absoluto?

a. Se ignoran.
b. Se multiplican por sí mismas.
c. Se consideran dos escenarios.
d. Se suman.

13. Si graficamos "$x > 3$" en la recta real, ¿cuál es el punto inicial?

 a. 0.
 b. 2.
 c. 3.
 d. −3.

14. Al graficar "$ax + by < c$", ¿qué estamos representando?

 a. Una recta.
 b. Un punto.
 c. Un semiplano.
 d. Una parábola.

15. ¿Cómo representamos "$x \geq 5$" en la recta real?

 a. Punto cerrado en 5 y sombreado a la izquierda.
 b. Punto abierto en 5 y sombreado a la izquierda.
 c. Punto cerrado en 5 y sombreado a la derecha.
 d. Punto abierto en 5 y sombreado a la derecha.

16. Ordene los pasos para resolver una desigualdad simple.

 a. Simplificar ambos lados.
 b. Despejar la variable.
 c. Revisar el signo.

17. Ordene los pasos para representar gráficamente desigualdades lineales.

 a. Graficar ecuación.
 b. Identificar desigualdad.
 c. Lado del plano.

18. Ordene los pasos para interpretar gráficamente la solución de una desigualdad.

    a. Determinar puntos críticos.
    b. Dibujar recta numérica.
    c. Intervalos de solución.
    d. Marcar puntos en la recta.
    e. Evaluar intervalos.

19. Ordene los pasos para aplicar el método de intervalos en desigualdades.

    a. Factorizar.
    b. Intervalos de prueba.
    c. Resolver desigualdades.
    d. Valores críticos.
    e. Evaluar intervalos.

20. Ordene los conceptos para enseñar la resolución de sistemas de desigualdades lineales.

    a. Graficar desigualdades.
    b. Identificar desigualdades.
    c. Región de intersección.
    d. Forma estándar.
    e. Verificar puntos.

Ir al solucionario

Semana 13

Esta semana revisaremos los sistemas de desigualdades. El objetivo es comprender las propiedades y métodos para resolver sistemas de desigualdades, tanto gráfica como analíticamente de problemas reales.

Unidad 4. Sistemas de desigualdades

4.1. ¿A qué llamamos sistemas de desigualdades?

La comprensión de los sistemas de desigualdades requiere tener claro el componente fundamental de este concepto: la desigualdad individual. Así como una ecuación expresa una relación de igualdad entre dos expresiones, una desigualdad indica una relación de orden: una cantidad es mayor, menor, mayor o igual, o menor o igual que otra.

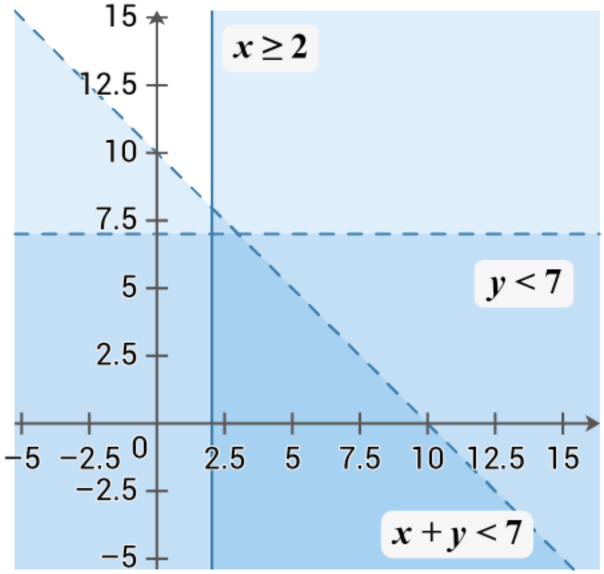
La notación matemática nos brinda herramientas para expresar estas relaciones. Por ejemplo, si decimos que un número es menor que 5, lo escribimos como $x < 5$. Del mismo modo, si *x* es mayor o igual a 3, utilizamos la notación $x \geq 3$.

Con estas premisas, nos interesa clarificar que un **sistema de desigualdades** es un conjunto de dos o más desigualdades que se consideran simultáneamente. Por ejemplo:

$$\{x + y < 10; x \geq 2; y < 7$$

Figura 28

Sistema de desigualdades lineales



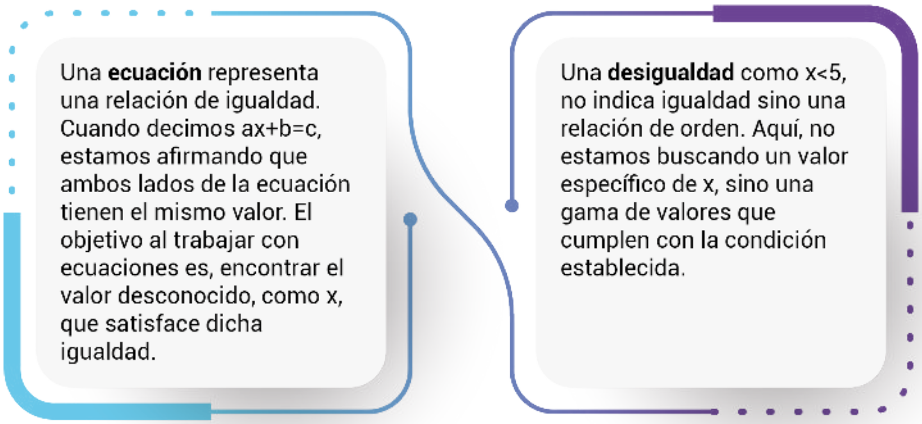
Nota. Arteaga, M., 2024.

4.2. Comparación entre ecuaciones y desigualdades

Las ecuaciones y las desigualdades son herramientas matemáticas que nos permiten expresar relaciones entre cantidades. Sin embargo, su naturaleza y propósito son fundamentalmente distintos.

Figura 29

Ecuaciones y desigualdades



Nota. Arteaga, M., 2024.

Es fundamental tener claro que, mientras las soluciones a una ecuación suelen ser puntos específicos (como en $x = 4$), las soluciones a una desigualdad representan intervalos o regiones, como hemos visto con el sistema de desigualdades propuesto anteriormente.

4.3. Gráficas de desigualdades

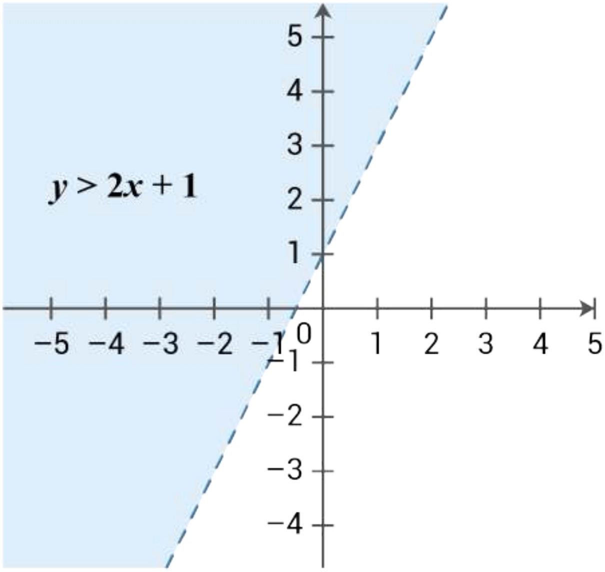
4.3.1. Gráficas de la desigualdad de una ecuación lineal

Al igual que las ecuaciones lineales, las desigualdades también tienen una representación gráfica en el plano cartesiano. Sin embargo, en lugar de representar puntos exactos en una línea, representan regiones enteras (Stewart et al., 2017).

Dada una desigualdad lineal, por ejemplo, $y > 2x + 1$, se presenta una característica distintiva: la **frontera**. Esta se obtiene al considerar la ecuación lineal correspondiente, en este caso $y = 2x + 1$. Dicha línea representa la frontera entre las regiones de solución.

Figura 30

Desigualdad de una ecuación lineal



Nota. Arteaga, M., 2024.

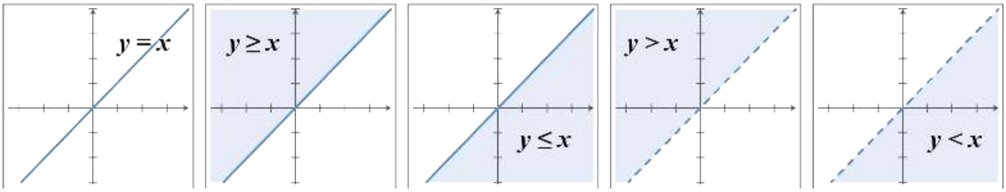
El tipo de línea que usamos para graficar es crucial. Si la desigualdad es estricta, como $y > 2x + 1$ o $y < 2x + 1$, utilizamos una **línea punteada**. Esto indica que los puntos en esa línea no son soluciones de la desigualdad. Por otro lado, si la desigualdad incluye la igualdad, como $y \geq 2x + 1$ o $y \leq 2x + 1$, entonces empleamos una **línea sólida**, señalando que los puntos en esa línea son parte de la solución.

Ahora bien, es esencial determinar qué región del plano satisface la desigualdad. Una técnica común es elegir un punto de prueba, como el origen (0,0), y verificar si satisface la desigualdad. Si es así, toda esa región es la solución. Si no, la solución estará en el otro lado de la frontera.

Veamos ahora algunos ejemplos de gráficas de desigualdades básicas.

Figura 31

Desigualdades lineales básicas



Nota. Arteaga, M., 2024.

4.3.2. Gráficas de la desigualdad de una ecuación cuadrática:

Las desigualdades cuadráticas nos llevan un paso más allá de las lineales. Imaginemos una parábola, que es la gráfica que representa una ecuación cuadrática del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Al igual que en las ecuaciones lineales, donde teníamos líneas que servían como frontera, aquí las parábolas desempeñan ese papel.

La orientación de la parábola nos dice mucho sobre la solución de la desigualdad. Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, y si $a < 0$, abre hacia abajo. Si tenemos una desigualdad como $y > ax^2 + bx + c$, y conociendo que la parábola es la frontera, debemos determinar qué región sombrear.

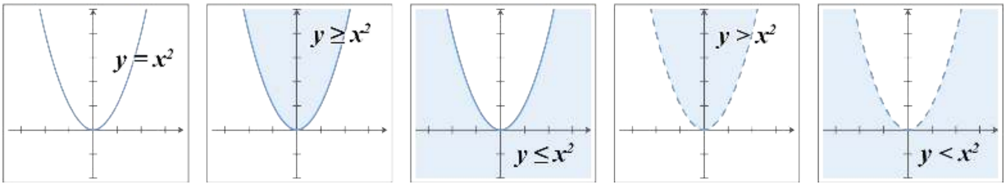
Si la desigualdad no contiene la igualdad ($>$ *o* $<$), la parábola será punteada, similar a las líneas punteadas que vimos anteriormente. Pero, si incluye la igualdad ($\geq$ *o* $\leq$), entonces la parábola será sólida.

Para determinar qué lado de la parábola sombrear, se puede usar un **punto de prueba**. Si el punto satisface la desigualdad, esa región es la solución. Por ejemplo, si la parábola abre hacia arriba y el punto de prueba está por debajo de la parábola y satisface la desigualdad, sombrearemos la región por debajo de la parábola.

A continuación, veamos algunas gráficas de desigualdades cuadráticas.

Figura 32

Desigualdades cuadráticas



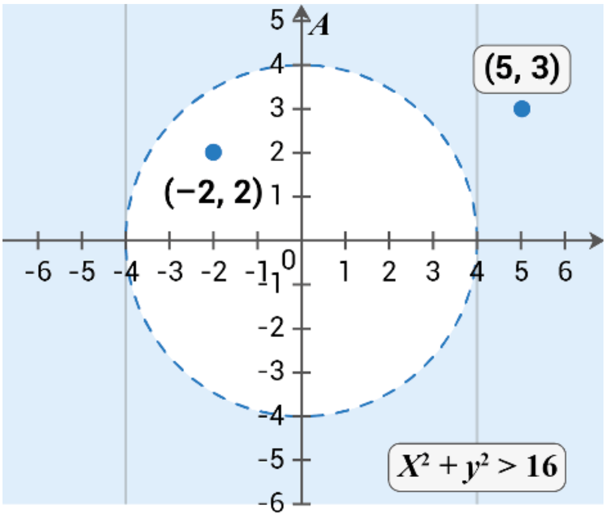
Nota. Arteaga, M., 2024.

Para comprender mejor, revisemos el siguiente ejercicio:

Ejercicio 4.1. Grafique la desigualdad: $x^2 + y^2 > 16$ con el punto (−2, 2) en el interior y el punto (5, 3) en el exterior.

Figura 33

Desigualdad no lineal. Ejercicio 4.1



Nota. Arteaga, M., 2024.

Verifiquemos si los puntos satisfacen la desigualdad.

Tabla 11

Punto de prueba, evaluación y resultado en la desigualdad

Punto de prueba	Evaluación en la desigualdad	Resultado
(−2, 2)	$(-2)^2 + (2)^2 > 16$ $4 + 4 > 16$ $8 > 16$	No pertenece a la desigualdad.
(5, 3)	$(5)^2 + (3)^2 > 16$ $25 + 9 > 16$ $34 > 16$	**Si pertenece a la desigualdad.**

Nota. Arteaga, M., 2023

En síntesis, los sistemas de desigualdades constituyen una extensión importante de las ecuaciones al introducir condiciones de orden y restricciones sobre los valores que pueden tomar las variables. A través de su comparación con las ecuaciones, observamos cómo las desigualdades permiten múltiples soluciones que se representan en regiones del plano. Las gráficas de desigualdades, por lo tanto, nos ofrecen una visión visual y comprensible de estos conjuntos de soluciones.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Al finalizar el estudio de la presente semana, le invito a resolver las siguientes actividades:

1. Resuelva el siguiente sistema de desigualdades gráficamente y determina la región de soluciones:

$$x + y \geq 4$$

$$2x - y < 3$$

$$3x - 2y \leq 6$$

$$x + y > 3$$

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Resuelva los siguientes ejercicios en KhanAcademy.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 4. Sistemas de desigualdades

4.4. Resolución de sistemas de desigualdades

4.4.1. Métodos para resolver sistemas de desigualdades

Al enfrentarnos al mundo real, no siempre encontramos ecuaciones que expresan una equivalencia exacta. En muchos casos, la realidad nos presenta situaciones donde se deben cumplir ciertas condiciones, pero dentro de ciertos márgenes o límites. Es aquí donde entran en juego los sistemas de desigualdades.

Resolver este sistema significa encontrar los valores de x y y que satisfacen todas las desigualdades al mismo tiempo. Así como los sistemas de ecuaciones nos brindan soluciones en forma de puntos o conjuntos que son solución a todas las ecuaciones, los sistemas de desigualdades nos ofrecen regiones del plano o del espacio que cumplen con todas las desigualdades propuestas (Stewart et al., 2017).

Uno de los métodos más comunes para resolver sistemas de desigualdades es el **método gráfico**. En él, se representan gráficamente las desigualdades en un sistema de coordenadas. Por ejemplo, para la desigualdad $y > 2x + 1$, se dibuja la recta $y = 2x + 1$ y luego se sombrea la región donde *y* es mayor. Al hacer esto con todas las desigualdades del sistema, la solución será la intersección de todas las regiones sombreadas.

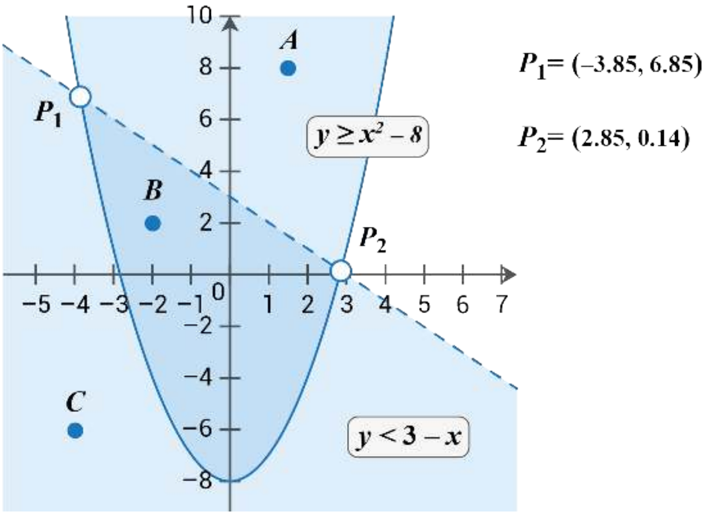
Es importante recordar que las líneas o curvas que representan las desigualdades pueden ser sólidas o punteadas. Serán sólidas si la desigualdad incluye el símbolo $\leq o \geq$, indicando que los puntos en la línea son parte de la solución. Si la desigualdad no contiene la igualdad $(< o >)$ la línea será punteada.

Ejercicio 4.2. Resolver el siguiente sistema de desigualdades por el método gráfico, luego comprobar los resultados analíticamente:

$$\{-x^2 + y \geq -8; \;\; x + y < 3$$

Figura 34

Solución de desigualdades por el método gráfico



Nota. Arteaga, M., 2024.

Para resolver analíticamente este problema primero resolvemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} -x^2 + y &= -8 (Ec.1) \\ x + y &= 3 (Ec.2) \end{aligned}$$ Sistema de ecuaciones dado.

$y = 3 - x$	Despejamos y de la ecuación (Ec.2).
$-x^2 + (3 - x) = -8$	Sustituimos y en la ecuación (Ec.1).
$x^2 + x - 11 = 0$	Reordenamos los términos de la ecuación final.

Luego encontramos los puntos de intersección, para lo cual debemos resolver la ecuación cuadrática.

$x^2 + x - 11 = 0$	Ecuación cuadrática original.
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)}$ $x = -\frac{-1 \pm \sqrt{45}}{2}$	Sustituimos los valores de $a = 1$, $b = 1$,y $c = -1$ en la fórmula general.
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9 \cdot 5}}{2} = \frac{-1 \pm 3\sqrt{5}}{2}$	Simplificamos la expresión bajo la raíz cuadrada.
$x_1 = \frac{-1 + 3\sqrt{5}}{2} = 2.85$ $x_2 = \frac{-1 - 3\sqrt{5}}{2} = -3.85$	Determinamos las dos soluciones de la ecuación cuadrática.
$y_1 = 3 - x_1 = 3 - 2.85 = 0.14$ $y_2 = 3 - x_2 = 3 - (-3.85) = 6.85$	Reemplazando valores de x en Ec.2 obtenemos los puntos de intersección.

Tabla 12

Punto de prueba, evaluación y resultado en la desigualdad

Punto de prueba	Evaluación en el sistema	Resultado
$A = (1.5, 8)$	$\{-(1.5)^2 + (8) \geq -8 \;\; (1.5) + (8) < 3$ $\{-2.25 + 8 \geq -8 \;\; 1.5 + 8 < 3$ $\{5.75 \geq -8\,(V) \quad 9.5 < 3\,(F)$	No pertenece al sistema.
$B = (-2, 2)$	$\{-(-2)^2 + (2) \geq -8 \;\; (-2) + (2) < 3$ $\{-4 + 2 \geq -8 \quad -2 + 2 < 3$ $\{-2 \geq -8\,(V) \;\; 0 < 3\,(V)$	**Si pertenece al sistema.**
$C = (-4, -6)$	$\{-(-4)^2 + (-6) \geq -8 \;\; (-4) + (-6) < 3$ $\{-16 - 6 \geq -8 \quad -4 - 6 < 3$ $\{-22 \geq -8\,(F) \quad -10 < 3\,(V)$	No pertenece al sistema.
$P_1 = (-3.85, 6.85)$	$\{-(-3.85)^2 + (6.85) \geq -8 \;\; (-3.85) + (6.85) < 3$ $\{-14.8225 + 6.85 \geq -8 \quad -3.85 + 6.85 < 3$ $\{-7.9725 \geq -8\,(V) \;\; 3 < 3\,(F)$	No pertenece al sistema.
$P_2 = (2.85, 0.14)$	$\{-(2.85)^2 + (0.14) \geq -8 \;\; (2.85) + (0.14) < 3$ $\{-8.1225 + 0.14 \geq -8 \;\; 2.85 + 0.14 < 3$ $\{-7.9825 \geq -8\,(F) \;\; 2.99 < 3\,(V)$	No pertenece al sistema.

Nota. Arteaga, M., 2023.

Observando la gráfica y la tabla, verificamos que los vértices (P_1 y P_2) no pertenecen al conjunto solución porque no satisfacen la desigualdad: $x + y = 3$, (por lo tanto, están graficados como círculos abiertos en la figura 23). Naturalmente, muestran dónde están las esquinas del conjunto solución.

4.4.2. Interpretación de las soluciones gráficamente

En la sección anterior, aprendimos cómo resolver sistemas de desigualdades de forma gráfica. Ahora, nos centraremos en cómo interpretar estas soluciones cuando las visualizamos en un plano cartesiano.

Cuando representamos desigualdades en un gráfico, las regiones sombreadas no son meras áreas abstractas; en realidad, son el conjunto de puntos que cumplen con las condiciones establecidas por nuestras desigualdades. Cada punto en esa región es una solución válida para el sistema.

Por ejemplo, si sombreamos la región que satisface la desigualdad $y > 2x + 1$, cualquier punto que elijamos en esa área cumplirá con la condición de que el valor de *y* es mayor que el doble del valor de *y* más uno. Esta interpretación visual nos permite ver de manera rápida y clara todas las soluciones posibles, y cómo se relacionan entre sí.

Relacionando esto con el contenido anterior, recordemos que líneas sólidas o punteadas determinan si los puntos en esa línea son parte o no de la solución. Al unir esta información con la región sombreada, obtenemos un panorama completo del sistema de desigualdades.

4.5. Sistemas de desigualdades lineales

4.5.1. Definición y características

¿Alguna vez te has preguntado cómo encontrar el punto donde varias condiciones se cumplen al mismo tiempo? En la vida real, a menudo tenemos que considerar múltiples restricciones al tomar decisiones. En matemáticas, estos escenarios pueden ser modelados a través de los sistemas de desigualdades lineales.

Un sistema de desigualdades lineales consiste en dos o más desigualdades lineales que se tienen que cumplir simultáneamente (Stewart et al., 2017).

Por ejemplo, un sistema simple con dos desigualdades en dos variables x y y es el siguiente:

$$\{ax + by \leq c; dx + ey > f$$

Donde *a, b, c, d, e,* y *f* son números reales dados.

4.5.2. Características:

1. *Solución:* una solución para el sistema es un par de números (*x,y*)que satisface todas las desigualdades al mismo tiempo.
2. *Región factible:* el conjunto de todas las soluciones posibles se llama región factible. Esta región puede ser un área en el plano, como un cuadrante, un triángulo o un polígono.
3. *Representación gráfica:* al graficar cada desigualdad lineal, se obtiene una región del plano. La intersección de todas esas regiones es precisamente la región factible.

A continuación, le invito a revisar la infografía donde encontrará información relevante sobre las Características de los sistemas de desigualdades lineales.

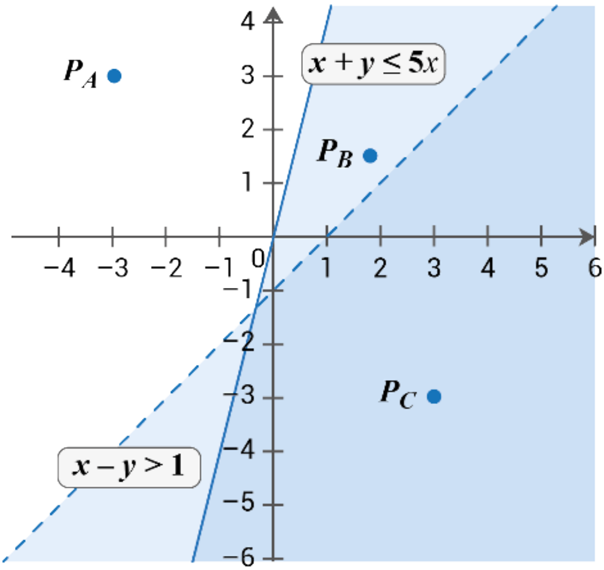
[Características de los sistemas de desigualdades lineales]

Con el propósito de brindar una comprensión más completa, analicemos los ejercicios presentados a continuación:

Ejercicio 4.3. Considere las desigualdades $x + y \leq 5x$ y $x - y > 1$. Graficarlas y encontrar la región factible.

Figura 35

Solución de desigualdades lineales



Nota. Arteaga, M., 2024.

Tabla 13

Punto de prueba, evaluación y resultado en la desigualdad

Punto de prueba	Evaluación en el sistema	Resultado
$A = (-3, 3)$	$\{x + y \leq -5x; x - y > 1$ $\{x - 3 + 3 \leq 5(-3) \quad -3 - 3 > 1$ $\{0 \leq -15(F) - 6 > 1(F)$	No pertenece al sistema.
$A = (1.8, 1.5)$	$\{x + y \leq 5x; x - y > 1$ $\{1.8 + 1.5 \leq 5(1.8) \quad -1.8 - 1.5 > 1$ $\{3.3 \leq 9(V) \quad 0.3 > 1(F)$	No pertenece al sistema.
$C = (3, -3)$	$\{x + y \leq 5x;\ x - y > 1$ $\{3 + (-3) \leq 5(3) \quad 3 - (-3) > 1$ $\{0 \leq 15\,(V) \quad 6 > 1\,(V)$	**Si pertenece al sistema.**

Nota. Arteaga, M., 2023.

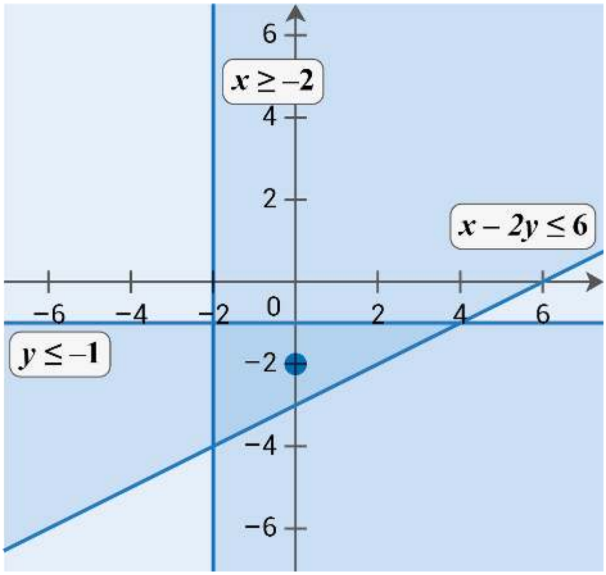
Hemos graficado los puntos P_A, P_B, P_C; podemos ver que el punto P_C se encuentra dentro de la región factible. En cambio, el punto P_A se encuentra fuera de las 2 desigualdades, lo podemos comprobar de forma gráfica como de forma analítica (en las dos desigualdades se obtiene un **falso** como resultado).

Ejercicio 4.4. Resolver el siguiente sistema de desigualdades lineales.

$\{x - 2y \leq 6; x \geq -2; y \leq -1$

Figura 36

Solución de desigualdades lineales



Nota. Arteaga, M., 2024.

Verifiquemos si el punto $P1 = (0, -2)$ satisface las desigualdades.

Tabla 14

Punto de prueba, evaluación y resultado en la desigualdad

Desigualdades	Punto de prueba: $P_1 = (0,-2)$	Resultado
$x - 2y \leq 6$	$x - 2y \geq 6$ $0 - 2(-2) \leq 6$ $4 \leq 6(V)$	**Satisface la desigualdad**
$x \geq -2$	$x \geq -2$ $0 \geq -2(V)$	**Satisface la desigualdad**
$y \leq -1$	$y \leq -1$ $-2 \leq -1(V)$	**Satisface la desigualdad**

Nota. Arteaga, M., 2023.

- El punto (0, −2) está por arriba de la ecuación $x - 2y = 6$ muestra que esta región satisface la desigualdad.
- El punto (0, −2) está a la derecha de la ecuación $x = -2$ muestra que esta región satisface la desigualdad.
- El punto (0, −2) está por debajo de la ecuación, muestra $x = -1$ que esta región satisface la desigualdad.

4.5.3. Análisis de soluciones

Para llevar a cabo el análisis de la solución, examinemos a continuación:

1. **Dibujar las líneas:** cada desigualdad se traduce en una línea en el plano.
2. **Sombreado:** luego de dibujar cada línea, sombrear el lado que satisface la desigualdad, utilizando un punto de prueba. Si satisface la desigualdad, sombrea ese lado de la línea; de lo contrario, sombrea el lado opuesto.
3. **Encontrar la solución:** el área donde todos los sombreados se superponen es la solución del sistema de desigualdades. Esta área representa todos los puntos *(x,y)* que satisfacen todas las desigualdades simultáneamente.

A continuación, se debe realizar el análisis de soluciones, vemos que, al observar la región factible, se determinan algunas propiedades. Si la región es acotada (como un triángulo o un polígono), tiene un área finita. Si no tiene límites (como un semiplano), es infinita.

4.5.4. Modelado con sistemas de desigualdades lineales

Las desigualdades, a diferencia de las ecuaciones, no indican igualdad, sino una relación de "menor que", "mayor que", "menor o igual que" o "mayor o igual que". Matemáticamente, usamos los símbolos <, >, ≤ y ≥ para representar estas relaciones. Por ejemplo, si queremos representar que un artículo cuesta menos de $50, lo expresaríamos como $x < 50$, donde es el precio del artículo.

El modelado con desigualdades nos permite representar situaciones reales de manera matemática. *Por ejemplo*, imaginemos que estamos planificando un evento y tenemos un presupuesto máximo, o que debemos mantener la producción de una fábrica dentro de ciertos límites por razones de seguridad. Estas situaciones pueden modelarse con desigualdades.

Ejercicio 4.5. Un comerciante vende dos mezclas diferentes de café. La mezcla estándar usa 4 onzas de granos de arábiga y 12 onzas de granos de robusta por paquete; la mezcla "De lujo" usa 10 onzas de arábigo y 6 onzas de robusta por paquete. El comerciante tiene disponible 80 lb de granos de arábiga y 90 lb de robusta. Encuentre un sistema de desigualdades que describa el posible número de paquetes estándar y "De lujo" que el comerciante pueda hacer. Trace la gráfica del conjunto solución.

- *x: número de paquetes de la mezcla estándar.*
- *y: número de paquetes de la mezcla De lujo.*

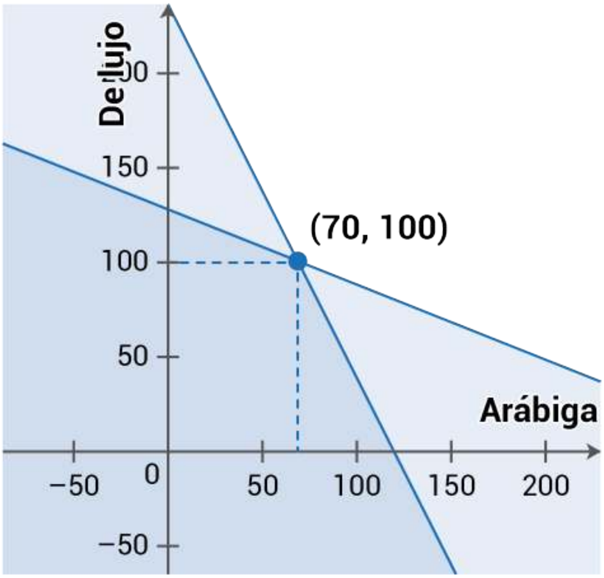
Para utilizar la cantidad existente de arábiga (80 lb): la mezcla estándar usa 4 onzas de granos de arábiga por paquete y la mezcla "De lujo" usa 10 onzas de granos de arábiga por paquete, la suma de estas dos cantidades debe ser menor o igual que la existencia total de arábiga (80 lb x 16 onzas = 1280), es decir: $4x + 10y \leq 1280$.

Para utilizar la cantidad existente de robusta (90 lb): la mezcla estándar usa 12 onzas de granos de robusta por paquete y la mezcla "De lujo" usa 6 onzas de granos de robusta por paquete, la suma de estas dos cantidades debe ser menor o igual que la existencia total de robusta (90 lb x 16 onzas = 1440), es decir: $12x + 6y \leq 1440$.

Veamos a continuación la gráfica de la solución del sistema.

Figura 37

Gráfica de solución del ejercicio 4.5



Nota. Arteaga, M., 2024.

La solución del sistema de desigualdades es la intersección de las dos gráficas. Encontremos los vértices aplicando el método de eliminación.

$$\begin{cases} 4x + 10y \leq 1280 & (\text{Ec.1}) \\ 12x + 6y \leq 1440 & (\text{Ec.2}) \end{cases}$$ Sistema de ecuaciones inicial.

$$\begin{aligned} 3(4x) + 3(10y) &\leq 3(1280) \\ 12x + \quad 6y &\leq 1440 \end{aligned}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 3 para que el coeficiente de x sea 12 en ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 12x + 30y \leq 3840 \\ 12x + 6y \leq 1440 \\ \hline 0 + 24y \leq 2400 \quad (\text{Ec.}3) \end{array}$$

Restamos la segunda ecuación a la primera multiplicada para eliminar y.

$$y \leq \frac{2400}{24}$$
$$y \leq 100$$

Resolvemos la Ec.3 para encontrar y.

$$12x \leq 1440 - 6y(Ec.2)$$
$$x \leq \frac{1440-6(100)}{12}$$
$$x \leq 70$$

Reemplazamos el valor y en la para Ec.2 para encontrar x.

Como resultado de la gráfica y de la solución analítica podemos ver que la cantidad ideal de paquetes es 100 de tipo estándar y 70 paquetes "De lujo", con estas cantidades se utiliza la totalidad disponible de ambos tipos de café, al tratarse desigualdades podemos entender que existen otras soluciones las cuales están dentro del área de intersección, pero dichas soluciones no utilizan el 100 % de la materia prima disponible.

4.5.5. Ejemplos prácticos: economía, ciencias, ingeniería

En nuestra introducción, exploramos cómo las desigualdades pueden ser herramientas poderosas para modelar situaciones de la vida real. Ahora, profundicemos con ejemplos de distintas disciplinas.

- **Economía:** supongamos que una empresa tiene un presupuesto fijo para la publicidad de $5000. Si cada anuncio cuesta *x*, y la empresa decide comprar *y* anuncios, entonces su costo total es xy. Dado su presupuesto, la relación se modelaría como $xy \leq 5000$.

- **Ciencias:** en biología, es común estudiar poblaciones de organismos. Si decimos que una población de bacterias no puede superar las 10,000 unidades en un cultivo dado, representaríamos esta situación con $p \leq 1000$, donde *p* es el número de bacterias.

- **Ingeniería:** considera un puente que puede soportar un peso máximo. Si el puente puede llevar hasta 20 toneladas, y cada vehículo que pasa pesa *v* toneladas, y si pasan *n* vehículos simultáneamente, entonces $nv \leq 20$.

Estos ejemplos muestran cómo las desigualdades nos ayudan a establecer límites y trabajar dentro de ellos. Es esencial comprender y manipular estas desigualdades para aplicarlas eficazmente en diversos campos.

Espero que hayan tenido una semana productiva en su estudio. Durante esta semana, hemos explorado conceptos fundamentales relacionados con las desigualdades y su representación gráfica. *Recuerden que las desigualdades expresan relaciones de orden entre cantidades, y los sistemas de desigualdades involucran múltiples desigualdades que deben cumplirse simultáneamente.* Diferenciamos entre desigualdades estrictas y no estrictas, utilizando líneas punteadas y sólidas en las representaciones gráficas, respectivamente.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con el fin de consolidar los conocimientos adquiridos, le invito a resolver lassiguientes actividades y ejercicios:

1. Para reforzar los conocimientos sobre "*Sistemas de desigualdades*" estudiados esta semana le invito a revisar las siguientes herramientas educativas. El propósito es reforzar los conocimientos y habilidades necesarias para que los estudiantes puedan resolver sistemas de inecuaciones lineales con dos variables, incluyendo la representación

gráfica de la región factible de solución mediante el sombreado correspondiente en un plano cartesiano.

- Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas método gráfico (Canal: Susi Profe).
- Sistemas de inecuaciones con dos variables II (Canal: Píldoras Matemáticas).
- Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas (Canal: Academia Internet).

Los videos, a través de sus explicaciones guiadas, ejemplos y ejercicios resueltos sobre sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas, permitieron afianzar las competencias para traducir analítica y gráficamente este tipo de objetos matemáticos, identificando paso a paso la región que cumple todas las desigualdades simultáneamente.

2. Resuelva los siguientes sistemas de desigualdades y representa gráficamente las regiones de solución en el plano cartesiano.

$$\{y < 2x + 3; y > -x + 1; x \geq 0$$

$$\{2x + 3y \leq 6; x - y \geq 2; x \leq 4$$

3. **Problema de aplicación real – planificación financiera**

Está planificando su presupuesto mensual. Quiere gastar al menos

$500 y no más de $800 en ocio y al menos $300 en ahorros. Además, sus gastos totales no deben superar los $2000. Si x es el gasto en ocio y y es el ahorro, determine las posibilidades para su presupuesto.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Al resolver los sistemas de desigualdades y representar gráficamente sus soluciones en el plano cartesiano, junto con la modelización y solución del problema de planificación financiera, ha abordado de manera efectiva la aplicación de conceptos matemáticos complejos en contextos prácticos.

4. Le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 4

Para resolver la siguiente evaluación es necesario leer comprensivamente, razonar, resolver y seleccionar la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es la notación para expresar que x es menor que 5?

   a. $x > 5$.
   b. $x \leq 5$.
   c. $x < 5$.
   d. $x \geq 5$.

2. Si una desigualdad es estricta ($>$ o $<$), ¿qué tipo de línea usamos?

   a. Punteada.
   b. Sólida.
   c. Curva.
   d. Segmentada.

3. ¿Cómo se representa una desigualdad cuadrática en una gráfica?

   a. Línea.
   b. Región factible.
   c. Puntos de intersección.
   d. Parábola.

4. ¿Qué es la región factible en un sistema de desigualdades?

    a. El conjunto de soluciones exactas.
    b. La intersección de todas las regiones sombreadas.
    c. El área por debajo de la línea punteada.
    d. El rango de valores que cumple con una sola desigualdad.

5. ¿Cuál es el método más común para resolver sistemas de desigualdades?

    a. Método algebraico.
    b. Método numérico.
    c. Método gráfico.
    d. Método simbólico.

6. ¿Qué representa la intersección de las regiones sombreadas en la gráfica de un sistema de desigualdades?

    a. Puntos aislados.
    b. La región factible.
    c. El punto de prueba.
    d. Soluciones exactas.

7. ¿Qué tipo de línea se utiliza cuando una desigualdad incluye la igualdad ($\geq$ o $\leq$)?

    a. Línea punteada.
    b. Línea sólida.
    c. Línea curva.
    d. Línea segmentada.

8. ¿Cuál es el propósito de un sistema de desigualdades en matemáticas?

    a. Representar relaciones de igualdad.
    b. Modelar situaciones con márgenes o límites.
    c. Resolver ecuaciones cuadráticas.

d. Graficar funciones lineales.

9. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre ecuaciones y desigualdades?

   a. Expresan igualdad y desigualdad.
   b. Determinan valores extremos.
   c. No tienen diferencia.
   d. Son equivalentes.

10. En un sistema de desigualdades, ¿qué representa una solución?

    a. Un número real.
    b. Un conjunto de puntos.
    c. Una ecuación.
    d. Un valor negativo.

11. ¿Cuál es el propósito principal de las desigualdades en matemáticas?

    a. Representar relaciones de igualdad.
    b. Encontrar soluciones exactas.
    c. Modelar situaciones con márgenes o límites.
    d. Resolver ecuaciones cuadráticas.

12. ¿Qué tipo de línea se utiliza en una desigualdad estricta como “x>3”?

    a. Línea punteada.
    b. Línea sólida.
    c. Línea curva.
    d. Línea segmentada.

13. ¿Cuál es la principal diferencia entre las soluciones de una ecuación y una desigualdad?

    a. Las soluciones de una ecuación son intervalos, mientras que las soluciones de una desigualdad son puntos exactos.
    b. Las soluciones de una ecuación son puntos exactos, mientras que las soluciones de una desigualdad son intervalos o regiones.

c. Las soluciones de una ecuación son negativas, mientras que las soluciones de una desigualdad son positivas.
d. No hay diferencia entre ellas.

14. ¿Cuál es el propósito de utilizar sistemas de desigualdades en matemáticas?

a. Encontrar soluciones exactas.
b. Modelar situaciones con márgenes o límites.
c. Resolver ecuaciones cuadráticas.
d. Representar relaciones de igualdad.

15. Por qué se puede decir que un sistema de desigualdades tiene infinitas soluciones.

a. Las soluciones pueden ser regiones enteras.
b. Analíticamente, no es posible determinar las soluciones.
c. Las desigualdades siempre implican una división para 0.
d. Las asíntotas en las desigualdades generan ese comportamiento.

16. Ordene los pasos para graficar una desigualdad lineal.

a. Sombrea la región que satisface la desigualdad.
b. Dibuja una línea sólida o punteada según la desigualdad.
c. Convierte la desigualdad en una ecuación.
d. Elige un punto de prueba.
e. Determina qué lado de la línea representa la solución.

17. Ordene los pasos para resolver un sistema de desigualdades lineales.

a. Identificar la región factible.
b. Graficar las desigualdades como ecuaciones.
c. Aplicar el método gráfico.
d. Seleccionar puntos de prueba.
e. Analizar la intersección de regiones sombreadas.

18. Ordene los pasos para interpretar la solución de un sistema de desigualdades cuadráticas.

    a. Identificar las parábolas involucradas.
    b. Determinar la región de solución.
    c. Analizar la intersección de las parábolas.
    d. Elegir puntos de prueba en el plano.
    e. Evaluar las desigualdades en los puntos seleccionados.

19. Ordene las etapas para determinar si un punto pertenece a la solución de un sistema de desigualdades lineales.

    a. Elegir un punto.
    b. Sustituir el punto en cada desigualdad.
    c. Verificar la validez en todas las desigualdades.
    d. Identificar el sistema de desigualdades.
    e. Concluir si el punto pertenece o no a la solución.

20. Ordene los pasos para analizar gráficamente un sistema de desigualdades cuadráticas.

    a. Graficar cada desigualdad como una parábola.
    b. Determinar las regiones de solución.
    c. Elegir puntos de prueba.
    d. Identificar las intersecciones de las parábolas.
    e. Concluir sobre la región de solución conjunta.

Ir al solucionario

Semana 15

Actividades finales del bimestre

A lo largo de estas semanas, hemos tenido la oportunidad de estudiar el importante mundo de las ecuaciones y desigualdades, comprendiendo desde la estructura y operaciones con matrices hasta el modelado matemático con desigualdades, hemos revisado distintos métodos y aplicaciones prácticas en diversos campos del conocimiento.

Este conocimiento no solo es fundamental para su formación académica, sino también es una herramienta poderosa que será de utilidad en innumerables situaciones a lo largo de su vida profesional y personal. Los animo a revisar aquellos temas que aún no están claros y para reforzar sus conocimientos es conveniente desarrollar las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

1. Revise las autoevaluaciones propuestas en el segundo bimestre.
2. Revise las evaluaciones parciales desarrolladas en el segundo bimestre.
3. Revise los temas donde tenga alguna dificultad y participe de las evaluaciones del bimestre.

Luego de revisar las autoevaluaciones y evaluaciones parciales del segundo bimestre, así como de identificar brechas en ciertos temas, es importante consolidar los aprendizajes a través de una autorreflexión consciente y un plan de acción concreto. Complementar el estudio de aquellas unidades con vacíos mediante revisión de materiales, videos o lecturas recomendadas. No dude en solicitar tutoría al docente ante cualquier inquietud. ¡Éxito en este proceso de aprendizaje!

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 16

Actividades finales del bimestre

En la presente semana, les invito a hacer una revisión integral de todos los contenidos que hemos abordado; conceptos, métodos, aplicaciones y ejemplos desarrollados a lo largo del segundo bimestre. La evaluación bimestral se desarrolla en la presente semana, por tanto, les exhorto a realizarla con determinación, confianza y el deseo de demostrar todo lo que han asimilado en este tiempo. Sé que están capacitados para ello. Les deseo mucho éxito en esta evaluación y que cada esfuerzo realizado se vea reflejado en sus resultados.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

1. Participe de la videoconferencia donde se realizará un repaso general para el examen bimestral.
2. Estudie los contenidos del segundo bimestre y participe de la evaluación presencial.

   Para ello, revise:

   - Su diario de notas.
   - Actividades de aprendizaje recomendadas.
   - Actividades de aprendizaje calificadas.
   - Autoevaluaciones.

- Evaluaciones parciales.

3. Examen bimestral. Revise el horario de exámenes para que tenga claro el día y la hora de evaluación.

4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	c	El coeficiente es el número que multiplica a la incógnita.
2	b	Si dividimos ambos lados para 2, obtenemos “x = 5”.
3	b	Las ecuaciones cuadráticas tienen una incógnita al cuadrado.
4	a	Sustituyendo “x = 2”, obtenemos “y = 3(2) – 5 = 6 – 5 = 1”.
5	b	Si resolvemos para “x”, obtenemos “x = 3”.
6	b	Un discriminante negativo indica la presencia de números imaginarios en las soluciones.
7	c	Esto se relaciona con el hecho de que las raíces de la ecuación cuadrática son iguales en este escenario particular.
8	a	Esta ecuación es un trinomio cuadrado perfecto.
9	a	Factoriza x para obtener las soluciones.
10	a	Un discriminante positivo (>0) implica dos soluciones reales distintas, y en este caso, el discriminante es 16, indicando dos raíces reales diferentes.
11	c	Es una representación abstracta de situaciones de la vida real mediante el uso de ecuaciones o expresiones matemáticas.
12	a	Representa un modelo lineal, donde m es la pendiente de la línea y b es la ordenada al origen.
13	b	La expresión “tres veces un número” se traduce algebraicamente como 3x, donde x representa el número y 3 indica que se debe multiplicar por tres.
14	a	El modelo matemático para los ingresos se obtiene multiplicando el precio de cada camiseta ($20) por el número de camisetas vendidas (x). Por lo tanto, el modelo es y=20 y=20x, donde y representa los ingresos.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
15	a	El costo total es "500 + 10p". Esta expresión representa la relación entre el costo y la cantidad de productos producidos.
16	c, e, d, a, b	En primer lugar, identificar la ecuación es crucial para iniciar el proceso de resolución. Luego, simplificar la ecuación facilita el siguiente paso, que consiste en aplicar operaciones inversas para despejar la incógnita. Una vez despejada, es importante evaluar el resultado para garantizar su validez.
17	d, a, b, e, c	Comenzar por identificar los datos y las incógnitas del problema, sienta las bases para plantear la ecuación cuadrática correspondiente. Una vez planteada, determinar las soluciones es esencial, seguido de verificar su validez. Finalmente, interpretar las soluciones en el contexto del problema proporciona un entendimiento completo de la situación.
18	a, b, e, d, c	Las ecuaciones lineales son las más básicas, seguidas de cuadráticas, con valor absoluto, con radicales y finalmente exponenciales.
19	c, a, b, e, d	Comenzar por identificar los valores de a, b y c de la ecuación cuadrática es fundamental. Luego, calcular el discriminante nos proporciona información sobre las soluciones. Sustituir estos valores en la fórmula cuadrática y aplicarla nos lleva a obtener las raíces de la ecuación, las cuales deben ser evaluadas para confirmar su validez.
20	b, d, c, a, e	Una ecuación cuadrática se forma con el coeficiente cuadrático, lineal, la variable, término independiente y el signo igual.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	b	Un sistema de ecuaciones consiste en un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Es una herramienta matemática fundamental para resolver problemas que involucran múltiples variables.
2	c	La principal diferencia radica en las potencias y funciones de las incógnitas. En un sistema lineal, las ecuaciones tienen exponentes de 1, mientras que en un sistema no lineal pueden aparecer potencias diferentes de 1 y funciones no lineales de las incógnitas.
3	d	Cuando las rectas coinciden en un sistema de ecuaciones lineales, significa que tienen infinitos puntos en común, lo que da como resultado infinitas soluciones.
4	a	El método gráfico consiste en representar ambas ecuaciones en el plano cartesiano y observar el punto donde se cruzan. La intersección es en el punto (3,6).
5	d	Para calcular el costo total, sumamos el costo de las entradas de adulto ($3 por 5 entradas) al costo de las entradas de niño ($2 por x entradas) y obtenemos $21 en total, representado por la ecuación $15 + 2x = 21$.
6	c	El método de eliminación implica sumar o restar las ecuaciones de un sistema para eliminar una de las incógnitas y resolver el sistema resultante.
7	a	Al sumar, se obtiene $2y = 3x$.
8	c	Hay tres incógnitas en la ecuación: x, y, y z. Cada una representa una variable desconocida en el sistema.
9	c	El método de Gauss transforma un sistema en una forma triangular, lo que facilita su resolución.
10	d	La sustitución hacia atrás implica resolver el sistema de ecuaciones comenzando desde la última ecuación y retrocediendo hacia la primera.
11	b	El modelado matemático implica traducir situaciones del mundo real en términos matemáticos, lo que permite analizar y resolver problemas de manera efectiva.
12	b	Al aplicar el método y resolver, encontramos que “y=2”.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
13	c	Para calcular el total recaudado, multiplicamos el precio de cada producto por el número de unidades vendidas y sumamos los resultados.
14	c	Una matriz es un arreglo rectangular. Por lo tanto, es una estructura algebraica que consiste en un arreglo bidimensional de números, símbolos o expresiones, dispuestos en filas y columnas.
15	b	Cuando el método de Gauss se completa, la matriz resultante suele ser una matriz triangular superior, lo que facilita la resolución del sistema mediante sustitución hacia atrás.
16	d, a, e, b, c	El método gráfico implica visualizar ecuaciones como rectas y encontrar su intersección.
17	e, b, a, d, c	Este método se basa en despejar y sustituir una incógnita para resolver la otra.
18	a, b, c, d, e	El modelado implica traducir un problema a ecuaciones y resolverlas.
19	d, a, b, c, e	El método de eliminación simplifica el sistema eliminando una variable a la vez.
20	c, b, d, a, e	Identificar sistemas inconsistentes o dependientes es crucial para entender la naturaleza del problema matemático.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	b	$x<5$ porque 4 es menor que 5.
2	a	Despejando x, obtenemos $x>4$.
3	a	Multiplicar por un número negativo invierte el signo.
4	c	Las inecuaciones muestran relaciones no exactas.
5	d	El primer paso es reunir todos los términos en un solo lado de la desigualdad antes de resolverla.
6	b	La factorización de la diferencia de cuadrados da como resultado $(x-2)(x+2)$.
7	b	El denominador no debe ser cero, ya que el cociente sería indefinido.
8	b	Para que el producto sea negativo, uno de los factores debe ser negativo y el otro positivo, lo que nos lleva a la solución $x<2$ y $x>-4$.
9	b	Modelar con desigualdades nos permite representar restricciones en problemas del mundo real, como límites de capacidad o rangos de valores aceptables.
10	a	La desigualdad $15<t<25$ representa que la temperatura "t" debe ser mayor que 15 °C pero menor que 25 °C.
11	c	La desigualdad $n\leq 150$ asegura que el número de personas "n" no exceda el límite de 150 personas.
12	c	Para resolver desigualdades con valor absoluto, se consideran dos escenarios: uno donde el contenido del valor absoluto es positivo y otro donde es negativo.
13	c	El punto inicial en la recta real para la desigualdad $x>3$ es en $x=3$, y se marca con un círculo abierto debido a que no incluye el valor 3 en la solución.
14	c	La desigualdad $ax+by<c$ representa un semiplano en el plano cartesiano, dividido por la línea que representa la ecuación $ax+by=c$.
15	c	La desigualdad $x\geq 5$ se representa con un punto cerrado en $x=5$ y sombreado a la derecha, indicando que x puede ser igual a 5 o mayor.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
16	a, b, c	Proceso de simplificación y despeje en desigualdades.
17	b, a, c	Identificación y representación gráfica de desigualdades lineales.
18	b, a, d, e, c	Desde preparación gráfica hasta identificación de intervalos.
19	a, d, b, e, c	Proceso de factorización a resolución con método de intervalos.
20	b, d, a, c, e	De identificación a verificación en sistemas lineales.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	c	La notación “x < 5” indica que el valor de x es menor que 5. El símbolo “<” representa la relación de “menor que”.
2	a	En una desigualdad estricta, donde se utiliza “>” o “<”, se usa una línea punteada para representar la exclusión de los puntos en la línea.
3	d	Las desigualdades cuadráticas se representan en una gráfica como parábolas debido a la presencia de términos cuadráticos en la expresión.
4	b	La región factible en un sistema de desigualdades es la intersección de todas las regiones sombreadas que cumplen con todas las desigualdades del sistema.
5	c	El método gráfico es comúnmente utilizado para resolver sistemas de desigualdades porque proporciona una representación visual de las soluciones.
6	b	Esta región incluye todos los puntos que cumplen con todas las restricciones del sistema, lo que la hace una solución válida para todas las desigualdades simultáneas.
7	b	Cuando una desigualdad incluye la igualdad (≥ o ≤), se utiliza una línea sólida para representar que los puntos en la línea también son soluciones.
8	b	El propósito principal de un sistema de desigualdades en matemáticas es modelar situaciones en las que existen márgenes, restricciones o límites.
9	a	La diferencia fundamental entre ecuaciones y desigualdades radica en su naturaleza expresiva.
10	b	En un sistema de desigualdades, una solución representa un conjunto de puntos que satisfacen todas las desigualdades simultáneamente.
11	c	Estas son esenciales para modelar situaciones con márgenes, límites o restricciones en diversas áreas, como optimización, planificación y toma de decisiones.
12	a	En una desigualdad estricta como “x > 3”, se utiliza una línea punteada para representar la frontera entre las soluciones válidas y no válidas.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
13	b	La principal diferencia entre las soluciones de una ecuación y una desigualdad radica en su naturaleza: las soluciones de una ecuación son puntos exactos, mientras que las soluciones de una desigualdad pueden ser intervalos o regiones en el plano cartesiano.
14	b	Estos sistemas permiten expresar restricciones y condiciones que implican desigualdades en lugar de igualdades, siendo útiles para describir problemas en los que las variables están sujetas a ciertos márgenes o límites específicos.
15	a	Las áreas sombreadas que cumplen con todas las desigualdades representan conjuntos infinitos de puntos que satisfacen simultáneamente las restricciones del sistema.
16	c, b, d, e, a	La secuencia inicia transformando la desigualdad en ecuación, luego dibuja la frontera y selecciona un punto de prueba para determinar la región de solución.
17	c, b, d, e, a	Comienza con la elección del método gráfico, luego grafica cada desigualdad, selecciona puntos de prueba, analiza la superposición y determina la región factible.
18	a, c, d, e, b	Se inicia identificando parábolas, luego la intersección, selección de puntos de prueba, evaluación en estos y determinación de la región de solución.
19	d, a, b, c, e	Se inicia identificando el sistema, luego elegir un punto, sustituirlo en las desigualdades, verificar validez y concluir si pertenece a la solución.
20	a, d, c, b, e	Inicia con graficar las desigualdades, identificar intersecciones, elegir puntos de prueba, determinar regiones de solución y concluir sobre la solución conjunta.

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Abel Esteban Ortega Luna (10.03.2014). Gráfica de una inecuación lineal con dos variables. Recuperado el 02 de December de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=mY9fdxM5614

Academia Internet (26.09.2022). Sistemas de ecuaciones con dos y tres incógnitas. Recuperado el 12 de Noviembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=Xu_Hhduzt8I

Academia JAF (01.12.2016). Sistemas de ecuaciones no lineales – Con una ecuación de segundo grado. Recuperado el 18 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=w44c_gX_tyg

Academia Internet (01.03.2018). Cómo graficar desigualdades de una y dos variables. Recuperado el 30 de Noviembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=Oky9FswBKbU

Academia Internet (18.09.2018). Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas. Recuperado el 05 de Diciembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=p3qZVN8nNhA

Divertimáticas (18.10.2016). Ecuaciones de primer grado | 3 Sencillos Pasos. Recuperado el 20 de diciembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=LxLlSyKykM4

julioprofe (02.07.2009). Desigualdades cuadráticas – Ejercicio 1. Recuperado el 24 de November de 2023, de https://www.youtube.com/ watch?v=CiCp1–3n3sU

Julioprofe (23.03.2011). Desigualdades con valor absoluto – Caso 1. Recuperado el 26 de November de 2023, de https://www.youtube.com/ watch?v=O

E (04.03.2023). GAUSS–JORDAN/ Única solución. Sistema de ecuaciones lineales. Recuperado el 16 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=7–nnLwtN9nQ

L Math (28.03.2012). Cómo graficar una desigualdad lineal en dos variables. Recuperado el 01 de December de 2023, de https://www.youtube.com/ watch?v=JLF2ps–DZMM

Matemáticas profe Alex (02.11.2023). Solución de ecuaciones | Resolver una ecuación | Introducción. Recuperado el 02 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=FrJ–tBTpxzlist=PLeySRPnY35dGIC7UWuH0zUDm8BtFXics9

Matemática Profe Alex (25.08.2021). Solución de problemas con Ecuaciones de Primer Grado | Ejemplo 1. Recuperado el 14 de February de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=3HCTOOQVbu0&list=PLeySRPnY35dGx5FUtAikZ6UUuHQLal9_E&index=1

Matemáticas profe Alex (31.05.2019). Qué es una matriz | Sistemas de ecuaciones. Recuperado el 14 de November de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=RJ96S2Pt3qU

Matemáticas profe Alex (02.08.2019). Solución de un sistema de 3x3 método de Gauss | Ejemplo 1. Recuperado el 15 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=XRcx8–2lLJI

Matemáticas profe Alex (01.08.2023). Intervalos introducción | tipos de intervalos . Recuperado el 19 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=3hoeBMp0cQw&list=PLeySRPnY35dE0X9snOak4s9hv8vb1_TbL&index=1

Matemáticas profe Alex (31.01.2018). Inecuaciones de Primer Grado – Lineales | Ejemplo 1. Recuperado el 20 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=CkVXbU–PNRs

MateFacil (17.11.2016). 01. ¿Qué es una desigualdad? (Soluciones, intervalos, gráfica, etc.). Recuperado el 22 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=wWqueXXTmeo&list=PL9SnRnlzoyX3WSvCry-ctW4l_yMH1Z9Xo

Matemáticas profe Alex (05.02.2018). Inecuaciones cuadráticas solución | Ejemplo 1. Recuperado el 23 de Noviembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=_uW4nVdCWzQ

Matemáticas profe Alex (31.01.2018). Inecuaciones de Primer Grado – Lineales con fracciones| Ejemplo 1. Recuperado el 25 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=uwxehcPW1m4

Matemáticas profe Alex (16.12.2018). Lenguaje algebraico | Introducción. Recuperado el 27 de November de 2023, de https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dFOo9gAJFVzz8akDwUfgqlb

Matemáticas profe Alex (07.03.2018). Inecuaciones con valor absoluto | Ejemplo 1. Recuperado el 28 de Noviembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=Bfb0efPKb-0

Matemáticas profe Alex (25.08.2021). Solución de problemas con Ecuaciones de Primer Grado | Ejemplo 1. Recuperado el 29 de November de 2023, de https://www.youtube.com/playlist?list=PLeySRPnY35dGx5FUtAikZ6UUuHQLaI9_E

math2me (05.03.2012). Introducción a las desigualdades. Recuperado el 21 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=gYJiD9VQeLg

math2me (12.08.2010). Sistemas de ecuaciones 3x3│Método de eliminación. Recuperado el 11 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=B22frOUHM-4&list=PLEwR-RTQiRPUOjCWHS404l1aDq39kXZKP&index=3

math2me (15.11.2021). Problemas de Ecuaciones de Primer grado con Fracciones | Recorrido | Classwiz. Recuperado el 10 de September de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=MTm6oh65XJM

math2me (21.09.2020). Aprende Ecuaciones Cuadráticas desde Cero | Introducción. Recuperado el 13 de October de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=oUTdLVHlG-Y&list=PLEwR-RTQiRPVQdDRnLLmUtrE5pPA8IK_b

math2me (13.08.2010). Discriminante de una ecuación cuadrática. Recuperado el 27 de octubre de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=V25yjfcC5P0&list=PLEwR-RTQiRPVQdDRnLLmUtrE5pPA8IK_b&index=4

math2me (27.11.2010). Plantear y resolver problemas de ecuaciones lineales. Recuperado el 13 de Abril de 2023, de https://www.youtube. com/watch?v=ogm6VKWdeJI

Píldoras matemáticas (19.11.2019). Sistemas de inecuaciones con dos variables II. Recuperado el 04 de diciembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=L6zAcGeOuYg

Podemos aprobar matemáticas (01.07.2016). Método de sustitución para un sistema de ecuaciones. Recuperado el 15 de July de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=tWE13bJZo2s&list=PLzYMtd-ocbTXocjWT51TBK57lsju5kYk1&pp=iAQB

Podemos aprobar matemáticas (25.06.2016). Enseñar a los alumnos de educación secundaria a resolver sistemas de ecuaciones.

Recuperado el 16 de August de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=PfbgElzOCUA&list=PLzYMtd-ocbTUklD4ZuZy2DC7s-Ld79ZmH

Pólya, G. (2015). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton University Press.

Sanpamates (12.03.2017). Sistemas de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Recuperado el 13 de Noviembre de 2023, de https://www. youtube.com/watch?v=QIKYCaOZtOE

Susi Profe (29.08.2021). SISTEMAS de INECUACIONES con DOS INCÓGNITAS Método GRÁFICO. Recuperado el 03 de December de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=FT6rKVYWDCs

Susi Profe (11.04.2021). Sistemas de Ecuaciones NO LINEALES con una Ecuación de Segundo Grado. Recuperado el 17 de November de 2023, de https://www.youtube.com/watch?v=C0T19–UWHbs

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2017). *Precálculo: Matemáticas para el Cálculo* (7th ed.). Cengage Learning.

6. Anexos

Anexo 1. Ejercicios sobre ecuaciones cuadráticas

Ejercicio 1.14. Resolver la ecuación cuadrática $20x^2 - 27x - 14 = 0$ por el método de factorización.

Para resolver la ecuación cuadrática $20x^2 - 27x - 14 = 0$ por el método de factorización, primero debemos encontrar dos números que se sumen a −27 (el coeficiente de x) y se multipliquen por −280 (el producto del coeficiente de x2 y el término constante).

Notamos que estos números son −35 y 8, ya que −35 + 8 = −27 y −35 × 8 = −280. Luego, podemos reescribir el término medio −27*x* como −35*x* + 8*x*, y factorizar por agrupación. A continuación, se explica con mayor detalle este proceso.

$20x^2 - 27x - 14 = 0$ $20x^2 - ? + ? - 14 = 0$	Esta es la ecuación cuadrática original. Para resolver el problema por factorizacion debemos expresar el término -27x en en función de 2 términos que sumen precisamente ese valor.
Números: - 35 y 8	Para ello debemos encontrar dos números que sumados den -27 y multiplicados den -280 (20 x -14).
$20x^2 - 35x + 8x - 14 = 0$ $5x(4x - 7) + 2(4x - 7) = 0$ $(5x + 2)(4x - 7) = 0$ $5x + 2 = 0; x_1 = -\frac{2}{5}$ $4x - 7 = 0; x_2 = \frac{7}{4}$	Coeficiente de x? x término independiente. Reemplazamos los terminos encontrados con -27x Agrupamos los términos. Aplicamos “Factor común por agrupación”. Hacemos cada factor igual a cero y resolvemos cada ecuacion.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática son $x_1 = -\frac{2}{5}$ y $x_2 = \frac{7}{4}$.

Ejercicio 1.15. Resolver la ecuación cuadrática $(x - 3)^2 = 9$.

Para resolver la ecuación cuadrática $(x - 3)^2 = 9$, primero necesitamos comprender que la ecuación es una ecuación de segundo grado que se ha simplificado a la forma de una ecuación cuadrada perfecta. La solución de esta ecuación se obtiene al tomar la raíz cuadrada de ambos lados y teniendo en cuenta que la raíz cuadrada de un número puede ser positiva o negativa.

$(x-3)^2 = 9$	Esta es la ecuación cuadrática original.
$x - 3 = \pm\sqrt{9}$	Tomamos la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación.
$x - 3 = \pm 3$	Simplificamos la raíz cuadrada de 9 que es 3.
$x = 3 \pm 3$	Sumamos 3 a ambos lados de la ecuación.
$x_1 = 6; x_2 = 0$	Obtenemos las dos posibles soluciones.

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación cuadrática son $x_1 = 6$ y $x_2 = 0$.

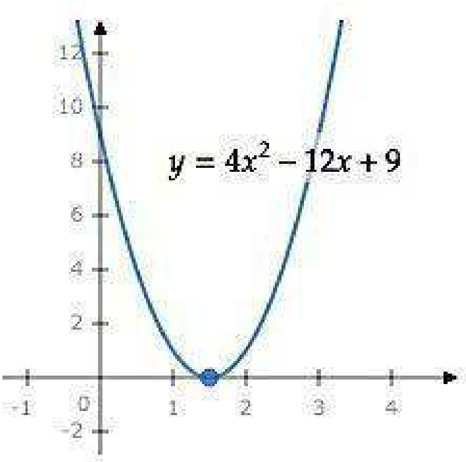
Ejercicio 1.16. Resolver la ecuación cuadrática $4x^2 - 12x + 9 = 0$, luego comprobar la solución mediante un gráfico.

Vamos a resolverla utilizando la fórmula general, que se expresa como: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$a = 4, b = -12, c = 9$	Identificamos los coeficientes de la ecuación cuadrática
$D = b^2 - 4ac$	Definimos el discriminante (D) de la ecuación.
$D = (-12)^2 - 4(4)(9)$	Sustituimos a, b, y e en la fórmula del discriminante.
$D = 144 - 144 = 0$	Obtenemos el valor del discriminante.
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	Fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas.
$x = \dfrac{12 \pm \sqrt{0}}{8}$	Sustituimos a, b y el valor del discriminante.
$x_1 = x_2 = \dfrac{3}{2} = 1.5$	Obtenemos el valor final de x1 y x2.

Finalmente, la solución de la ecuación cuadrática $4x^2 - 12x + 9 = 0$ es $x = 1.5$. Esto significa que si sustituimos por esta solución en la ecuación original, la igualdad se mantendrá, verificando que la solución es correcta.

Figura 1
Ecuación cuadrática. Ejercicio 1.17



Nota. Esta figura muestra la gráfica de una ecuación cuadrática, por Arteaga, M.

Ejercicio 1.17. Solución de una ecuación cuadrática que contiene exponentes fraccionarios $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 10x^{-\frac{3}{2}}$.

Para resolver la ecuación se deben multiplicar todos los términos por $x^{3/2}$, porque es el menor exponente en términos negativos. De esta forma, eliminamos los exponentes negativos.

$x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$	Se multiplicará cada término por 3/2 para deshacernos de los exponentes fraccionarios.
$x^{3/2} \cdot x^{1/2} + 3x^{3/2} \cdot x^{-1/2} = 10x^{3/2} \cdot x^{-3/2}$	Multiplicamos término a término, recordando que al multiplicar potencias de la misma base, sumamos los exponentes.
$x^2 + 3x = 10$	Simplificamos los términos para obtener una ecuación cuadrática.
$x^2 + 3x - 10 = 0$	Reorganizamos la ecuación restando 10 a ambos lados.

Una vez que hemos eliminado los exponentes negativos, resolvemos la ecuación cuadrática resultante.

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

Identificamos los coeficientes en la ecuación cuadrática original: a = 1, 6 = 3, y c = -10.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula cuadrática general para encontrar las raíces.

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)$$

$$D = 49$$

Calculamos el discriminante D usando los valores de a, b, y c. Dado que D > 0, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2} = -5$$

Sustituimos el valor de D, a, y o en la fórmula cuadrática para encontrar las dos soluciones reales distintas de la ecuación cuadrática.

De acuerdo con el proceso realizado, la solución de la ecuación: $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}} = 10x^{-\frac{3}{2}}$ es $x_1 = 2$ y , pero de la misma forma podemos ver que, al evaluar —5 en $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ obtenemos un valor imaginario, puesto que no existe la raíz cuadrada de números negativos, por lo tanto —5 no es una solución de la ecuación.

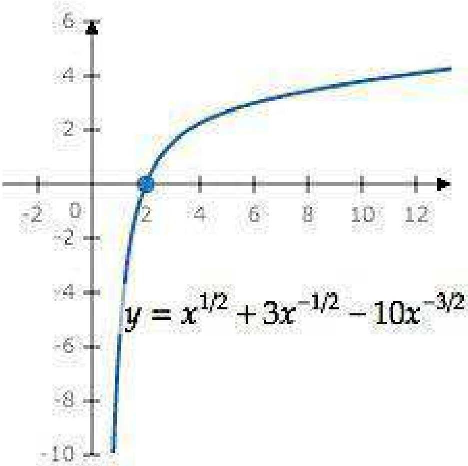
A continuación, evaluamos la otra respuesta $x_1 = 2$ en la ecuación original.

$2^{1/2} + 3 \cdot 2^{-1/2} = 10 \cdot 2^{-3/2}$	Sustituimos x o con 2 en la ecuación original.
$\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{8}}$	Convertimos los exponentes fraccionarios en raíces cuadradas.
$\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}}$	Simplificamos √8 a 2√2.
$(2\sqrt{2})\sqrt{2} + (2)3 = 10$	Calculamos el MCM(2√2) para simplificar la ecuación.
$4 + 6 = 10$	Ambos lados son iguales cuando x = 2.
$10 = 10$	

Finalmente, comprobemos los resultados con el método gráfico.

Figura 2

Ecuación con exponentes fraccionarios



Nota. Esta figura muestra la gráfica de una ecuación con exponentes fraccionarios, por Arteaga, M. 2024.

Veamos ahora un ejemplo de ecuación cuadrática en contextos reales.

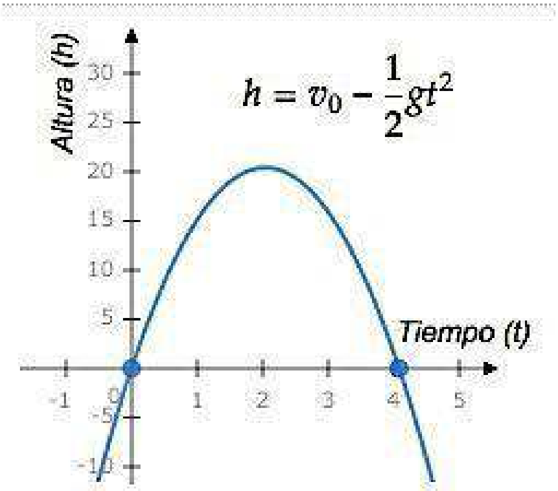
Ejercicio 1.18. Un objeto es lanzado hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 20 m/s. Queremos saber cuándo el objeto llega a la tierra de nuevo. La ecuación de movimiento para la altura h del objeto en función del tiempo t está dada por $h = v_{0t} - \frac{1}{2}gt^2$, donde v_0 es la velocidad inicial y g es la aceleración debida a la gravedad, que es aproximadamente $9.8\frac{m}{s^2}$.

En este caso, queremos encontrar el tiempo cuando el objeto vuelve al suelo, es decir, cuando $h = 0$.

$h = v_0t - \dfrac{1}{2}gt^2$	Esta es la ecuación de movimiento.
$0 = 20t - \dfrac{1}{2}(9.8)t^2$	Sustituimos vo por 20 m/s y g por 9.8 m/s2, y ponemos h = 0.
$0 = 20t - 4.9t^2$	Simplificamos los coeficientes.
$0 = t(20 - 4.9t)$	Factorizamos tomando t como factor común.
$t = 0, t = \dfrac{20}{4.9}$	Encontramos las soluciones de t.
$t = 0, t \approx 4.08s$	Resolvemos para t.

Figura 3

Lanzamiento de un objeto



Nota. Esta figura muestra la gráfica de una ecuación cuadrática que representa el lanzamiento de un objeto, Arteaga, M. 2024.

Solución: el objeto llega a la tierra de nuevo aproximadamente después de segundos. Nota: el $t = 0$ corresponde al momento en que el objeto fue lanzado hacia arriba.

Anexo 2. Ejemplos del modelado en sistemas de ecuaciones

Ejercicio 2.4. Un hombre tiene 14 monedas en su bolsillo, las cuales son de 10 y de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es $2,75, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tienen?

Paso 1: Identificar las incógnitas

x	Cantidad de monedas de 10 centavos.
y	Cantidad de monedas de 25 centavos.

Paso 2: Expresar las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas

$0.10x$	Valor total de las monedas de 10 centavos.
$0.25y$	Valor total de las monedas de 25 centavos.

Paso 3: Establecer un sistema de ecuaciones

$x+y=14$	Tiene un total de 14 monedas.
$0.10x+0.25y=2.75$	El valor total de las monedas es 2.75.

Paso 4: Resolver el sistema e interpretar los resultados

$-0.10(x+y=14)$	Multiplicamos la primera ecuación por -0.10 para igualar
$-0.10x-0.10y=-1.4$	Sumamos las dos ecuaciones.
$0.10x+0.25y=2.75$	
$0.15y=1.35$	Despejamos el valor de y .
$y=9$	9 monedas de 25 centavos.
$x+y=14$	Reemplazamos y en la segunda ecuación.
$x=14-9$	
$x=5$	5 modenas de 10 centavos.

Solución: una vez que hemos resuelto el sistema, vemos que se tienen 5 monedas de 10 y 9 monedas de 25 centavos.

Ejercicio 2.5. Una tienda vende dos tipos de pastel: chocolate y vainilla. Se sabe que un pastel de chocolate cuesta $15 y uno de vainilla $10. Si en un día la tienda vende un total de 20 pasteles y recoge $250, ¿cuántos pasteles de cada tipo se vendieron?

Paso 1: Identificar las incógnitas

c	Cantidad de pasteles de chocolate vendidos.
v	Cantidad de pasteles de vainilla vendidos.

Paso 2: Expresar las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas

$15c$	Costo total de pasteles de chocolate vendidos.
$10v$	Costo total de pasteles de vainilla vendidos.

Paso 3: Establecer un sistema de ecuaciones

$c + v = 20$	Se vendieron un total de 20 pasteles.
$15c + 10v = 250$	El costo total de los pasteles vendidos es 250 .

Paso 4: Resolver el sistema e interpretar los resultados

$10(c + v) = 10(20)$ $10c + 10v = 200$	Multiplicamos la primera ecuación por 10 para que los coeficientes de v en ambas ecuaciones sean iguales y podamos usar el método de eliminación
$-10c - 10v = -200$ $15c + 10v = 250$	Multiplicamos por -1 la primera ecuación y sumamos la segunda ecuacion.
$5c = 50$ $c = 10$	Dividimos ambos lados para 5 luego se despeja c.
$10 + v = 20$ $v = 20 - 10$ $v = 10$	Sustituimos el valor de c en la primera ecuación para encontrar el valor de v .

Solución: en el día se vendieron 10 pasteles de chocolate y 10 pasteles de vainilla.

Ejercicio 2.6. Usted es profesor de una clase de 30 estudiantes. Quiere preparar una prueba con una combinación de preguntas de opción múltiple y preguntas de respuesta corta. Cada pregunta de opción múltiple vale 1 punto y cada pregunta de respuesta corta vale 2 puntos. Si quiere que la prueba tenga un total de 50 puntos, y quiere tener el doble de preguntas de opción múltiple, qué preguntas de respuesta corta, ¿cuántas preguntas de cada tipo debería incluir?

Podemos plantear las siguientes ecuaciones:

- Para la puntuación total: $1x + 2y = 50$, donde x es el número de preguntas de opción múltiple, es el número de preguntas de respuesta corta.
- Para el número de preguntas: $x = 2y$.

Ahora, resolvemos el sistema de ecuaciones.

$x = 2y$	Esta ecuación representa tener el doble de preguntas de opción múltiple que preguntas de respuesta corta.
$x + 2y = 50$	Quiere que la prueba totalice 50 puntos. Dadas las puntuaciones por pregunta.
$2y + 2y = 50$	Sustituimos x con $2y$ en la segunda ecuación. Esto nos da una ecuación en términos de y solamente.
$4y = 50\ y = 12.5$	Resolviendo para y, encontramos que debes incluir 12.5 preguntas de respuesta corta.
$x = 2y\ x = 25$	Usando la primera ecuación, $x = 2y$, determinamos que deberías incluir 25 preguntas de opción múltiple.

Solución: como no puede tener media pregunta (12.5), entonces puede tener 12 preguntas de respuesta corta. Sustituyendo $y = 12$ en la ecuación $x = 2y$, obtenemos $x = 2 * 12 = 24$. Entonces, debería incluir 24 preguntas de opción múltiple y 12 preguntas de respuesta corta en la prueba para lograr el total de 50 puntos.