La Universidad Católica de Loja

Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Análisis Matemático Multivariado

Guía didáctica

Facultad Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Análisis Matemático Multivariado

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Economía	III
Logística y Transporte	III
Finanzas	IV

Autora:

Elsa Geovany Andrade Pazmiño

MATE_2029

Universidad Técnica Particular de Loja

Análisis Matemático Multivariado

Guía didáctica

Elsa Geovany Andrade Pazmiño

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-39-858-1

Año de edición: septiembre, 2023

Edición: primera edición reestructurada en febrero 2025 (con un cambio del 5%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Orientación a la innovación y a la planificación.
- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Comportamiento ético.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3 Competencias del perfil profesional

Economía:

- Desarrolla el pensamiento matemático y estadístico para la aplicación y análisis de aspectos económicos.

Finanzas:

- Aplica herramientas estadísticas, contables, económicas y financieras, para la medición de los beneficios y riesgos a los que se enfrentan los actores del sistema económico - financiero.

Logística y transporte:

- Aplica fundamentos de matemáticas, ciencia e ingeniería en el campo de la logística y transporte.
- Resuelve problemas de ingeniería en logística y transporte.
- Asume un pensamiento crítico y reflexivo.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

La asignatura de Análisis Matemático Multivariado es una asignatura de vital importancia, ya que prepara y profesionaliza a quien la sigue con métodos científicos para que facilite a la sociedad y al sistema económico con conocimientos administrativos, contables, estadísticos y matemáticos para la toma de decisiones acertadas en la asignación de recursos, que muchas veces son limitados. Su desconocimiento podría ser nefasto en el desarrollo profesional y por ende en el aporte hacia las empresas que el país lo requiere.

En este caso, los problemas a investigar serán los inherentes a las actividades económicas (producción, circulación, distribución y consumo), el funcionamiento del mercado y el comportamiento de los agentes económicos, la falta de planificación de opciones de desarrollo ambientalmente adecuadas y sustentables, relativos a:

- La estructura y funcionamiento de los sectores económicos.
- El funcionamiento del mercado con énfasis en las MIPYMES.
- El funcionamiento macroeconómico de la economía.

Desde la investigación, el aporte para el estudiante es conocer y comprender los métodos de intervención y/o actuación profesional. Para ello, el estudiante debe ser capaz de integrar todos los aprendizajes adquiridos, así como de reconocer los objetos de actuación de la profesión y abordar las acciones de investigación-intervención que exigen las problemáticas profesionales.

2. Metodología de aprendizaje

Análisis Matemático Multivariado es una asignatura importante dentro de la malla curricular de las carreras de Economía, Finanzas, Logística y Transporte, por lo que la universidad busca los métodos y recursos necesarios para optimizar la enseñanza - aprendizaje de sus estudiantes, es así que la guía didáctica, se convierte en el eje central del proceso, la misma que es elaborada para encaminar y facilitar al estudiante con los contenidos de la materia, ya que le proporciona orientaciones académicas a lo largo del ciclo académico en cada una de las unidades y con actividades activas y colaborativas que le permitirán lograr un aprendizaje significativo.

Las actividades se basan en la metodología centrada en el aprendizaje basado en problemas, de tal forma que, al representar situaciones de la vida real, el estudiante haga uso de esta asignatura, para obtener respuestas a aspectos donde intervengan situaciones con variables diferentes y él pueda emitir conclusiones criterios para una eficiente toma de decisiones.

El proceso para seguir es el siguiente:

Familiarizarse con el sistema de aprendizaje de la universidad, el mismo que se encuentra distribuido de la siguiente forma:

Tabla 1

Componentes de aprendizaje y su peso en la evaluación

Componentes de aprendizaje	Siglas	Porcentaje 100 %
Aprendizaje en Contacto con el Docente	ACD	35
Aprendizaje Práctico Experimental	APE	30
Aprendizaje Autónomo	AA	35

Nota. Tomado de *Instructivo del Sistema Interno de Evaluación Estudiantil de la UTPL*, por UTPL, 2024. UTPL.

- Realizar una revisión minuciosa del plan docente, ya que ahí se detallan los contenidos a ser abordados tanto en primer bimestre como en el segundo, también se encuentran cada una de las actividades propuestas para lograr el aprendizaje.
- Para el estudio de esta asignatura es necesario crear un ambiente propicio que facilite el razonamiento, preferible estar libre de distracciones.
- Distribuir el tiempo en este sistema de estudio a distancia es clave, a cada asignatura debe entregarle un tiempo prudente para concluir con el estudio de todas las unidades, recuerde que cada asignatura expone una actividad por semana y esta debe ser entregada para su calificación en el período previsto.
- Es necesario organizar sus actividades laborales y familiares de tal manera que permitan incluir la disponibilidad de por lo menos una hora diaria para el desarrollo de las tareas propuestas de esta asignatura. Debe tomar en cuenta que son 4 unidades para el primer bimestre y 3 para el segundo bimestre, y junto con la revisión del plan docente donde se detallan las actividades a realizar, debe establecer un calendario para el estudio y desarrollo de las mismas.
- Participar de las actividades sincrónicas y asíncronas propuestas en el plan docente, en el cual constan las fechas para su realización.

Las aplicaciones de estas recomendaciones contribuirán en el proceso de aprendizaje, recuerde que con esfuerzo y perseverancia se llega a la meta. Los tutores siempre estarán atentos a sus inquietudes en torno a esta asignatura.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultados de aprendizaje:

ECONOMÍA

- Determinar el dominio y rango de funciones
- Transformar coordenadas

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial.
- Determinar el tipo de funciones, sus características principales y su importancia
- Determinar cuándo una función tiene límite en un punto
- Determinar la continuidad de una función.

Para alcanzar los resultados planteados usted debe desarrollar su capacidad de análisis y comprender las propiedades fundamentales de las funciones. Además debe determinar el dominio y rango, transformar coordenadas y clasificar las funciones según sus características y aplicaciones. Identificará cuándo una función tiene límite en un punto y evaluará su continuidad, lo que le permitirá interpretar y modelar situaciones matemáticas en diversos contextos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

Unidad 1. Funciones univariadas

Este tema se lo ha visto en ciclos anteriores, sin embargo, vale la pena recordar ciertas nociones básicas, que son fuentes importantes para la comprensión total de la asignatura de Análisis Matemático Multivariado; así se recordarán los principios básicos de una función y son:

El significado de "relación" es el mismo que indica que es una correspondencia o conexión entre dos o más cosas, por ejemplo la producción de una empresa depende del número de máquinas que tengan, es decir, existe una correspondencia entre el producto fabricado y la maquinaria. Otro ejemplo puede ser que el salario de una persona dependa del número de horas que trabaje, la conexión está dada entre el salario y el número de horas.

Es necesario recordar que para que exista una relación se deben cumplir dos características importantes que son:

- La "existencia", es decir que existan estos elementos que deben ser de conjuntos diferentes para que entre ellos se dé la relación propuesta. En el caso de los ejemplos anteriores debe haber el producto y las maquinarias. En el segundo ejemplo debe existir el trabajo para que este sea remunerado.
- La "unicidad" es decir que para cada elemento del primer grupo debe existir la correspondencia de un solo elemento del segundo grupo.

Con estas tres condiciones importantes se define a la función, siendo esta:

Definición: a la relación establecida entre dos variables existentes, tales que se asocia a cada valor de la primera un único valor de la segunda, se le conoce con el nombre de función, y se le representa como y=f(x).

donde:

x variable conocida como variable independiente (elemento del primer conjunto).

y variable conocida como variable dependiente (elemento del segundo conjunto).

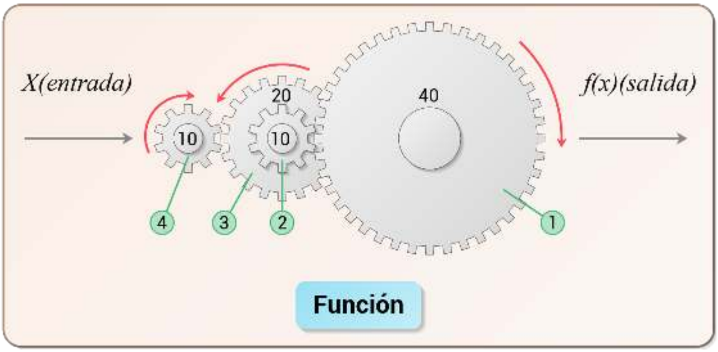
1.1. Ideas generales

Idea intuitiva.

La función tiene objetos o elementos de entrada, ingresan a un proceso y de esto sale un determinado producto. Al proceso es lo que se le conoce como función.

Los objetos de entrada se encuentran en el dominio y el producto de salida se encuentra en el rango.

Figura 1
Idea de función



Nota. Andrade, E., 2023.

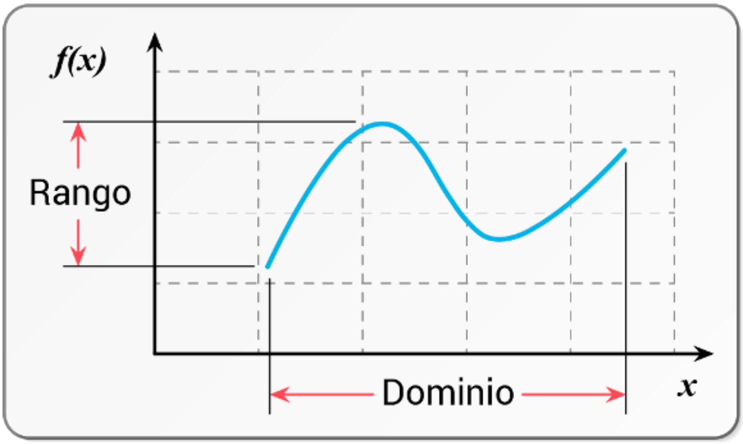
1.2. Dominio y rango

- **Dominio:** El dominio de una función f(x) es el conjunto de todos los valores para los cuales la función está definida.
- **Rango:** El rango de la función es el conjunto de todos los valores que f toma dentro de la función.

Por lo tanto, el dominio y rango explican la ubicación de los pares ordenados en el plano cartesiano.

Figura 2

Representación gráfica dominio y Rango



Nota. Tomado de Matemáticas discretas (p. 143), por UNIVERSIDAD AUTONOMA DEL ESTADO DE HIDALGO, 2011.

1.3. Tipos de funciones

Se dividen principalmente en dos categorías: las **algebraicas** y las **trascendentes**. Estas divisiones son fundamentales para el estudio de las funciones y sus propiedades. A través de ejemplos visuales y conceptos claros, exploraremos los diferentes tipos de funciones más representativas en el siguiente módulo didáctico:

[Tipos de funciones]

1.4. Características y propiedades de las funciones

Según el tipo de funciones se pueden presentar las siguientes características:

- Para cada valor de x del conjunto A le corresponde uno y solo un elemento del conjunto B.
- Una función es una relación entre dos conjuntos A y B.
- Las funciones pueden describir fenómenos de la vida cotidiana.
- Las funciones pueden ser representadas gráficamente.
- La variable independiente es la x, y esta variable no depende de ninguna otra.
- La variable dependiente es la variable que depende del valor que tome la variable x.
- Cada valor de x debe tener una sola imagen.
- El dominio es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la función está definida.
- Rango es el conjunto de valores que resultan de la correspondencia con x. Este conjunto contiene al conjunto imagen de la función.
- Imagen son todos los valores de y para los cuales existe un único valor de x tales que y=f(x). Es un subconjunto del rango.
- Conjunto de positividad son todos los valores de x para los cuales la función es positiva.
- Conjunto de negatividad son todos los valores de x para los cuales la función es negativa.
- Conjunto de ceros son todos los valores de x que anulan a la función, es decir, son aquellos valores que hacen que f(x)=0.
- Intervalo de crecimiento son los valores de x para los cuales la función crece.
- Intervalo de decrecimiento son aquellos valores de x para los cuales la función decrece.
- Dentro de las propiedades de las funciones se tienen:

    - **Continuidad:** si la función tiene un trazo continuo o no.
    - **Monotonía:** es el observar y describir matemáticamente el crecimiento y decrecimiento de una función.

- **Simetría:** son los diferentes tipos de simetría que se presentan en las funciones.
- **Periodicidad:** es periódico si siempre transcurre el mismo intervalo de tiempo entre la primera vez que le ocurre el fenómeno, la segunda vez que ocurre, la tercera Ese intervalo de tiempo se denomina, como período.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Una vez finalizado con el estudio de esta semana, es hora de reforzar los conocimientos adquiridos realizando las siguientes actividades:

1. Estimado/a estudiante, en esta fase de adquisición del conocimiento se sugiere buscar la manera de estar en contacto con el tutor, ya que él orientará el aprendizaje de la semana, sugiriendo las lecturas específicas, ejercicios y recursos hacia donde usted debe proyectarse.

   Usted puede hacer uso de la tutoría en el día y hora que el docente haya planificado, puede contactarse por medio del correo electrónico o hacer uso de la mensajería que dispone la plataforma en su aula virtual.

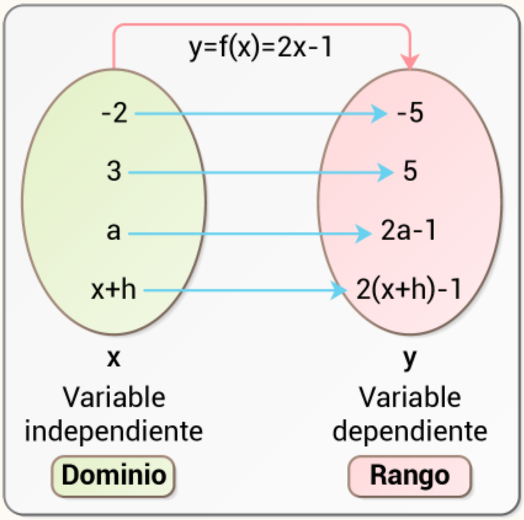
   El docente tutor mediante anuncios académicos recordará las actividades de la semana, orientando los recursos que usted debe estudiar y guiando el trabajo que deberá ejecutar en esa semana. Recuerde que tiene semanalmente actividades que realizar y algunas de ellas tienen una calificación específica.

2. Para ampliar sus conocimientos se sugiere la visualización del siguiente vídeo titulado: "Gráficas y funciones" de Capa (2012).
3. Otro aspecto importante que le ayudará a adquirir las destrezas necesarias en este tema de funciones es la realización de los ejercicios que usted puede practicar en el documento de apoyo: Fundamentos matemáticos de Granda Lasso Euler. (2024), que contiene ejercicios propuestos.

Nota: por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

Figura 3

Dominio y rango



Nota. Tomado de la web dominio y rango [Fotografía], CC BY 2.0

4. Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones ingresando a GeoGebra donde le permitirá visualizar el rango y el dominio.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 2

Unidad 1. Funciones univariadas

1.5. Límites y continuidad

Los límites describen cómo se comporta una función cerca de un punto.

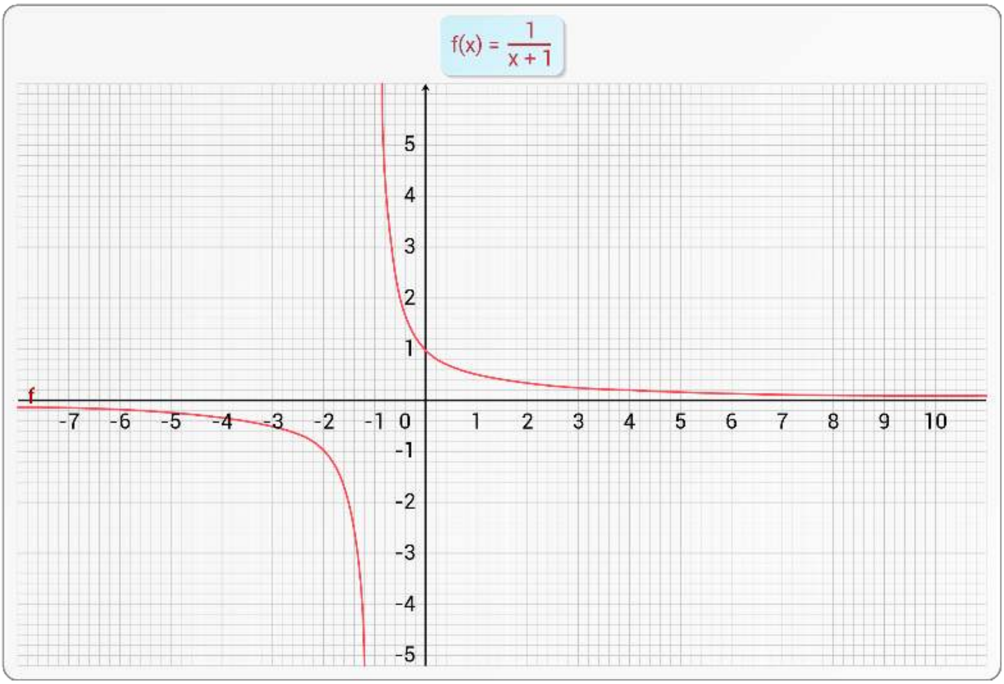
Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

La función no está definida para x = 0 y para x=-1, ya que si adoptara estos valores la función no estaría definida (porque no se puede dividir para 0). Sin embargo, si se puede observar cómo se comporta la función cuando se aproxima a dichos valores, se puede observar si es creciente o decreciente. Los límites ayudan a resolver este tipo de dificultades.

Figura 4

Representación gráfica límites y continuidad



Nota. Andrade, E., 2023.

Límites.

El límite de f(x) cuando x tiende a a, es un número L, descrito de la siguiente forma:

$$LIM\ f\,(x) = L \quad x \rightarrow a$$

Siempre que x esté cercana a L para toda x cercana, pero diferente de a.
Si no existe tal número, entonces el límite no existe.

Ejemplo:

Calcular el límite siguiente:

$$x - 3 = ?$$

La función es $f(x) = x - 3$, para calcular este límite se debe observar el comportamiento de la función tanto para la izquierda como para la derecha desde $x = 2$.

Observe las siguientes tablas, donde se muestran los valores por la izquierda y por la derecha:

Tabla 2
Valores por la izquierda

x	$f(x) = x - 3$
1.5	$f(1.5) = 1.5 - 3 = -1.5$
1.9	-1.1
1.95	-1.05
1.99	-1.01
1.999	-1.001
2	-1

Nota. Andrade, E., 2023.

Tabla 3
Valores por la derecha

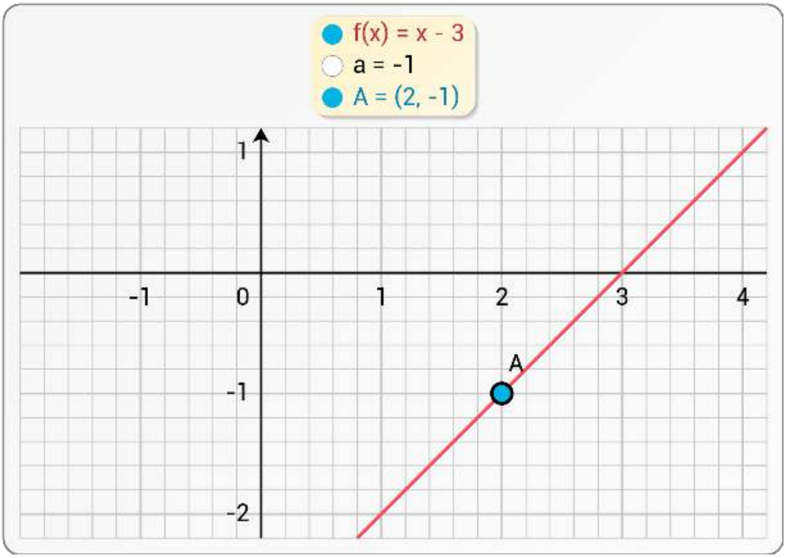
x	$f(x) = x - 3$
2.5	$f(2.5) = 2.5 - 3 = -0.5$
2.1	-0.9
2.05	-0.95
2.01	-0.99
2.001	-0.999
2	-1

Nota. Andrade, E., 2023.

Se observa que si la función se acerca a x=2 por la izquierda f(x) tiende a acercarse a f(x)=-1, igual si la función se acerca por la derecha también tiende a acercarse a f(x)=-1.

Figura 5

Representación gráfica límites



Nota. Andrade, E., 2023.

Los límites de las funciones se pueden determinar evaluando los valores cercanos en forma gráfica.

Continuidad.

Intuitivamente, puede decirse que una función de variable real es continua en un intervalo cuando se puede dibujar sobre el papel a lo largo de dicho intervalo sin levantar el lápiz. La descripción matemática de esta idea intuitiva recurre al uso de la noción de límite.

Se dice que una función f es continua en un punto a, si y sólo, si se verifican las condiciones siguientes:

- La función existe en a.
- Existe límite de f(x) cuando x tiende a "a".
- El valor de la función en el punto y el límite en dicho punto son iguales:

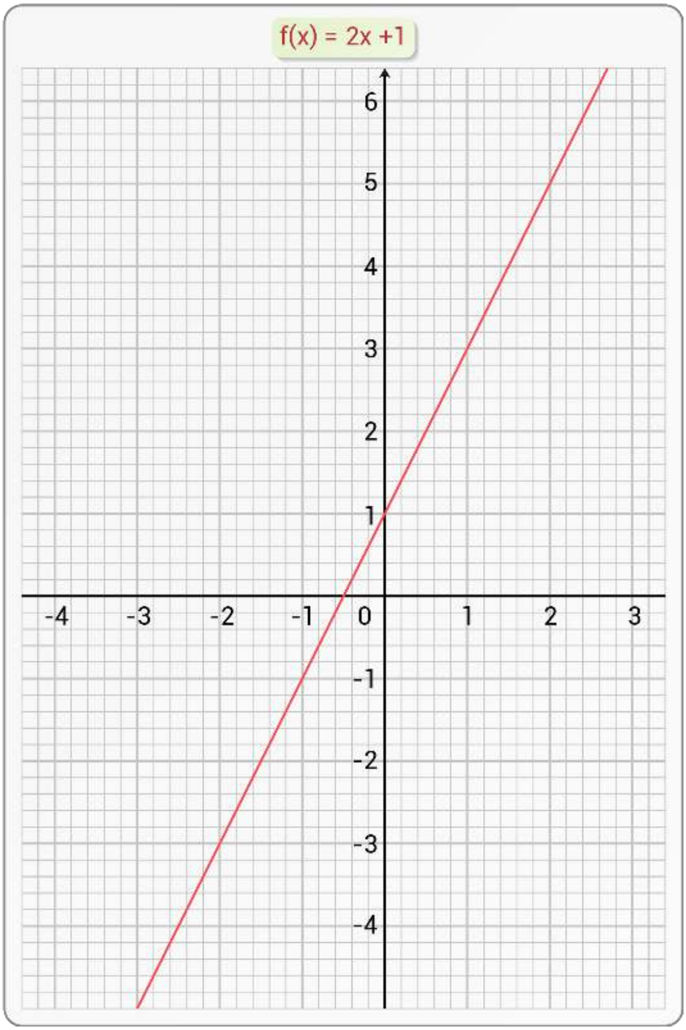
$$Lim\ (x) = f\,(a) \qquad x \to a$$

Cuando no se cumple alguna de las condiciones mencionadas, se dice que la función es discontinua en el punto. Además, cabe indicar que, se considera que la función es continua en un intervalo (a, b) cuando es continua en todo punto x, tal que a < x < b.

Función continua:

Figura 6

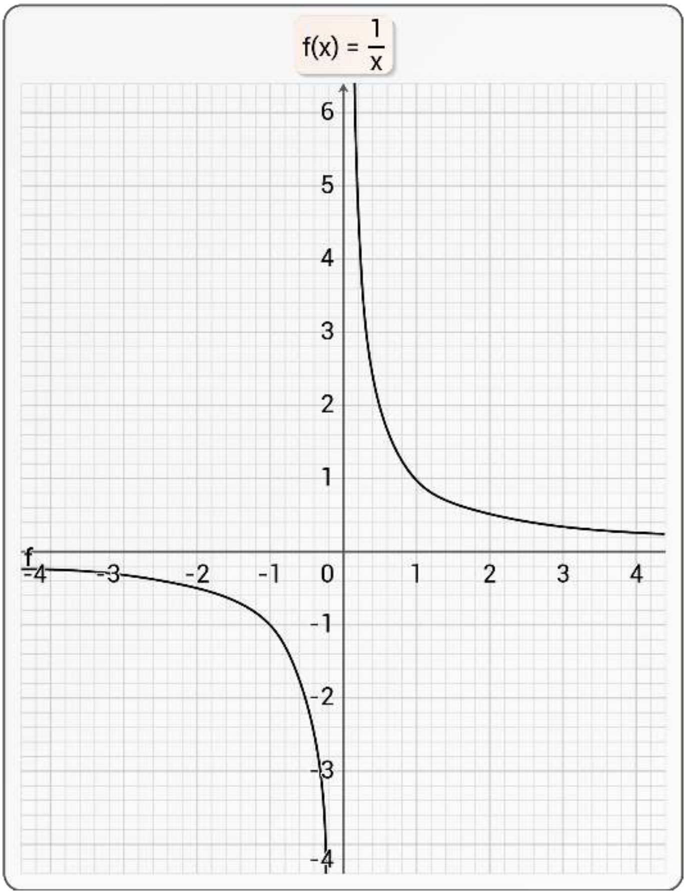
Representación gráfica de la función continua



Nota. Andrade, E., 2023

Figura 7

Representación gráfica de la función discontinua



Nota. Andrade, E., 2023.

1.6. Propiedades

Para poder operar con los límites de funciones es conveniente conocer las propiedades que son las siguientes:

Dadas dos funciones f(x) y g(x) que tienen límite en un punto a, deben cumplir lo siguiente:

- El límite de la suma de ambas funciones es igual a la suma de los límites. El límite de la diferencia se calcula como la diferencia de los límites.

$$[f(x) \pm g(x)] \quad = \quad f(x) \pm g(x)$$

- El límite del producto de las funciones es igual al producto de sus límites.

$$[f(x) * g(x)] \quad = \quad f(x) * g(x)$$

- El límite del producto de una constante por una función viene determinado por la multiplicación de la constante por el límite de la función.

$$f(x) = kf(x)$$

- El límite del cociente entre ambas funciones es igual al cociente entre los límites, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de cero.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Siempre que $g(x) \neq 0$

De esta última propiedad surgen tres casos que deben ser analizados:

Caso 1:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{0}{0}$$

Si se tratan de funciones polinómicas, se deben utilizar artificios matemáticos como la factorización entre el numerador y el denominador tal que puedan simplificar los binomios iguales resultantes; en funciones con radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que contiene al radical.

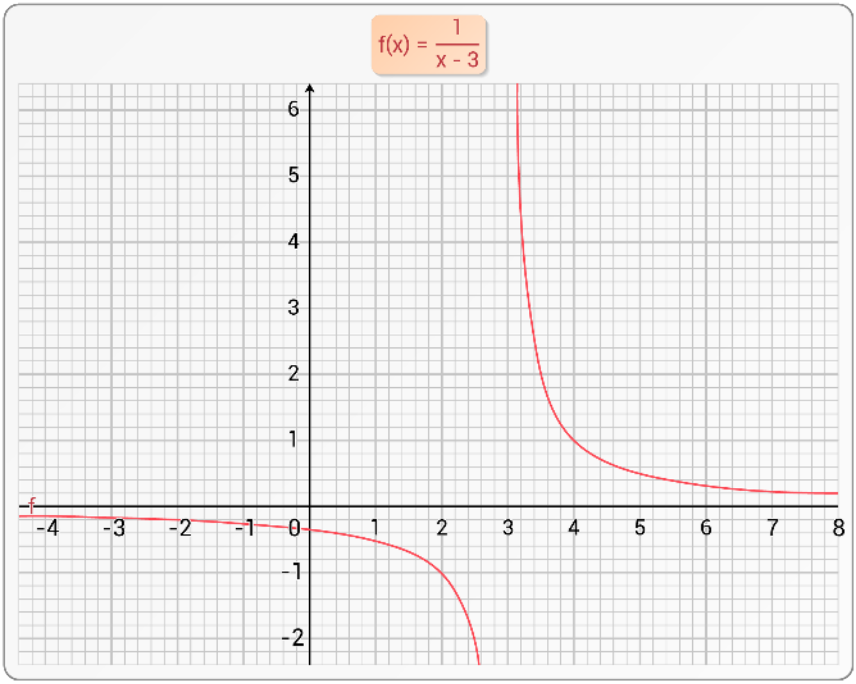
Caso 2:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{k}{0}$$

Si la división entre el numerador y el denominador da como resultado una indeterminación, se deben analizar qué ocurre con los límites de la función tanto a la derecha como hacia la izquierda.

Figura 8

Representación gráfica de propiedades



Nota. Andrade, E., 2023.

- $\frac{1}{x-3} = -\infty$
- $\frac{1}{x-3} = +\infty$

Si el resultado del análisis es el mismo tanto a la derecha como para la izquierda, se dice entonces que el límite existe, caso contrario no.

En el caso del ejemplo, el límite no existe.

Caso 3:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to 0} g(x)} = \frac{0}{k}$$; no existe ningún problema

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es momento de aplicar sus conocimientos a través de las actividades que se han planteado a continuación:

1. El contacto con el docente es una actividad que usted debe mantener, ya sea por mensaje o haciendo uso de las tutorías, recuerde que él orientará su trabajo, indicará el uso de los recursos educativos y ampliará los conocimientos disipando las dudas que podrían presentarse en este tema.

   No se descuide de la planificación y de acuerdo con ello organice su tiempo, recuerde que en cada semana se recomiendan 9 horas de trabajo, distribuidos en Aprendizaje en Contacto con el Docente, Aprendizaje Práctico Experimental y Aprendizaje Autónomo.

2. Usted puede ampliar este tema revisando los siguientes videos sobre la *noción intuitiva del concepto de límite*:

   - Parte 1.
   - Parte 2.
   - Parte 3.

3. Después de haber revisado y tener la idea intuitiva se sugiere leer la guía didáctica de Cálculo de Yépez, C. (2015). Para completar esta lectura, le invito a que descargue dicha guía.
4. Revisada la teoría de la guía didáctica, amplíe sus conocimientos revisando los siguientes vídeos que tratan de los límites y sus propiedades.

   - Propiedades de los límites de funciones de Ayala., (2018).
   - Ejemplos de cálculo de límites de Ayala., (2018).

Nota: por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

5. Finalmente, le animo a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 1

1. Para $g(x) = x^2 - 2x + 3.$ Determine los valores funcionales:

   $a.\ g(0); b.\ g(2); c.\ g(-3); d.\ g(a); e.\ g(2x-1)$

2. Dada la función $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 10x + 8$ Indique si es una función polinomial.

3. Indique si la función $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x-4;}$; es una función racional.

4. Indique por lo menos una condición para obtener la respuesta de un par radical.

   a. Si n es un número par su dominio es el intervalo en el que g(x) ≥ 0.
   b. Si n es impar, su dominio es R.
   c. Su representación gráfica es una rama de una parábola.

5. Dada la función $f(x) = 3$ determine su dominio.

6. Dada la función $f(x) = \{2x - 1\ si\ x \geq 0$ determine el dominio.

7. Determine el valor del siguiente límite $x^3 - 2x^2 + 5$

8. Dada la función $f(x) = \frac{x+3}{2}$;, determine los puntos de discontinuidad.

9. Indique si la función $f(x) = \frac{x-3}{x^{2+4x+4}}$ es continua en el punto x=4

10. Determine el límite de la siguiente función $\frac{2x^2+2x+2}{4x^2-3}$

Ir al solucionario

Resultados de aprendizaje:

Economía

- Identifica los procesos de reconocer elementos de vectores en el plano y vectores en el espacio
- Comprender el dominio de funciones vectoriales
- Comprender el límite de funciones vectoriales
- Interpretar el producto punto
- Comprende la definición de producto vectorial, ecuación vectorial
- Aplicar el concepto de distancia entre un punto y un plano

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial.
- Determinar el tipo de funciones, sus características principales y su importancia
- Determinar cuándo u na función tiene límite en un punto
- Determinar la continuidad de una función.

Para alcanzar los resultados planteados, usted identificará los elementos fundamentales de los vectores en el plano y en el espacio, comprendiendo su representación y operaciones básicas. Además, analizará el dominio y el límite de las funciones vectoriales, interpretará el producto punto y comprenderá la definición del producto vectorial y la ecuación vectorial. Finalmente, aplicará el concepto de distancia entre un punto y un plano, fortaleciendo su capacidad de modelar y resolver problemas geométricos y físicos en distintos contextos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 3

Unidad 2. Sistemas de coordenadas y vectores

2.1. Sistema de coordenadas vectores

Un sistema de coordenadas es un método que permite determinar las ubicaciones relativas de los objetos en un área determinada; por ejemplo, ubicación de una casa en un área específica. Un punto en una zona dada. A continuación, a través de ejemplos gráficos y conceptos, usted podrá reconocer y comprender los diferentes tipos de estos sistemas en el siguiente módulo didáctico:

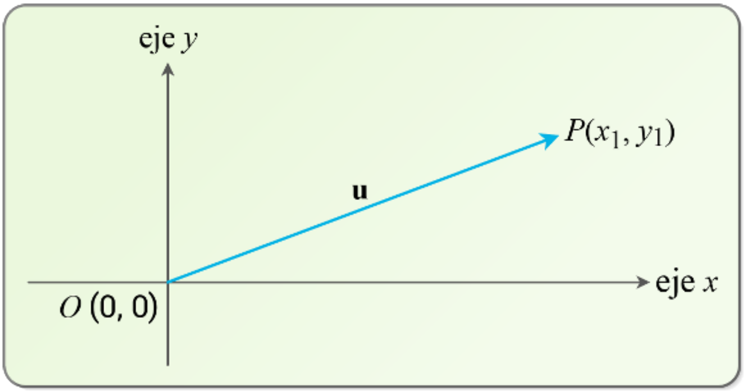
Sistema de coordenadas

2.2. Vectores

Se define como vector al segmento de recta, formado desde un punto en el espacio hasta otro punto de referencia final, su longitud representa a escala una magnitud, en una dirección determinada y en uno de sus sentidos.

Figura 9

Representación gráfica de vectores



Nota. Andrade, E., 2023.

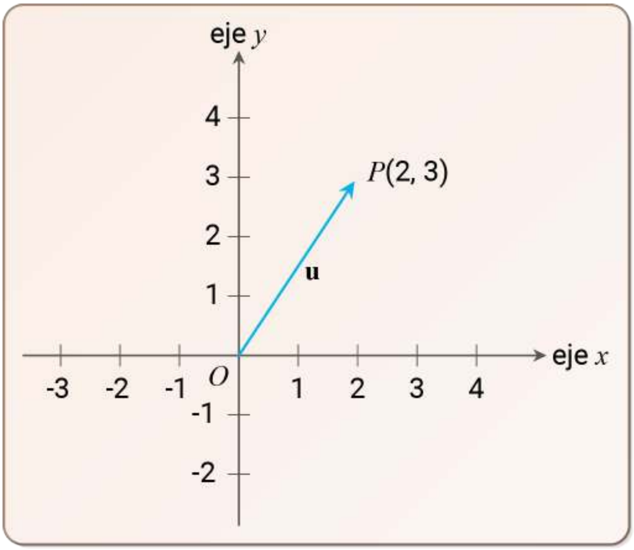
Puede ser representado como una matriz $u = \{2\ 3\}$

Ejemplo:

$$u = \{2\ 3\}$$

Figura 10

Ejemplo vector u (2,3)



Nota. Andrade, E., 2023.

Componentes de un vector. – Respecto al sistema de coordenadas con origen 0 y ejes x e y las componentes son las proyecciones del vector sobre estos ejes.

Sea el punto A (x_1, y_1) y el punto B (x_2, y_2), las componentes del vector $A\vec{B}$ son dos números reales que se obtienen restando a las coordenadas del extremo las del origen; se escribe.

$$A\vec{B} = (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1, \mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1) = (a, b)$$

Donde:

a =x2 – x1 y b = y2 – y1

Módulo = longitud, segmento $A\vec{B}$ y se escribe $|A\vec{B}|$

Por el teorema de Pitágoras

$$|A\vec{B}\,| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

$a = |\vec{AB}|\cos\theta$

$b = |\vec{AB}| sen\theta$

Sustituyendo: $\overrightarrow{AB} = (a, b) = (|\overrightarrow{AB}|\cos\theta, |\overrightarrow{AB}| sen\theta)$

Dirección de la tangente que forma el vector con el eje x: $tg\theta = \frac{b}{a}$

Ejemplo:

Sea el vector definido por los extremos del segmento A (3,1) y B (-2,4), determine dirección, sentido y módulo.

$\vec{AB}$ = (x2 − x1, y2 − y1) = (a, b) = (-2-3,4-1) = (-5,3)

Módulo $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34}$

$tg\theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{-5} = -0.6$

$\theta = -30.96$

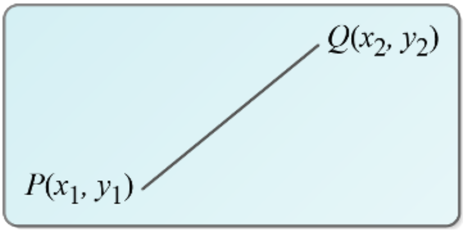
$180° - 30.96° = 149.04° \, segundo \; y \; cuarto \; cuadrante.$

Longitud de segmentos. - En las aplicaciones de los vectores es mejor trabajar con segmentos dirigidos de coordenadas $P(x_1, y_1)$; $Q(x_2, y_2)$ como se observa la flecha está en Q, entonces significa que buscamos el vector de segmento

$\vec{PQ} = Q - P = Q(x_2, y_2) - P(x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Figura 11

Longitud de segmentos

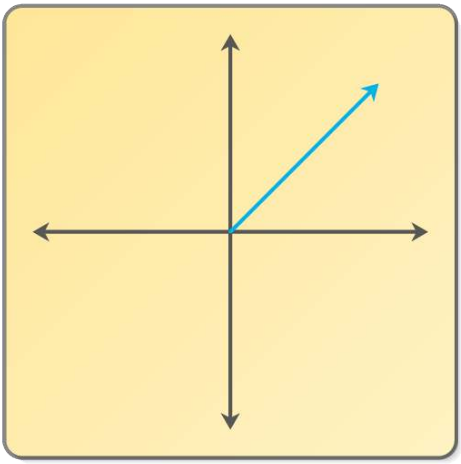


Nota. Andrade, E., 2023.

Longitud. – Distancia entre dos puntos, para esta explicación se usa el teorema de Pitágoras. $u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ Desde donde se inicia que es el origen.

Figura 12

Longitud



Nota. Andrade, E., 2023.

Ejemplo:

Si u = (2,-5). De acuerdo con la ecuación anterior se tiene que:

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

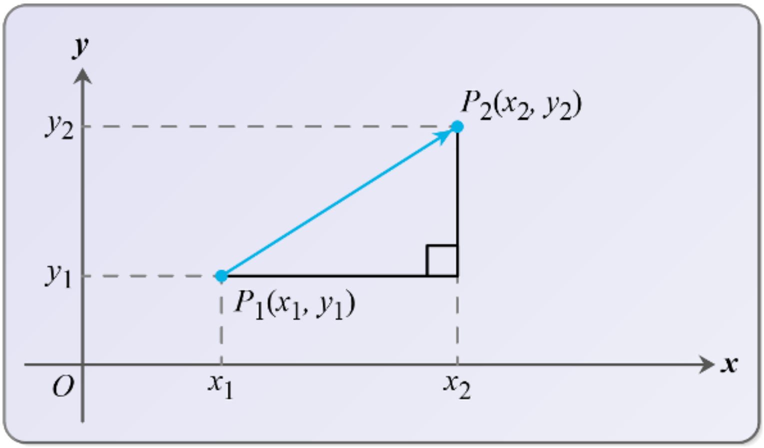
Longitud de un segmento dirigido. - En cualquier caso, la longitud de un segmento dirigido se obtiene restando la coordenada del punto inicial de la coordenada del punto final.

$$P_1(x_1, y_1) \quad ; \quad P_2(x_2, y_2)$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2{}' + (y_2 y_1)^2}$$

Figura 13

Longitud segmento dirigido



Nota. Andrade, E., 2023.

Ejemplo. –

Determine la distancia o longitud entre dos puntos de coordenadas P (3,2) Y Q (-1,5)

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

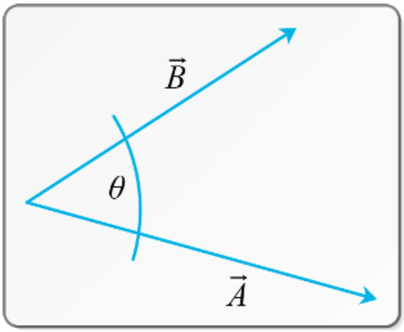
2.3. Producto escalar

El producto escalar, o también conocido como producto punto entre dos vectores, es una operación tal que como resultado es el producto de los módulos de los dos vectores dados por el coseno del menor ángulo que forman entre sí.

$$\vec{A}, \vec{B} = A.\, B \cos \theta$$

Figura 14

Producto escalar



Nota. Andrade, E., 2023.

Puede además apoyarse en: *Cálculo en varias variables* de Mora, W (2019). Recuerde que:

El producto escalar se determina mediante la relación:

$$|u| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{u_1 . u_1 + u_2 . u_2} = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2}$$

El producto escalar se determina mediante la relación:

Ejemplo:

$$\overrightarrow{u} = (3, 0) \qquad \overrightarrow{v} = (5, 5)$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} = \sqrt{3 \cdot 3 + 0 \cdot 0} = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} = \sqrt{5 \cdot 5 + 5 \cdot 5} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Con base en estos vectores se puede encontrar el ángulo donde se utilizará la siguiente expresión analítica:

$$\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\overrightarrow{u} = (3, 0) \qquad \overrightarrow{v} = (5, 5)$$

$$\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \frac{3 \cdot 5 + 0 \cdot 5}{\sqrt{3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{15}{3.5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Entonces:

$$a = 45°$$

Además, con el producto punto se puede determinar la ortogonalidad de los vectores. Con base en el ejemplo dado se tiene la condición analítica que es:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \quad \text{entonces son perpendiculares.}$$

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

$$\overrightarrow{u} = (3, 0) \qquad \overrightarrow{v} = (5, 5)$$

$$u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 5 = 15 + 0 = 15 \quad \textit{no son perpendiculares.}$$

El producto vectorial da como resultado otro vector cuya dirección es perpendicular a los vectores y su sentido es igual al avance de un sacacorchos al girar de u a v.

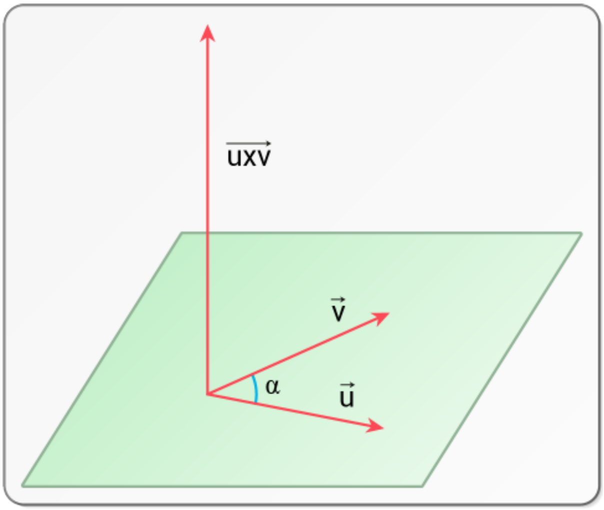
$$|\vec{u} x \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| sen\ a$$

El producto vectorial puede ser expresado en forma de determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Figura 15

Producto vectorial



Nota. Tomado de *Algebra Lineal, Octava edición* (pág 239), por Kolman B., 2006.

Ejemplo:

Calcular el producto vectorial de los vectores:

$$\bar{u} = (1, 2, 3) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (-1, 1, 2)$$

$$\bar{u} \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (4 - 3)\vec{i} - (2 + 3)\vec{j} + (1 + 2)\vec{k} = 1\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$$

En el siguiente ejemplo se realizará el producto vectorial entre dos vectores, además se comprobará que el vector encontrado es ortogonal a los vectores dados.

$$\bar{u} = (3, -1, 1) \quad \text{y} \quad \bar{v} = (1, 1, 1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-1-1)\vec{i} - (3-1)\vec{j} + (3+1)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$(\vec{u}x\vec{v})\vec{u}$ = (-2,-2,4). (3,-1,1) = - 6+2+4= 0

$(\vec{u}x\vec{v})\vec{v}$ = (-2,-2,4). (3,-1,1) = - 6+2+4= 0

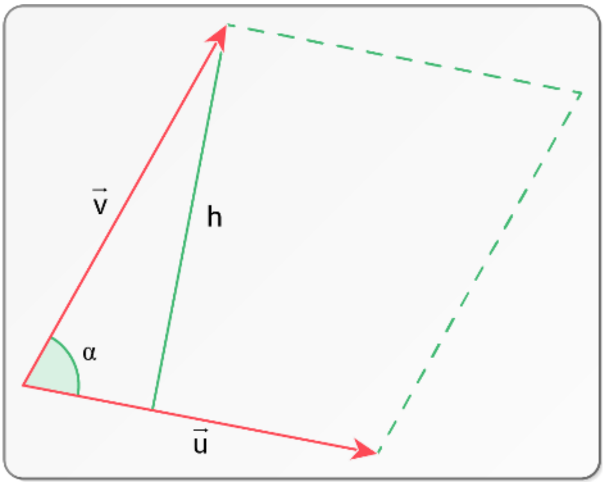
Entonces el producto vectorial entre $(\vec{u}x\vec{v}) es\ ortogonal\ a\ los\ vectores\ \vec{u}\ y\ \vec{v}.$

Dentro de las aplicaciones se tiene el cálculo del área de un paralelogramo que se puede determinar mediante la relación:

$$A = |\vec{u}|.\,h = |\vec{u}||\vec{v}|sena = |\vec{u}x\vec{v}|$$

Figura 16

Producto vectorial



Nota. Tomado de *Algebra Lineal, Octava edición* (pág 239), por Kolman B., 2006.

Ejemplo:

$$\vec{u} = (3, 1, -1) \quad y \quad \vec{v} = (2, 3, 4)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (4+3)\vec{i} - (12+2)\vec{j} + (9-2)\vec{k} = 7\vec{i} - 14\vec{j} + 7\vec{k}$$

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = \sqrt{294}\, u^2$$

2.4. Producto vectorial

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, es otro vector $\vec{C}$, cuyo módulo se obtiene multiplicando los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del menor ángulo formado entre ellos. Su dirección es perpendicular al plano formado por dos vectores A y B, y su sentido está dado por la regla del sacacorchos, que dice "se hace girar el primer vector de la operación hacía el segundo, por el camino más corto y el sentido del vector resultante será el avance radial del sacacorchos" (Zambrano, 2015).

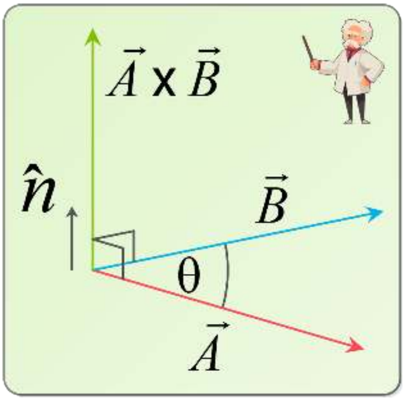
$$|\vec{A}x\vec{B}| = \vec{C} = A.\,B\ sen\ \theta$$

Características:

- El producto cruz de dos vectores paralelos es nulo.
- El producto vectorial es máximo cuando los vectores son perpendiculares.
- Si se invierte el orden de los vectores cambia el signo del resultado.
- El producto vectorial de un vector por sí mismo es igual a cero.
- El producto vectorial no cumple la propiedad conmutativa.
- El producto vectorial tiene la simetría alterada.
- Cumple la propiedad distributiva con relación a la suma de vectores.

Figura 17

Producto vectorial



Nota. Adaptado de [DAVID LEAL PÉREZ] (2021, 09, 29). PRODUCTO VECTORIAL o PRODUCTO CRUZ [Video]. YouTube. URL.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

1. Busque estar en contacto con el tutor, recuerde que él orientará su aprendizaje sugiriendo las lecturas específicas, ejercicios y recursos hacia donde usted debe proyectarse. Como se trabajará en sistemas coordenados R^2 y R^3 se recomienda hacer uso de la aplicación GeoGebra.
2. Revise la bibliografía básica de Walter Mora Cálculo en varias variables (2019), en sus capítulos 2 y 3 le ayudará con la comprensión y graficación de las curvas de nivel.
3. Esté pendiente de los horarios de las tutorías, así como también de los anuncios, ya que el docente tutor hará uso de este medio para informar sobre aspectos inherentes a la materia. Recuerde que tiene semanalmente actividades que realizar y algunas de ellas tienen una calificación específica.

4. Puede ampliar sus conocimientos visualizando el siguiente vídeo, donde se explica el significado de Vectores de Rivera, R. (2012).
5. Después de la lectura de: *Cálculo en varias variables* de Mora, W (2019), y haber visualizado el vídeo, se puede reforzar el tema con los ejercicios que se encuentran en el libro de Álgebra lineal de Kolman, B., (2013).

   Nota. por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

6. Finalmente, realice la siguiente autoevaluación para comprobar sus conocimientos.

Autoevaluación 2

Analice los siguientes enunciados y determine si son falsos o verdaderos.

1. (   ) El producto vectorial no cumple con la propiedad conmutativa.
2. (   ) La longitud de un segmento orientado representa la dirección del vector.
3. (   ) El producto punto de dos vectores es otro vector.
4. (   ) El producto punto no cumple con la propiedad conmutativa.
5. (   ) El producto cruz de dos vectores es otro vector.
6. (   ) Todo vector puede expresarse como la suma vectorial de sus componentes.
7. (   ) El producto vectorial de $\vec{\imath}\, x \,\vec{\jmath}$ es nulo.
8. (   ) El producto punto de $\vec{\jmath}\, x \,\vec{\imath}$ otro vector.
9. (   ) Los vectores son vectores unitarios.

10. (   ) El producto cruz de dos vectores paralelos es igual a 0.

Ir al solucionario

Resultados de aprendizaje

ECONOMÍA

- Comprender la definición de una función de dos variables.
- Calcular límites para funciones de dos variables.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial.
- Determinar el tipo de funciones, sus características principales y su importancia.
- Determinar cuándo una función tiene límite en un punto.
- Determinar la continuidad de una función.

Para alcanzar los resultados planteados, usted será capaz de comprender la definición de una función de dos variables, conocer las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial, y calcular límites para funciones de dos variables. Este conocimiento le permitirá abordar problemas más complejos en matemáticas y aplicarlos en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 4

Unidad 3. Funciones de dos variables

Funciones de varias variables

La importancia de la utilización de las funciones se halla en que gracias a ellas se puede describir cualquier variación o cambio de una cantidad. En la mayoría de los casos se observa que las funciones dependen de varias magnitudes.

Definiciones generales. - Las funciones de varias variables $(x, y, z, t...)$ pueden ser denotadas como $f(x, y, z, t...)$.

Ejemplo:

$$f(x, y, z) = x^2 y$$

Asocia puntos de los planos $f(x, y, z) = yz, xz, xy)$ que son puntos del plano tridimensional.

Por facilidad, en la mayoría de los ejercicios es mejor trabajar con funciones de dos variables, ya que así se puede graficarlas en un espacio tridimensional. Estas funciones serán del tipo $f(x, y) = z$, de modo que a cada par de números reales (x, y) se le asigna un único valor real $(z = f(x, y))$.

Del mismo modo que pasa en las funciones univariables, las funciones más sencillas son las funciones lineales, que en el caso de dos variables tienen como expresión.

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Donde:

A, b, c son **coeficientes reales.**

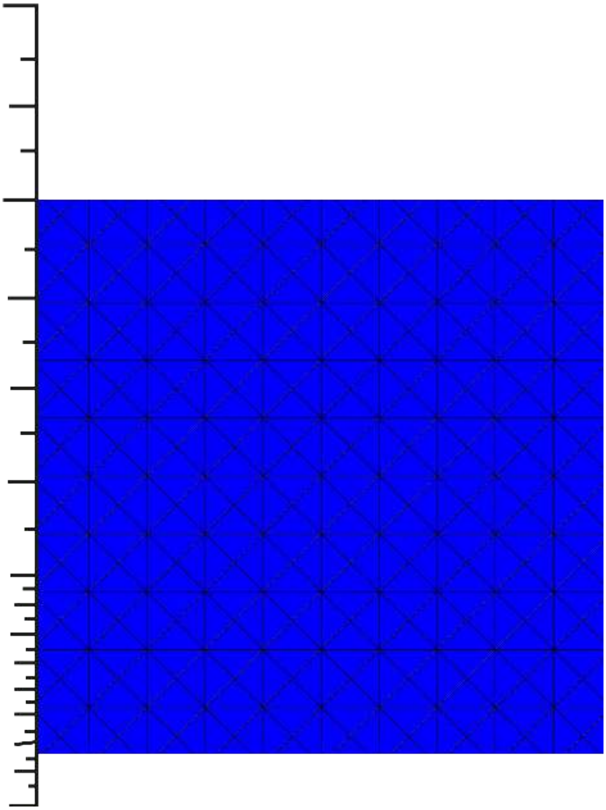
x, y son **variables independientes.**

z es una **variable dependiente.**

Estas funciones están definidas mediante un polinomio de grado uno tanto para x como para y. La figura de esta expresión corresponde a un plano, que es la superficie más simple que se puede encontrar en tres dimensiones.

Figura 18

Superficie en tres dimensiones



Nota. Tomado de [Matemáticas Piña *Profe Piña*] (2020, 07, 16). Gráficas de planos en el espacio o gráficas tridimensionales en el octante (ejemplo 1) [Video]. YouTube. URL.

3.1. Dominio y rango

Las funciones multivariables también poseen un dominio y un rango, tal como sucede con las funciones univariables.

Dominio. - Es el conjunto de las variables independientes y son los valores que puede tomar el argumento de la función sin que este deje de estar definida.

El proceso para determinar el dominio es similar al de las funciones univariables, pero ahora se debe tomar en cuenta las variables que están en el argumento, es decir, el dominio depende de cómo las variables interactúan entre sí.

Ejemplo:

$$f(x,y) = 2xy$$

Donde el argumento es x e y, entonces el dominio es el conjunto de valores de x y de y tal que ambas pueden tomar cualquier valor de los números reales, se escribe como:

$$Dom[f(x,y)] = \{(x,y)1x \in R, y \ \in R\}$$

Rango. - La imagen o rango es el conjunto de valores que toma la variable dependiente. Se le representa como $1m[f(x,y)]$.

Ejemplo:

Determinar el rango para la función $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

En este caso es importante recordar que existe una raíz cuadrada que afecta el argumento, y esta no puede ser negativa, por lo que el dominio sería:

$$Dom[f(x,y)] = \{(x,y)1\ 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

Entonces el rango se debe evaluar desde el punto donde comienza a definirse la función y hasta donde alcanza el valor máximo de la función:

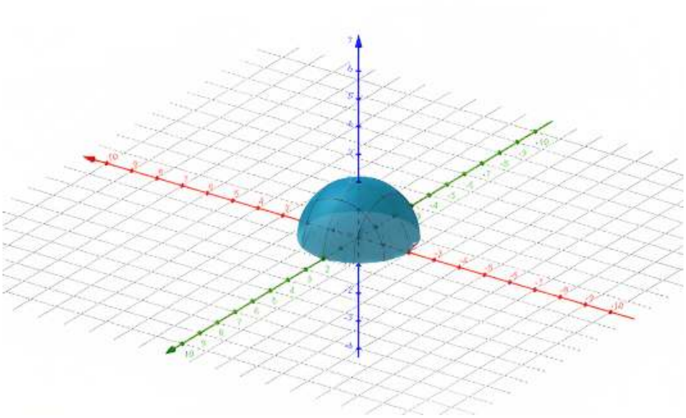
$$f(0.0) = \sqrt{4 - 0 - 0} = 2\ Valor\ máximo$$

$$f(2.0) = \sqrt{4 - 4 - 0} = 0\ Valor\ minimo$$

$$1m[f(x,y)] = [0.2]$$

Figura 19

Rango de funciones multivariables



Nota. Andrade, E., 2023.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es momento de aplicar sus conocimientos a través de las actividades que se han planteado a continuación:

1. El contacto con el docente es una actividad que usted debe mantener ya sea por mensaje o haciendo uso de las tutorías. Además, lea las lecturas de la bibliografía básica Cálculo en varias variables de Walter Mora (2019) y la guía didáctica que le sugiera el docente tutor manténgase siempre informado de las actividades colocadas en los anuncios académicos. Recuerde de las tutorías virtuales, ya que son espacios donde el docente tutor aclara inquietudes.
2. Como apoyo revise el siguiente video: Funciones de dos variables. Ayala., (2018).
3. Además, en Cálculo en *varias variables* (2019) de Mora, W., tiene los contenidos teóricos y prácticos que pueden apoyar su aprendizaje.
4. Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando la herramienta GeoGebra que le permitirá visualizar el rango y el dominio.

5. Puede reforzar su conocimiento apoyándose en el siguiente vídeo de: Graficación de funciones de varias variables. Ayala., (2018).

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 5

Unidad 3. Funciones de dos variables

3.2. Curvas de nivel

Definición: el origen etimológico de curva de nivel, es el análisis detallado de las dos palabras principales que le dan forma:

La primera es “curva” palabra que se deriva del latín “curvus”, y que significa “curvado”.

La segunda es nivel, que viene del latín “libella”, y que significa “pequeña balanza”.

Este término “curva de nivel” se emplea para explicar situaciones topográficas, ya que los puntos de terreno que se unen se encuentran formando una línea y a la misma altura.

Entonces: con base en esto se podría afirmar que “una curva de nivel es la línea que une los puntos de un mapa que tienen idéntica altura”. Una curva de nivel estudia secciones representadas en un mapa o gráfico tridimensional.

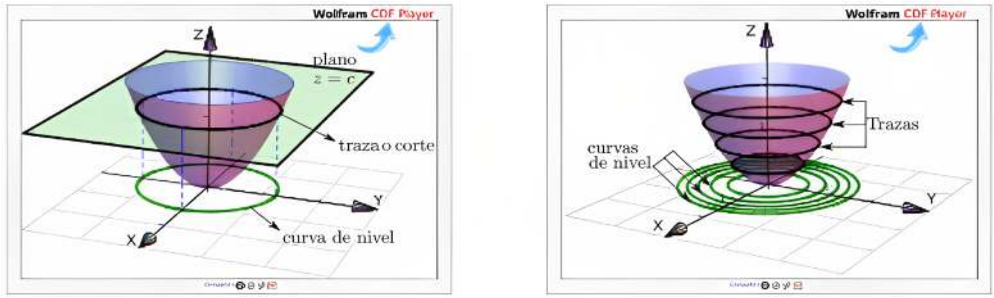
Página *WEB:* ARISTASUR.

Recuperado de: Qué son las curvas de nivel en un mapa topográfico.

Matemáticamente, las curvas de nivel son espacios en R2 y R3 definidos por F (x, y, z) =0. Geométricamente, corresponden a la proyección sobre el plano xy, del corte del plano z=c con la superficie S.

Figura 20

Curvas de nivel



Nota. Tomado de *Cálculo en Varias Variables*, pág 108, por Mora W., 2019, Editorial.

Las curvas de nivel de una función f (x, y) son los puntos (x, y) del dominio de f, tales que f (x, y)=k, donde k es una constante. Para calcularlas se debe imaginar cortes con un plano a la superficie a distintos niveles de z. Al cortar la superficie, las curvas resultantes son las curvas de nivel para distintos valores de k.

Un ejemplo de curvas de nivel se encuentra en los mapas de cartografía, donde es frecuente encontrar información correspondiente al relieve de la zona, marcando con curvas, los puntos que se encuentran a la misma altura.

Otro ejemplo se visualiza en los mapas de previsión del tiempo. En ellos, se suelen marcar, aquellas zonas que tienen la misma temperatura (isotermas) o la misma presión atmosférica (isobaras).

Figura 21

Mapa de previsión del tiempo

Nota. Tomado de la web Mapa de previsión del tiempo [Fotografía], CC BY 2.0

Curvas de nivel en la economía

Es común utilizar las curvas de nivel de diferentes funciones económicas para describirlas con mayor exactitud. Una de las funciones más importantes en este campo es la función de producción. La producción de una fábrica puede venir definida mediante la función de Cobb-Douglas:

$$Q = F(x, y) = kx^r y^{1-r}$$

La función de Cobb-Douglas relaciona la producción con el trabajo (x) y el capital (y) y se cumple que.

$$F > 0.0 < r < 1$$

Si se consideran aquellos valores de x e y para los que la producción es constante, se estará calculando las curvas de nivel.

Las curvas de nivel de las funciones de producción se denominan isocuantas y medirán los valores de mano de obra (trabajo) y capital para los que se obtiene el mismo nivel de producción. (Universidad Europea de Madrid, 2015).

Otro ejemplo de este tipo de curvas en el campo de la economía se encuentra en las curvas de indiferencia. A nivel macroeconómico, una curva de indiferencia es el conjunto de combinaciones de dos bienes con los cuales se obtiene el mismo nivel de utilidad. En este caso U(x, y) = Cte. Las curvas de nivel se pueden utilizar también para la optimización de funciones de varias variables. Gracias a ellas, se puede encontrar los máximos y los mínimos de una función de varias variables. (Universidad Europea de Madrid, 2015).

Campo escalar

Definición. - Se denomina función o campo escalar real de n variables a cualquier función tal que:

$f : D \subset R^n \rightarrow R/(x_1, x_2, \ldots x_n) \epsilon D$ se le asocia $F(x_1, x_2, \ldots x_n) \epsilon R$

Gráfica del campo escalar

En la función, si se corta la superficie por planos $z = k_i$, se obtienen curvas de nivel $k_1 = f(x, y)$, que se representan en el plano $z = 0$. (Bedía, 2018).

Entorno en el plano: discos

En R^2 se puede definir de la siguiente manera: aplicando la ecuación de la distancia entre dos puntos $(x, y), (x_0, y_0)$ en el plano se define el entorno δ de (x_0, y_0) como un disco con radio $\delta > 0$ centrado en : (Bedía, 2018).

$$\left\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\} \textit{Disco abierto}$$

$$\left\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta\right\} \textit{Disco cerrado}$$

Región abierta/cerrada, puntos interiores y puntos frontera

Un punto (x_0, y_0) en una región R del plano es un punto interior de R si existe un entorno δ de (x_0, y_0) : que esté contenido completamente en R.

- Si todo punto de R es interior de R, entonces R, es una región abierta.

- Un punto (x_0, y_0): es un punto frontera de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R.
- Por definición, R debe contener sus puntos interiores, pero no necesariamente sus puntos frontera.
- Si una región contiene a todos sus puntos frontera, R es una región cerrada.
- Una región que contiene algunos de sus puntos frontera, pero no todos, no es ni abierta ni cerrada.

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo la siguiente actividad:

Actividad de aprendizaje recomendada

El texto de Walter Mora: *Cálculo en varias variables* (2019), en la unidad 3 le orienta sobre cómo graficar y visualizar las curvas de nivel. Además, el docente tutor guiará su aprendizaje en este tema, recuerde que cuenta con el servicio de mensajes, anuncios y horarios de tutorías.

Ejemplo:

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

$Dominio\ de\ z = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\} ecuación\ de\ la\ circunferencia\ de\ radio\ r$

Para las curvas de nivel:

K= curvas de nivel.

Entonces.

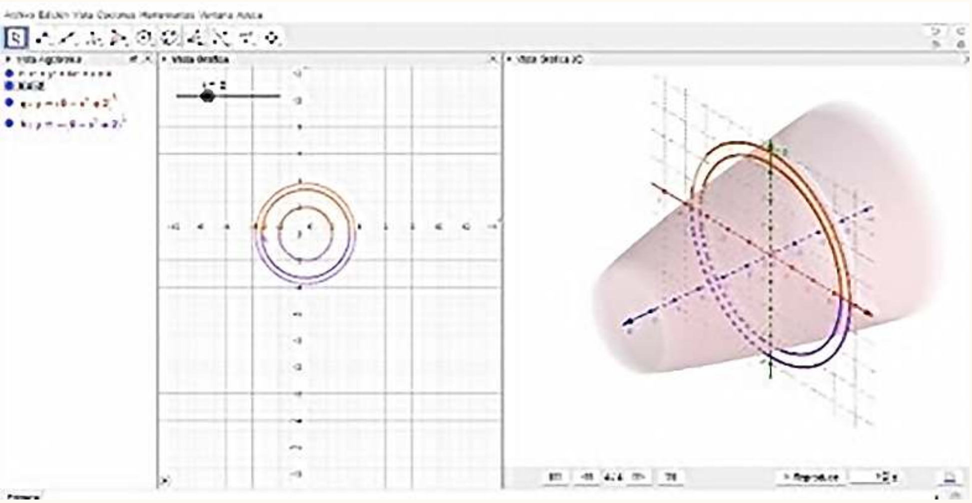
$$k = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow 9 - k = x^2 + y^2 = 3^2$$

Tabla 4
Valores del nivel

Valor de kl	Ecuación	Resultado
$K = 0$	$9 - 0 = x^2 + y^2 = 3^2$	$r = 3$
$k = 1$	$9 - 1 = x^2 + y^2 = (2.82)^2$	$r = 2.82$
$K = 2$	$9 - 2 = x^2 + y^2 = (2.64)^2$	$r = 2.64$
$K = 3$	$9 - 3 = x^2 + y^2 = (2.44)^2$	$r = 2.44$

Nota. Andrade, E., 2023.

Figura 22
Curvas de nivel



Nota. Andrade, E., 2023.

Resultados de aprendizaje

ECONOMÍA

- Comprender la definición de una función de dos variables.
- Calcular límites para funciones de dos variables.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer y aplicar el concepto de derivada.
- Calcular la expresión matricial de la derivada de funciones vectoriales.
- Calcular los distintos conceptos relacionados con la derivada y sus aplicaciones a la física.

Para alcanzar los resultados planteados, usted será capaz de comprender la definición de una función de dos variables, conocer las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial, y calcular expresiones matriciales y distintos conceptos relacionados con derivadas. Este conocimiento le permitirá abordar problemas más complejos en matemáticas y aplicarlos en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 6

Unidad 3. Ecuaciones y desigualdades

3.3. Límites y continuidad

3.3.1. Límites

Definición: Sea f una función de dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) , excepto posiblemente en x_2, y_0 , y sea L un número real.

Entonces:

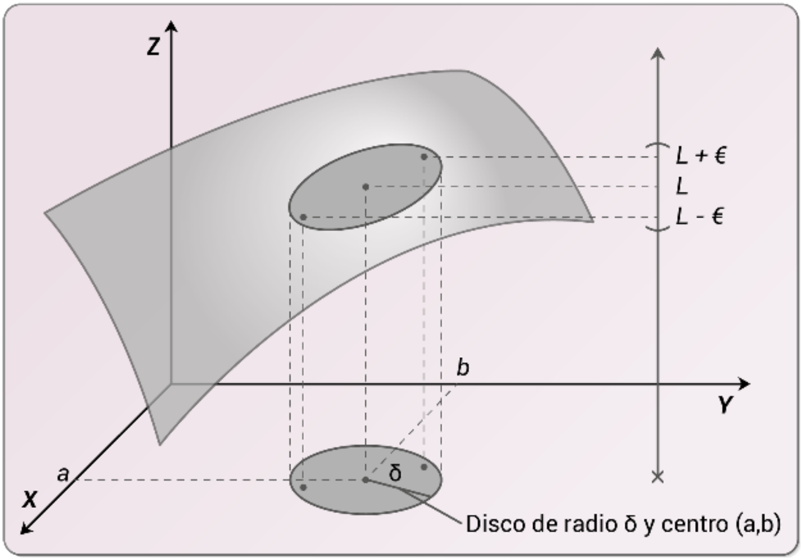
$$f(x, y) = L$$

Si para cada $\in > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x, y) - L| < \in$ siempre que:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

La definición implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ , el valor de $f(x, y)$ está entre $L - \in$ y $L + \in$

Figura 23
Límites



Nota. Tomado de Funciones y Varias Variables Limites y Continuidad (p. 9), por Bedia J., 2018. [Enlace.]

La existencia del límite en una variable requiere la aproximación a dicho límite por dos direcciones. En dos variables la idea es similar, pero ahora la aproximación a un punto puede realizarse a lo largo de muchas direcciones. Al igual que en una variable, el límite en un punto siguiendo cualquier trayectoria posible debe coincidir (Bedía, 2018).

3.3.2. Continuidad

Definición. - Una función $f(x,y)$ es continua en el punto de una región abierta R si existe $f(x_0,y_0)$, y es igual al límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$, es decir:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Una función $f(x,y)$ es continua en la región abierta R si es continua en todo punto de R.

Recuerde que la continuidad se expresa como:

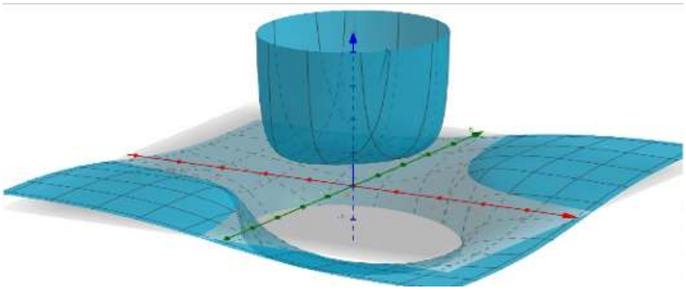
"Toda función de varias variables que se puede construir a partir de funciones continuas por operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y composición de funciones es continua allí donde está definida" (Sydsaeter, K. 2012).

Ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{xy-3}{x^2+y^2-4}$$

Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando el GeoGebra, que le permitirá visualizar la función y determinar su continuidad.

Figura 24
Continuidad



Nota. Andrade, E., 2023.

La función f está definida y es continua para todo (x,y) excepto para los valores de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 = 4$$

En el estudio de los límites la función de varias variables es mucho más complejo que en el de funciones de una sola variable, pues en este caso solo existen dos caminos para llegar al punto denominado límite y es por la izquierda y por la derecha, pero en el de funciones de varias variables existen infinito número de caminos.

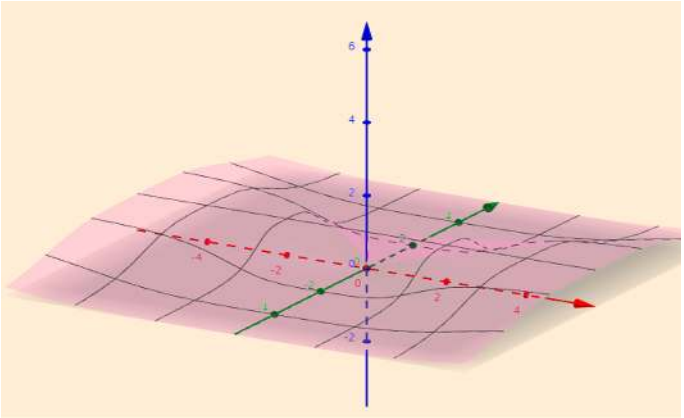
Ejemplo:

$$f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+3y^2}$$

Usted puede ayudarse y representar las diferentes funciones utilizando el Geogebra, que le permitirá visualizar la función y determinar su límite.

Figura 25

Problema



Nota. Andrade, E., 2023.

Tabla 5

Puntos de referencia

x/y	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
-1	0.250	0.449	0.720	0.929	0.995	1.000	0.995	0.929	0.720	0.449	0.250
-0.8	0.120	0.250	0.513	0.842	0.988	1.000	0.988	0.842	0.513	0.250	0.120
-0.6	0.041	0.095	0.250	0.628	0.964	1.000	0.964	0.628	0.250	0.095	0.041
-0.4	0.008	0.020	0.062	0.250	0.842	1.000	0.842	0.250	0.062	0.020	0.008
-0.2	0.001	0.001	0.004	0.020	0.250	1.000	0.250	0.020	0.004	0.001	0.001
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.001	0.001	0.004	0.020	0.250	1.000	0.250	0.020	0.004	0.001	0.001
0.4	0.008	0.020	0.062	0.250	0.842	1.000	0.842	0.250	0.062	0.020	0.008
0.6	0.041	0.095	0.250	0.628	0.964	1.000	0.964	0.628	0.250	0.095	0.041
0.8	0.120	0.250	0.513	0.842	0.988	1.000	0.988	0.842	0.513	0.250	0.120
1	0.250	0.449	0.720	0.929	0.995	1.000	0.995	0.929	0.720	0.449	0.250

Nota. Andrade, E., 2023.

En esta tabla se observa que en el punto (0,0) la función no existe y que, en los puntos cercanos al origen, al acercarse por la derecha, por la izquierda, por arriba y por abajo, son distintos, por lo que se puede concluir que el límite de $f(x,y)=\frac{x^4}{x^4+3y^4}$ no existe se cumple el teorema (Villalobos,2014).

Otro ejemplo del cálculo de límites sería tomando en cuenta el proceso de resolución, es decir, tomando en cuenta los límites reiterados. Recuerde el teorema para funciones de varias variables; "si los límites reiterados son diferentes, entonces no existe límite".

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{0^2-0^2}{0^2+0^2}=\frac{0}{0}$$

Como tenemos una expresión 0/0 debemos calcular los límites reiterados que son el cálculo de cada límite con respecto a cada variable.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}=\frac{(x^2-0)}{(x^2+0)}=\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)}=\frac{(0-y^2)}{(0+y^2)}=\frac{-y^2}{y^2}=-1$$

Como se observan los límites son diferentes y según el teorema solo existe límite cuando los límites reiterados son iguales. En este caso entonces no existe el límite.

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. El contacto con el docente debe mantenerlo siempre, ya sea por mensaje o haciendo uso de las tutorías, recuerde que él orientará su trabajo, indicará el uso de los recursos educativos y ampliará los conocimientos, disipando las dudas que podrían presentarse en este

tema. Además, le informará sobre actividades síncronas planificadas y calificadas.

2. Es momento de evaluar el aprendizaje adquirido sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 3

1. Dada la función multivariable $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ determine (a) f (0,0) (b) f (1,6) (c) f (-2,-3) (d) Existe algún punto tal que f (x, y) =0

2. En una empresa se fabrican dos modelos de coches infantiles, uno llamado mini y otro maxi. Su costo mensual total en euros para fabricar **x** minis e **y** maxis viene dado por la siguiente función: C . En el mes se fabrica cierta cantidad de coches, pero en el siguiente mes la producción aumenta de los minis a una unidad. Se pide:

    - Calcular los costos totales para fabricar 5 cochecitos mini y 6 maxi.

3. Determine el siguiente límite $\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

4. Determine el siguiente límite $\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$

5. Determine el siguiente límite $\frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

6. Determine el siguiente límite $\frac{x^2-y^2}{x-y}$

7.

Determine el siguiente límite $\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+2y^2)\log(x^2+y^2)}$

8. (   ) Indique si el siguiente enunciado es verdadero o falso. “Una función es continua en un conjunto cuando lo es en todos y cada uno de los puntos del conjunto".

9. (   ) Indique si el enunciado siguiente es verdadero o falso. “Si se corta una superficie por planos se obtienen curvas de nivel".

10. Para que exista el límite de una variable se requiere la aproximación a dicho límite por dos direcciones, esto sucede en límites univariables, para límites multivariables cuál es la condición para la existencia del límite.

    a. Límite por la derecha.
    b. Límite por la izquierda.
    c. Ambos.
    d. Ninguna de las anteriores.

Ir al solucionario

Nota: por favor, resuelva los ejercicios en un cuaderno o herramienta digital.

Resultados de aprendizaje

ECONOMÍA

- Comprender la definición de derivadas parciales.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer y aplicar el concepto de derivada.
- Calcular la expresión matricial de la derivada de funciones vectoriales.
- Calcular los distintos conceptos relacionados con la derivada y sus aplicaciones a la física.

Para alcanzar los resultados planteados, usted conocerá y aplicará el concepto de derivada en diversos contextos matemáticos y científicos. Aprenderá a calcular la expresión matricial de la derivada de funciones vectoriales y a utilizar conceptos de derivación en aplicaciones físicas. Además, desarrollará la capacidad de resolver problemas en matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante el cálculo diferencial, aplicando la diferenciación de funciones de una variable y comprendiendo la definición y uso de derivadas parciales en el análisis de múltiples variables. Estos conocimientos fortalecerán su habilidad para modelar y analizar fenómenos en distintos ámbitos científicos y tecnológicos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Unidad 4. Derivadas parciales

En el ciclo anterior se trabajó todo lo referente a la derivada y diferenciación, en este momento es importante recordar ciertos conceptos, procesos, propiedades que permiten el cálculo óptimo de una función así; para lo cual le invito a leer el Anexo 1. Derivada y diferenciación.

Ahora bien, para determinar la velocidad o el ritmo de cambio de una función de varias variables respecto a una de sus variables independientes se utiliza el proceso de derivación parcial.

4.1. Introducción a la derivada parcial

La razón de definir un nuevo tipo de derivada es que cuando una función es multivariable, se debe ver cómo cambia la función al mover una sola variable mientras se mantienen fijas las demás.

Se simboliza con ∂ o con la forma de d, pero la , se utiliza para distinguir las derivadas parciales de las derivadas de una variable.

Si $z = f(x, y)$ las primeras derivadas parciales de f con respecto a las variables x e y son las funciones definidas como:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Siempre y cuando el límite exista.

La definición indica que para calcular ∂f /∂x se considera a y constante derivando con respecto a x y para calcular ∂f /∂y se considera x constante derivando con respecto a y. Pueden aplicarse, por tanto, las reglas usuales de derivación.

Ejemplo:

Calcular las derivadas parciales de $z = f(x, y) = yx^2 + 3x^3y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2zy + 9x^2y^4$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12x^3y^3$$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Si $y = y_0$ entonces $z = f(x, x_0)$ representa la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$.

Por tanto,

$$fx(x_0, y_0) = pendiente\ de\ la\ curva\ intersecci\acute{o}n\ en\ (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

Análogamente, $f(x_0, y)$ es la curva intersección de

$$z = f(x, y)(superficie)x = x_0(plano)$$

y entonces

$$fx(x_0, y_0) = pendiente\ de\ la\ curva\ intersecci\acute{o}n\ en\ (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

Diremos que los valores $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ denotan las pendientes de la superficie en las direcciones de x e y, respectivamente.

4.2. Derivadas de orden superior

Las derivadas de orden superior son usadas para el cálculo de máximos o mínimos en problemas de aplicación u optimización. Otro de los usos de las derivadas de orden superior son en la búsqueda de la concavidad y el cálculo de los puntos de inflexión, para lo cual se requiere de la segunda derivada (Monge, 2018).

Derivadas de primer orden

Las derivadas parciales de primer orden consisten en la primera derivación de la función con respecto a cada una de las variables de dicha función.

Los pasos para seguir son los siguientes:

1. Se debe escribir la función en términos de las variables con respecto a las cuales se quiere diferenciar. Por ejemplo, si se desea hallar la derivada parcial de la función $f(x,y,z)$ con respecto a x, se debe escribir como $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
2. Se debe derivar la función respecto a la variable solicitada. En este caso, se tomaría la derivada de la función $f(x,y,z)$ con respecto a x, se debe escribir como $\frac{\partial f}{\partial x}$, el resto de las variables deben ser consideradas como constantes.
3. Se debe realizar el mismo procedimiento con las otras variables de la función mientras se toma la derivada de la siguiente variable.

Ejemplo:

Encuentre las derivadas de primer orden de la siguiente función $z = f(x,y) = (2x + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2; y\ es\ constante$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y; x\ es\ constante$$

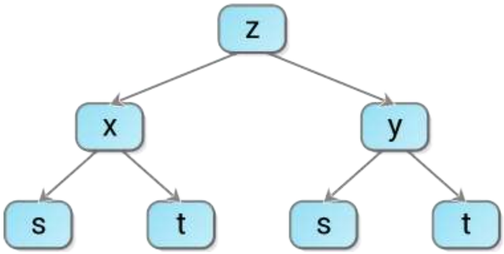
4.3. Regla de la cadena

Regla de la cadena para funciones multivariables:

Ya se ha visto que la Regla de la cadena sirve para funciones compuestas, tal es así que en funciones multivariables sucede que se deben cumplir derivaciones de funciones compuestas de dominios y rango mayores, por tal razón se debe recurrir a un método de apoyo conocido como el diagrama del árbol para la Regla de la cadena, el mismo que sigue la siguiente trayectoria.

Figura 26

Regla de la cadena



Nota. Andrade, E., 2023.

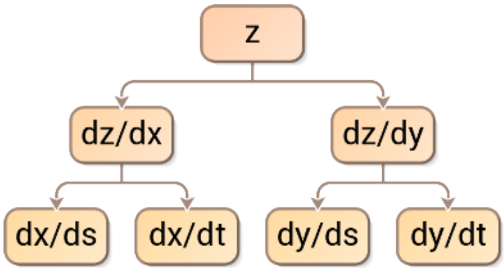
Ejemplo:

Siendo: $z = 2xy; x = s^2 + t^3; y = cost + 4s$

Determine $\frac{\partial z}{\partial s} = ?; \frac{\partial z}{\partial t} = ?$

Figura 27

Ejemplo de una regla cadena



Nota. Andrade, E., 2023.

$$z = 2xy$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y; \frac{dz}{dy} = 2x$$

$$x = s^2 + t^3$$

$$\frac{dx}{ds} = 2s; \frac{dx}{dt} = 3t^2$$

$$y = cost + 4s$$

Entonces aplicando la Regla de la cadena.

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dz}{ds} = 2y.\,2s + 2x.\,4 = 4ys + 8x$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2y \cdot 3t^2 + 2x(-sent) = 6yt^2 - 2xsent$$

Reforcemos el aprendizaje resolviendo las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Realice un análisis pormenorizado del capítulo 5 del texto: Cálculo en varias variables. (2019) de Mora, W, que trata específicamente de derivadas parciales, analice los contenidos y familiaricese con las propiedades, el docente tutor le guiará en cuanto a la metodología de resolución de ejercicios. No pierda de vista los anuncios académicos donde pondrá las orientaciones académicas específicas sobre este tema y ejercicios de apoyo.
2. Adicionalmente, se sugiere revisar las definiciones básicas, procesos y reglas de la derivación y se le recomienda leer: Derivación - Guía didáctica de Cálculo de Yépez, C., (2015). Para completar esta lectura, le invito a que descargue dicha guía.
3. También, revise los siguientes vídeos donde encontrará la explicación de la noción de derivada desde el punto de vista geométrico:

    - Definición de la derivada desde el punto de vista geométrico: parte I y parte II. Ayala., (2018).
    - Reglas básicas de la derivación. Ayala., (2018).

4. Complementando el estudio de la asignatura, ahora se verá el tema de las derivadas parciales, para lo cual se le solicita revisar el libro *Cálculo en varias variables* (2019) de Mora, W.

Se colocarán varios ejemplos donde se resuelvan derivadas parciales:

Tabla 6

Ejemplo 1

Ecuación	Procedimiento
$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 3y$ $\frac{df}{dx} = 2x + 0 - 6 + 0$ $\frac{df}{dx} = 2x - 6$ $\frac{df}{dy} = 0 + 2y - 0 + 3$ $\frac{df}{dy} = 2y + 3$	Esta es una función con dos variables x e y. Se debe derivar la función con respecto a cada una de las variables. Si se lo hace con respecto a x, todo lo que contenga y es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0. Si se hace con respecto a y, todo lo que contenga x es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0.

Nota. Andrade, E., 2023.

Tabla 7

Ejemplo 2

Ecuación	**Procedimiento**
$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 - 7x + 8y$ $\frac{df}{dx} = 6x + 0 - 7 + 0$ $\frac{df}{dx} = 6x - 7$ $\frac{df}{dy} = 0 + 8y - 0 + 8$ $\frac{df}{dy} = 8y + 8$	Esta es una función con dos variables x e y. Se debe derivar la función con respecto a cada una de las variables. Si se lo hace con respecto a x, todo lo que contenga y es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0. Si se hace con respecto a y, todo lo que contenga x es constante. Por lo tanto, la derivada de una constante es 0.

Nota. Andrade, E., 2023.

5. Es necesario reforzar el tema, por lo que se sugiere la realización de ejercicios, puede usted ayudarse con la bibliografía básica *Cálculo en varias variables* de Mora, W. (2019) o su docente autor subirá a la plataforma ejercicios que le ayudan a fortificar este tema.

Nota: por favor complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Resultados de aprendizaje:

ECONOMÍA

- Determinar el dominio y rango de funciones
- Transformar coordenadas
- Identifica los procesos de reconocer elementos de vectores en el plano y vectores en el espacio
- Comprender el dominio de funciones vectoriales
- Comprender el límite de funciones vectoriales
- Interpretar el producto punto
- Comprende la definición de producto vectorial, ecuación vectorial
- Aplicar el concepto de distancia entre un punto y un plano
- Comprender la definición de una función de dos variables.
- Calcular límites para funciones de dos variables.
- Comprender la definición de derivadas parciales.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.
- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer las definiciones de funciones en varias variables y las de función vectorial.
- Determinar el tipo de funciones, sus características principales y su importancia.
- Determinar cuándo u na función tiene límite en un punto.
- Determinar la continuidad de una función.
- Conocer y aplicar el concepto de derivada.

- Calcular la expresión matricial de la derivada de funciones vectoriales.
- Calcular los distintos conceptos relacionados con la derivada y sus aplicaciones a la física.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Repaso general

Hemos llegado a la última semana del primer bimestre, por lo tanto, es importante que realice un repaso general de las tres unidades abordadas. Este repaso le permitirá afianzar los conocimientos adquiridos hasta el momento y refrescar los conceptos clave de:

- Función univariable.
- Límites y continuidad de función univariable.
- Sistemas de coordenadas.
- Funciones de varias variables.
- Límites y continuidad de varias variables.
- Curvas de nivel.
- Derivadas parciales.
- Derivadas de orden superior.
- Derivadas de primer orden.

Con el objetivo de llevar a cabo este repaso, le invito a realizar las siguientes actividades.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Realice un análisis pormenorizado de derivadas parciales de primero y segundo orden

Analice los contenidos y familiarice con las propiedades, el docente tutor le guiará en cuanto a la metodología de resolución de ejercicios. No pierda de vista los anuncios académicos donde pondrá las orientaciones académicas específicas sobre este tema y ejercicios de apoyo.

2. Revise cada una de las unidades vistas, realice ejercicios que le permitan visualizar las propiedades y procesos de cada uno de los temas, revise los cuestionarios y actividades ejecutadas. Mantenga contacto con su docente tutor, esta es una semana importante donde todas sus dudas deben ser aclaradas.

   Nota: por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

3. Recuerde que cuentan con vídeos de apoyo de la clase en vivo colocada semana a semana.

Segundo bimestre

Resultados de aprendizaje:

ECONOMÍA

- Aplica el concepto de máximos y mínimos para resolución de problemas de dos variables.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer y calcular el Hessiano de una función escalar en varias variables.
- Determinar los máximos y mínimos de una función y aplicarlo a problemas de optimización.

Para alcanzar los resultados planteados, usted conocerá y calculará el Hessiano de una función escalar en varias variables, lo que le permitirá analizar la curvatura y el comportamiento local de una función. También aprenderá a determinar los máximos y mínimos de una función y a aplicar estos conceptos en problemas de optimización. Además, aplicará el concepto de máximos y mínimos en la resolución de problemas de dos variables, desarrollando su capacidad para modelar y resolver situaciones en distintos contextos matemáticos y científicos.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

Unidad 4. Derivadas parciales

Estimado/a estudiante, se inicia la segunda mitad de este ciclo académico y se debe estar lo suficientemente claro en lo que son las derivadas parciales, sus propiedades y su proceso. Se ha estudiado la derivación implícita y la derivación de primer nivel, ahora se verán las derivadas de segundo orden que son muy importantes para determinar máximos y mínimos en el siguiente tema.

No se olvide de interactuar con el docente tutor. Usted tiene el servicio de mensajes de la plataforma y la tutoría en el horario ya establecido. La bibliografía básica de Walter Mora (2019) contiene los contenidos de apoyo para esta unidad.

¡Empecemos!

4.4. Derivadas de segundo orden

La derivada $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ es la primera derivada de y con respecto a x, pero igualmente es posible realizar la derivada de la derivada, $y = f(x) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

Lo que se conoce como la segunda derivada de y con respecto a x. En esta forma es posible realizar la derivación de las primeras derivadas para obtener derivadas de orden superior o de segundo orden.

Ejemplo:

La posición de una partícula está dada por la ecuación $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ donde t se mide en segundos y s en metros.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \; posición$$

Encuentre la aceleración en el instante t.

$$v(t) = \frac{\partial s}{\partial t} = 3t^2 - 12t + 9 \; velocidad$$

$$a(t) = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 6t - 12 \; aceleración$$

¿Qué valor tiene la aceleración a los 4 segundos?

$$a(4) = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 6(4) - 12 = 24 - 12 = 12m/s^2$$

Para reforzar su aprendizaje y recordar la temática, observe el proceso de resolución de derivadas de primer y segundo orden de una función multivariable:

Ejemplo 1:

Dada la función $z(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

Tabla 8
Resolución del ejemplo 1 sobre de derivadas de una función multivariable

Orden	Ecuación	Procedimiento
Derivadas de **primer orden**	$\frac{dz}{dx} = 2x + y - 6$	Al derivar en x la y es un valor constante
	$\frac{dz}{dy} = x + 2y$	Al derivar en y la x es un valor constante
Derivadas de **segundo orden**	$\frac{d^2z}{dx^2} = 2$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a x
	$\frac{d^2z}{dy^2} = 2$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a y
Derivación de **segundo orden mixtas o cruzadas**	$\frac{d^2z}{dxdy} = 1$	De la primera derivada en x de la función z derivamos ahora con respecto a y
	$\frac{d^2z}{dydx} = 1$	De la primera derivada en y de la función z derivamos ahora con respecto a x

Nota. Andrade, E., 2023.

Ejemplo 2:

Dada la función $z(x,y) = 2x^2 + 3xy + \frac{3}{2}y^2 - 10x + 2 - 9y$

Tabla 9

Resolución del ejemplo 2 sobre derivadas de una función multivariable

Orden de derivada	Ecuación	Procedimiento
Derivadas de **primer orden**	$\frac{dz}{dx} = 4x + 3y - 10$	Al derivar en x la y es un valor constante.
	$\frac{dz}{dy} = 3x + 3y - 9$	Al derivar en y la x es un valor constante.
Derivadas de **segundo orden**	$\frac{d^2z}{dx^2} = 4$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a x.
	$\frac{d^2z}{dy^2} = 3$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a y.
Derivación de **segundo orden mixtas o cruzadas**	$\frac{d^2z}{dxdy} = 3$	De la primera derivada en x de la función z derivamos ahora con respecto a y.
	$\frac{d^2z}{dydx} = 3$	De la primera derivada en y de la función z derivamos ahora con respecto a x.

Nota. Andrade, E., 2023.

Ejemplo 3:

Dada la función $z(x, y) = x^2 + 9y - 3y^2 - 8x + 3xy$

Tabla 10

Resolución del ejemplo 3 sobre derivadas de una función multivariable

Orden de derivada	Ecuación	Procedimiento
Derivadas de **primer orden**	$\frac{dz}{dx} = 2x + 3y - 8$	Al derivar en x la y es un valor constante.
	$\frac{dz}{dy} = 3x - 6y + 9$	Al derivar en y la x es un valor constante.
Derivadas de **segundo orden**	$\frac{d^2z}{dx^2} = 2$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a x.
	$\frac{d^2z}{dy^2} = -6$	Derivo el resultado de la primera derivada con respecto a y.
Derivación de **segundo orden mixtas o cruzadas**	$\frac{d^2z}{dxdy} = 3$	De la primera derivada en x de la función z derivamos ahora con respecto a y.
	$\frac{d^2z}{dydx} = 3$	De la primera derivada en y de la función z derivamos ahora con respecto a x.

Nota. Andrade, E., 2023.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Ahora, le invito a desarrollar las siguientes actividades que le ayudarán en el desarrollo de su aprendizaje.

1. Revise el siguiente video sobre Derivadas parciales de segundo orden de Ayala., (2020).
2. Finalmente, para profundizar los conocimientos adquiridos, complete la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 4

1. ¿Qué representa una derivada parcial?

a. La pendiente de una recta tangente a una curva en la superficie.
b. Un vector dirección.
c. Vector gradiente.
d. Pendiente de la recta en el plano.

2. ¿Qué representa el gradiente de una función?

a. Un número.
b. Un vector.
c. Una función real.
d. Una función de dos variables.

3. ¿Qué representa la derivada direccional?

a. Un vector dirección.
b. Es un número negativo.
c. Es una pendiente de una recta tangente a una curva en la superficie con una dirección.

4. (   ) Indique si la siguiente proposición es verdadera o falsa: dada la superficie S: $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 20$, entonces el plano tangente a S en el punto (2, 3, 1) es paralelo a la recta:

$l(t) = (-5 + 3t, 2 + 2t, 3 - 6t)t \in R$

5. Dada la función

$f(x, y) = \{\frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2}; (x, y) \neq (0, 0)0 \quad ; (x, y) = (0, 0);$ determine

$\frac{af}{av}$ en el origen para toda dirección no nula dada por

$$v = (cost(t), sen(t); t \in R$$

6. Dada la siguiente función determine las primeras derivadas:

$$f(x, y) = z = 3x^2y$$

7. Dada la siguiente función determine las primeras derivadas:

$$z = x^3 + 3xy^2$$

8. Dada la siguiente función determine las primeras derivadas:

$$z = 4x^2 - 3y^2$$

9. Dada la siguiente función determine las primeras derivadas:

$$z = -5x^3 + 3x^2y + 4$$

10. Dada la siguiente función determine las primeras derivadas:

$$z = 2x^5 - 6xy^2$$

Ir al solucionario

Nota: por favor, resuelva los ejercicios en un cuaderno o herramienta digital.

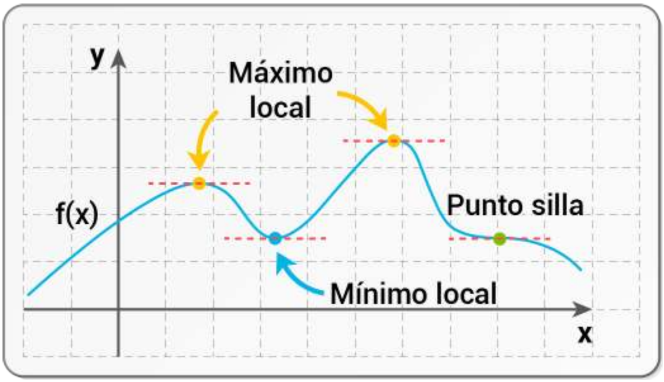
Semana 10

Unidad 5. Máximo y mínimos de una función real de dos variables

Una de las aplicaciones de la derivada es el poder determinar los máximos, mínimos absolutos y relativos, de una función univariable; así como en la función univariable, las funciones de varias variables también tienen extremos relativos y absolutos. Un máximo o mínimo absoluto es un valor para el que la función toma el mayor o menor valor. Un punto es un extremo relativo si es un extremo en un entorno de dicho punto. Es decir, si es un extremo con respecto a los puntos cercanos.

Figura 28

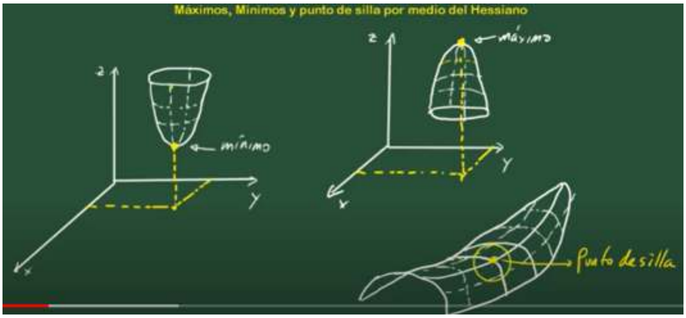
Máximo y Mínimos de una función real de dos variables



Nota. Tomado de *Hallar Máximos y Mínimos Usando Derivadas* [Ilustración], por Disfruta las Matemáticas, s.f., disfrutalasmatematicas, CC BY 4.0.

Figura 29

Máximo, mínimo y punto de silla por medio de Hessiano



Nota. Tomado de [Profe Marco Ayala] (2020, 04, 04). 94. Máximos,Mínimos y punto de silla por medio del Hessiano (parte 1) [Video]. YouTube. URL.

Definición. - Se dice que una función $z = f(x.y)$ tiene un máximo relativo en el punto, (x_0, y_0) esto es, cuando $(x = x_0)$ y $(y = y_0)$, si para todo punto (x, y) en el plano que esté lo suficientemente cercano a (x_0, y_0) se tiene:

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

5.1. Métodos para determinar máximos, mínimos, punto silla

Para encontrar máximos y mínimos relativos y punto silla de funciones de varias variables, se puede recurrir a varios métodos siendo los más conocidos:

a. El método o el criterio de la segunda derivada.
b. El método del discriminante hessiano o matriz hessiana.
c. El método de los multiplicadores de LaGrange.
d. El teorema o fórmula de Taylor: es una aproximación polinómica de una función n veces derivable en un punto específico. Es decir, es una suma finita de derivadas locales evaluadas en un punto.

Una vez mencionados estos métodos, veamos a detalle la información de cada uno de ellos:

a. **Criterio de la segunda derivada. –**

Para cualquiera de los métodos que se escoja es necesario que se determinen los puntos críticos de la función, y para ello es importante determinar las primeras de la función e igualarlas a cero.

Un punto (x_0, y_0) para el cual.

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \frac{df(x,y)}{dy} = 0$$

Se llama punto crítico de f.

Ejemplo:

Determinar los puntos críticos de la función $z = f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$

Se obtienen las primeras derivadas:

$$\frac{dz}{dx} = 4x - 2y + 5; \frac{dz}{dy} = 2y - 2x - 3$$

Cada derivada parcial se iguala a cero.

$$\frac{dz}{dx} = 4x - 2y + 5 = 0$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y - 2x - 3 = 0$$

Se forma un sistema de ecuaciones que debe ser resuelto por cualquier método:

$$4x - 2y + 5 = 0;$$

$$2y - 2x - 3 = 0$$

En este caso se suman las dos ecuaciones, $2x + 2 = 0; donde\ x = -1$ este valor se reemplaza en cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se determina y ; $4(-1) - 2y + 5 = 0; y = \frac{1}{2}; Pc : (-1, \frac{1}{2})$.

El **Criterio de la segunda derivada** es un teorema o método de cálculo matemático en el que se utiliza la **segunda derivada** para efectuar una prueba correspondiente a los máximos y mínimos relativos de una función.

Cuando se encuentra un punto donde el gradiente de una **función multivariable** es el vector cero, significa que el plano tangente de la gráfica es horizontal en este punto, el **criterio de la segunda derivada** parcial **es** una forma de saber si ese punto es un mínimo local, un máximo local o un punto silla.

En este criterio es necesario contar con las primeras derivadas, los puntos críticos y las segundas derivadas y aplicar la siguiente relación:

$$D(x,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Como se observa es necesario tener las segundas derivadas parciales que como se recuerda resultan ser las derivadas de las primeras derivadas y cumplir con los siguientes criterios:

a. Si

$$D(x_0, y_0) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0,\ z\ tiene\ un\ máximo\ relativo\ en(x_0, y_0)$$

b. Si

$$D(x_0, y_0) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0,\ z\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ en(x_0, y_0)$$

c. Si

$$D(x_0, y_0) < 0, z\ no\ tiene\ ni\ un\ máximo\ relativo\ ni\ un\ mínimo\ relativo\ en(x_0, y_0)$$

d. Si

$$D(x_0, y_0) = 0, z\ ninguna\ conclusión\ puede\ sacarse\ con\ respecto\ a\ extremos\ en\ (x_0, y_0)\ y\ requiere\ que\ se\ haga\ un\ análisis\ adicional.$$

Continuando con el ejemplo:

$$z = f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 5x - 3y + 1$$

$$\frac{dz}{dx} = 4x - 2y + 5 = 0$$

$$\frac{dz}{dy} = 2y - 2x - 3 = 0$$

Se obtiene las segundas derivadas:

$$\frac{2^2 z}{dx^2} = 4; \frac{d^2 z}{dy^2} = 2; \frac{d^2 z}{dxdy} = -2; \frac{d^2 z}{dydx} = -2$$

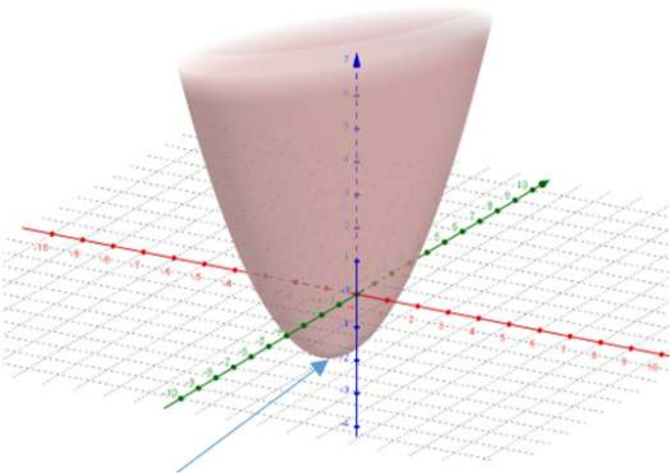
Se aplica el criterio.

$$D(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4 \cdot 2 - (-2)^2 = 8 - 4 = 4$$

Entonces $D(x, y) \geq 0; \frac{d^2 z}{2x^2} \geq 0\ se\ tiene\ un\ m\acute{\imath}nimo\ relativo.$

Figura 30

Representación gráfica criterio de la segunda derivada



Nota. Andrade, E., 2023.

b. **El método del discriminante hessiano o matriz hessiana** surge a partir de estudios realizados por Hess, matemático alemán en el año de 1844, quien introdujo “los jacobianos” expresiones que expresan cambios de variable en las integrales múltiples.

Para trabajar con esta matriz es necesario conocer el proceso de obtención de las derivadas de primer y segundo orden, ya que estos valores forman parte de la matriz.

Tabla 11

Derivadas de primer y segundo orden

Primer orden	Segundo orden
$fx = \frac{df}{dx}$	$fxx = \frac{d^2 f}{dx^2}$
$fy = \frac{df}{dy}$	$fyy = \frac{d^2 f}{dy^2}$
	$fxy = \frac{d^2 f}{dxdy}$
	$fyx = \frac{d^2 f}{dydx}$

Nota. Andrade, E., 2023.

Con estos primeros resultados se puede formar la matriz hessiana, la misma que ayudará a determinar máximos y mínimos de funciones multivariables.

Para dos variables: $f(x, y)$

$$\begin{vmatrix} f_{XX} & f_{XY} \\ f_{YX} & f_{YY} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d^2 f}{dx^2} & \frac{d^2 f}{dxdy} \\ \frac{d^2 f}{dydx} & \frac{d^2 f}{dy^2} \end{vmatrix}$$

Para tres variables: $f(x, y, z)$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}$$

En este tema matriz hessiana es necesario revisar los métodos de resolución de determinantes.

Se debe tener claro los siguientes casos:

- Si el determinante es mayor que cero, entonces se procede a verificar si fxx es positivo o negativo.
  - Si fxx es positivo o mayor que cero, entonces la función tiene un **mínimo local** en el punto crítico.
  - Si fxx es negativo o menor que cero, entonces la función tiene un **máximo local** en el punto crítico.
- Si el determinante es menor que cero, entonces se concluye que la función tiene un **punto de silla** en el punto crítico.
- Si el determinante es igual a cero, **el criterio no es concluyente**, por lo tanto, se debe buscar otra forma de determinar el comportamiento de la función.

Para comprender el proceso de la matriz hessiana, analice los procesos del siguiente ejemplo:

Ejemplo:

Dada la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$

Tabla 12

Derivadas de función

Derivada	Procedimiento		
Derivadas de **primer orden**	$\frac{df}{dx} = 2x - y$	$\frac{df}{dy} = 2y - x$	$\frac{df}{dz} = 14z$
Derivadas de **segundo orden**	$\frac{d^2f}{dx^2} = 2$	$\frac{d^2f}{dy^2} = 2$	$\frac{d^2f}{2z^2} = 14$
Derivación de **segundo orden mixtas o cruzadas**	$\frac{d^2f}{dxdy} = -1$	$\frac{d^2f}{dydx} = -1$	$\frac{d^2f}{dzdx} = 0$
	$\frac{d^2f}{dxdy} = -1$	$\frac{d^2f}{dydz} = 0$	$\frac{d^2f}{dzdy} = 0$

Nota. Andrade, E., 2023.

$$\left|\frac{d^2f}{dx^2}\cdot\frac{d^2f}{dxdy}\cdot\frac{d^2f}{dxdz}\cdot\frac{d^2f}{dydx}\cdot\frac{d^2f}{dy^2}\cdot\frac{d^2f}{dydz}\cdot\frac{d^2f}{dzdx}\cdot\frac{d^2f}{dzdy}\cdot\frac{d^2f}{dz^2}\right| = |2-1\,0\ \ -1\,2\,0\,0\,0\,14| = 56-14 = 42$$

$$42 > 0$$

$$\frac{d^2f}{dxdz} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dydz} = 0 \qquad \frac{d^2r}{dxdy} = 0$$

Además.

$$\frac{d^2f}{dx^2} > 0$$

Se tiene un mínimo local.

c. **El método de los multiplicadores de LaGrange:** otro método que permite determinar máximos y mínimos son los multiplicadores de Lagrange, que es un método que permite encontrar el máximo o el mínimo de una función multivariable cuando hay restricciones en los valores de entrada.

$$g(x, y, ..) = c$$

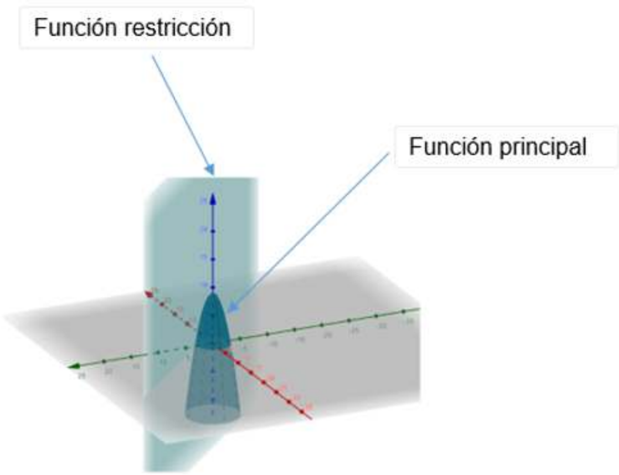
La función g es multivariable y c es una constante, la idea de este método es encontrar los puntos en donde las curvas de nivel de f y g sean tangentes entre sí. Es decir, se debe encontrar los puntos en donde los vectores de los gradientes f y g sean paralelos entre sí.

Ejemplo:

Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 3$.

Figura 31

Representación gráfica de la función restricción y función principal



Nota. Andrade, E., 2023.

Tabla 13

Ejemplo funciones que son derivadas

Función principal	$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
Función restricción	$x + y = 3$

Nota. Andrade, E., 2023.

Determinamos los multiplicadores de acuerdo a las funciones que son las derivadas de primer orden con respecto a x y con respecto a y.

$$\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{df}{dy} = \lambda \frac{dg}{dy}$$

La función g (x, y) igualamos a cero.

$$g(x, y) = 0$$

Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

Tabla 14

Derivadas de primer y segundo orden

Función principal	$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$
$\frac{df}{dx}$	$\frac{df}{dx} = -2x$
$\frac{df}{dy}$	$\frac{df}{dy} = -2y$
$g(x; y) = 0$ $x + y - 3 = 0$	
$\frac{dg}{dx}$	$\frac{dg}{dx} = 1$
$\frac{dg}{dy}$	$\frac{dg}{dy} = 1$

Nota. Andrade, E., 2023.

Reemplazamos los valores en los multiplicadores de Lagrange

Tabla 15

Uso de multiplicadores

$\frac{df}{dx} = \lambda \frac{dg}{dx}$	$-2x = \lambda(1)$
$\frac{df}{dy} = \lambda \frac{dg}{dy}$	$-2y = \lambda(1)$
$g(x, y) = 0$	$x + y - 3 = 0$

Nota. Andrade, E., 2023.

Entonces tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas.

$$-2x = \lambda$$

$$-2y = \lambda$$

$$x + y - 3 = 0$$

Se puede utilizar cualquier método de resolución.

$-\cancel{2}X = -\cancel{2}Y$

Entonces simplificamos.

$$x = y$$

Se reemplaza en

$$x + x - 3 = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2} = y$$

Estos valores los reemplazamos en la función principal, ya que ahí determinaremos el máximo solicitado.

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 9 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \frac{36-9-9}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

Entonces se ha determinado el máximo de la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ con restricción en $x + y = 3$ estará en el punto $\frac{9}{2}$ y las coordenadas en el espacio sería $f(x, y, z) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}) = MÁXIMO$

d. **El teorema o fórmula de Taylor:** el último método por analizar es la fórmula de Taylor, el mismo que explica que es un teorema que sirve para aproximar cualquier tipo de función en funciones polinómicas. Es decir, es un proceso de derivación de funciones reales de manera iterada, primera, segunda, , enésima derivada hasta que en un punto permitirá aproximar la función mediante un polinomio de grado igual o menor a uno.

El teorema analíticamente se explica así: si f es una función n veces derivable en $a \in R$, entonces llamamos polinomio de Taylor a f, de orden n en el punto a, y se nota por $T_n(f,a)(x)$ o bien $T_N(x)$ al polinomio:

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

Esta fórmula es muy importante en las carreras de Economía, Finanzas, Logística porque se aplica en activos y productos financieros en los cuales, su precio se expresa como una función no lineal.

Ejemplos:

a. El precio de un título de deuda a corto plazo es una función no lineal que depende de los tipos de interés.
b. Las opciones donde los factores de riesgo como la rentabilidad son funciones no lineales.
c. El cálculo de la duración de un bono es un polinomio de Taylor de primer grado.

Ejemplo:

Dada la función $f(x) = 2x^3 - 4ln(x)$. Determinar el segundo orden de la aproximación de Taylor de la función en un punto $x_0 = 1$.

En este ejemplo se demostrará la aplicación de la fórmula de Taylor, su desarrollo en el proceso de resolución:

Recordemos la fórmula general.

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

Nos pide determinar el segundo orden:

$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ esta expresión sería primer orden. esta expresión es de segundo orden.

$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$ esta expresión es de segundo orden.

Según la expresión segunda que nos indica el polinomio de segundo orden se debe obtener la primera y segunda derivada de la función.

Tabla 16

Fórmula de Taylor

	$f(x) = 2x^3 - 4ln(x)$
Primera derivada	$\frac{df}{dx} = 6x^2 - \frac{4}{x} = 6x^2 - 4x^{-1}$
Segunda derivada	$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x + 4x^{-2}$

Nota. Andrade, E., 2023.

Como nos pide en el punto $x_0 = 1$ tenemos:

Tabla 17

Cálculo de la primera y segunda derivada en un punto determinado

$f(x) = 2x^3 - 4ln(x)$	$f(1) = 2(1)^3 - 4\ ln\ ln(1) = 2$
$\frac{df}{dx} = 6x^2 - 4x^{-1}$	$\frac{df}{d(1)} = 6(1)^2 - 4(1)^{-1} = 6 - 4 = 2$
$\frac{d^2f}{2x^2} = 12x + 4x^{-2}$	$\frac{d^2f}{d(1)^2} = 12(1) + 4(1)^{-2} = 12 + 4 = 16$

Nota. Andrade, E., 2023.

Con estos valores reemplazamos la fórmula de Taylor hasta el nivel 2.

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2}$$

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!}$$

$$P_2(x) = 2 + 2(x - 1) + \frac{16(x-1)^2}{2!}$$

$$= 2 + 2x - 2 + \frac{16(x^2-2x+1)}{2 \cdot 1}$$

$$= 2 + 2x - 2 + 8(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 2 + 2x - 2 + 8x^2 - 16x + 8$$

$$= 8x^2 - 14x + 8$$

Con este polinomio encontrado y buscamos aproximaciones a $x_0 = 1$ y analizamos.

Tabla 18

Aproximaciones de Taylor

Función original: $f(x) = 2x^3 - 4ln(x)$	$x_0 = 1$ $f(1) = 2(1)^3 - 4\ ln\ ln\ (1) = 2$
Aproximación de Taylor: $P_{(x)} = 8x^2 - 14x + 8$	$x_0 = 1$ $8x^2 - 14x + 8$ $= 8(1)^2 - 14(1) + 8$ $= 8 - 14 + 8 = 2$
Función original: $f(x) = 2x^3 - 4ln(x)$	$x_0 = 1.05$ $f(1) = 2(1,05)^3 - 4\ ln\ ln(1.05) = 2.12008$
Aproximación de Taylor: $P_{(2)} = 8x^2 - 14x + 8$	$x_0 = 1.05$ $8x^2 - 14x + 8$ $= 8(1.05)^2 - 14(1.05) + 8 = 2.12$
Función original: $f(x) = 2x^3 - 4ln(x)$	$x_0 = 1.1$ $f(1) = 2(1.1)^3 - 4\ ln\ ln(1.1) = 2.280759$

Aproximación de Taylor: $P_{(2)} = 8x^2 - 14x + 8$	$x_0 = 1.1$ $8x^2 - 14x + 8$ $= 8(1.1)^2 - 14(1.1) + 8 = \mathbf{2.28}$

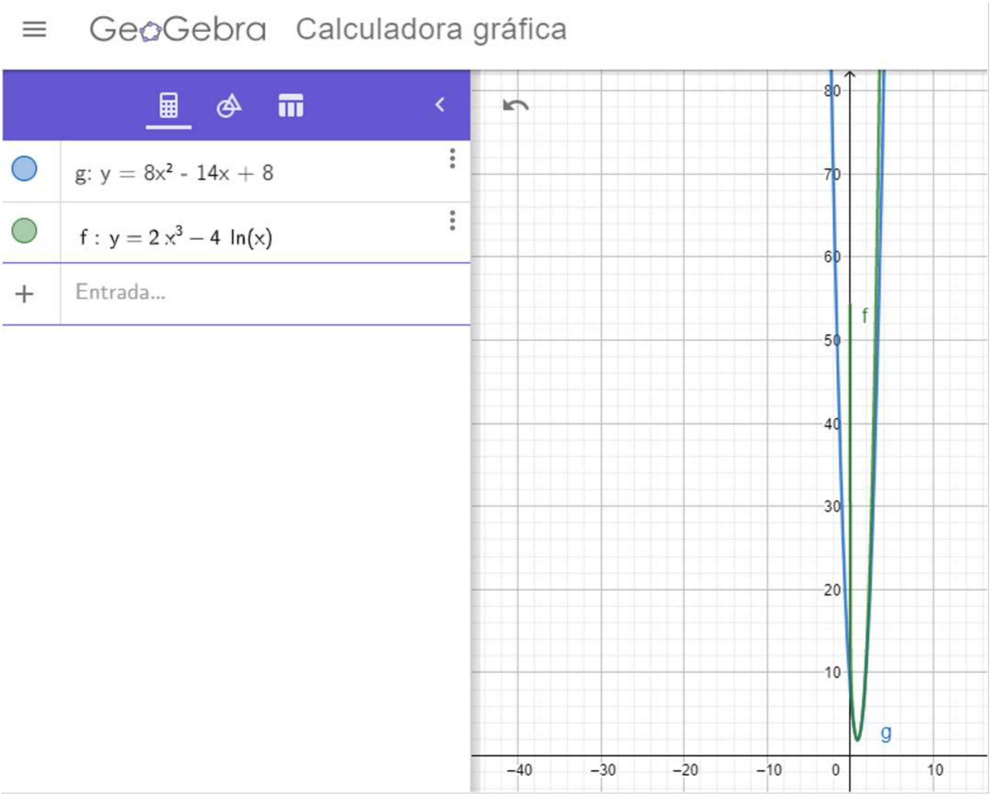
Nota. Andrade, E., 2023.

En el primer caso, cuando $x_0 = 1$, se ve que tanto la función original como la aproximación de Taylor dan el mismo resultado. Esto se debe a la composición del polinomio de Taylor que se ha creado mediante el uso de las derivadas locales. Estas derivadas se han evaluado en un punto concreto, $x_0 = 1$, para poder obtener un valor y crear el polinomio.

Entonces, cuanto más alejado de ese punto concreto, $x_0 = 1$, menos apropiada será la aproximación para la función no lineal original. En los casos donde $x_0 = 1$, 05` y $x_0 = 1$, 1 hay una diferencia significativa entre el resultado de la función original y la aproximación de Taylor.

Figura 32

Aproximaciones (Captura de GeoGebra)



Nota. Andrade, E., 2023.

¿Qué le parece el tema estudiado? Interesante ¿verdad?

Actividades de aprendizaje recomendadas

Ahora, le invito a desarrollar las siguientes actividades que le ayudarán en el desarrollo de su aprendizaje.

1. Se le recomienda revisar los recursos dados en las tutorías, la guía didáctica y los vídeos publicados. Lea, analice y saque sus propias anotaciones sobre este tema. Revisados estos recursos, es necesario recordar que una de las aplicaciones de la derivada es el determinar

los máximos y los mínimos relativos para aplicarlos en los problemas propios de la carrera.

Nota: por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

2. Para ampliar este tema, lo invito a revisar los siguientes videos:

    - Máximos, mínimos y punto de silla por medio del Hessiano (parte 1) de Ayala., (2020).
    - Máximos y mínimos condicionados con multiplicador de Lagrange. Ayala., (2020).

3. Finalmente, le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación:

Autoevaluación 5

1. Determine los puntos críticos de la función.

$$f(x,y) = \sqrt{4y^2 - 9x^2 + 24y + 36x + 36}$$

2. Determine los puntos críticos de la función.

$$g(x,y) = x^2 + 2xy - 4y^2 + 4x - 6y + 4$$

3. Indique si una función $f\,(x,y)$ puede tener un punto crítico donde no alcance un valor máximo o un valor mínimo.

4. Si en una función definida y dos veces derivable en un intervalo I= (a, b) tiene un mínimo en un punto $c \in$ (a, b) ¿es cierto que f"(c)>0?

    - Si.

- No.

5. Si para una función dada, se puede aplicar el criterio de la primera derivada, ¿por qué acudir al criterio de la segunda derivada?

   a. Porque se debe obtener los puntos críticos.
   b. Porque permite el cálculo de máximos y mínimos.
   c. Porque ayuda a graficar.

6. Dada una función f ¿en qué casos no es posible aplicar el criterio de la segunda derivada?

   a. Porque se debe obtener los puntos críticos.
   b. Porque permite el cálculo de máximos y mínimos.
   c. Porque ayuda a graficar.

7. Una función que cambia suavemente, un máximo o mínimo se encuentra siempre donde la función se aplana, ¿dónde es ese lugar?

   a. Porque se debe obtener los puntos críticos.
   b. Porque permite el cálculo de máximos y mínimos.
   c. Porque ayuda a graficar.

8. (   ) La función $z = x^3 - 2xy - y^6$ tiene punto crítico en (1,2), indique si en ese punto se produjo un máximo.

9. Determine el punto crítico de la función $z = y - y^2 - 3x - 6x^2$

10. (   ) La función $z = y - y^2 - 3x - 6x^2$ tiene punto crítico en (-1/4, 1/2), indique si en ese punto se produjo un máximo.

Ir al solucionario

Resultados de aprendizaje:

ECONOMÍA

- Comprende el concepto de antiderivada.
- Calcular longitud de arco de una curva paramétrica.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer y calcular el Hessiano de una función escalar en varias variables.
- Determinar los máximos y mínimos de una función y aplicarlo a problemas de optimización.

Para alcanzar los resultados planteados, usted será capaz de comprender el concepto de antiderivada y calcular la longitud de arco de una curva paramétrica. Este conocimiento le permitirá resolver problemas más avanzados en el cálculo y aplicarlos en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 11

Unidad 6. Integrales múltiples

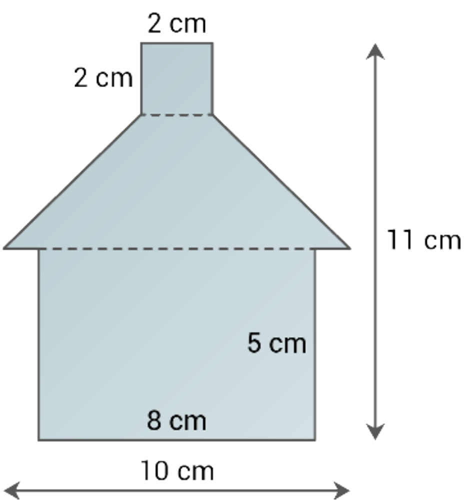
6.1. Nociones generales

Idea intuitiva de integración:

Un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Como un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada.

Figura 33

Figuras regulares

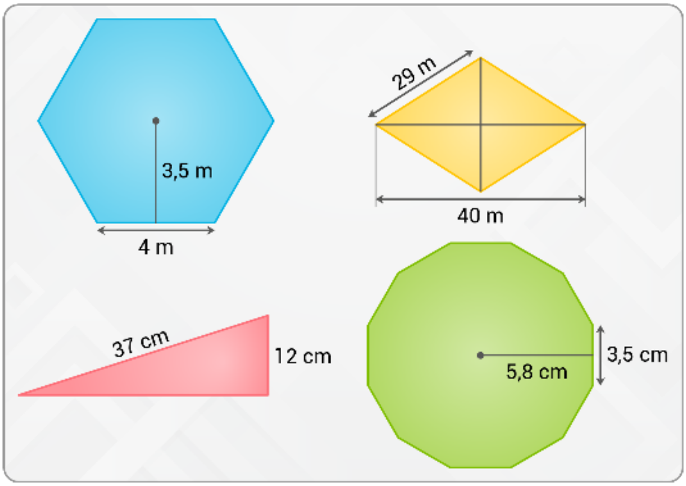


Nota. Adaptado de: *matematicasconbolivar.* (2021). Cálculo de áreas de figuras planas | Áreas de figuras compuestas [Video]. [YouTube.](https://www.youtube.com)

En términos generales, calcular áreas de figuras regulares es fácil porque cumplen con fórmulas específicas:

Figura 34

Figuras regulares 2

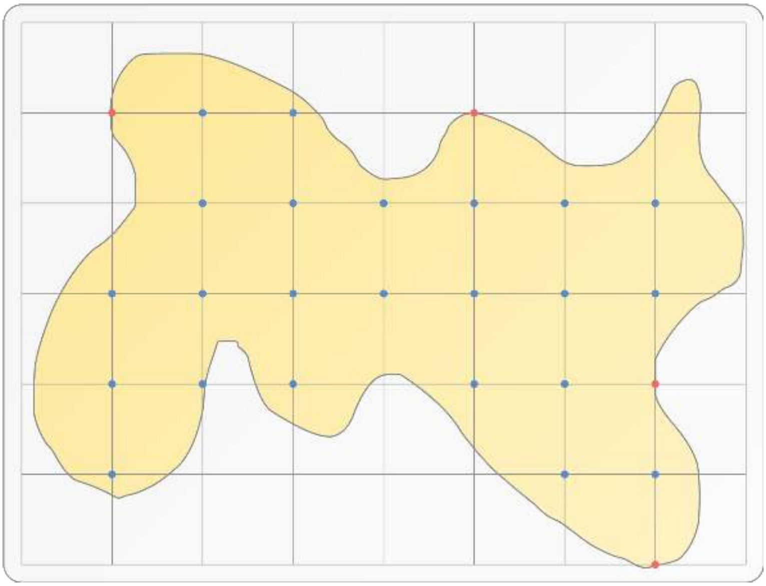


Nota. Adaptado de: Área de figuras planas regulares (2018). [Imagen]. Recuperado de [FIGURAS PLANASY PLANOS]

Pero … Si tenemos figuras irregulares como, por ejemplo:

Figura 35

Figura irregular

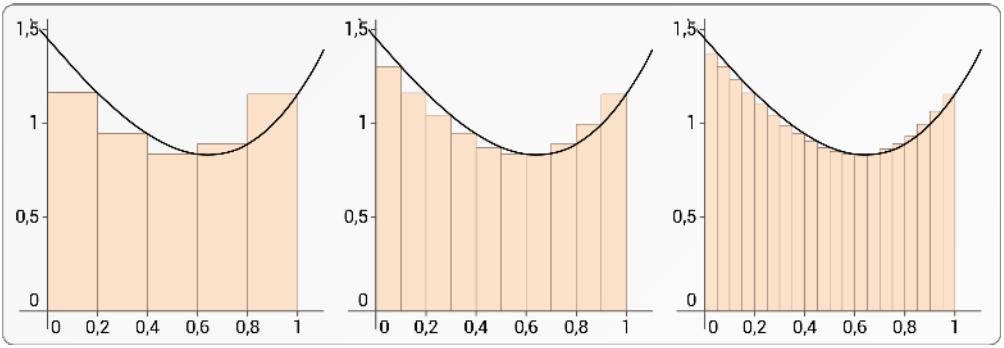


Nota. Adaptado de *Cálculo de áreas de figuras irregulares* [Ilustración], por Escuela Nº29 "Checoslovaquia", 2010, [Blog de 5to C de la Escuela Nº29 (2010)](), CC BY 4.0.

Los matemáticos buscaron la forma de reducir en rectángulo pequeño y sumarlos, mientras más pequeños eran estos, más exacta era la suma de sus áreas.

Figura 36

Sumas de Riemann



Nota. Tomado de *Sumas de Riemann* (p. 1), por Amilkhael Chávez, s.f. [Enlace]().

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Se imaginan lo que sería ¿calcular el área de un terreno de varios metros reduciendo en rectángulos pequeños? Sería un trabajo extenso y agotador, por tal razón, Bernhard Riemann vinculó las sumas a una integral definida tal que permitía calcular el área bajo una curva. Este método es útil cuando no se puede utilizar el teorema fundamental del cálculo.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$$

Con los aportes de matemáticos de renombre como Arquímedes, René Descartes, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Isaac Barrow, hicieron posible generar el teorema fundamental del cálculo integral que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

El teorema fundamental del cálculo indica que la derivación y la integración son operaciones inversas porque al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original.

$$\int_b^a f(x)dx = F(x) = F(b) - F(a)$$

Donde:

F(x)=antiderivada de f(x) si la derivamos entonces $F'(x) = f(x)$

Ejemplo:

$$\int_0^2 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\frac{2}{0} = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

$$F(x) = \text{antiderivada} = \frac{x^3}{3}$$

$$Si\ derivamos\ F(x)\ entonces\ F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Concluyendo se puede decir que:

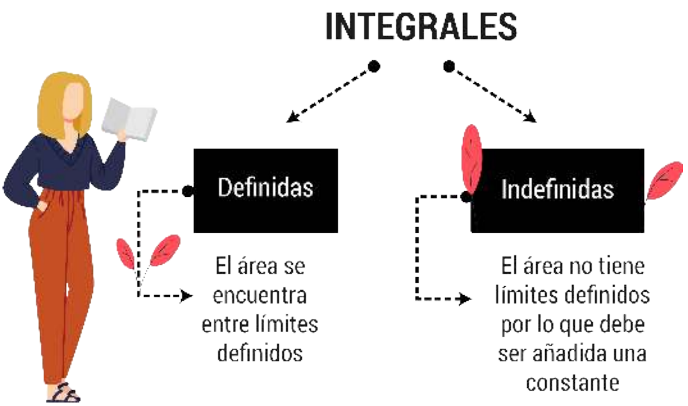
- Una integral es una generalización de la suma de infinitos sumandos, infinitesimalmente pequeños.
- Es una suma continua.
- La integral es la operación inversa a la derivada.
- El cálculo integral está encuadrado en el cálculo infinitesimal, donde el proceso de integración y derivación están íntimamente ligados.
- Se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y de sólidos de revolución.

Las integrales pueden ser:

- El área se encuentra entre límites definidos.

Figura 37

Tipos de Integrales



Nota. Andrade, E., 2023.

En cuanto a las propiedades y métodos de integración se recomienda estudiar la guía didáctica de Cálculo de Yépez (2015).

Todos estos conocimientos son prerrequisitos para el estudio de la Integración múltiple, que es el tema que estudia la resolución de integrales de dos o tres variables.

Ahora, revise los siguientes videos de introducción a la integración.

- Noción del concepto antiderivada (integral indefinida) de Ayala., (2018):
    - Parte 1.
    - Parte 2.
    - Parte 3.

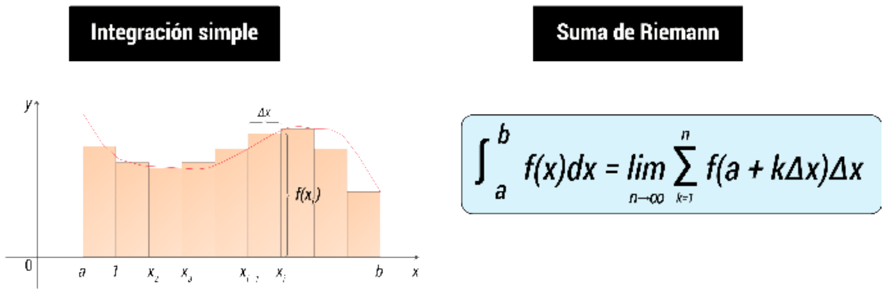
De igual forma, visualice detenidamente los siguientes videos sobre las reglas de integración de Ayala., (2018):

- Regla de integración de una función a la n: parte 1 y parte 2.
- Regla de integración que genera funciones logarítmicas 1.

Recordemos:

Figura 38

Representación gráfica y fórmula de la Suma de Riemann

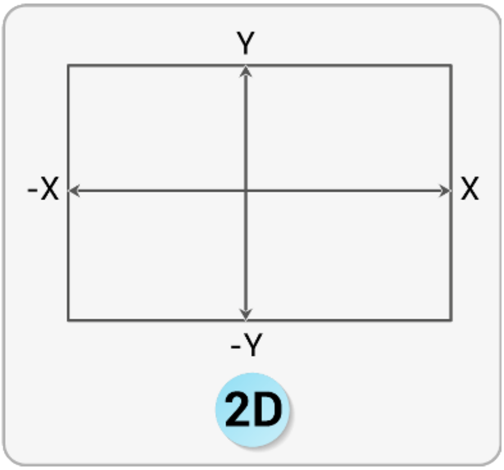


Nota. Tomado de *Cálculo Integral, la integral indefinida* (p. 10), por Hector Ramirez, 2019, enlace.

En la integral definida se trabaja con una función f(x) que al integrarla nos permite determinar el área bajo esa curva. Se trabaja en el plano bidimensional.

Figura 39

Plano Bidimensional

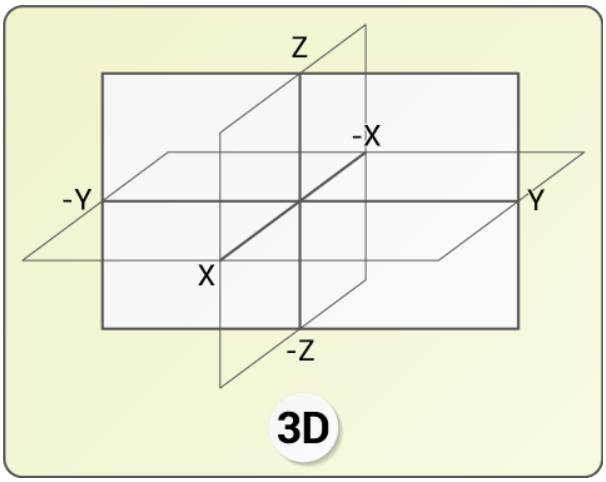


Nota. Andrade, E., 2023.

En la integral multivariable se trabaja con una función f (x, y) tal que al integrarla va a permitir encontrar un volumen ya que ahora se trabaja en el plano tridimensional.

Figura 40

Plano tridimensional

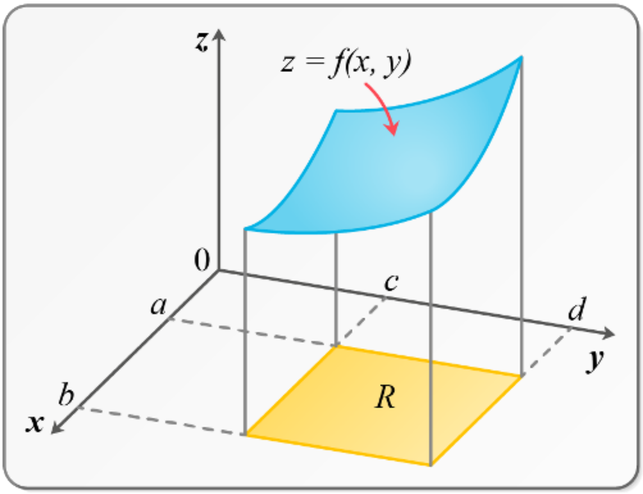


Nota. Tomado de la web, *Plano tridimensional* [Fotografía], CC BY 2.0

Tomemos como base una lámina en el plano tridimensional esta se proyecta en el plano bidimensional (x,y),

Figura 41

Idea intuitiva multivariable

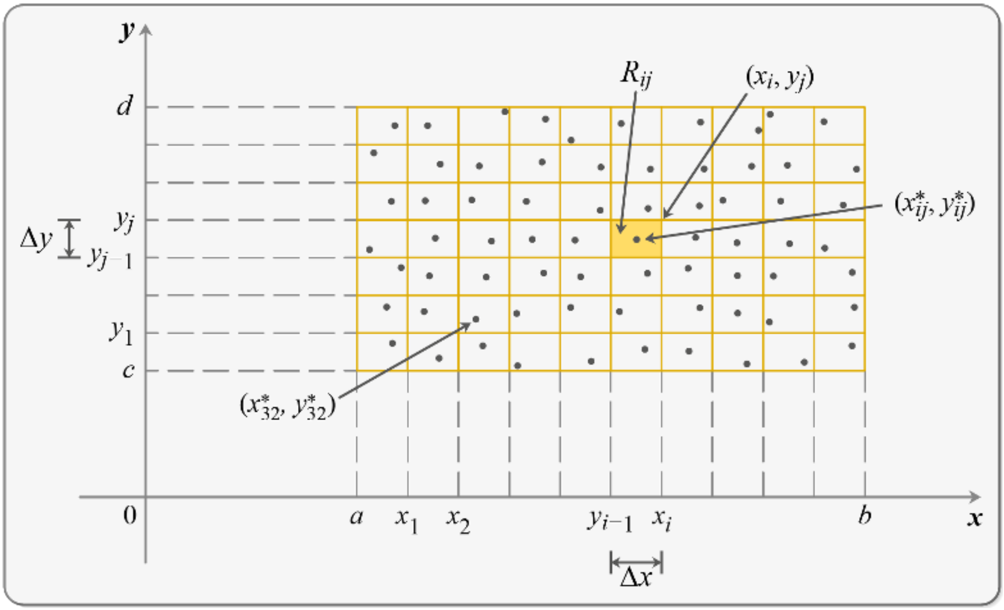


Nota. Tomado de *Integrales Múltiples* (p. 3), por Zaldívar, L., 2017, Instituto Tecnológico de Tehuacán.

Siguiendo la idea de Riemann el área se divide en sub rectángulos, mientras más pequeños más próximos están a su valor.

Figura 42

Idea intuitiva multivariable 2

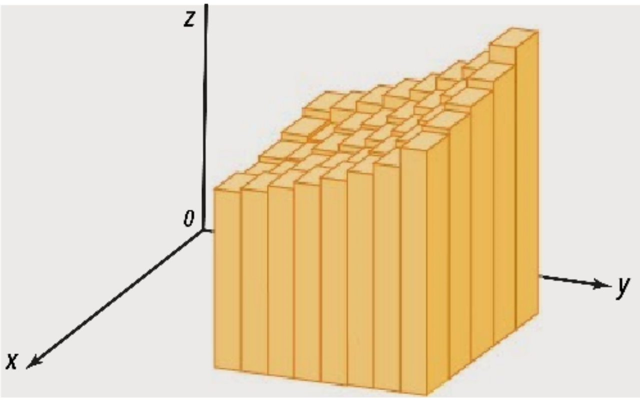


Nota. Tomado de *Integrales múltiples* [Ilustración], por Romper la ciencia, s.f., [breakthescience](), CC BY 4.0.

Si esto se extiende en el eje z se obtiene un volumen. La suma de muchos prismas rectangulares permitirá el cálculo aproximado del volumen.

Figura 43

Idea intuitiva multivariable 3



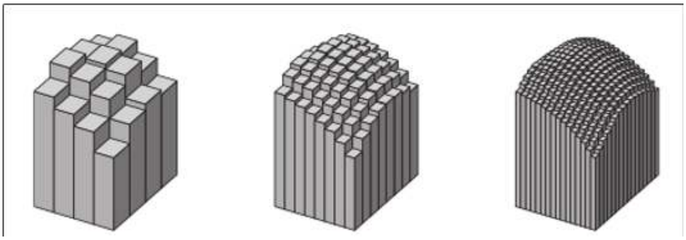
Nota. Tomado de *Double integrals over rectangles* [Ilustración], por paulmr, 2019, people.goshen, CC BY 4.0.

Si n crece las aproximaciones mediante sumas de Riemann tienden al volumen total del sólido.

Si las sumas de Riemann de f tienen un límite (que se toma sobre todas las posibles mallas rectangulares contenidas en la región R) f es integrable.

Figura 44

Idea intuitiva multivariable 4



Nota. Tomado de *INTEGRALES MÚLTIPLES* (p. 2), por josemsalazar, s.f. Enlace.

$$\iint f(x,y)\, dA =$$

$$\lim_{\|M\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{con } n = Card(M)$$

Las integrales definidas de funciones con dos variables se llaman integrales dobles definidas. Estas involucran la integración sobre una región en el plano.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

1. En esta fase de adquisición del nuevo conocimiento se sugiere estar en contacto con el tutor, ya que él orientará el aprendizaje de la semana, sugiriendo las lecturas específicas, ejercicios y recursos hacia donde usted debe proyectarse. Recuerde que comenzamos un tema nuevo que son Integrales multivariadas. Haga uso de la tutoría en el día y hora que el docente haya planificado, puede contactarse por medio del correo electrónico o hacer uso de la mensajería que dispone la plataforma en su aula virtual.
2. En este tema se debe recordar lo que es integración univariable, las características, propiedades y aplicaciones que este tema necesita, ya que son prerrequisitos para la integración multivariable.
3. Para recordar este tema se sugiere la visualización de los siguientes vídeos de Ayala., (2018):

    - Integral de línea de una función vectorial escalar.
    - Integral de línea de una función vectorial (ejercicio 1).

4. Además, recuerde que semanalmente cuenta con los vídeos de apoyo de las clases en vivo, y de los anuncios académicos, que se encuentran en el EVA.

Semana 12

Unidad 6. Integrales múltiples

6.2. Integrales iteradas

Se tiene una idea general de la integración multivariable, es necesario especificar el significado de integrales iteradas.

Una idea global de fácil comprensión es el hecho de que una integral múltiple se resuelve por medio de integrales iteradas. Esto quiere decir que si f es integrable en R= (a, b) x (c, d); se puede interpretar entonces que la integral iterada es como un proceso sucesivo de integración que cumple con las siguientes relaciones:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint \left[\iint f(x,y)\,dx\right]\,dy$$

$$\iint f(x,y)\,dy\,dx = \iint \left[\iint f(x,y)\,dy\right]\,dx$$

Al evaluar la integral doble por medio de integrales iteradas llegamos al teorema de Fubini: “Sea f una función continua en una región R cerrada y acotada entonces”.

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

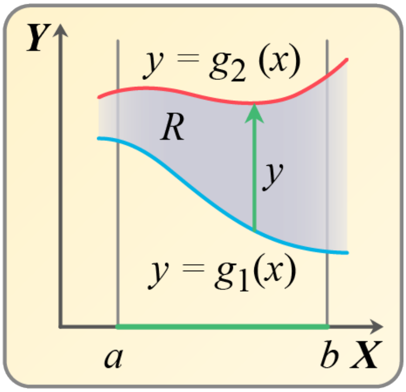
Lo anterior, muestra que el valor de la integral doble es independiente del orden elegido para calcular las integrales iteradas. Si se integra primero la variable interna dejando constante la otra y luego la externa, el resultado no será alterado.

Si los límites de estas integrales fueran funciones también se debe aplicar el teorema de Fubini:

Sean $R = \{(x, y)\epsilon R^2 tal\ que\ a \leq x \leq b\ \ y\ \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ con g_1 y g_2 funciones continuas en $[a, b]$ Si f es continua en R entonces:

Figura 45

Teorema de Fubini con integración respecto a y



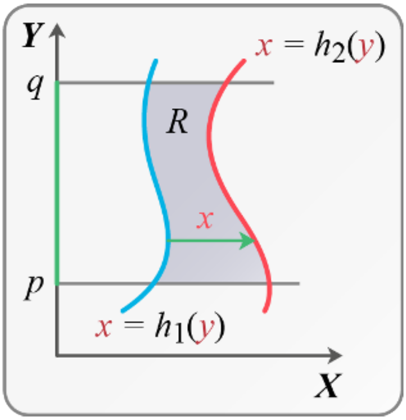
Nota. Andrade, E., 2023.

$$\iint f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \left[\int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

Sean $R = \{(x, y)\epsilon R^2 tal\ que\ p \leq x \leq q\ \ y\ \ h_1(x) \leq x \leq h_2(x)\}$ con h_1 y h_2 funciones continuas en $[p, q]$. Si f es continua en R entonces:

Figura 46

Teorema de Fubini con integración respecto a x



Nota. Andrade, E., 2023.

$$\iint f(x,y)\,dA == \int_p^q \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x} (2x+1)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} (-2x^2+x+1)\,dx = \frac{2}{3}$$

$\int_0^{1-x} (2x+1)\,dy$ se resuelve como integral iterada definida.

$\int_{-1}^{1} (-2x^2+x+1)\,dx$ ese resultado se integra como otra integral iterada definida.

Es hora de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

Actividades de aprendizaje recomendadas

Con esta base del conocimiento y si tiene inquietudes se le sugiere estar en contacto con el tutor, ya que él orientará el aprendizaje de esta semana indicando las lecturas específicas, ejercicios y recursos que debe revisar. Recuerde que seguimos con integrales multivariadas.

1. Haga uso de la tutoría, puede contactarse por medio del correo electrónico o hacer uso de la mensajería que dispone la plataforma en su aula virtual.
2. Revise el video del Magister Marco Ayala: integrales iteradas., (2018).

Resultados de aprendizaje:

ECONOMÍA

- Compara y discute la diferencia entre una integral doble y triple .
- Resuelve problemas relacionados con el cambio de variables en integrales múltiples .

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer y calcular el Hessiano de una función escalar en varias variables.
- Determinar los máximos y mínimos de una función y aplicarlo a problemas de optimización.

Para alcanzar los resultados planteados, usted será capaz de comparar y discutir la diferencia entre una integral doble y una integral triple, así como resolver problemas relacionados con el cambio de variables en integrales múltiples. Este conocimiento le permitirá abordar problemas complejos en el cálculo multivariable y aplicarlos en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Unidad 6. Integrales múltiples

6.3. Integrales dobles

La integral definida de una variable cumple con la siguiente definición.

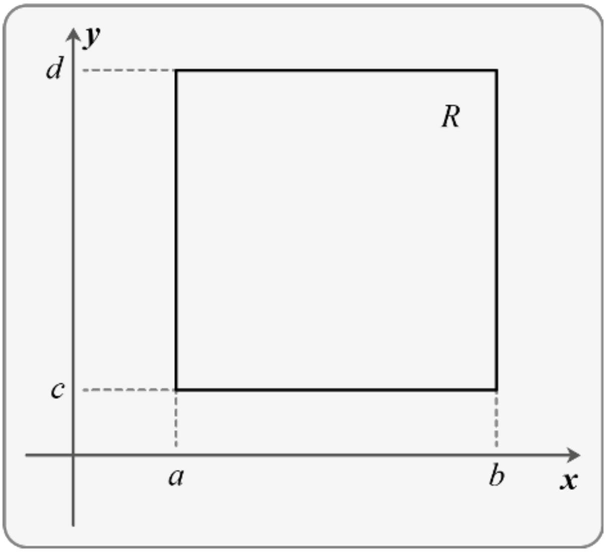
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\right]$$

Como se puede observar la integral colocada, es la suma de Riemann, la misma que indica el área bajo la curva $y = f(x)$ en un intervalo [a, b].

En una integral definida para una función de dos variables se debe suponer la existencia de una región o zona de integración formada por los intervalos [a, b] x [c, d]. Es decir, un rectángulo en R2, y que para facilitar la comprensión será representada con la letra R.

Figura 47

Integral doble

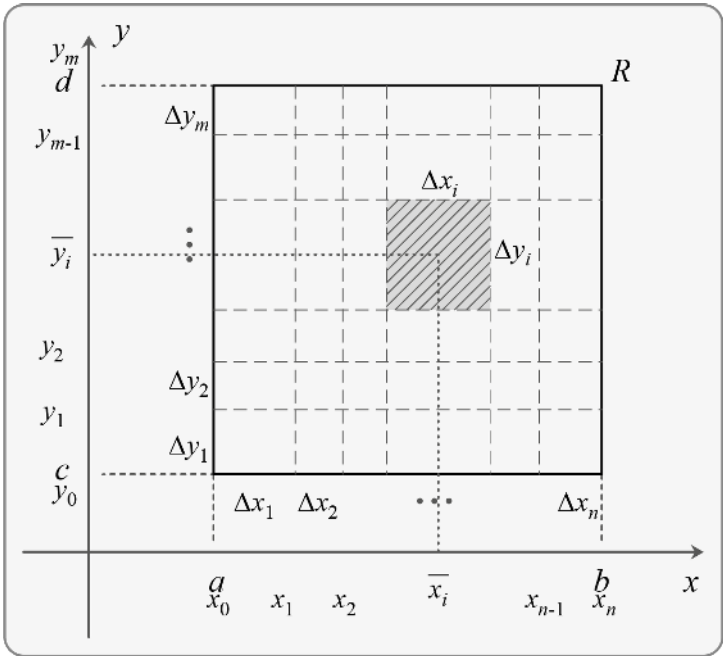


Nota. Adaptado de (Moises, 2018).

Si a esta región se le haría particiones de diferentes tamaños, se obtendría lo siguiente:

Figura 48

Superficie de la Integral doble



Nota. Tomado de *Logaritmo Neperiano* [Ilustración], por logaritmoneperiano, s.f., logaritmoneperiano, CC BY 4.0.

A un área de partición se le puede simbolizar como $\Delta A_{ij} = \Delta x_j \Delta y_i$

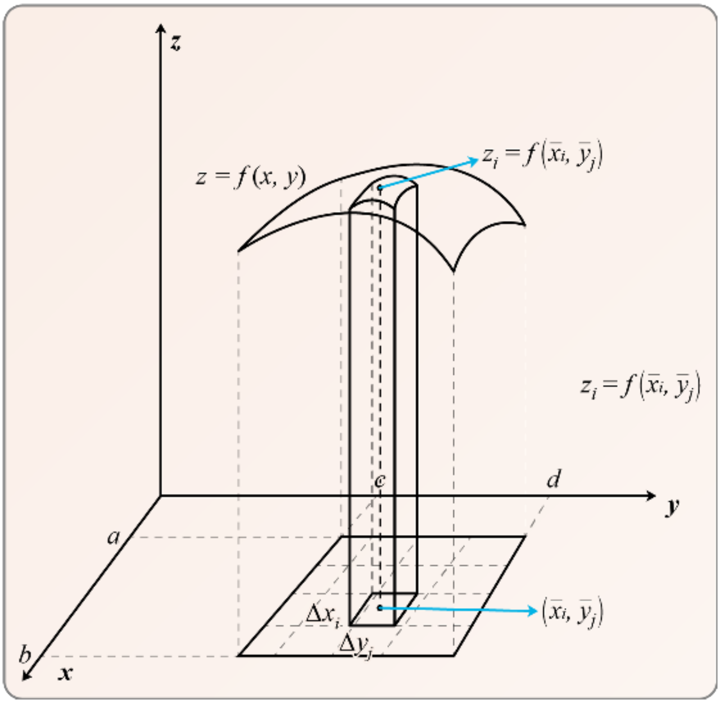
Con funciones multivariables se puede definir a la función como $z = f(x, y)$ para la región R, en el caso de la partición se tendría (Moises, 2018)

$$f(x_i, y_i)\Delta x_j \Delta y_i$$

Gráficamente estaría representado de la siguiente forma:

Figura 49

Proyecciones en el plano tridimensional



Nota. Tomado de *Logaritmo Neperiano* [Ilustración], por logaritmoneperiano, s.f., logaritmoneperiano, CC BY 4.0.

El punto (x_i, y_i) representa un punto del rectángulo seleccionado y si se busca el volumen su representación sería:

$$\Delta V_{ij} = f(x_j, y_i)\Delta x_j \Delta y_j$$

Entonces el volumen bajo la superficie es la suma de volúmenes de una cantidad infinita aplicando Riemann sería:

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

De esto surge la definición de la integral doble:

Sea f una función de dos variables definida en la región plana.

$$R = [a, b]x[c, d] = \{(x, y)/a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

Al

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

Se le denomina integral doble de f en R y se denota de la siguiente manera:

$$\int_d^c \int_b^a f(x, y)dxdy$$

Además, si existe este límite es integrable en R.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Puede ahondar en el tema analizando los videos sobre integrales dados en clase y revisando los ejercicios desarrollados en los ejemplos descritos a continuación, en caso de tener dudas comuníquese con el docente tutor, quien por medio del *chat* de tutorías o mensajes de texto aclarara sus inquietudes.

Ejemplo:

$$\int_0^1 \int_2^3 (6x + 6y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{6x^2}{2} + 6xy^2\right) = \int_0^1 (3x^2 + 6xy^2)$$

$$= \int_0^1 \left[(3(3)^2 + 6(3)y^2) - (3(2)^2 + 6(2)y^2)\right]\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[27 + 18y^2 - 12 - 12y^2\right]\, dy = \int_0^1 \left[15 + 6y^2\right]\, dy$$

$$= 15y + \frac{6y^3}{3} = 15(1) + 2(1) - 15(0) - 2(0)$$

$$= 15 + 2 - 0 - 0 = 17$$

Si cambiamos el orden de resolución de las integrales, el resultado es el mismo.

$$\int_3^2 \int_1^0 (6x + 6y^2)\, dx\, dy = 17$$

Este resultado se justifica con el teorema de Fubini que asegura que el orden es irrelevante.

Ejemplo:

$$\int_{-1}^{2} \int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} (-x^3 + x^2 + 2x)\, dx = \left(\frac{-x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right)_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{-(2)^4}{4} + \frac{(2)^3}{3} + (2)^2 \right) - \left(\frac{-(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 \right)$$

$$= \left(\frac{-16}{4} + \frac{8}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{4} - \frac{1}{3} + 1 \right) = \left(\frac{-48+32+48}{12} \right) - \left(\frac{-3-4+12}{12} \right)$$

$$= \frac{32}{12} - \frac{5}{12} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

2. Es momento de evaluar el aprendizaje adquirido sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

[Autoevaluación 6]

1.
Resuelva la siguiente integral $\int_0^3 \int_0^4 x\, dy\, dx$

2.
Resuelva la siguiente integral $\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x + 1)\, dx\, dy$

3. Resuelva la siguiente integral $\int_1^e \int_0^{\ln x} xy \, dy \, dx$

4. Resuelva la siguiente integral $\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) \, dy \, dx$

5. ¿Cómo se definen las integrales iteradas?

6. ¿La integral múltiple debe ser indefinida?

- Si.
- No.

7. ¿Para resolver integrales múltiples es necesario la presencia de integrales iteradas?

- Si.
- No.

8. ¿La integral doble define el área bajo un plano?

- Si.
- No.

9. ¿Cuándo se deben usar integrales dobles?

a. Para el cálculo de volúmenes.
b. Para el cálculo de áreas.
c. Para las dos respuestas anteriores.

10. ¿Las integrales dobles deben ser definidas?

- Si.
- No.

Ir al solucionario

Nota: por favor, resuelva los ejercicios en un cuaderno o herramienta digital.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 7. Aplicaciones de las integrales múltiples

7.1. Cálculo de áreas

Este tema es necesario saber el proceso de calcular la longitud de un arco dónde se efectúan las siguientes operaciones.

- Si se proyecta el arco, el arco sobre uno de los ejes coordenados determinando un cierto intervalo sobre el eje.
- Se integra la función $\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ si se proyecta sobre el eje x.
- Se integra la función $\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}$ si se proyecta sobre el eje y.

En una función multivariable el área S de una porción R´ de una superficie z=f(x,y) se sigue un procedimiento similar.

- Se proyecta R´ sobre uno de los planos coordenados determinando una región R en dicho plano.
- Se integra la función:

$$S=\iint \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dA \text{ Si se proyecta sobre xOy}$$

$$S=\iint \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2}\,dA \text{ Si se proyecta sobre yOz}$$

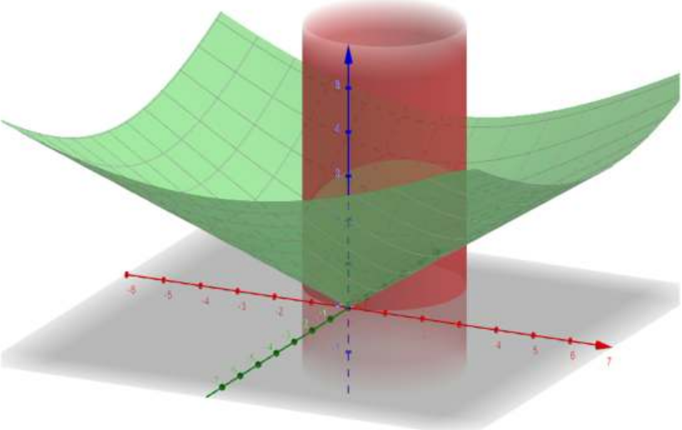
$$S=\iint \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}\,dA \text{ Si se proyecta sobre zOx}$$

Ejemplo:

Hallar el área de la porción de cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ situada por encima del plano $x0y$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

Figura 50

Curva $x^2 + y^2 = 3z^2$



Nota. Andrade, E., 2023.

La proyección del área perdida sobre el plano $x0y$ y la región limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4y$ para el cono.

Se proyecta sobre $x0y$ entonces usamos esta definición

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dA$$

Despejo $z = f(x, y)$

$$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} = \left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2x}{3} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{z} = \frac{x}{3z}$$

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{2y}{3} = \frac{y}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x^2+y^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{3}\cdot\frac{1}{z} = \frac{y}{3z}$$

Aplico la ecuación

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\,dA$$

$$S = \iint \sqrt{1+\left(\frac{x}{3z}\right)^2+\left(\frac{y}{3z}\right)^2}\,dA$$

$$S = \iint \sqrt{1+\frac{x^2}{9z^2}+\frac{y^2}{9z^2}}\,dA$$

$$S = \iint \sqrt{\frac{9z^2+x^2+y^2}{9z^2}}\,dA$$

Pero $x^2+y^2=3z^2$

$$S = \iint \sqrt{\frac{9z^2+3z^2}{9z^2}}\,dA$$

$$S = \iint \sqrt{\frac{12z^2}{9z^2}}\,dA$$

$$S = \iint \sqrt{\frac{4}{3}}\,dA = \iint \frac{2}{\sqrt{3}}\,dA$$

Determino los límites

$x^2+y^2=3z^2(1)$

$x^2+y^2=4y(2)$

Si $x = 0 \;\; 0^2 + y^2 = 4y \rightarrow y = 4$

Si $x = 0$ e $y = 4$ $determino\ el\ valor\ de\ z$

$$z = \sqrt{\frac{0^2+4^2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$P(x, y, z) = (0, 3, \tfrac{4\sqrt{3}}{3})$$

De $x^2 + y^2 = 4y$ despejo x

$$x = \pm\sqrt{4y - y^2}$$

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy$$

$$\int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy = \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} [x]_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}}\, dy$$

$$= \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4y - y^2} - \left(-\sqrt{4y - y^2}\right)\right)\, dy$$

$$= \int_0^4 \frac{2}{\sqrt{3}} \left(2\sqrt{4y - y^2}\right)\, dy = \int_0^4 \frac{4}{\sqrt{3}} \sqrt{4y - y^2}\, dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^4 \left(\sqrt{4y - y^2}\right)\, dy = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$

Reforcemos el aprendizaje resolviendo la siguiente actividad.

Actividad de aprendizaje recomendada

La aplicación de las integrales multivariadas permitirá unificar la teoría con la realidad con base en los fundamentos matemáticos y cálculo, vistos en ciclos anteriores. Por tal razón, habiendo llegado a esta unidad, usted no debe perderse de las orientaciones académicas de su tutor, comuníquese por cualquier medio, sea mensajería, chat de tutorías para que él le aclare sus inquietudes.

En esta unidad aplicaremos los conocimientos adquiridos a lo largo del ciclo donde visualizaremos cálculos y procesos de resolución para la obtención de áreas.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 15

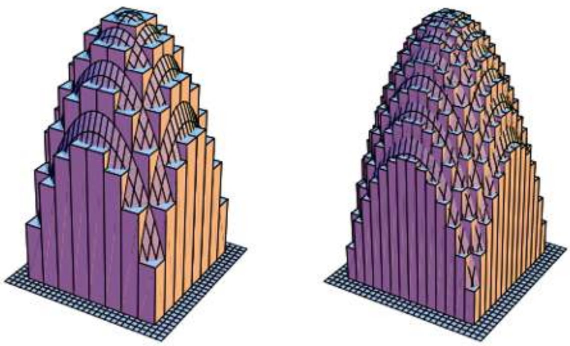
Unidad 7. Aplicaciones de las integrales múltiples

7.2. Cálculo de volúmenes

Se puede interpretar la expresión d (x, y) como el área de un pequeño rectángulo, un rectángulo infinitesimal de lados dx y dy. El producto f (x, y) d (x, y) se puede interpretar como el volumen de un ortoedro cuya base es dicho rectángulo infinitesimal y altura dada por f (x, y). Siguiendo esta idea, interpretamos la integral como una suma. Esta interpretación heurística permite considerar la integral como un límite de aproximaciones al volumen del cilindro en cuestión. La siguiente figura muestra aproximaciones al volumen del primero de los dos conjuntos representados en la figura anterior (Departamento de Matemática Universidad de Granada, s.f.).

Figura 51

Aproximaciones al volumen



Nota. Tomado de la web, Departamento de Matemática Universidad de Granada. Aproximaciones al volumen [Fotografía], CC BY 2.0

Las aproximaciones son mejores cuanto más pequeños sean los rectángulos en que se divide el conjunto A. Esta situación es muy parecida a las sumas de Riemann que se vio para estudiar las integrales simples. De hecho, las integrales dobles y triples pueden definirse también, al igual que la integral simple, como límites de sumas de Riemann, pero esa definición no sirve para calcularlas.

Como se ha visto, las integrales dobles permiten calcular áreas planas. Basta tener en cuenta que, si f es la función constante igual a 1, esto es f (x, y) = 1 para todo (x, y) $\in$ A, entonces se tiene que volumen (C (f, A)) = área(A), pues el volumen de un cilindro de altura constante igual a 1 es numéricamente igual al área de su base.

$$\iint \; d(x, y)_A = \acute{a}rea(A)$$

Las integrales triples tienen similares interpretaciones. Si $f; A \to R$ es un campo escalar de tres variables definido en un conjunto $A \subset R^3$ y se considera el “cilindro” en R^4 que tiene como base el conjunto A y como tapadera la gráfica de f, es decir el conjunto.

$$\mathcal{C}(f,A)=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4;(x,y,z)\in A,0\leq w\leq f(x,y,z)\}$$

El valor de la integral triple $\iiint f(x,y,z)d(x,y,z)$ da el volumen de dicho cilindro. Naturalmente, pueden darse otras muchas interpretaciones. Por ejemplo, la función f puede representar una densidad volumétrica de masa o de carga eléctrica en un sólido A (Departamento de Matemática Universidad de Granad, s.f.).

La integral triple proporciona, respectivamente, la masa o la carga total del sólido A. Si se integra la función constante igual a 1 en un sólido , se obtiene el volumen de A.

$$\iiint d(x,y,z)_A = volumen\ (A)$$

El siguiente resultado permite calcular volúmenes de cuerpos de revolución, además permite calcular volúmenes integrando áreas de secciones planas, y por último permite calcular una integral doble mediante dos integrales simples.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en la actividad que se describe a continuación:

1. Como último subtema dentro de las aplicaciones de las integrales multivariadas veremos y practicaremos lo referente al cálculo de volúmenes, usted no debe perderse de las orientaciones académicas de su tutor, comuníquese por cualquier medio sea mensajería, chat de tutorías para que él le aclare sus inquietudes.

   Este subtema requiere de los conocimientos adquiridos a lo largo del ciclo donde visualizaremos cálculos y procesos de resolución para la obtención de volúmenes.

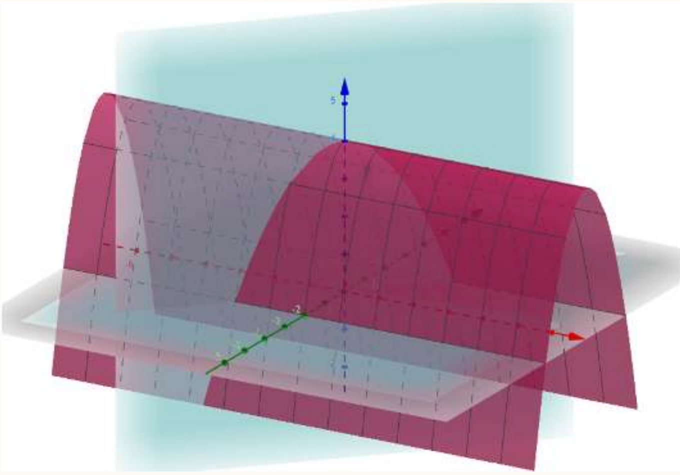
   Ejemplo:

Calcular por integración doble el volumen del sólido limitado por las superficies.

$z = 4 - y^2, \quad y = x, \; z = 0$

Figura 52

Curva



Nota. Andrade, E., 2023.

Si R es el sólido, el volumen V se obtiene mediante la integral.

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{x} (4 - y^2)\, dy\, dx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-2}^{x} \left(4y - \frac{y^3}{3}\right)]_{-2}^{x}\, dx = \int_{-2}^{2} \left(4x - \frac{x^3}{3} + 8 - \frac{8}{3}\right)\, dx = \frac{64}{3}$$

La intersección de y=x y x=2 es el punto (2,-2). La intersección de y=x e y=-2 se produce en el punto (-2,-2). Finalmente, x=2 e y=-2 se intersecan en (2,-2).

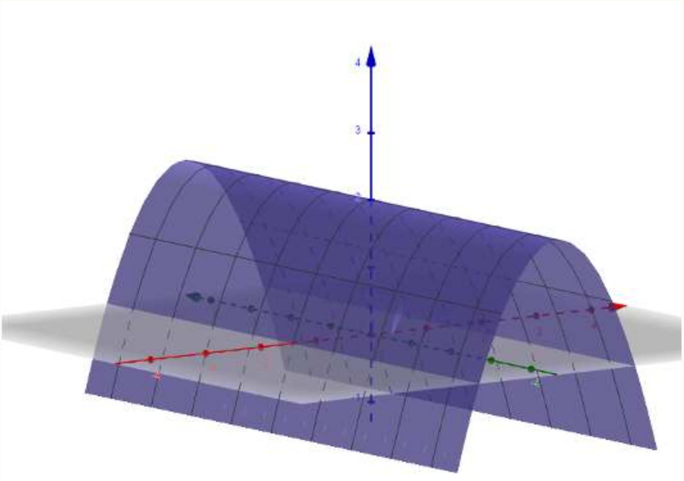
Ejemplo:

Determine el volumen formado por la función $z = f(x, y) = 2 - x^2$ en el espacio.

$$R = \{(x,y)\epsilon R\ tal\ que\ 0 \leq x \leq \sqrt{2}; 0 \leq y \leq 3\}$$

Figura 53

Clasificación de la materia



Nota. Andrade, E., 2023.

$$V = \iint f(x,y)\,dA = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^3 (2 - x^2)\,dy\,dx$$

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) y_0^3\,dx = \int_0^{\sqrt{2}} (2 - x^2) 3\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} (6 - 3x^2)\,dx = \left(6x - x^3\right)_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\,u^3$$

2. Es momento de evaluar el aprendizaje adquirido sobre esta temática, le invito a desarrollar la autoevaluación que a continuación se presenta.

Autoevaluación 7

1. Hallar el volumen limitado por $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ y el plano $z = 0.$

2. Resuelva la siguiente integral doble $\int_0^3 \int_0^4 x \, dx \, dy \, dx$

3. Resuelva la siguiente integral doble $\int_0^1 \int_{3x}^{x^2} 14x^2 y \, dy \, dx$

4. Resuelva la siguiente integral doble $\int_0^1 \int_0^y e^{x+y} \, dx \, dy$

5. Resuelva la siguiente integral triple $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 6xy^2 z^3 \, dx \, dy \, dz$

6. Resuelva la siguiente integral triple $\int_{-1}^0 \int_{-1}^2 \int_1^2 \, dx \, dy \, dx$

7. Resuelva la siguiente integral triple $\int_1^0 \int_0^x \int_0^{x-y} x \, dx \, dy \, dx$

8. Resuelva la siguiente integral doble $\int_1^2 \int_0^y x^2 y^2 \, dx \, dy$

9. Resuelva la siguiente integral doble $\int_0^1 \int_0^{y^2} xy \, dx \, dy$

10.
Resuelva la siguiente integral triple $\int_1^0 \int_1^2 \int_1^2 xy^2 z^2 \, dx \, dy \, dz$

Ir al solucionario

Resultados de aprendizaje:

ECONOMÍA

- Aplica el concepto de máximos y mínimos para resolución de problemas de dos variables.
- Comprende el concepto de antiderivada.
- Calcular longitud de arco de una curva paramétrica.
- Compara y discute la diferencia entre una integral doble y triple .
- Resuelve problemas relacionados con el cambio de variables en integrales múltiples.

LOGÍSTICA

- Resuelve problemas de matemática, física, química y ciencias de la ingeniería mediante cálculo diferencial, resolviendo derivadas y diferenciación de funciones de una variable.

FINANZAS

- Conocer y calcular el Hessiano de una función escalar en varias variables.
- Determinar los máximos y mínimos de una función y aplicarlo a problemas de optimización

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Repaso general

Se ha llegado a la etapa final, esta es la última semana y para rendir la evaluación del segundo bimestre se recomienda realizar un repaso general de las unidades.

- Unidad 4
- Unidad 5
- Unidad 6
- Unidad 7

Esta semana es muy importante, ya que aquí usted debe prepararse para la segunda evaluación presencial y para tener un resultado satisfactorio deberá realizar lo siguiente:

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Revisión de los contenidos del segundo bimestre como preparación para la evaluación presencial correspondiente.
2. Participar de las tutorías semanales y exponer sus inquietudes académicas.
3. Mantener un contacto frecuente con su tutor.

4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a. g (0) = (0)2−2(0) +3=3; (0 ,3) b. g (2) = (2)2−2(2) +3=3; (2 ,3) c. g (−3) = (−3)2−2(−3) +3=18;(−3 ,18) d. g(a)=(a)2−2(a)+3=a2−2a+3 e. g(2x−1) =(2x−1)2−2(2x−1) +3 = 4x2-4x+1-4x+2+3=4x2-8x+6	A los valores que toma la variable "x" se denominan valores funcionales "valores con los que funciona la función". En este ejercicio x toma los valores indicados en cada literal.
2	La función $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 10x + 8$ SI es polinomial.	Una función polinomial es la función donde la variable está elevada a distintos exponentes siempre positivos.
3	La función $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x-4;}$ si es racional.	La función racional es una función que tiene una función polinomial en el numerador y otra en el denominador.
4	Una condición para determinar el resultado de un radical par es que el radicando sea positivo.	Los valores que puede tomar "x" son los que permiten que el radicando sea positivo, es decir (x≥0).
5	El dominio es: $Df = R$	En la función constante, para cualquier valor que tome x será la misma constante.
6	$Df = (-\infty, -2] \cup [0, \infty).$	Una función por partes está definida de acuerdo con intervalos. Y el dominio depende de las condiciones de estos.
7	$x^3 - 2x^3 + 5 = -11$	En este tipo de ejercicios solamente se debe reemplazar la x y determinar el valor resultante.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
8	La función $f(x) = \frac{x+2}{2}$ no tiene puntos de discontinuidad.	La función es discontinua cuando existe algún punto que no tiene imagen. En este caso el ejercicio tiene una función entera polinomial que tiene como dominio los.
9	La función $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4x+4}$ es discontinua en el punto x=4.	La función es discontinua cuando existe algún punto que no tiene imagen. En este caso el ejercicio tiene una función racional que es un trinomio cuadrado perfecto donde tiene una raíz doble x=4, si se reemplaza en el denominador el.
10	El resultado de este límite es: $\frac{2x^2+2x+2}{4x^2-3} = \frac{26}{33}$	En este tipo de ejercicios solamente se debe reemplazar la x y determinar el valor resultante.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	V	El producto vectorial no puede cambiar el orden de los vectores, si lo hace debe cambiar su signo.
2	F	La longitud establece el módulo del vector.
3	F	La expresión es falsa porque la multiplicación de dos vectores de diferente direccionalidad es nula.
4	F	El producto punto si cumple con la propiedad conmutativa, ya que su producto es igual a cero.
5	V	La definición del producto cruz dice que el producto cruz de dos vectores es otro vector.
6	V	Todo vector puede expresarse como la suma de sus componentes, ya que las componentes son las proyecciones del vector en el plano.
7	V	Si es nulo porque son vectores iguales y el producto cruz de vectores iguales es igual a cero.
8	F	Es verdadero porque el producto cruza entre dos vectores y da como resultado otro vector.
9	V	Son vectores unitarios que indican la direccionalidad de estos sobre el plano.
10	V	Porque no tienen un punto común que forme el plano.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	f (0,0) =1+02+02=1 f (1,6) =1+1+36=38 f (-2,-3) =1+4+9=14 Para resolver el último apartado debemos pensar en qué valores de x e y se cumple que f (x, y) =0, o lo que es lo mismo, que. 1+x2 +y2 =0	Igual que en la función univariable se debe reemplazar el dominio de la función con los valores dados y operar. En el literal (d) se tiene que dar. x2 +y2 =-1. Sin embargo, esto no es posible, ya que si se suma dos números positivos que al estar elevados al cuadrado siempre serán positivos nunca se obtendrá un número negativo.
2	C (5,6) =10000+50+180=10230 euros.	Como los coches minis aumentan en una unidad, la relación es. C (x, y) =10000+10(x+1) +30y =10000+10x+10+40y=C (x, y) +10 C (5,6) =10000+50+180 =10230 euros.
3	$\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = 1$	La resolución es simple, solo se reemplazan los valores en las variables y se resuelve de forma normal.
4	$\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2} = \nexists \lim$	No existe el límite porque al reemplazar los valores queda la división para cero que no se puede realizar.
5	$\frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$	La resolución se debe hacer utilizando un artificio matemático.
6	$\frac{x^2-y^2}{x-y} = 4$	La resolución se debe hacer utilizando un artificio matemático.
7	$\frac{(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+2y^2)log(x^2+y^2)} = 0$	La resolución se debe hacer utilizando un artificio matemático.
8	Verdadero.	Es correcto porque es una propiedad de la continuidad de funciones.
9	Verdadero.	Es correcto el enunciado, ya que es la definición de curvas de nivel.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	Para límites multivariables, ¿cuál es la condición para la existencia del límite? En dos variables la idea es similar.	En dos variables la idea es similar, pero ahora la aproximación a un punto (xo, yo) puede realizarse a lo largo de muchas direcciones. Al igual que en una variable, el límite en un punto siguiendo cualquier trayectoria posible debe.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a	La derivada parcial representa hallar el plano tangente a la superficie de ecuación z=f (x, y) en un punto de dicha superficie.
2	b	Se llama gradiente en un punto de una función real de varias variables reales al conjunto ordenado de las derivadas parciales de esa función en ese punto.
3	c	En análisis matemático, la derivada direccional de una función multivariable es la dirección de un vector dado.
4	Verdadera.	Para que el plano sea paralelo a la recta, el vector normal del plano debe ser perpendicular al vector director de la recta.
5	$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ $= \frac{f((0,0)+h(\cos t, \operatorname{sen} t))-f(0,0)}{h}$ $= \frac{f(h\cos t, h\operatorname{sen} t)-0}{h}$ $= \frac{3h^2\cos^2 t\operatorname{sen} t-h^3\operatorname{sen}^2 t}{h^2}$ $= 3\cos^2 t\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t$ entonces $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 3\cos^2 t\ \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t$	Se emplea la definición de derivada direccional.
6	$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$	Las derivadas de primer orden, se obtienen derivando la función por cada una de las variables.
7	$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6xy$	Las derivadas de primer orden, se obtienen derivando la función por cada una de las variables.
8	$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -6y$	Las derivadas de primer orden, se obtienen derivando la función por cada una de las variables.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	$\frac{\partial z}{\partial x} = -15x^2 + 6xy;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2$	Las derivadas de primer orden, se obtienen derivando la función por cada una de las variables.
10	$\frac{\partial z}{\partial x} = -10x^4 - 6y^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -12xy$	Las derivadas de primer orden, se obtienen derivando la función por cada una de las variables.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 5

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	Pc: (2,3).	Debe determinar las primeras derivadas de la función y cada una de ellas igualar a cero.
2	Pc: (-1,-1).	Debe determinar las primeras derivadas de la función y cada una de ellas igualar a cero.
3	**Sí** puede darse ese caso por ejemplo en $f(x,y) = x^3y$.	Ya que un punto crítico puede ser el origen p(0,0), la primera derivada será también cero.
4	Si.	Por el criterio de la segunda derivada.
5	Si se obtiene la primera derivada y después es posible determinar la segunda, esto se hace para determinar si la función tiene un máximo o un mínimo.	En funciones multivariables el determinar las segundas derivadas permite determinar máximos y mínimos o puntos silla.
6	Cuando la función es constante.	La segunda derivada no existe en funciones de grado menor o constantes.
7	La función se aplana donde la pendiente es igual a cero.	Un máximo o mínimo se encuentra siempre donde la función se aplana (excepto en un punto silla).
8	Falso.	En ese punto la función tiene un punto silla.
9	Pc: (-1/4, 1/2).	Obteniendo las segundas derivadas y con el criterio de este se obtiene que $Df(x,y) < 0$.
10	Verdadero.	Obteniendo las segundas derivadas y con el criterio de este se obtiene que $Df(x,y) < 0$.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 6

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	$\int_0^3 \int_0^4 x\,dy\,dx = 18$	Las integrales internas deben ser resueltas inicialmente. La respuesta de esta permite resolver la integral externa.
2	$\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x+1)\,dx\,dy = 1$	Las integrales internas deben ser resueltas inicialmente. La respuesta de esta permite resolver la integral externa.
3	$\int_1^e \int_0^{\ln x} xy\,dy\,dx = \frac{e^2-1}{8}$	Las integrales internas deben ser resueltas inicialmente. La respuesta de esta permite resolver la integral externa.
4	$\int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4y+y^2)\,dy\,dx = \frac{13}{15}$	Las integrales internas deben ser resueltas inicialmente. La respuesta de esta permite resolver la integral externa.
5	Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable.	Una integral iterada es una integral evaluada múltiples veces sobre una misma variable en oposición con una integral múltiple, que consiste en un número de integrales, evaluadas con respecto a diferentes variables.
6	Si.	Una integral múltiple es un tipo de integral definida de una función de varias variables.
7	Si.	Las integrales múltiples están estrechamente relacionadas con las integrales iteradas, las cuales son necesarias para resolver las integrales múltiples.
8	Si.	Una integral doble, en cambio, está definida con respecto a un área en el plano xy.
9	Se deben usar para el cálculo de áreas.	Las integrales dobles y triples son muy útiles en el cálculo de volúmenes, áreas de superficies, masas, centroides, centros de gravedad.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	Si.	Las integrales dobles deben ser DEFINIDAS, sobre regiones planas.

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 7

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	3π	El volumen limitado por una superficie, es decir, el volumen de una columna vertical cuya base superior está en la superficie inferior del plano, viene dado por la integral doble $V = \int\int \ zdA.$
2	18	Debe resolver este ejercicio de integrales dobles de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
3	-58/5	Debe resolver este ejercicio de integrales dobles de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
4	$\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}$	Debe resolver este ejercicio de integrales dobles de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
5	-27/4	Debe resolver este ejercicio de integrales triples de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
6	1/24	Debe resolver este ejercicio de integrales triples de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
7	1/8	Debe resolver este ejercicio de integrales triples de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
8	7/2	Debe resolver este ejercicio de integrales dobles de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
9	1/12	Debe resolver este ejercicio de integrales dobles de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.
10	7/6	Debe resolver este ejercicio de integrales triples de adentro hacia afuera, cuide los diferenciales y los límites de cada integral.

Ir a la autoevaluación

5. Glosario

Término	Concepto
Derivada	La derivada de una función *f(x)*, o función derivada de *f(x)*, es aquella función, denotada *f'(x)*, que asocia a cada *x* la *rapidez de cambio* de la función original *f(x)* en ese punto, es decir, su tasa de variación instantánea .
Diferencial	Si f(x) es una función derivable, la diferencial de una función correspondiente al incremento h de la variable independiente, es el producto f´(x).h.
Integral	En matemática, integral es el signo que indica la integración y el resultado de integrar una expresión diferencial.
Integral definida	Dada una función f(x) y un intervalo [a,b], la integral definida es igual al área limitada entre la gráfica de f(x), el eje de abscisas, y las rectas verticales x = a y x = b
Integral indefinida	Es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función.
Función primitiva	Se dice que una función F(x) es una primitiva de otra función f(x) sobre un intervalo (a, b) si para todo x de (a, b) se tiene que F´ (x) = f(x).
Antiderivada	La antiderivada es la función que resulta del proceso inverso de la derivación, es decir, consiste en encontrar una función que, al ser derivada, produce la función dada.
Continuidad	Una función continua es aquella para la cual intuitivamente, para puntos cercanos del dominio, se producen pequeñas variaciones en los valores de la función.
Discontinuo	Si la función no es continua se dice que es discontinua.
Curva	Es una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.
Función	Es una línea continua de una dimensión, que varía de dirección paulatinamente.

Término	Concepto
Intervalo	Se llama intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos dados: a y b que se llaman extremos del intervalo. Es un conjunto comprendido entre dos valores.
Límite	El límite describe la tendencia de una sucesión o una función, a medida que los parámetros de esa función se acercan a determinado valor.
Perpendicular	Rectas que se cortan formando ángulos rectos.
Análisis univariables	Un análisis univariables analiza la relación entre una variable y otra. Ejemplo el tabaquismo y la enfermedad coronaria.
Análisis multivariable	Es un tipo de análisis estadístico que trata de evaluar la asociación independiente de una variable con un evento, teniendo también en cuenta la participación simultánea de otras variables. Ejemplo, el análisis multivariable analizará la relación del tabaquismo y la enfermedad coronaria en presencia de otras variables como hipertensión, diabetes, hipercolesterolemia, etc.
Variable	Una variable es la expresión simbólica representativa de un elemento no especificado, cuyo valor puede ser modificado.
Vector	Un vector es todo segmento de recta dirigido en el espacio. Cada vector posee unas características que son: origen, módulo, dirección, sentido.

6. Referencias bibliográficas

Hernández, E. (2009). Cálculo diferencial e integral, con aplicaciones, Costa Rica.

Yépez, C., Guía Didáctica de Cálculo, UTPL, (2015)

Puchaicela, P, Guía Didáctica de Álgebra Lineal, UTPL, (2015) Kolman, B., Sistemas de coordenadas y vectores, (2013).

Sydsaeter, K., Matemáticas para el análisis económico, (2012)

Villalobos, E. Primer curso de cálculo de varias variables con aplicaciones en Matlab, (2014)

Mora, W., Cálculo en Varias Variables, (2019)

A-Prácticas-CDI-I-Cálculo Diferencial e Integral, selección de ejercicios con respuestas, (2019).

Ayres, F., Cálculo Diferencial e Integral, (2010)

HAEUSSLER, ERNEST, F, JR, Matemáticas para la Administración y la Economía, Décima tercera Edición. 2015. Pearson Educación de México S.A.

7. Anexos

Anexo 1. Derivada y diferenciación

El término derivada es un concepto fundamental en cálculo que mide el cambio instantáneo de una función respecto a una de sus variables. Intuitivamente, representa la pendiente de la curva de la función en un punto dado. Si se tiene una función que describe la posición de un objeto en el tiempo, la derivada de esa función respecto al tiempo da la velocidad del objeto en cada instante, es decir, cómo cambia la posición a medida que pasa el tiempo.

La diferenciación es el proceso mediante el cual se calcula la derivada de una función. Este proceso implica encontrar una expresión matemática que describa cómo cambia una variable en función de otra. Las reglas básicas de diferenciación, como la regla de la potencia, el producto y la cadena, facilitan el cálculo de derivadas para diferentes tipos de funciones.

En aplicaciones prácticas, las derivadas se utilizan en física, economía, ingeniería y en muchos otros campos para optimizar resultados, modelar cambios y analizar tasas de variación.

Derivada de una función

La derivada de una función matemática es la razón o velocidad de cambio de una función en un determinado punto cuando su variable independiente cambia.

Desde la perspectiva geométrica, la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente al punto donde se ubica x, y se puede expresar de la siguiente forma:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Siendo x el punto en el que la variable toma el valor de x, y h es cualquier número. Más adelante esta toma el valor de cero, ya que se debe calcular el límite de la función cuando h se acerca a cero.

Ejemplo:

$$f(x) = 7x - 1$$

$$f(x+h) = 7(x+h) - 1$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{7(x+h) - 1 - (7x - 1)}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{7x + 7h - 1 - 7x + 1}{h}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{7h}{h} = 7$$

Ejemplo:

$$f(x) = 5x^2 + 8x - 3$$

$$f(x+h) = 5(x+h)^2 + 8(x+h) - 3$$

$$f(x+h) = 5(x^2 + 2xh + h^2) + 8(x+h) - 3$$

$$f(x+h) = 5x^2 + 10xh + 5h^2 + 8x + 8h - 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 5x^2 + 10xh + 5h^2 + 8x + 8h - 3 - 5x^2 - 8x + 3$$

$$f(x+h) - f(x) = 10xh + 5h^2 + 8h$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{10xh + 5h^2 + 8h}{h} = \frac{h(10x + 5h + 8)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} 10x + 5h + 8 = 10x + 8$$

Métodos de derivación

Existen varios métodos de derivación entre ellos:

- La regla de los cuatro pasos, que es el proceso más general para obtener derivadas de funciones.
- Las reglas básicas de derivación que son esenciales para determinar derivadas de funciones algebraicas.
- La regla de la cadena que es el cálculo de la derivada de una composición de funciones.

Regla de los cuatro pasos

La regla de los cuatro pasos es un método práctico para calcular la derivada de una función utilizando la definición formal de derivada. Los pasos son los siguientes:

Paso 1: Evaluar la función de la variable más un incremento h: $f(x+h)$

Paso 2: A la función evaluada con el incremento se le resta la función original: $f(x+h)-f(x)$

Paso 3: Se divide la diferencia de funciones por el incremento:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Paso 4: Tomar el límite donde el incremento tiende a cero:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Es importante destacar que, aunque la definición formal de derivada puede ser útil para entender el concepto de manera rigurosa, en la práctica existen reglas más rápidas para calcular las derivadas de funciones.

Reglas básicas de derivación

Existen varias reglas de derivación, siendo las más importantes:

- La derivada de una constante $f(x)=7 \Rightarrow f'(x)=0$
- La derivada de una potencia positiva nx^{n-1}

Ejemplo

$$f(x) = x^5$$

$$f'(x) = 5x^4$$

Pero qué sucede si

$$f(x) = 7x^5$$

$$f'(x) = 35x^4$$

Como se observa, el exponente se multiplica por el coeficiente que antecede a la variable.

- La derivada de una constante por una función: Para derivar una constante por una función, es decir, *cf(x)*, su derivada es la constante por la derivada de la función, o *cf'(x)*, por ejemplo:

$$f(x) = 3x^5$$

$$f'(x) = 3(5x^4) = 15x^4$$

La derivada de una suma de funciones: La regla para la derivada de una suma es *(f+g)'=f'+g'*, es decir, la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas de cada uno de los términos por separado. Entonces observe el siguiente ejemplo:

$$f(x) = 2x^3 + x$$

$$f'(x) = 6x^2 + 1$$

- La derivada de un producto: La regla para la derivada de un producto es *(fg)'= fg'+f'g*. Esto significa "la derivada de un producto de dos funciones es la primera, por la derivada de la segunda, más la segunda, por la derivada de la primera".

Ejemplo

$$f(x) = (4x+1)(10x^2-5)$$

$$f'(x) = 20x(4x+1) + 4(10x^2-5)$$

- La derivada de un cociente: La derivada de un cociente de dos funciones es (la segunda, por la derivada de la primera, menos la primera, por la derivada de la segunda) entre la segunda al cuadrado.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

Ejemplo

$$f(x) = \frac{4x+1}{10x^2-5}$$

$$f'(x) = \frac{4(10x^2-5) - 20x(4x+1)}{(10x^2-5)^2}$$

- Funciones trigonométricas

Tabla 1

Derivadas trigonométricas

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas			
Simples		**Compuestas**	
Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
$y = arc\ sen(x)$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$z = arc\ sen[f(x)]$	$z' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = arc\ \cos(x)$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$z = arc\ cos[f(x)]$	$z' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$y = \arctan(x)$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$z = \arctan[f(x)]$	$z' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$y = arccosec(x)$	$y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$z = arccosec[f(x)]$	$z' = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas			
$y = arc\ sec(x)$	$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$	$z' = arc\ sec[f(x)]$	$z' = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - 1}}$
$y = arc\ cot(x)$	$y' = \frac{-1}{1 + x^2}$	$z' = arc\ cot[f(x)]$	$z' = \frac{-f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$

Nota. Tomado de *Derivada de las funciones trigonométricas inversas* [Infografía], por Universo Formulas, s.f., Universo formulas. CC BY 4.0.

La regla de la cadena

La regla de la cadena dice que, teniendo una variable y que depende de u, y si esta depende a la variable x, entonces la razón de cambio de y respecto a x puede estimarse como el producto de la derivada de y con respecto a u por la derivada de u respecto a x. Si esto se expresa en términos matemáticos entonces:

$$y = f(u)$$

$$u = f(x)$$

$$y = f(f(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}\frac{dy}{du}$$

Ejemplo

$$y = (3x - 11)^2$$

$$u = 3x - 11$$

$$\frac{du}{dx} = 3x$$

Entonces.

$$y = u^2$$

$$\frac{dy}{du} = 2u$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = 2u.\,3x = 2(3x - 11)3x = 6x(3x - 11)$$