La Universidad Católica de Loja

Vicerrectorado de Modalidad Abierta y a Distancia

Álgebra Lineal

Guía didáctica

Facultad de Ciencias Sociales, Educación y Humanidades

Álgebra Lineal

Guía didáctica

Carrera	PAO Nivel
Administración de Empresas	II
Contabilidad y Auditoría	II
Economía	II
Finanzas	II
Logística y Transporte	II
Tecnologías de la Información	II

Autor:

Gustavo Belizario Viñamagua Medina

MATE_1108

Universidad Técnica Particular de Loja

Álgebra Lineal

Guía didáctica

Gustavo Belizario Viñamagua Medina

Diagramación y diseño digital

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital -978-9942-39-878-9

Año de edición: septiembre, 2023

Edición: primera edición reestructurada en enero 2025 (con un cambio del 25%)

Loja-Ecuador

Índice

1. Datos de información **10**
1.1 Presentación de la asignatura 10
1.2 Competencias genéricas de la UTPL 10
1.3 Competencias del perfil profesional 10
1.4 Problemática que aborda la asignatura 11
2. Metodología de aprendizaje **13**
3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje **14**
Primer bimestre **14**
Resultado de aprendizaje 1: **14**
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **15**
Semana 1 .... **15**
Unidad 1. Ecuaciones lineales en álgebra lineal 16
1.1 Ecuación lineal 16
1.2 Sistemas de ecuaciones lineales 17
1.3 Notación matricial 18
1.4 Solución de un sistema lineal 19
Actividades de aprendizaje recomendadas 24
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **24**
Semana 2 .... **24**
Unidad 1. Ecuaciones lineales en álgebra lineal 24
1.5 Sistema lineal consistente e inconsistente 24
1.6 Resolución del sistema lineal de ecuaciones utilizando los simuladores matemáticos 27
1.7 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales 30
1.8 Recursos interactivos 33
Actividades de aprendizaje recomendadas 33
Autoevaluación 1 34

Resultado de aprendizaje 2: 38
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 39
Semana 3 39
Unidad 2. Matrices 39
2.1 Conceptos básicos 39
2.2 Independencia lineal de las columnas de una matriz 41
2.3 Operaciones de matrices 42
Actividades de aprendizaje recomendadas 44
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 45
Semana 4 45
Unidad 2. Matrices 45
2.4 Matriz inversa 45
2.5 Métodos para calcular la matriz inversa 47
2.6 Caracterizaciones de matrices invertibles 54
2.7 El teorema de la matriz invertible 54
2.8 Resolución de matrices utilizando los simuladores matemáticos 56
2.9 Aplicaciones de matrices 60
2.10 Recursos interactivos 63
Actividades de aprendizaje recomendadas 63
Autoevaluación 2 64
Resultado de aprendizaje 3: 71
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas 72
Semana 5 72
Unidad 3. Determinantes 72
3.1 Introducción a los determinantes 72
3.2 Definición de determinante de una matriz cuadrada 73
3.3 Propiedades de los determinantes 73
3.4 Métodos para obtener el determinante de una matriz 78
Actividades de aprendizaje recomendadas 85

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas............ 86
Semana 6 86
Unidad 3. Determinantes 86
3.5 Operaciones elementales 86
3.6 Resolución de determinantes utilizando los simuladores matemáticos 87
3.7 Aplicaciones de determinantes.. 90
3.8 Recursos interactivos 93
Actividades de aprendizaje recomendadas 94
Autoevaluación 3.. 94
Resultados de aprendizaje 1 a 3:.. 100
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........... 101
Semana 7 101
Actividades finales del primer bimestre 101
Actividades de aprendizaje recomendadas 101
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........... 102
Semana 8 102
Actividades finales del primer bimestre 102
Actividades de aprendizaje recomendadas 103
Segundo bimestre.. 104
Resultado de aprendizaje 4: 104
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........... 105
Semana 9 105
Unidad 4. Vectores en R^n 105
4.1 Introducción.. 105
4.2 Definición de un vector geométricamente.. 106
4.3 Características de vectores 106
4.4 Tipos de vectores.. 107
4.5 Vectores en el plano.. 107

4.6 Vectores en el espacio 109
4.7 Vectores en R^2 110
4.8 Vectores en R^3 111
4.9 Vectores en R^n 112
4.10 Vector unitario 112
4.11 Longitud de un vector 113
4.12 Distancia entre dos puntos 114
4.13 Definición del ángulo entre dos vectores en R^n 114
Actividades de aprendizaje recomendadas 115
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 115
Semana 10 115
Unidad 4. Vectores en R^n 115
4.14 Producto escalar 115
4.15 Producto vectorial 117
4.16 Propiedades del producto vectorial o cruz: 118
Actividades de aprendizaje recomendadas 119
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 119
Semana 11 119
Unidad 4. Vectores en R^n 119
4.17 Rectas y planos 119
4.18 Resolución de vectores utilizando los simuladores matemáticos . 122
4.19 Aplicaciones de los vectores 128
4.20 Recursos interactivos 130
Actividades de aprendizaje recomendadas 131
Autoevaluación 4 131
Resultado de aprendizaje 5: 136
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 137
Semana 12 137

Unidad 5. Espacios vectoriales 137
5.1 Introducción a los espacios vectoriales 137
5.2 Definición de espacio vectorial 138
5.3 Subespacios vectoriales 139
5.4 Dependencia e independencia lineal 141
5.5 Bases y dimensión 143
5.6 Recursos interactivos 145
Actividades de aprendizaje recomendadas 145
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 146
Semana 13 146
Unidad 5. Espacios vectoriales 146
5.7 Técnica para seleccionar una base para V que es un subconjunto de S 146
5.8 Definición 146
5.9 Procedimiento para determinar una base para el subespacio V de R^n 148
5.10 Definición de rango 148
5.11 Coordenadas y cambio de base........ 151
Actividades de aprendizaje recomendadas 153
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 154
Semana 14 154
Unidad 5. Espacios vectoriales 154
5.12 Resolución de espacios vectoriales utilizando los simuladores matemáticos........ 154
5.13 Aplicaciones de espacios vectoriales 160
Actividades de aprendizaje recomendadas 163
Autoevaluación 5........ 163
Resultados de aprendizaje 4 y 5: 172
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas........ 173

Semana 15 .... **173**
Actividades de aprendizaje recomendadas 173
Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas **174**
Semana 16 .... **174**
Actividades de aprendizaje recomendadas 174
4. Autoevaluaciones **175**
5. Referencias bibliográficas **189**

1. Datos de información

1.1 Presentación de la asignatura

1.2 Competencias genéricas de la UTPL

- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Organización y planificación del tiempo.
- Comportamiento ético.
- Comunicación oral y escrita.

1.3 Competencias del perfil profesional

- Aplica modelos empresariales de planificación, análisis, gestión y control de las actividades administrativas – financieras de los sectores del sistema financiero (público, privado, popular y solidario), que aporten con alternativas de solución a los problemas financieros de la sociedad actual.
- Aplica herramientas estadísticas, contables, económicas y financieras, para la medición de los beneficios y riesgos a los que se enfrentan los actores del sistema económico-financiero.
- Argumenta sobre las variables macro y microeconómicas que integran la realidad social de la economía y que inciden sobre el crecimiento empresarial y económico.

- Aplica las fuentes de financiamiento que tienen las empresas a nivel nacional e internacional, para optimizar la toma de decisiones relacionadas con la inversión y financiamiento y que ayuden a gestionar la producción de instrumentos financieros para impulsar el cambio de la matriz productiva.
- Aplica los fundamentos de las ciencias básicas para resolver problemas en el ámbito de la Ingeniería en Logística y Transporte.
- Construir modelos específicos de ciencias de la computación mediante esquemas matemáticos y estadísticos, para propiciar el uso y explotación eficiente de datos e información.

1.4 Problemática que aborda la asignatura

- La problemática del aprendizaje de álgebra lineal está asociada a diversos factores que dificultan en los estudiantes el proceso de comprensión y aplicación de los conceptos y técnicas relacionadas con esta disciplina matemática. Algunos de los desafíos comunes en las carreras son los siguientes:
- Administración de empresas. Limitado dominio en la abstracción y visualización, el álgebra lineal implica trabajar con conceptos abstractos, como vectores y espacios vectoriales, que les resulta difíciles de visualizar y comprender intuitivamente. Los estudiantes tienen dificultades para relacionar los conceptos abstractos con situaciones concretas o representar mentalmente las operaciones y transformaciones algebraicas.
- Contabilidad y auditoría. Insuficiencia de rigor matemático, el álgebra lineal requiere un enfoque riguroso y formal en el razonamiento y la demostración de teoremas y propiedades. Esto resulta desafiante para aquellos estudiantes de la carrera de contabilidad y auditoría que no están familiarizados con el nivel de rigor matemático requerido en esta disciplina.
- Economía. Insuficiente empleo de los conceptos y técnicas del álgebra lineal que están estrechamente interrelacionados, lo que significa que una comprensión incompleta de un concepto puede dificultar la comprensión de otros. Esto genera una sensación de "bucle" de dificultad, donde los estudiantes se sienten frustrados al enfrentar nuevas secciones o temas sin haber asimilado completamente los conceptos previos.

- Falta de aplicaciones concretas, si no se enfatiza la conexión entre el álgebra lineal y sus aplicaciones en campos como las finanzas, la informática, la economía y la administración, los estudiantes tienen dificultades para percibir la relevancia y utilidad práctica de los conceptos que están aprendiendo.
- Logística y transporte. Insuficiente tratamiento de la notación simbólica, el álgebra lineal hace uso extensivo de notación simbólica, como matrices, sistemas de ecuaciones y transformaciones lineales. Esta problemática respecto a los símbolos y fórmulas resulta confusa y abrumadora para algunos estudiantes, dificultando la comprensión de las operaciones y sus significados.
- Tecnologías de la información. Malas prácticas en cursos anteriores para abordar el aprendizaje del álgebra lineal, por esta razón, es importante fomentar un enfoque pedagógico que combine la comprensión conceptual con la práctica aplicada, utilizando ejemplos concretos, visualizaciones, tecnología educativa y ejercicios que fomenten el razonamiento y la resolución de problemas.

2. Metodología de aprendizaje

En la modalidad de educación a distancia propia de la UTPL, las actividades formativas se distribuyen entre: el Aprendizaje en Contacto con el Docente (ACD), el Aprendizaje Práctico Experimental (APE) y el Trabajo Autónomo (AA) apoyados por la interacción *online* entre docentes y estudiantes. Los materiales incluyen libros seleccionados en la base de datos de la biblioteca virtual, que se utiliza de manera común en el curso virtual. Se considerarán orientaciones para el estudio, que destacan los conceptos fundamentales, las destrezas y los objetivos a alcanzar. El plan docente incluirá una propuesta de planificación temporal para el estudio de la asignatura. Además, se proporcionarán materiales multimedia, como vídeos, recursos educativos abiertos, simuladores matemáticos, plataformas virtuales académicas y videoconferencias grabadas.

Se dará especial importancia al trabajo cooperativo, el método Eli y el Aprendizaje Basado en Proyectos, que son metodologías activas, altamente efectivas en el aula y cada vez más utilizadas en nuestro sistema educativo, acompañado de los simuladores matemáticos como: Wólfram Alpha, GeoGebra y Matlab.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

- Carrera de finanzas

  Resolver y discutir un sistema de ecuaciones lineales mediante diferentes métodos.

- Carrera de logística y transporte

  Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedicar algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

Conoce el concepto de sistemas de ecuaciones lineales.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje esperado en las carreras mencionadas, como Administración de Empresas, Contabilidad y Auditoría, Economía, Finanzas, Ingeniería en Logística y Transporte, y Tecnologías de la Información, es necesario implementar estrategias específicas. Estas estrategias incluyen el establecimiento de metas claras y alcanzables al inicio del estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. Además, es fundamental hacer uso de recursos educativos como la lectura de la bibliografía complementaria, guías didácticas, cursos en línea, videos, tutoriales y actividades prácticas. Al seguir estas estrategias, se logrará mantener el enfoque y la motivación necesaria para el aprendizaje efectivo del álgebra lineal.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 1

En esta unidad, se estudian los sistemas de ecuaciones lineales como base fundamental del álgebra lineal para introducir conceptos básicos de forma clara y sencilla, se presentan los métodos para resolver estos sistemas. Además, la equivalencia entre un sistema de ecuaciones lineales, una ecuación vectorial y una ecuación matricial. Asimismo, se explorará la aplicabilidad de los sistemas de ecuaciones lineales a diversas áreas como matemáticas, economía, administración, ingeniería y ciencias de la computación para modelar y resolver problemas que involucran múltiples variables y relaciones lineales.

1.1 Ecuación lineal

Una ecuación lineal es una igualdad matemática que involucra variables de primer grado y tiene la siguiente forma general: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$

Donde b y los coeficientes $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ son números reales o complejos, que generalmente se conocen de antemano. El subíndice n puede ser cualquier entero positivo.

Dada la ecuación: $ax + by + c = 0$; "a", "b" y "c" son constantes conocidas, y "x" e "y" son las variables desconocidas. Aquí tienes dos ejemplos de ecuaciones lineales:

Ejemplo 1. Sea $2x + 3y = 13$; en esta ecuación, "a" es 2, "b" es 3 y "c" es 13. Las variables son "x" e "y".

La solución de esta ecuación es un conjunto de valores para "x" e "y" que satisfacen la igualdad. Por ejemplo, si sustituimos "x" por 2, obtenemos $2(2) + 3y = 13$. Resolviendo la ecuación, encontramos que, si "x" es 2, entonces "y" debe ser 3 para que la ecuación se cumpla. Por lo tanto, (2, 3) es una solución de esta ecuación lineal.

Ejemplo 2. Sea, $5x + 2y = 9$; en esta ecuación, "a" es 5, "b" es 2 y "c" es 9. Las variables son "x" e "y".

Podemos encontrar soluciones a esta ecuación de manera similar al ejemplo anterior. De esta forma, si sustituimos "x" por 1, obtenemos $5(1) + 2y = 9$. Al resolver la ecuación, encontramos que, si "x" es 1, entonces "y" debe ser 2 para que la ecuación se cumpla. Por lo tanto, (1, 2) es una solución de esta ecuación lineal.

Recuerda que, en una ecuación lineal, las soluciones pueden ser pares ordenados (valores para "x" e "y") o incluso una sola solución si la ecuación representa una línea recta.

Ejemplo 3. Las ecuaciones: $4x_1 - 5x_2 = x_1x_2$ y $x_2 = 2\sqrt{x_1} - 6$; no son lineales debido a la presencia de x_1x_2 en la primera ecuación y de $\sqrt{x_1}$ en la segunda

1.2 Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones lineales que se resuelven simultáneamente para encontrar los valores de las variables que satisfacen todas las ecuaciones. El objetivo es encontrar una solución común a todas las ecuaciones del sistema.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es consistente si tiene una solución o un número infinito de soluciones; un sistema es inconsistente cuando no tiene ninguna solución. Aquí tienes dos ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales:

Ejemplo 1. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

En este caso, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, "x" e "y". Para encontrar la solución, podemos utilizar métodos como la sustitución, el método de eliminación o el método de matrices. Las soluciones para este sistema son: $x = 1$ y $y = 2$.

Ejemplo 2. Veamos otro sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Nuevamente, tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, "x" e "y". Utilizando los métodos mencionados anteriormente, podemos resolver el sistema y encontrar que la solución es $x = 1$ y $y = 2$.

Recuerda que un sistema de ecuaciones lineales puede tener diferentes tipos de soluciones:

- Una solución única (un punto de intersección).
- Infinitas soluciones (las ecuaciones representan la misma recta).
- Ninguna solución (las ecuaciones son paralelas y no se cruzan).

Una ecuación lineal en las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ es una ecuación que puede escribirse en la forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$; donde b y los coeficientes $a_1, ..., a_n$ son números reales o complejos, que generalmente se conocen de antemano. El subíndice n puede ser cualquier entero positivo.

1.3 Notación matricial

La información esencial de un sistema lineal puede registrarse de forma compacta en un arreglo rectangular llamado matriz. Dado el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes es: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

La matriz aumentada del sistema: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$

1.4 Solución de un sistema lineal

En el presente apartado se detalla un algoritmo o método sistemático diseñado para la resolución de sistemas lineales. La estrategia fundamental se basa en reemplazar un sistema por otro que sea equivalente, es decir, que posea exactamente el mismo conjunto de soluciones. Existen algunos métodos para resolver los sistemas lineales de ecuaciones, entre los principales tenemos los siguientes:

Método de sustitución. El método de sustitución implica resolver una de las incógnitas de una ecuación y luego reemplazar ese valor en la otra ecuación.

Ejemplo 1. Sea el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 0 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución.

$4x + 5y = 0; 4x = -5y; x = -\frac{5}{4}y$ Sustituyendo en la segunda ecuación:

$-2(-\frac{5}{4}y) - y = 3; \frac{5}{2}y - y = 3; y = 2$ En la ecuación 1: sustituimos y:

$4x + 5(2) = 0; 4x = -10; x = -\frac{5}{2}$

Método de igualación. El método de igualación implica resolver la misma incógnita en las ecuaciones proporcionadas y luego igualar ambas expresiones de las incógnitas.

Ejemplo 2. Sea el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 0 \\ -5x + 10y = 0 \end{cases}$$

Solución.

$7x + 3y = 0; 7x = -3y; x = -\frac{3}{7}y - 5x + 10y = 0; -5x = -10y; x = 2y$

Igualando, $x = x$

$$\Rightarrow -\frac{3}{7}y = 2y; -\frac{3}{7}y - 2y = 0; -\frac{17}{7}y = 0; y = 0; 7x + 3(0) = 0; 7x = 0; x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Método de reducción. Este método implica multiplicar una o ambas ecuaciones por algún número, de manera que obtengamos un sistema en el cual los coeficientes de x o y sean iguales, pero de signo opuesto. Esto se hace con el objetivo de eliminar dicha incógnita al sumar las dos ecuaciones.

Ejemplo 3. Sea el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

Solución.

$$\begin{array}{c} 6x + 12y = 30(6) \\ -6x - 8y = -12(-2) \\ \hline 0 + 4y = 18 \end{array}$$

$$y = \frac{9}{2}$$

Sustituimos en la primera ecuación: $y = \frac{9}{2}$

$$x + 2(\frac{9}{2}) = 5; x = -4$$

Método gráfico. El método gráfico para resolver ecuaciones es una técnica visual utilizada para encontrar la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones. Este método implica representar gráficamente las ecuaciones en un sistema de coordenadas cartesianas y buscar los puntos de intersección de las curvas para encontrar las soluciones.

Ejemplo 4. Sea el sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} 3x - 7y = -5 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$$

Solución.

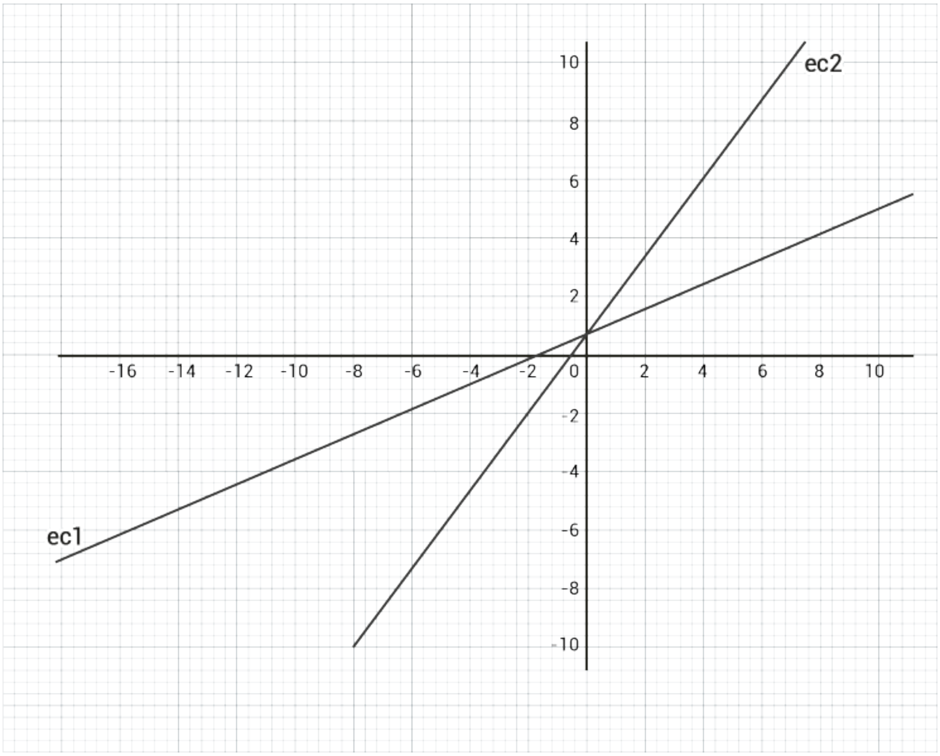
$x = \frac{1}{19}$;

$y = \frac{14}{19}$

$(x, y) = (0.053; 0.737)$

Figura 1

Método gráfico mediante el uso del simulador matemático GeoGebra



Nota. Viñamagua, G., 2023.

Método de eliminación de Gauss – Jordan. Es un algoritmo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales y encontrar la forma escalonada reducida de una matriz. Este método se basa en la eliminación de variables mediante operaciones elementales en filas.

Ejemplo 4. Dado el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x_2 + 5x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 & -2 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_2 \rightarrow F_3 \approx]{}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - (-1).F_2 \rightarrow F_3]{}$$

De la ecuación (3) $0 \neq -2$; entonces el sistema no tiene solución.

Método de Cramer. Es un método utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales utilizando determinantes. Este método se basa en la idea de que, para un sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones y variables, la solución se puede obtener calculando cocientes de determinantes.

Ejemplo 5. Dado el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Solución.

Paso 1. Calcular el determinante.

$$x_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \times 5 \times (-2) + 2 \times 6 \times 4 + 3 \times 24 \times 1 - 4 \times 5 \times 3 - 1 \times 6 \times 9 - (-2) \times 24 \times 2 = 12$$

Paso 2. Obtener el valor de las incógnitas mediante la resolución de determinantes por el método de Sarrus

$$x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 24 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 24 \times (-2) + 9 \times 6 \times 3 + 3 \times 4 \times 4 - 3 \times 24 \times 3 - 4 \times 6 \times 1 - (-2) \times 4 \times 9 = -6$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 4 & 5 & 24 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 5 \times 4 + 2 \times 24 \times 3 + 9 \times 4 \times 1 - 3 \times 5 \times 9 - 1 \times 24 \times 1 - 4 \times 4 \times 2 = 9$$

Paso 3. Calcular el valor de las incógnitas.

$$x_1 = \frac{12}{3} = 4$$

$$x_2 = \frac{-6}{3} = -2$$

$$x_3 = \frac{9}{3} = 3$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Sigamos adquiriendo conocimientos a través de su participación en las siguientes actividades:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de la definición, métodos de resolución y aplicaciones de los sistemas lineales de ecuaciones, se recomienda la lectura del libro, Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald, J. J. (2021). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Pearson.
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer el concepto de una ecuación lineal.
4. Leer y comprender el concepto de un sistema lineal de ecuaciones de 2 o más incógnitas.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo. Ecuaciones lineales en álgebra lineal.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 2

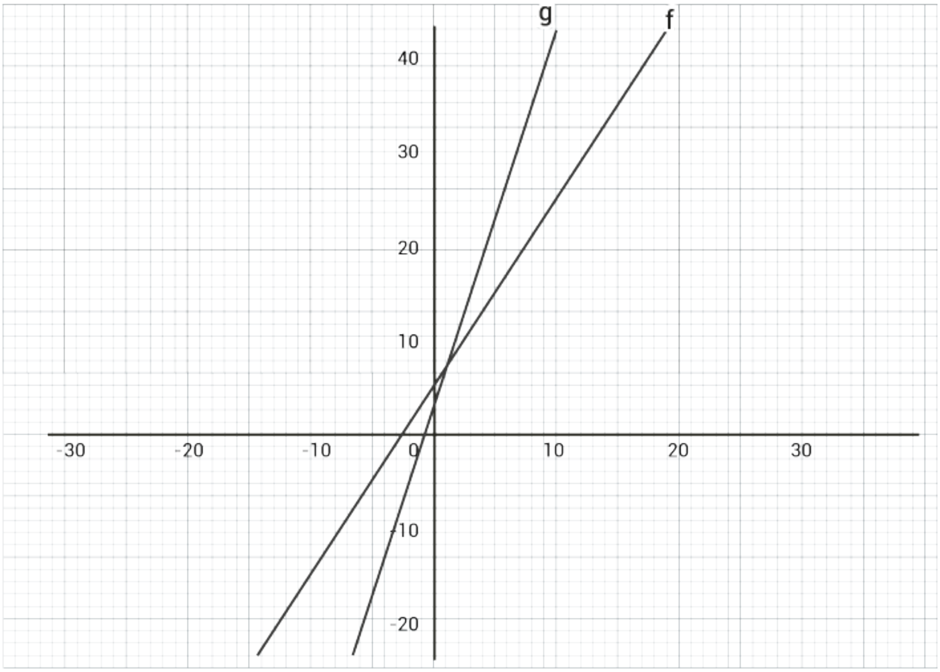
Unidad 1. Ecuaciones lineales en álgebra lineal

1.5 Sistema lineal consistente e inconsistente

Un sistema compuesto por dos ecuaciones lineales puede presentar diferentes escenarios en términos de soluciones: puede tener una única solución, un número infinito de soluciones o ninguna solución. La clasificación de los sistemas de ecuaciones se basa en la cantidad de soluciones que poseen. Por lo tanto, un sistema de ecuaciones *consistente* se caracteriza por tener al menos una solución, mientras que un sistema *inconsistente* carece de soluciones. Si un sistema consistente tiene exactamente una solución, se dice que es un sistema de ecuaciones independiente. Por ejemplo, dadas las ecuaciones:

Figura 2

Método gráfico para un sistema lineal de ecuaciones mediante el uso del simulador matemático GeoGebra



Nota. Viñamagua, G., 2023.

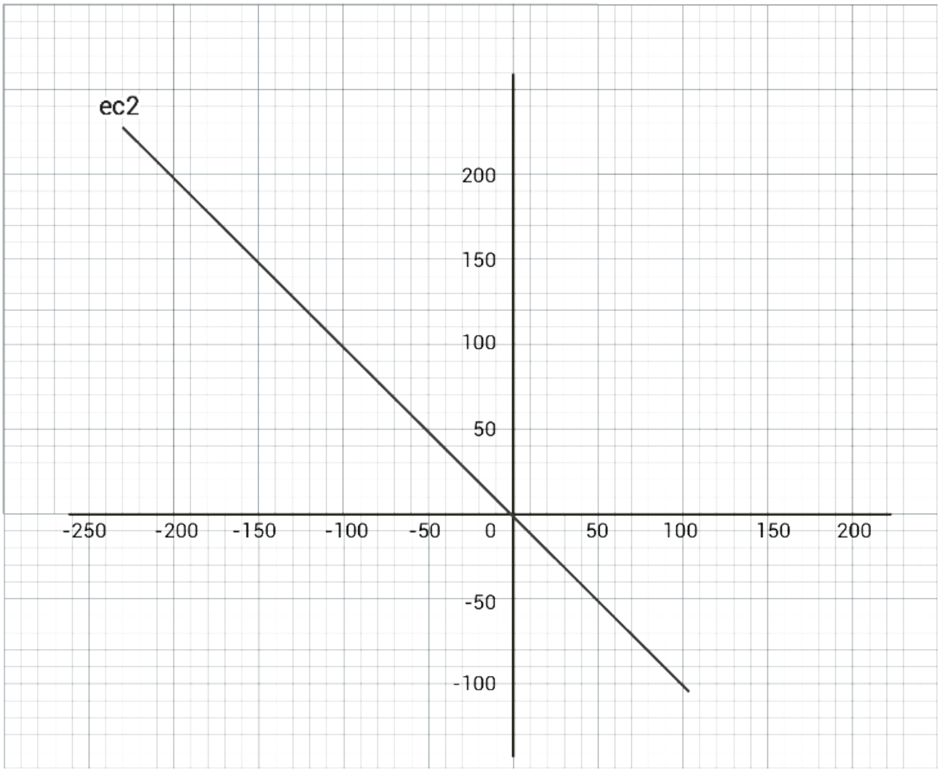
Si un sistema consistente presenta un número infinito de soluciones, se considera un sistema de ecuaciones dependiente. En la representación gráfica de las ecuaciones, ambas ecuaciones representan la misma línea recta.

Ejemplo 1. Dadas las siguientes ecuaciones, resolver el sistema por el método gráfico.

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 3x + 3y = -3 \end{cases}$$

Figura 3

Método gráfico para resolver un sistema lineal de ecuaciones mediante el uso del simulador matemático GeoGebra



Nota. Viñamagua, G., 2023.

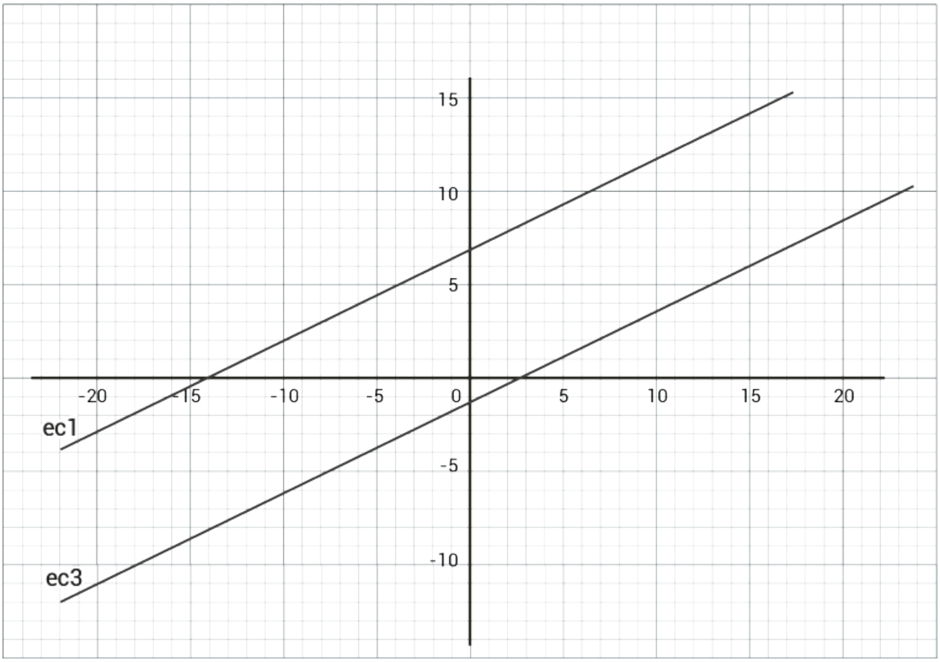
Las rectas correspondientes no se interceptan, por lo que son paralelas y no tienen solución.

Ejemplo 2. Dadas las siguientes ecuaciones, resolver el sistema por el método gráfico.

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2}x - 7 = 0 \\ y - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

Figura 4

Método gráfico mediante el uso del simulador matemático GeoGebra



Nota. Viñamagua, G., 2023.

1.6 Resolución del sistema lineal de ecuaciones utilizando los simuladores matemáticos

En la época actual, la modelización y la simulación se han vuelto actividades indispensables al abordar la resolución de sistemas lineales de ecuaciones mediante el uso de simuladores matemáticos. El propósito de la resolución de sistemas lineales de ecuaciones mediante el uso de simuladores matemáticos es obtener soluciones numéricas precisas y eficientes, ahorrando tiempo y esfuerzo en comparación con métodos tradicionales de resolución manual. A continuación, presentamos algunos ejemplos con los simuladores más utilizados en las asignaturas de matemáticas.

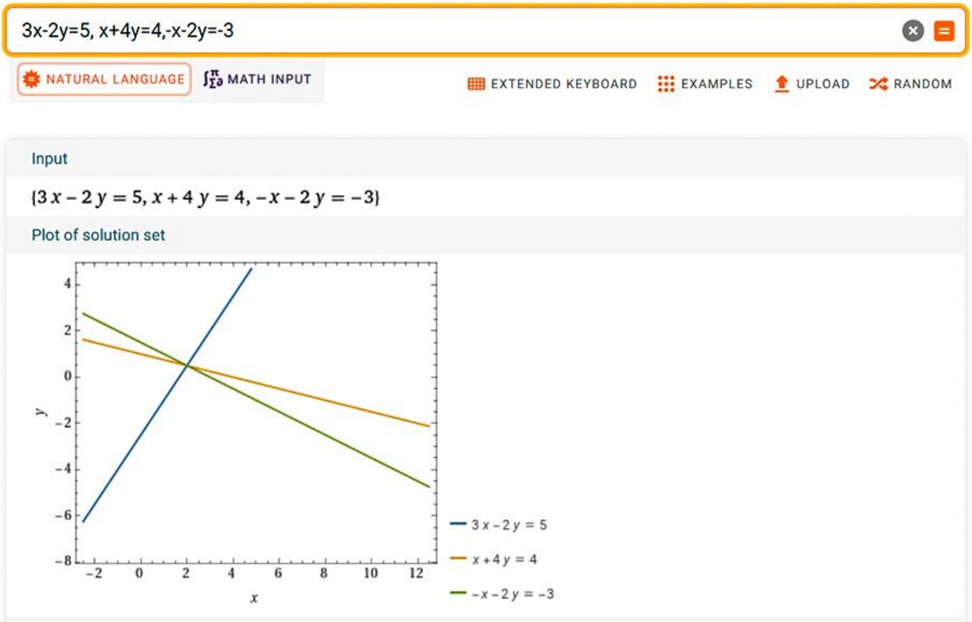
- **Wólfram Alpha.** Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones de 2 incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 4y = 4 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

Solución: $x = 2; y = \frac{1}{2}$

Figura 5

Resolución de un sistema lineal de ecuaciones mediante Wólfram Alpha



Nota. Viñamagua, G., 2023.

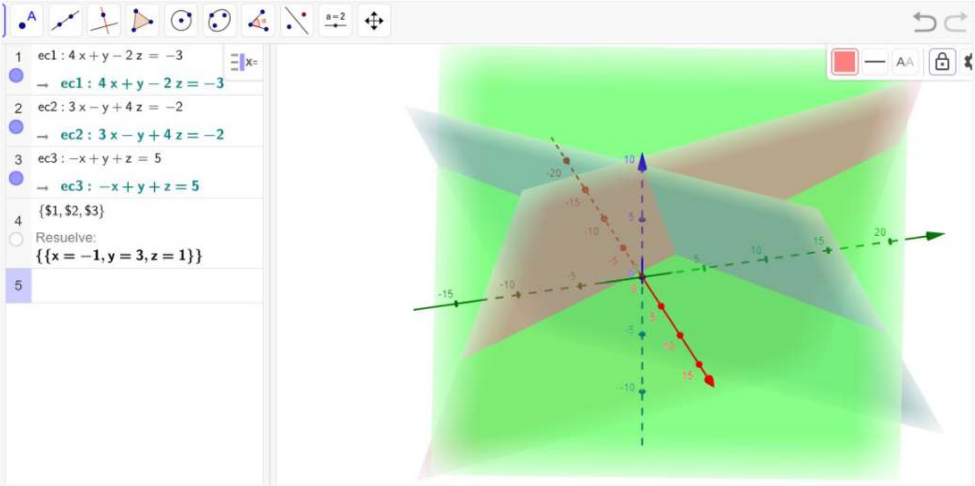
- **GeoGebra.** Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones de 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 4x + y - 2z = -3 \\ 3x - y + 4z = -2 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$$

Solución: $x = 1; y = 3$ y $z = 1$

Figura 6

Resolución de un sistema lineal de ecuaciones mediante GeoGebra



Nota. Viñamagua, G., 2023.

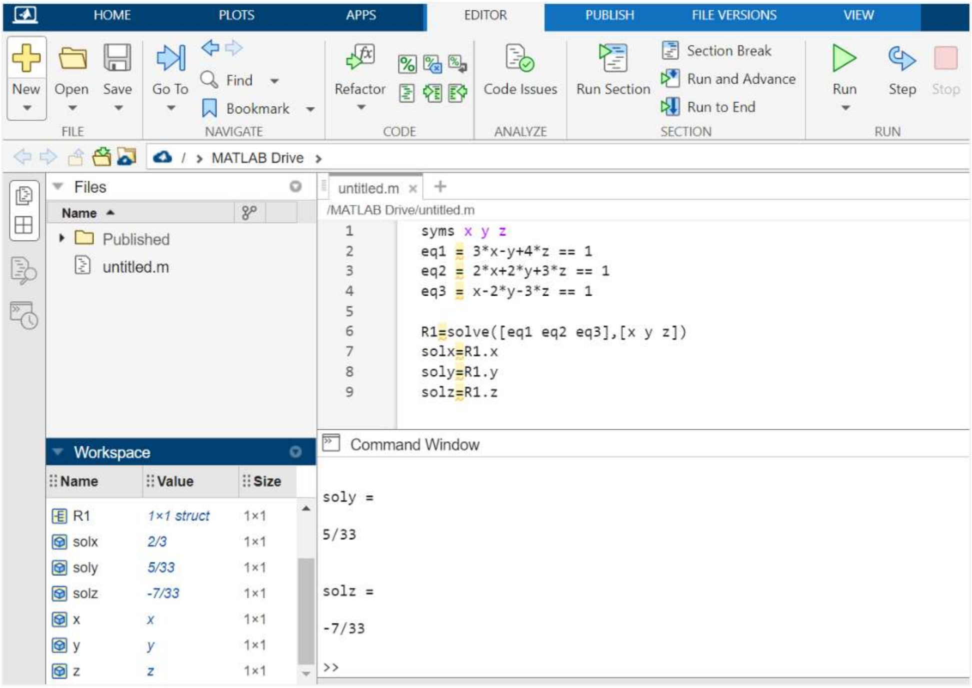
- **Matlab.** Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones de 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 3x - y + 4z = 1 \\ 2x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

Solución: $x = \frac{2}{3}; y = \frac{5}{33}$ y $z = -\frac{7}{33}$

Figura 7

Resolución de un sistema lineal de ecuaciones mediante Matlab



Nota. Viñamagua, G., 2023.

1.7 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales tienen numerosas aplicaciones en diversos campos. Algunas de las aplicaciones más comunes son:

- **Ingeniería:** se utiliza ampliamente para modelar y resolver problemas relacionados con estructuras, circuitos eléctricos, sistemas de control, análisis de fluidos, entre otros.
- **Física:** son fundamentales para describir fenómenos físicos y resolver problemas relacionados con la mecánica, la termodinámica, la óptica, el electromagnetismo, entre otros.
- **Economía:** los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para modelar y resolver problemas relacionados con la oferta y demanda, la optimización

de recursos, los equilibrios económicos y otros aspectos de la teoría económica.

- **Ciencias sociales:** los sistemas de ecuaciones lineales también tienen aplicaciones en ciencias sociales, como la sociología y la psicología. Se utilizan para modelar y analizar fenómenos sociales, comportamientos de grupos, interacciones entre individuos.
- **Ciencias de la salud:** los sistemas de ecuaciones lineales se emplean en áreas como la epidemiología, la farmacología y la investigación médica.
- **Computación gráfica y diseño:** los sistemas de ecuaciones lineales son utilizados para crear y manipular gráficos en 2D y 3D, animaciones, efectos visuales y modelado tridimensional.

A continuación, se presentan algunos problemas resueltos.

Problema 1. Un estado compra 540.000 barriles de petróleo a tres suministradores diferentes que lo venden a 27, 28 y 31 dólares el barril, respectivamente. La factura total asciende a 15 '999.000 dólares. Si el primer suministrador recibe el 30 % del total del petróleo comprado, ¿cuál es la cantidad comprada a cada suministrador?

Planteamiento

$x =$ número de barriles comprados al primer suministrador

$y =$ número de barriles comprados al primer suministrador y

$z =$ número de barriles comprados al primer suministrador

$$\begin{cases} x + y + z = 540000 \\ 27x + 28y + 31z = 15999000 \\ x = 0.3 \times 540000 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y + z = 540000 \\ 27x + 28y + 31z = 15999000 \\ x = 162000 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 162000 \\ 1 & 1 & 1 & 540000 \\ 27 & 28 & 31 & 15999000 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2-F_1 \\ F_3-27F_1}]{} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 162000 \\ 0 & 1 & 1 & 378000 \\ 0 & 28 & 31 & 11625000 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-28F_2]{} \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 162000 \\ 1 & 1 & 1 & 540000 \\ 0 & 0 & 3 & 1041000 \end{array}\right) \approx \begin{cases} x = 162000 \\ y + z = 378000 \\ 3z = 1041000 \end{cases}$$

$$z = \frac{1041000}{3} = 347000; y + z = 378000$$

$\Rightarrow y = 31000$; y $z = 162000$

Solución: se compraron:

162.000 barriles al 1.er suministrador.

31.000 barriles al 2.º suministrador.

347.000 al 3.º suministrador.

Problema 2. Un fabricante de autos ha lanzado al mercado tres nuevos modelos (A, B y C). El precio de venta de cada modelo es 1.5, 2 y 3 millones de dólares, respectivamente, ascendiendo el importe total de los coches vendidos durante el primer mes a 250 millones. Por otra parte, los costes de fabricación son de 1 millón por coche para el modelo A, de 1.5 para el modelo B y de 2 para el C. El coste total de fabricación de los coches vendidos en ese mes fue de 175 millones y el número total de coches vendidos es 140. Plantea un sistema para determinar el número de coches vendidos de cada modelo y resuelve el problema. Comenta los resultados obtenidos.

Planteamiento: utilizando el método de eliminación.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ 1.5 & 2 & 3 & 250 \\ 1 & 1.5 & 2 & 175 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 - 1.5F_1 \\ F_3 - F_1}]{} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & 40 \\ 0 & 0.5 & 1 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - F_2]{} \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 140 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & 40 \\ 0 & 0 & -0.5 & -5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 140 \\ 0.5y + 1.5z = 40 \\ -0.5z = -5 \end{cases}$$

$$z = \frac{-5}{-0.5} = 10; 0.5y + 1.5 \times 10 = 40 \Rightarrow 0.5y = 25 \Rightarrow y = \frac{25}{0.5} = 50$$

$$x + 50 + 10 = 140 \Rightarrow x = 80$$

Solución. Se vendieron 80 coches del modelo A, 50 coches del modelo B y 10 coches del modelo C.

1.8 Recursos interactivos

A continuación, en la siguiente infografía, se proporciona una explicación detallada sobre la resolución de un sistema lineal de ecuaciones de 3x3. Esta herramienta utiliza el simulador matemático GeoGebra en línea. Esta demostración gráfica te permitirá visualizar y comprender de manera interactiva cómo el sistema propuesto no tiene solución. Te recomendamos seguir las instrucciones cuidadosamente para obtener el máximo beneficio de esta herramienta. ¡Disfruta del aprendizaje a través de esta experiencia práctica y visualmente intuitiva proporcionada por GeoGebra!

Sistema lineal de ecuaciones de 3x3

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de la definición, métodos de resolución y aplicaciones de los sistemas lineales de ecuaciones, para lo cual, se recomienda la lectura del libro, Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021). Álgebra lineal y sus aplicaciones. Pearson.
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Estudiar cuando un sistema lineal es consistente.
4. Estudiar cuando un sistema lineal es inconsistente.

5. Examinar ejercicios resueltos en el libro: Álgebra Lineal y sus aplicaciones de Lay y McDonald's, como también resolver ejercicios propuestos en el capítulo 1, Ecuaciones lineales en álgebra lineal utilizando algún simulador matemático.
6. Revisa los índices de los libros de Grossman, Kolman y Lay. Clasifica los problemas según los sistemas de ecuaciones lineales (resolución por métodos como Gauss, Gauss-Jordan, etc.).
7. Finalmente, le animo a desarrollar la autoevaluación 1, donde se presentan una serie de ejercicios y actividades relacionados con el tema de ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Esta evaluación le ayudará a confirmar y fortalecer sus conocimientos.

Autoevaluación 1

Seleccione la opción correcta.

1. **Una ecuación lineal es**:

   a. Una igualdad matemática que involucra variables de primer grado y tiene la siguiente forma general:

      $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$; donde b y los coeficientes

      $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales o complejos, que

      generalmente se conocen de antemano.

   b. Una desigualdad matemática que involucra variables de segundo grado y tiene la siguiente forma general:

      $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$; donde b y los coeficientes

      $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales o complejos, que

      generalmente se conocen de antemano.

c. Una igualdad matemática que involucra variables de primer grado y tiene la siguiente forma general:

$a_1x_1 - a_2x_2 + \cdots - a_nx_n = b$; donde b y los coeficientes

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números infinitos o complejos, que

generalmente se conocen de antemano.

2. **Las funciones lineales responden a la ecuación $y = mx + b$, y se representan mediante**:

    a. Parábolas
    b. Rectas
    c. Curvas

3. **Toda función cuya gráfica no sea una línea recta, se considera una función**:

    a. Cuadrática
    b. Lineal
    c. No lineal

4. **Se define a un sistema de ecuaciones lineales al:**

    a. Conjunto de dos ecuaciones, en el cual se relacionan tres incógnitas y se busca los valores de las incógnitas
    b. Conjunto de ecuaciones, en el cual se relacionan con la circunferencia y se busca los valores de las incógnitas.
    c. Conjunto de dos o más ecuaciones, en el cual se relacionan dos o más incógnitas y se busca los valores de las incógnitas.

5. **Un sistema de ecuaciones es compatible cuando tiene:**

    a. No tiene solución única o infinidad de soluciones
    b. Solución única o infinidad de soluciones

c. Dos soluciones única o infinidad de soluciones

6. **Un sistema de ecuaciones es incompatible cuando:**

   a. No tiene solución
   b. Si tiene solución
   c. Tiene infinitas soluciones

7. **Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones de 3 incógnitas por el método de Gauss – Jordan.** $\begin{cases} x+4y-8z=-6 \\ -2x-10y+3z=-2 \\ 3x+24y-7z=3 \end{cases}$

   a. $x=\frac{68}{61}; y=\frac{35}{122}; z=\frac{63}{61}$

   b. $x=\frac{68}{61}; y=-\frac{35}{122}; z=\frac{63}{61}$

   c. $x=\frac{68}{61}; y=\frac{35}{121}; z=\frac{63}{62}$

8. **Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones de 3 incógnitas por el método de Cramer.** $\begin{cases} 3x+4y-8z=-1 \\ -2x-4y+3z=-6 \\ -x+2y-2z=-1 \end{cases}$

   a. Determinante:72; $x=\frac{11}{7}; y=2; z=\frac{12}{7}$

   b. Determinante:42; $x=\frac{11}{7}; y=2; z=\frac{12}{7}$

c. Determinante:42; $x=\frac{11}{42}; y=2; z=\frac{12}{42}$

9. **Mediante el método gráfico, encontrar el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas. Utilice el simulador matemático GeoGebra.**

   $-2x+2y=1$ y $3x-5y=1$

   a. Punto de intersección: $(-1.75, -1.25)$

   b. Punto de intersección: $(1.75, 1.25)$

   c. Punto de intersección: $(-2.75, 1.25)$

10. **Mediante un simulador matemático Wólfram Alpha, resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.** $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ 4x+5y+6z=24 \\ 3x+y-2z=4 \end{cases}$

    a. $x_1=\frac{276}{101}; x_2=\frac{6}{101}$ y $x_3=\frac{215}{101}$

    b. $x_1=\frac{76}{101}; x_2=-\frac{6}{101}$ y $x_3=\frac{15}{101}$

    c. $x_1=\frac{276}{101}; x_2=\frac{16}{101}$ y $x_3=-\frac{215}{101}$

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 2:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos de matrices.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

- Carrera de finanzas

  Conocer y aplicar el concepto de matriz y rango en la discusión de ecuaciones lineales.

- Carrera de logística y transporte

  Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedica algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

  Conoce el concepto de matriz, vector y rango.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje esperado en las carreras mencionadas, como Administración de Empresas, Contabilidad y Auditoría, Economía, Finanzas, Ingeniería en Logística y Transporte, y Tecnologías de la Información, requieren de la comprensión en la elaboración del desarrollo de ejercicios, resolución de problemas referentes al tema de matrices, a través del conocimiento de las diferentes etapas que conforman la planeación estratégica con relación a las etapas del proceso cognitivo que mejoran el aprendizaje del álgebra lineal.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 3

Este apartado está dedicado al estudio de las matrices, se abordan diversos conceptos y operaciones relacionadas con esta estructura algebraica. Algunos de los temas como: definición y representación de matrices, tipos especiales de matrices, operaciones básicas con matrices, multiplicación de matrices, concepto de matriz invertible o no singular, y la matriz inversa. Además, ofrece algunas herramientas básicas para manejar las múltiples aplicaciones del álgebra lineal que implican dos o más matrices y modelar problemas en diversas áreas, como la física, la ingeniería y la informática.

Unidad 2. Matrices

2.1 Conceptos básicos

En el estudio del álgebra matricial existen algunos conceptos básicos fundamentales, que forman la base para operaciones más avanzadas y aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y otras disciplinas.

Matriz. - Las matrices son un arreglo rectangular de números o símbolos ordenados en filas y columnas de forma bidimensional. Se emplea para representar sistemas de ecuaciones lineales o diferenciales, así como para especificar una aplicación lineal, sus elementos se organizan en líneas horizontales y verticales, formando una estructura que permite el análisis y la manipulación de datos de manera estructurada y ordenada. A una matriz $m \times n$ se le representa de la siguiente manera:

Figura 8

Matriz $m \times n$

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Columna } j \\
\text{Fila } i & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
 & \begin{matrix} \uparrow & \quad & \uparrow & \quad & \uparrow \\ a_1 & & a_j & & a_n \end{matrix}
\end{array}
$$

Nota. Viñamagua, G., 2023.

- **Tamaño o dimensión.** -Las matrices se definen por su tamaño, que comprende el número de filas y columnas, y cada elemento de la matriz se identifica por su colocación en la fila y columna correspondiente.
- **Imagen de una matriz. -** Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la imagen de A, denotada por $im\ A$, está dada por:
  $\mathrm{Im}\ A = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ para alguna } x \in \mathbb{R}^n\}$.
- **Rango de una matriz. -** Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces el rango de A, denotado por $r(A)$, está dado por: $p(a) = dim\, dim\, imA$.
- **Matriz aumentada. -** Una matriz aumentada es la combinación de dos matrices que se fusionan y se manipulan como si fueran una única matriz. Por ejemplo, dado el siguiente sistema lineal de ecuaciones, escribir la matriz aumentada

$$
\begin{cases} x + 4y + 3z = 12 \\ 2x - 3y - z = 20 \\ 4x + 5y = 15 \end{cases}
$$

La matriz ampliada: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 12 \\ 2 & -3 & -1 & 20 \\ 4 & 5 & 0 & 15 \end{array}\right]$

2.2 Independencia lineal de las columnas de una matriz

Del apartado, vectores se conoce que: Dos vectores son linealmente independientes si y sólo si no tienen la misma dirección. En este caso, suponga que, en vez de utilizar un conjunto de vectores, se inicia con una matriz $A = [a_1 \ldots a_n]$. En tal caso, la ecuación matricial $Ax = 0$ se puede escribir como: $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n = 0$; cada relación de dependencia lineal entre las columnas de A corresponde a una solución no trivial de . Así, tenemos el siguiente resultado importante.

Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si y solo si la ecuación tiene solo la solución trivial. Por ejemplo, determinar si las columnas de la matriz A son linealmente independientes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución. Para estudiar $Ax = 0$, se reduce por filas la matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{bmatrix}$$

En este punto, es claro que hay tres variables básicas y ninguna variable libre. Así, la ecuación $Ax = 0$ solo tiene la solución trivial, y las columnas de A son linealmente independientes.

Para reforzar su aprendizaje, lo invito a revisar la siguiente infografía.

[Tipos de matrices]

2.3 Operaciones de matrices

Las operaciones con matrices son manipulaciones algebraicas que se pueden realizar entre matrices. A continuación, algunas igualdades de tener en consideración en las operaciones con matrices como la suma, la resta, la división y la multiplicación.

Teorema

$a)A + B = B + A$

$b)(A + B) + C = A + (B + C)$

$c)A + 0 = A$

$d)r(A + B) = rA + rB$

$e)(r + s)A = rA + sA$

$f)r(sA) = (rs)A$

Ejemplo 1. Dadas las matrices siguientes y $k = 5$. Realizar las operaciones propuestas

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 19 & 2 \end{pmatrix}$$

a. $k(A)$

$$k \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 9 & 5 \times 1 & 5 \times 1 \\ 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 1 \\ 5 \times 1 & 5 \times 18 & 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 90 & 5 \end{pmatrix}$$

b. $A + B$

Esta operación no se puede realizar, porque la primera matriz A, es de 3×3 y la segunda matriz B es de 2×3, es decir, no tienen el mismo número de filas y columnas.

c. $A - B$

Esta operación no se puede realizar, porque la primera matriz es de 3×3 y la segunda 2×3, es decir, no tienen el mismo número de filas y columnas.

d. $A + C$

$$A + B = \begin{pmatrix} 9+10 & 1+2 & 1+2 \\ 1+2 & 2+3 & 1+2 \\ 1+2 & 18+19 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 3 & 37 & 2 \end{pmatrix}$$

e. $A * B$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 9*1+1*1+1*1 & 9*1+1*1+1*1 \\ 1*1+2*1+1*1 & 1*1+2*1+1*1 \\ 1*1+18*1+1*1 & 1*1+18*1+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 4 & 4 \\ 20 & 20 \end{pmatrix}$$

f. $A * C$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 9*10+1*2+1*2 & 9*2+1*3+1*19 & 9*2+1*2+1*2 \\ 1*10+2*2+1*2 & 1*2+2*3+1*19 & 1*2+2*2+1*2 \\ 1*10+18*2+1*2 & 1*2+18*3+1*19 & 1*2+18*2+1*2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 94 & 40 & 22 \\ 16 & 27 & 8 \\ 48 & 75 & 40 \end{pmatrix}$$

g. A^t

$$A^t = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 18 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

h. A^3

$$A^3 = (A * A) * A = \left[\begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 83 & 29 & 11 \\ 12 & 23 & 4 \\ 28 & 55 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 18 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 787 & 339 & 123 \\ 135 & 130 & 39 \\ 327 & 498 & 103 \end{pmatrix}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje, de la definición de, matrices, operaciones de suma, resta, multiplicación y aplicaciones de matrices a diferentes ciencias como a la vida cotidiana, se recomienda la lectura del libro, Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021). Álgebra lineal y sus aplicaciones.
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer el concepto de una matriz.
4. Leer y comprender el concepto de un rango, imagen y matriz aumentada.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, Matrices.

Semana 4

Unidad 2. Matrices

2.4 Matriz inversa

La matriz inversa es un concepto fundamental en álgebra lineal. Dada una matriz cuadrada A, se dice que tiene una matriz inversa si existe otra matriz, denotada como A^{-1}, con la propiedad de que al multiplicarla por A se obtiene la matriz identidad "I". Formalmente, si A es una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$, se dice que tiene una matriz inversa si existe una matriz B de tamaño $n \times n$ tal que: $*B = B * A = I,$ donde I es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. La matriz inversa es única si existe, lo que significa que no puede haber más de una matriz que cumpla las propiedades mencionadas anteriormente.

La existencia de la matriz inversa es importante porque permite resolver ecuaciones matriciales y sistemas de ecuaciones lineales. Si tenemos una ecuación de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz cuadrada invertible, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por A^{-1} para obtener: $A^{-1} * A * x = A^{-1} * b$, lo cual simplifica a: $x = A^{-1} * b$. De esta manera, podemos resolver la ecuación y encontrar el valor de x utilizando la matriz inversa. Por otra parte, tener en consideración que, si una matriz posee inversa, se dice que es una matriz invertible.

Ejemplo 1. Comprobar que: $A * A^{-1} = I$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -1+1 \\ 2-2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejemplo 2. Comprobar que: $A * A^{-1} = I$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & -1+1 \\ 6-6 & -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejemplo 3. Comprobar que: $A * A^{-1} = I$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Definición. - Se dice que una matriz A de $n \times n$; es invertible si existe otra matriz C de $n \times n$ tal que: $CA = I$ y $AC = 1$.

Donde $I = I_n$, la matriz identidad de $n \times n$. En este caso, C es una inversa de A. En efecto, C está determinada únicamente por A, ya que, si B fuera otra inversa de A, entonces $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Esta inversa única se denota mediante A^{-1}, tal que: $A^{-1}A = I$ y $AA^{-1} = I$.

Tener en consideración si: una matriz que no es invertible en ocasiones se llama **matriz singular**, y una matriz invertible se llama **matriz no singular.**

2.5 Métodos para calcular la matriz inversa

Existen algunos métodos para calcular la matriz inversa de una matriz dada. La elección del método depende del tamaño de la matriz, la precisión requerida y la eficiencia computacional deseada. Algunos de los métodos más comunes son:

Método de la matriz aumentada: este método, crea una matriz aumentada que consiste en la matriz original y una matriz identidad del mismo tamaño. Después, se realiza la eliminación de Gauss - Jordan para convertir la matriz original en la matriz identidad. La matriz resultante de la parte derecha será la inversa de la matriz original que se busca, teniendo en consideración la siguiente igualdad: $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

Ejemplo 1. Resolver mediante la eliminación de Gauss – Jordan.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución.

Paso 1. Organiza las ecuaciones en una matriz aumentada, escribiendo las ecuaciones en forma matricial, agrupando los coeficientes de las variables y los términos constantes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{}$$

Paso 2. Realiza operaciones elementales para transformar la matriz aumentada a su forma escalonada reducida. El objetivo es obtener una matriz escalonada reducida en la cual los elementos debajo y arriba de la diagonal principal sean cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+3F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+F_2]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F_3}{2}]{}$$

Paso 3. Aplicar las siguientes operaciones del paso anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+2F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+2F_3]{}$$

Entonces: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Solución.

Realizar los pasos del ejemplo anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_1]{}$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-2F_1]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-3F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F_2}{3}-F_2]{} \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-5F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+\frac{2}{3}F_3]{} \approx$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1-F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[F_1+F_2]{}$$

Entonces: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Método de la matriz adjunta. – El método de la matriz adjunta consiste en encontrar la matriz adjunta de la matriz dada y después dividir cada elemento de la matriz adjunta por el determinante de la matriz original utilizando la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{[Adj(A)]^T}{|A|}$$

Ejemplo 1. Calcular la matriz inversa mediante la *Adjunta*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución.

Paso 1. Calculamos el determinante de la matriz A:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 1 \times 4) + ((-2) \times (-3) \times (-3)) - 2 \times 1 \times (-2) - (-3) \times 4 \times 1$$
$$- (-4) \times (-3) \times 0 = 2$$

Paso 2. Calculamos la matriz adjunta de A. Como su dimensión es 2×2, tenemos que calcular determinantes de dimensión 1.

El elemento de la posición (1,1) es

$$C_{1,1} = (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} (1) & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

El elemento de la posición (1,2) es

$$C_{1,2} = (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & (0) & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20$$

El elemento de la posición (1,3) es

$$C_{1,3} = (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & (-2) \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7$$

El elemento de la posición (2,1) es

$$C_{2,1} = (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ (-3) & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 6$$

El elemento de la posición (2,2) es:

$$C_{2,2} = (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & (1) & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

El elemento de la posición (2,3) es:

$$C_{2,3} = (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & (4) \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3$$

El elemento de la posición (3,1) es:

$$C_{3,1} = (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ (2) & -3 & 4 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

El elemento de la posición (3,2) es:

$$C_{3,2} = (-1)^{(3+2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & (-3) & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

El elemento de la posición (3,3) es:

$$C_{3,3} = (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & (4) \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Paso 3. Calculamos su traspuesta de matriz adjunta de A (cambiando filas por columnas):

$$Adjunta(A) = \begin{bmatrix} 16 & 20 & 7 \\ 6 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } (Adj.\,(A))^T = \begin{bmatrix} 16 & 6 & 2 \\ 20 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Finalmente, aplicamos la fórmula para obtener la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{[Adjunta(A)]^T}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} 16 & 6 & 2 \\ 20 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Calcular la matriz inversa por el método de la adjunta

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Paso 1. Calculamos el determinante de la matriz A:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) + (1\cdot 3\cdot 0) + (1\cdot 2\cdot 3) - 0\cdot(-2)\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)$$
$$\cdot (3)\cdot(-2) - (-2)\cdot(2)\cdot(1) = 20$$

Paso 2. Calculamos la matriz adjunta de A. Como su dimensión es 2×2, tenemos que calcular determinantes de dimensión 1.

El elemento de la posición (1,1) es:

$$C_{1,1} = (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} (-2) & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

El elemento de la posición (1,2) es:

$$C_{1,2} = (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & (1) & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

El elemento de la posición (1,3) es:

$$C_{1,3} = (-1)^{(1+3)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & (1) \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

El elemento de la posición (2,1) es:

$$C_{2,1} = (-1)^{(2+1)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ (2) & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

El elemento de la posición (2,2) es:

$$C_{2,2} = (-1)^{(2+2)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & (-2) & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4$$

El elemento de la posición (2,3) es:

$$C_{2,3} = (-1)^{(2+3)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & (3) \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

El elemento de la posición (3,1) es:

$$C_{3,1} = (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ (0) & 3 & -2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

El elemento de la posición (3,2) es:

$$C_{3,2} = (-1)^{(3+2)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & (3) & -2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

El elemento de la posición (3,3) es:

$$C_{3,3} = (-1)^{(3+3)} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & (-2) \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Paso 3. Calculamos su traspuesta de matriz adjunta de A (cambiando filas por columnas):

$$Adjunta(A) = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } (Adj.\,(A))^T = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Finalmente, aplicamos la fórmula para obtener la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{[Adjunta(A)]^T}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}}{20} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

2.6 Caracterizaciones de matrices invertibles

En este apartado se realiza una revisión de la mayoría de los conceptos abordados en la unidad 1, específicamente relacionados con sistemas de ecuaciones lineales de n incógnitas y matrices cuadradas. El resultado principal es el siguiente teorema.

2.7 El teorema de la matriz invertible

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes. Es decir, para una matriz A dada, los enunciados son todos ciertos o todos falsos.

a. A es una matriz invertible.
b. A es equivalente por filas a la matriz identidad de $n \times n$.
c. A tiene n posiciones pivote.
d. La ecuación $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial.
e. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.
f. La transformación lineal $x \to Ax$ es uno a uno.
g. La ecuación $Ax = b$ tiene al menos una solución para toda b en R^n.
h. Las columnas de A generan R^n
i. La transformación lineal $x \to Ax$ mapea sobre R^n.
j. Existe una matriz C de $n \times n$ tal que $CA = I$.
k. Existe una matriz D de $n \times n$ tal que $AD = I$.
l. A^T es una matriz invertible.

Las matrices cuadradas son muy significantes y reciben un nombre especial, ***matrices invertibles o matrices inversibles***, se puede distinguir a las matrices invertibles mediante su determinante y métodos para calcular de un modo eficaz la inversa de A. Anteriormente se habló de la matriz cuadrada unidad de orden $n(I_n)$..

Es posible encontrar matrices cuadradas A para las cuales existe una matriz cuadrada B de forma que: $A * B = B * A = I$; por ejemplo:

Estas matrices cuadradas son muy interesantes y reciben un nombre especial: matrices invertibles o matrices inversibles. En esta unidad estudiaremos cómo distinguir las matrices invertibles a través de su determinante y explicamos métodos para calcular de un modo eficaz la inversa de A.

Ejemplo 1. Determinar si la matriz 3×3 siguiente es invertible o no.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución. Primero se calcula el determinante, segundo, si el determinante es diferente de cero, entonces la matriz es invertible y tercero, si es igual a cero, entonces la matriz no es invertible.

$$Det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = +2[(4 \cdot 3) - (1 \cdot 1)] - 1[(1 \cdot 3) - (2 \cdot 1)] + 2[(1 \cdot 1) - (2 \cdot 4)] = 7$$

Como el $\det(A) = 7 \neq 0$; entonces, la matriz A es invertible

Ejemplo 2. Demostrar si la matriz A es invertible o no.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 7 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. Notamos que la segunda columna es un múltiplo de la primera. Entonces las columnas son linealmente dependientes, por esta razón, la matriz A no satisface la condición del ***Teorema,*** $AB = I_n$ ***o*** $BA = I_n$***; entonces*** A ***es invertible y*** $B = A^{-1}$. Por lo tanto, A no es invertible.

2.8 Resolución de matrices utilizando los simuladores matemáticos

Los cálculos y gráficos generados a través de simuladores matemáticos se presentan y se animan en una pantalla de computadora o dispositivo móvil. El uso de gráficos generados por computadora se ha extendido ampliamente, y está experimentando un rápido crecimiento en diversas aplicaciones.

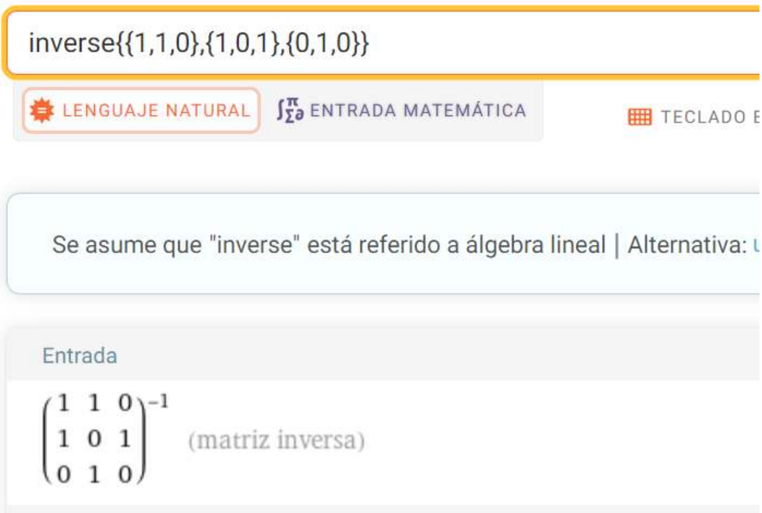
- **Wólfram Alpha**

Ejemplo 1. Calcular la matriz inversa de: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución.

Figura 9

Inversa de una matriz mediante Wólfram Alpha



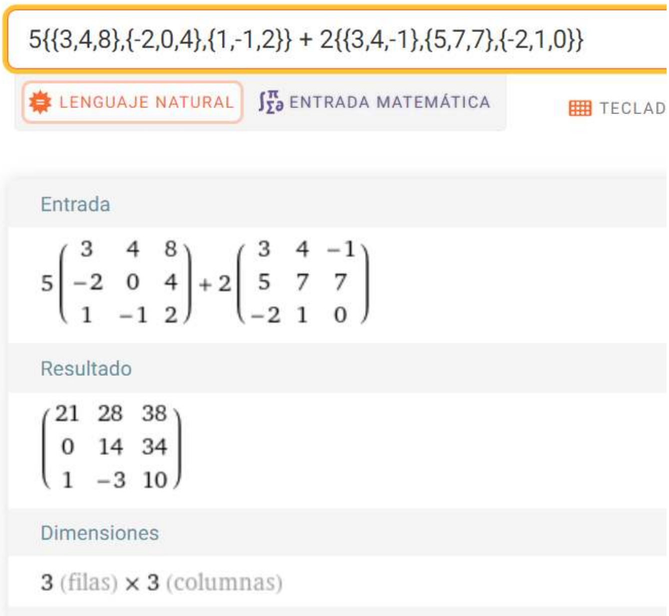
Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Resolver las siguientes operaciones de matrices: $5\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 28 & 38 \\ 0 & 14 & 34 \\ 1 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

Solución.

Figura 10

Operaciones con matrices mediante Wólfram Alpha



Nota. Viñamagua, G., 2023.

- **GeoGebra**

Ejemplo 1. Encontrar la inversa de A.

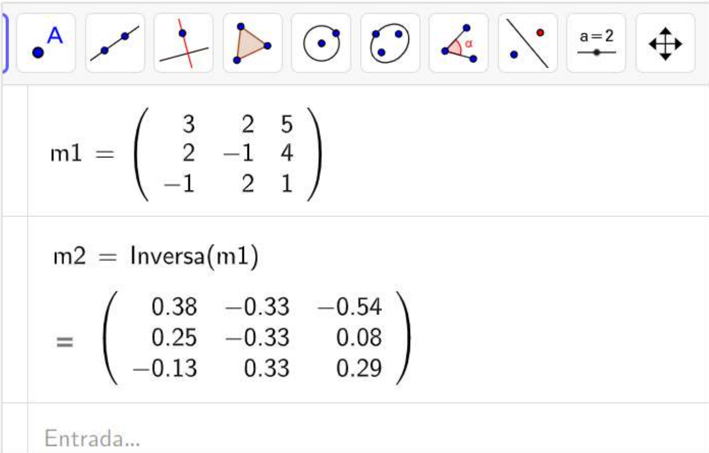
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{-1}{4} & \frac{-13}{24} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{7}{24} \end{bmatrix}$$

Figura 11

Matriz inversa mediante GeoGebra utilizando el comando Inversa $(m1)$



Nota. Viñamagua, G., 2023.

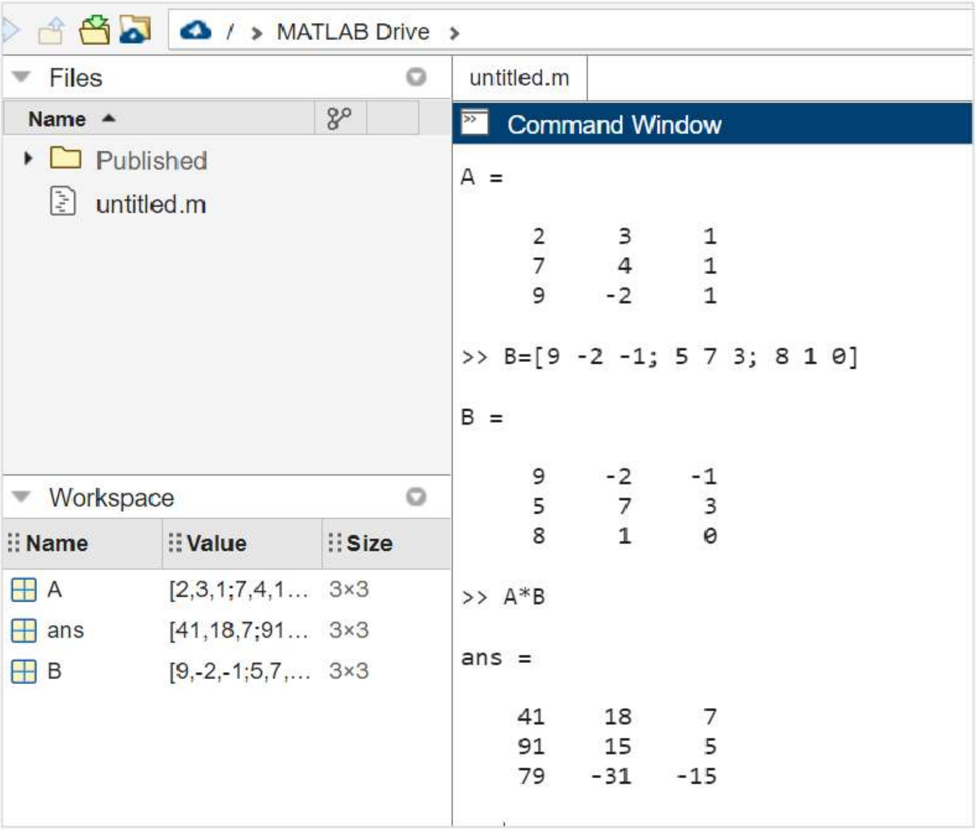
- **Matlab**

Ejemplo 1. Dadas las matrices A y B, resolver: $(A + B)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ 9 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & 3 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 12

Operaciones con matrices mediante Matlab

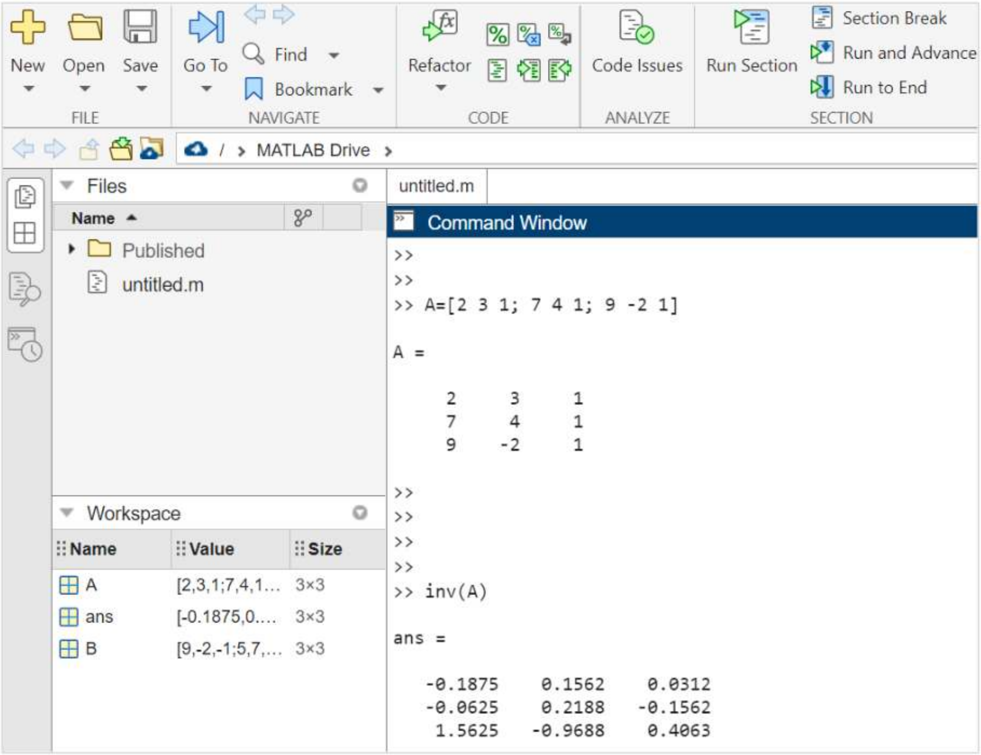


Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Encontrar la matriz inversa de A

Figura 13

Operaciones con matrices mediante Matlab



Nota. Viñamagua, G., 2023.

2.9 Aplicaciones de matrices

Las aplicaciones de matrices son de gran utilidad debido a su versatilidad y capacidad para dar soluciones a problemas complejos en diversas áreas. Las matrices permiten representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera eficiente, lo que es esencial en campos como la física, la ingeniería, la economía y seguridad en la criptografía, a continuación, se presentan algunos problemas resueltos.

Problema 1. Un supermercado decidió ofertar tres clases de bandejas: A, B y C. La bandeja A contiene 40 g de queso manchego, 160 g de roquefort y 80 g de camembert; la bandeja B contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores; y la bandeja C, contiene 150 g de queso manchego, 80 g de roquefort y 80 g de camembert. Si se desea sacar a la venta 50 bandejas del tipo A, 80 de B y 100 de C. Obtener matricialmente la cantidad que se necesita, en kilogramos, de cada uno de los tres tipos de quesos.

Solución. Conviene organizar los datos del problema en dos matrices; ya que, su producto nos dará la matriz buscada

$$\begin{array}{c} \\ M \\ R \\ Ca \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 40 & 120 & 150 \\ 160 & 120 & 80 \\ 80 & 120 & 80 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} M \\ R \\ Ca \end{array}\begin{pmatrix} 26600 \\ 25600 \\ 21600 \end{pmatrix}$$

Los resultados los convertimos en kilogramos.

$$\frac{1}{1000}\begin{pmatrix} 26600 \\ 25600 \\ 21600 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} M \\ R \\ Ca \end{array}\begin{pmatrix} 26,6 \\ 25,6 \\ 21,6 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Tres personas, A, B y C, quieren comprar las siguientes cantidades de fruta:

A: 2 kg de peras, 1 kg de manzanas y 6 kg de naranjas.

B: 2 kg de peras, 2 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.

C: 1 kg de peras, 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas.

En el pueblo en que viven hay dos fruterías, F_1 y F_2.

En F_1, las peras cuestan 1,5 dólares/kg, las manzanas 1 dólar/kg, y las naranjas 2 euro/kg.

En F_2, las peras cuestan 1,8 dólares os/kg, las manzanas 0,8 dólares/kg, y las naranjas 2 euros/kg.

a. Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (A, B, C).

Solución.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & M & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz se compone de la siguiente manera, en las filas (A, B y C) las personas que compran y en las columnas la cantidad de frutas (peras, manzanas y naranjas).

b. Escribe una matriz con los precios de cada tipo de fruta en cada una de las dos fruterías.

Solución.

$$\begin{array}{c} \\ P \\ M \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,5 & 1,8 \\ 1 & 0,8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz se compone de la siguiente manera, en las filas la cantidad de frutas (peras, manzanas y naranjas) y en las columnas las dos fruterías F_1 y F_2.

c. Obtén una matriz, a partir de las dos anteriores, en la que quede reflejado lo que se gastaría cada persona haciendo su compra en cada una de las dos fruterías.

Solución.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & M & N \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ P \\ M \\ N \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1,5 & 1,8 \\ 1 & 0,8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 13 & 13,2 \\ 9,5 & 9,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se realiza el producto de las dos matrices para obtener una tercera matriz, que es el gasto de cada persona que realiza su compra en cada una de las dos fruterías.

2.10 Recursos interactivos

En la siguiente infografía se proporciona una explicación detallada del cálculo de la matriz inversa. Esta herramienta utiliza el simulador matemático GeoGebra en línea. Esta demostración gráfica te permitirá visualizar y comprender de manera interactiva que, a medida que los tres vectores se acercan al mismo plano, P tiende a desaparecer de la vista gráfica. Te recomendamos seguir las instrucciones cuidadosamente para obtener el máximo beneficio de esta herramienta. ¡Disfruta del aprendizaje a través de esta experiencia práctica y visualmente intuitiva proporcionada por GeoGebra!

Matriz inversa

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de la definición, matriz inversa, matrices invertibles y aplicaciones de las matrices. Se recomienda la lectura del capítulo 2. Matrices del libro, Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021). Álgebra lineal y sus aplicaciones.
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Estudiar los métodos para calcular la inversa de una matriz.
4. Estudiar cuando una matriz es invertible.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, Álgebra matricial utilizando algún simulador matemático.

6. Revisa el libro Influencia de la plataforma GeoGebra en el aprendizaje de las operaciones con matrices de: Andrade Marco (2023); y resuelve los ejercicios propuestos en el simulador matemático GeoGebra.
7. Finalmente, le animo a desarrollar la autoevaluación 2, donde se presentan una serie de ejercicios y actividades relacionados con el tema de matrices y sus operaciones. Estas actividades le ayudarán a confirmar y fortalecer sus conocimientos.

Autoevaluación 2

Seleccione la opción correcta.

1. **Cuál es el concepto de una matriz**:

    a. Se denomina matriz a todo conjunto de números naturales ordenados en una estructura de 2 filas y 3 columnas, de modo general, las filas se identifican con las letras m y n para las columnas.

    b. Se denomina matriz a todo conjunto finito de números o expresiones ordenadas en una combinación binaria de filas y columnas, de modo general, las filas se identifican con las letras m y n para las columnas.

    c. Se denomina matriz a todo conjunto de números o expresiones ordenadas en una estructura de filas y columnas, de modo general, las filas se identifican con las letras m y n para las columnas.

2. **Dada una matriz cuadrada A, ¿qué significa que A sea invertible?**

a. Significa que existe dos matrices, cuadrada A y B del mismo tamaño con $A = BA = I_n$ donde n es el tamaño de las matrices.
b. Significa que existe otra matriz cuadrada A de diferente tamaño con $A = BA = I_n$ donde n es el tamaño de las matrices.
c. Significa que existe otra matriz cuadrada B del mismo tamaño con $A = BA = I_n$ donde n es el tamaño de las matrices.

3. **Para multiplicar dos matrices** A_{nxm} y B_{nxp} se multiplica cada fila de A por cada fila de B:

a. Falso
b. Verdadero
c. Ninguna de las anteriores

4. **El rango de una matriz es el número de líneas linealmente independientes, es decir**

a. Proporcionales
b. No Proporcionales
c. Cúbicas

5. **Demostrar que las matrices, A y B son invertibles. (siendo cada una la inversa de la otra): $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$**

a. $AB = BA = I$

b. No se puede multiplicar

c. $AB = B$ y $BA = A$

6. **Calcular la matriz inversa mediante el método de Gauss - Jordan:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b. La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. **Calcular la matriz inversa mediante el método de la matriz adjunta.**

$$\begin{array}{r} \\ \text{Chatarra} \\ \text{Carbón} \\ \text{Aleaciones} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} \text{Chatarra} \\ \text{Carbón} \\ \text{Aleaciones} \end{matrix} \begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$

a.

$$\det(A) = -12; \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

b.

$$\det(A) = 12; \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

c.

$$\det(A) = -10; \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

8. **Calcular la inversa de la matriz A, mediante el simulador matemático Wólfram Alpha.**

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 12 & 24 \\ 24 & -6 & -12 \\ 2 & 6 & -14 \end{bmatrix}$$

a.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{26} & \frac{4}{13} & \frac{1}{39} \\ \frac{2}{13} & \frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{2}{13} & \frac{7}{39} \end{pmatrix}$$

b.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 39 \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{pmatrix}$$

c.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{26} & \frac{4}{13} & \frac{1}{39} \\ \frac{2}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{1}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{2}{13} & -\frac{7}{39} \end{pmatrix}$$

9. **Calcular la inversa de la matriz A, mediante el simulador matemático GeoGebra y Matlab.**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -4 & -1 & -5 \\ 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-8}{3} & -1 \\ \frac{17}{6} & \frac{14}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 1 \\ \frac{17}{6} & \frac{14}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{-8}{3} & -1 \\ \frac{17}{6} & \frac{14}{3} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

10. **Resolver el siguiente problema sobre aplicaciones de las matrices.**

En una acería se fabrican tres tipos de productos que llamaremos A, B, y C, que se obtienen a partir de chatarra, carbón mineral y ciertas aleaciones metálicas, según la tabla adjunta, que representa las unidades de cada material necesario para fabricar una unidad de producto.

Tabla 1

Aplicaciones de matrices

Material	Producto		
	A	B	C
Chatarra	8	6	6
Carbón	6	6	4
Aleaciones	2	1	3

Obtener una matriz que indique las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones necesarias para la producción de 6 unidades de A, 4 de B y 3 de C.

a. Se necesitan 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.
b. Se necesita 50 unidades de chatarra, 12 de carbón mineral y 25 de aleaciones
c. Se necesita 60 unidades de chatarra, 82 de carbón mineral y 25 de aleaciones

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 3:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de determinantes.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos de determinantes.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de determinantes.

- Carrera de finanzas

  Aplicación de determinantes como herramienta para la discusión de sistemas y cálculo de soluciones.

- Carrera de logística y transporte

  Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedica algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

  Conoce el álgebra de matrices: producto punto, producto cruz, determinante, inversa, dependencia lineal.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje esperado en las carreras mencionadas, como Administración de Empresas, Contabilidad y Auditoría, Economía, Finanzas, Ingeniería en Logística y Transporte, y Tecnologías de la

Información, se recomienda aplicar y conocer los procesos lógicos matemáticos de la resolución de determinantes y sus operaciones, además, conocer sus aplicaciones para dar solución a problemas de la vida cotidiana mejorando el proceso de enseñanza aprendizaje del álgebra lineal.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 5

En esta unidad de determinantes se presentan dos nociones fundamentales. En primera, se expone un criterio de invertibilidad para matrices cuadradas, el cual juega un papel crucial, y en la segunda noción se muestra cómo el determinante permite medir el cambio en el área de una figura bajo una transformación lineal. Estas dos ideas tienen una estrecha relación y son de gran importancia en el estudio del álgebra lineal y su aplicabilidad en el ámbito matemático y más allá. Por ejemplo, se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales, calcular áreas y volúmenes, encontrar matrices inversas, entre otros.

Unidad 3. Determinantes

3.1 Introducción a los determinantes

Los determinantes son una herramienta fundamental que proporciona información importante sobre las propiedades y el comportamiento de las matrices, permite comprender, utilizar las propiedades y aplicaciones de estas funciones matemáticas en el aprendizaje de sistemas lineales y transformaciones geométricas. En esta unidad se abarca temas como la definición de determinante de una matriz cuadrada, propiedades algebraicas, el teorema de Laplace o la eliminación de Gauss, se explican los métodos y técnicas para calcular el determinante de una matriz, el uso de los simuladores matemáticos para calcular un determinante y sus aplicaciones.

3.2 Definición de determinante de una matriz cuadrada

A cada matriz cuadrada A se le concede un escalar (real) particular denominado determinante de A, denotado por $|A|$ o por: $det(A)$. Este escalar permite caracterizar algunas propiedades de la matriz. El determinante de una matriz nos indica si estamos ante un sistema singular o no singular de ecuaciones lineales. Por ello, si el resultado del determinante es cero (nulo), estaremos ante una matriz singular, y si el resultado es distinto de cero, estaremos ante una matriz no singular.

Considerando la matriz A.

Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Para calcular el determinante de A, por medio de cofactores se puede seleccionar la primera fila (a_{11}, a_{12} y a_{13}).

$$det(A) = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Este ejemplo muestra que, para simplificar los cálculos, en general es conveniente desarrollar el determinante por la fila o columna que tenga mayor cantidad de ceros.

3.3 Propiedades de los determinantes

Las propiedades de los determinantes en álgebra lineal son herramientas beneficiosas que permiten simplificar cálculos, entablar relaciones entre matrices y extraer información útil sobre las matrices y los sistemas lineales de ecuaciones. Algunas propiedades importantes de los determinantes son las siguientes:

- El determinante de una matriz siempre es igual al de su matriz traspuesta.

- El determinante de una matriz será siempre cero (nulo) si la matriz contiene dos filas o columnas iguales, si los elementos de una fila o columna son todo ceros o si los elementos de una fila o columna son una combinación lineal de las demás.
- El determinante del producto de dos matrices será siempre el mismo que el resultado del producto de sus determinantes.
- El determinante cambia de signo si se intercambian dos filas o columnas cualesquiera de una matriz.
- El determinante de una matriz quedará multiplicado por un número real si se multiplican todos los elementos de una fila o columna por ese mismo número.
- El determinante de una matriz cuadrada siempre es igual al de su matriz traspuesta: $|A| = |A^T|$.
- El determinante de un producto de matrices coincide con el producto de los determinantes de cada matriz: $|A \times B| = |A| \times |B|$.
- Cuando una matriz tiene inversa, su determinante es distinto de cero; análogamente, si el determinante de una matriz no es nulo, dicha matriz tiene inversa.
- El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso del determinante de la matriz $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.
- La suma de los productos de los elementos de una fila o columna de una matriz por los adjuntos de otra fila o columna es siempre nula.
- La matriz de los adjuntos de una matriz A dada de dimensión n tiene un determinante igual al determinante de A elevado a $n - 1$.
- El determinante de una matriz no se altera si sumamos a una fila o columna un múltiplo de otra fila o columna.

Ejemplo 1. Dadas las matrices A y B, demostrar la siguiente propiedad:

El determinante del producto de matrices es el producto de sus determinantes:

Paso 1. Aplicamos la siguiente fórmula $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Paso 2. Calculamos su producto:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Paso 3. Sus determinantes son: $|A| = 1$, $|B| = 4$ y $|A \cdot B| = 4$

Ejemplo 2. Dada la matriz A, demostrar la siguiente propiedad:

El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es 0:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

La matriz tiene una columna de ceros, por lo tanto, su determinante es 0.

Ejemplo 3. Demostrar la siguiente propiedad:

Se puede extraer factor común de una fila o columna multiplicando el determinante por el factor:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16 = 2 \cdot (-8)$$

Se extrae el factor común 2 de la segunda fila.

Ejemplo 4. Demostrar la siguiente propiedad:

Se puede extraer el mismo factor común de n filas o columnas multiplicando el determinante por el factor elevado a n. Esta propiedad es consecuencia de la propiedad anterior.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 = 2^2 \cdot (-2)$$

Se extrae el factor común 2 de la segunda y la tercera fila.

Ejemplo 5. Demostrar la siguiente propiedad:

Si se cambia el orden de una fila o de una columna, el determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 8 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -8 = (-1)\cdot 8$$

Se cambia el orden de las filas, segunda y tercera.

Ejemplo 6. Demostrar la siguiente propiedad:

Si se cambia el orden de n filas o columnas, el determinante cambia de signo si n es impar.

$$-8 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Esta propiedad es una consecuencia de la propiedad anterior. Se cambia la primera fila por la segunda y, después, la segunda por la tercera. Entonces el determinante debe coincidir (número par de cambios).

Ejemplo 7. Dadas las matrices A y A^{-1}, demostrar la siguiente propiedad:

Si una matriz es invertible, el determinante de la inversa es el inverso del determinante: $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Paso 2. Sus determinantes son:

$|A| = 6$; y $|A^{-1}| = \frac{1}{6} = \frac{1}{|A|}$

Ejemplo 8. Demostrar la siguiente propiedad:

El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^T|$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = A^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Ejemplo 9. Demostrar la siguiente propiedad:

Si una matriz tiene filas o columnas linealmente dependientes, entonces su determinante es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Las filas 2 y 3 de la matriz son múltiplos de la primera.

Ejemplo 10. Demostrar la siguiente propiedad:

El determinante no cambia si se suman filas (o columnas) multiplicadas por números distintos de 0.

$$-4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Se ha sumado 5 veces la fila 3 a la fila 1.

Ejemplo 11. Demostrar la siguiente propiedad:

El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

Ejemplo 12. Demostrar la siguiente propiedad:

El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15$$

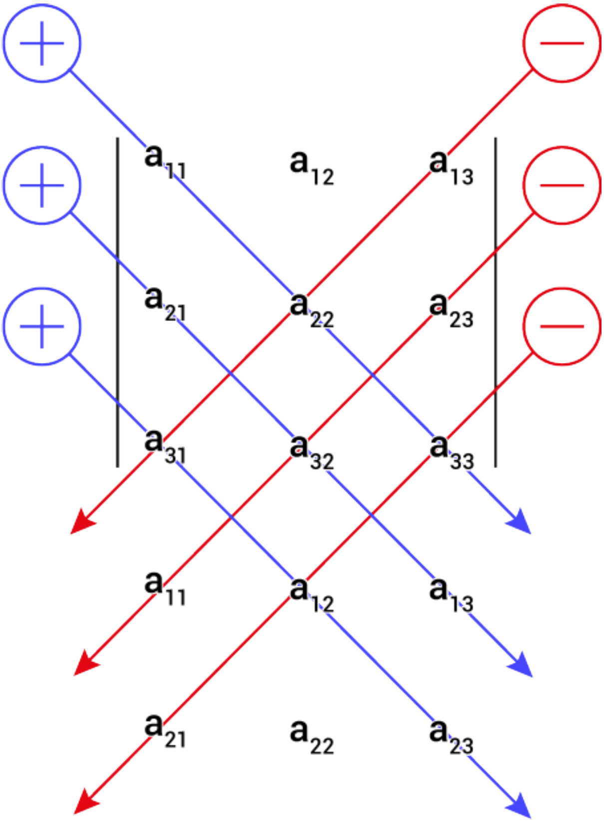
3.4 Métodos para obtener el determinante de una matriz

Existen diferentes métodos para calcular un determinante de una matriz, los cuales dependen del tamaño y la estructura de la matriz. Aquí se presentan los métodos más utilizados:

Método de Sarrus. Este método se utiliza para calcular el determinante de una matriz 3×3. Radica en realizar una serie de productos diagonales y restas para llegar al resultado final.

Figura 14

Método de Sarrus para resolver determinantes



Nota. Tomado de *La regla de Sarrus* [Ilustración], por Wikipedia, 2023, [Wikipedia](), CC BY 4.0.

Ejemplo 1.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = (3) \times (3) \times (-1) + 0 \times 2 \times 0 + 4 \times 2 \times 5 - 0 \times 3 \times 4 - 5 \times 2 \times 3 - \times(-1) \times 2 \times 0$$
$$= 1$$

Ejemplo 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3 \cdot (-4) = -5$$

Regla de Laplace. Mediante esta regla podremos calcular fácilmente el determinante de matrices de dimensiones iguales y mayores a 3×3. De esta forma, simplificamos el cálculo de las matrices de dimensiones elevadas al utilizar la suma de los determinantes de las matrices menores en las que se descompone la matriz inicial.

La fórmula para el desarrollo por la fila i de la matriz A es:

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$; siendo a_{ij} los elementos de la fila i y A_{ij} la que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j a la matriz A. Sugerencia: seleccionar siempre la fila o columna que más ceos (0) tenga, para realizar menos operaciones.

Ejemplo 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de esta matriz utilizando la regla de Laplace, seguimos los siguientes pasos:

1. Elegimos una fila o columna de la matriz para expandir el cálculo del determinante. En este ejemplo, elegiremos la primera fila (2, 1, 3).
2. Para cada elemento en la fila o columna seleccionada, multiplicamos el elemento por el cofactor correspondiente y luego sumamos los resultados.
3. El cofactor de cada elemento se calcula como $(-1)^(i + j)$ multiplicado por el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j del elemento considerado.

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 60$$

Finalmente, sumamos los resultados parciales para obtener el determinante de la matriz A, $\det(A) = 60$.

Ejemplo 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se aplican los mismos pasos del ejemplo 1.

Los elementos de las posiciones (1,1) y (2,1) es:

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

Los elementos de las posiciones (3,1) y (4,1) es:

$$= (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

Se calcula los cofactores de la fila dos:

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$= 2(3+1) - 3(3-4) + 2(-3-12) - 2(3+1) + 3(1-2) - 2(-1-6) - 2(3-4) + 2(1-2)$
$- 2(4-6) - 4(-3-12) + 4(-1-6) - 6(4-6) =$

$= 2(4) - 3(-1) + 2(-15) - 2(4) + 3(-1) - 2(-7) - 2(-1) + 2(-1) - 2(-2) - -4(-15) + 4(-7)$
$- 6(-2) = 103 - 71 = 32$

Como último paso se suman los resultados parciales para obtener el determinante de la matriz A, $\det(A) = 32$

- **Método de eliminación de Gauss**. Este método es utilizado para resolver determinantes de matrices grandes, como una matriz $n \times n$. Consiste en aplicar la eliminación de Gauss para triangular la matriz, es decir, convertirla en una forma escalonada o reducida por filas. Después, se obtiene el determinante multiplicando los elementos diagonales de la matriz triangular.

Ejemplo 1.

Para calcular el determinante de la matriz A, utilizando el método de Gauss, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Aplicamos operaciones elementales a la matriz para convertirla en una matriz triangular superior, es decir, una matriz con ceros debajo de la diagonal principal.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 \frac{-2}{3} F_1]{} \approx$$

Paso 2. Calculamos el determinante de la matriz A multiplicando los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{vmatrix} \xrightarrow[E_1 \frac{-5}{3} K_2]{} 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

Paso 3. Por lo tanto, el determinante de la matriz A utilizando el método de Gauss es 1.

Ejemplo 2.

Aplicamos los mismos pasos del ejemplo 1.

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & \frac{-5}{2} \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_2 \frac{-3}{2} F_1]{} \approx \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 6 & \frac{-5}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 \frac{-1}{2} F_1]{} \approx$$

Calculamos el determinante de la matriz A multiplicando los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 7 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-5}{14} \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 \frac{-6}{7} F_2]{} 2 \cdot 7 \cdot -\frac{5}{14} = -5$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz A utilizando el método de Gauss es - 5.

- **Desarrollo por cofactores**. Este método también se puede aplicar a matrices de cualquier tamaño. Consiste en calcular el determinante mediante una suma de productos entre los elementos de una fila o columna y sus cofactores correspondientes. Cada cofactor se obtiene multiplicando los determinantes de las matrices complementarias.

Ejemplo 1.

Para calcular el determinante de esta matriz utilizando el método de cofactores, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Seleccionamos cualquier fila o columna de la matriz. En este ejemplo, seleccionaremos la primera fila.

Paso 2. Calculamos el cofactor de cada elemento de la fila seleccionada. El cofactor se calcula multiplicando el elemento por el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila y columna correspondientes al elemento.

Paso 3. Multiplicamos cada elemento de la fila seleccionada por su cofactor correspondiente y luego los sumamos.

$$A=\begin{vmatrix}1&3&5&2\\0&-1&3&4\\2&1&9&6\\3&2&4&8\end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix}-1&3&4\\1&9&6\\2&4&8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0&3&4\\2&9&6\\3&4&8\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}0&-1&4\\2&1&6\\3&2&8\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&-1&3\\2&1&9\\3&2&4\end{vmatrix}$$

$$=1(-92)-3(-70)+5(2)-2(-16)=160$$

Paso 4. Por lo tanto, el determinante de la matriz A utilizando el método de cofactores es: 160.

Ejemplo 2.

Para calcular el determinante de esta matriz utilizando el método de cofactores, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Seleccionamos cualquier fila o columna de la matriz. En este ejemplo, seleccionaremos la primera fila.

Paso 2. Calculamos el cofactor de cada elemento de la fila seleccionada. El cofactor se calcula multiplicando el elemento por el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila y columna correspondientes al elemento.

Paso 3. Multiplicamos cada elemento de la fila seleccionada por su cofactor correspondiente y luego los sumamos.

$$\begin{vmatrix}2&-3&5\\1&0&4\\3&-3&9\end{vmatrix}=+2\begin{vmatrix}0&4\\-3&9\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1&4\\3&9\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1&0\\3&-3\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot 12+3(-3)+5(-3)=0$$

Paso 4. Por lo tanto, el determinante de la matriz A utilizando el método de cofactores es: 0.

Ejemplo 3

Para calcular el determinante de esta matriz utilizando el método de cofactores, seguimos los siguientes pasos:

Paso 1. Seleccionamos cualquier fila o columna de la matriz. En este ejemplo, seleccionaremos la primera fila.

Paso 2. Calculamos el cofactor de cada elemento de la fila seleccionada. El cofactor se calcula multiplicando el elemento por el determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila y columna correspondientes al elemento.

Paso 3. Multiplicamos cada elemento de la fila seleccionada por su cofactor correspondiente y luego los sumamos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & -11 \\ -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= +1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -11 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 & -11 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & -1 & -11 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (12 + 22 - 12) - (66 + 4 - 12) = -36$$

Paso 4. Por lo tanto, el determinante de la matriz A utilizando el método de cofactores es: - 36.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de la definición de: determinantes, propiedades, métodos para calcular un determinante, se recomienda la lectura del libro, Álgebra lineal y sus aplicaciones de Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).

2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer el concepto de un determinante de una matriz.
4. Leer y comprender los métodos de resolución de determinantes.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo,

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 6

Unidad 3. Determinantes

3.5 Operaciones elementales

Ejemplo 1. Calcular el valor de los siguientes determinantes y explicar la propiedad. ¿Por qué son cero algunos de ellos?

a. $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b. $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros

d. $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$; porque tiene sus dos filas iguales

e. $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$; porque sus filas son proporcionales $1era \cdot 7 = 2da$

f. $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$; porque sus dos columnas son proporcionales $2da \times (-20) = 1ra.$

Ejemplo 2. Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + 2x + x^2 - (1 - 2x + x^2) =$

$1 + 2x + x^2 - 1 + 2x - x^2; \Rightarrow 4x = 0; \Rightarrow x =$

b. $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \Rightarrow \operatorname{sen} x - \cos x = 0; \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x$

$\frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}; \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cos x = 1$

$\Rightarrow \tan x = 1;$ Entonces: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$

3.6 Resolución de determinantes utilizando los simuladores matemáticos

Los cálculos y gráficos generados a través de simuladores matemáticos se presentan y se animan en una pantalla de computadora o dispositivo móvil. El uso de gráficos generados por computadora se ha extendido ampliamente y está experimentando un rápido crecimiento en diversas aplicaciones.

- **Wólfram Alpha.** Calcular el determinante de la matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución.

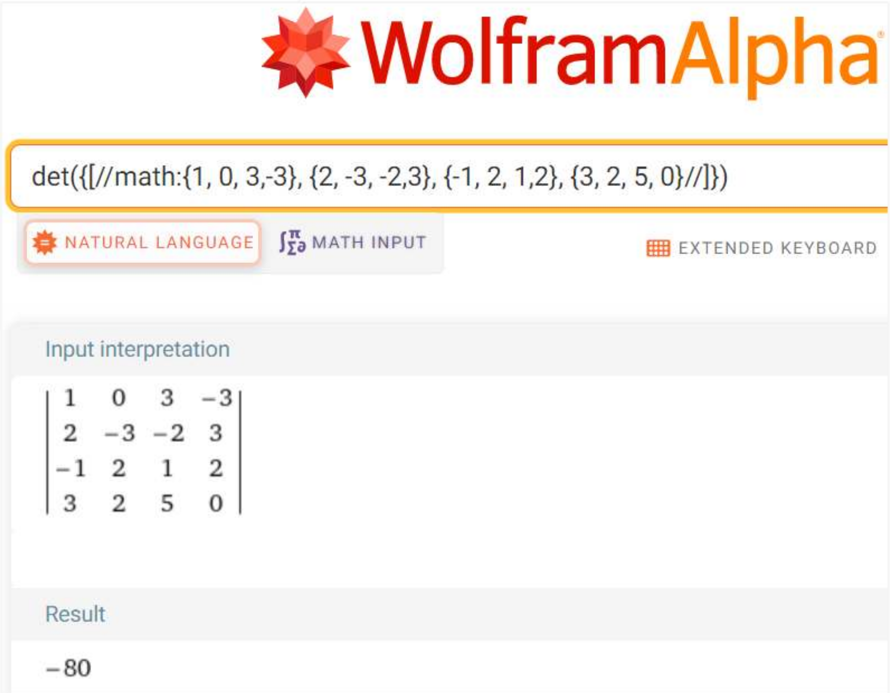
Para calcular un determinante utilizando Wolfram Alpha, puedes seguir los siguientes pasos:

1. Ingresa a la página *web* de Wolfram Alpha en tu navegador.

2. En el cuadro de búsqueda, escribe el “comando” seguido de la matriz para la cual deseas calcular el determinante, como se muestra en la figura 15 o ingresar a: [Cálculo de una determinante].
3. Presiona "Enter" o haz clic en el ícono de búsqueda para obtener el resultado.

Figura 15

Determinantes mediante Wólfram Alpha



Nota. Viñamagua, G., 2023.

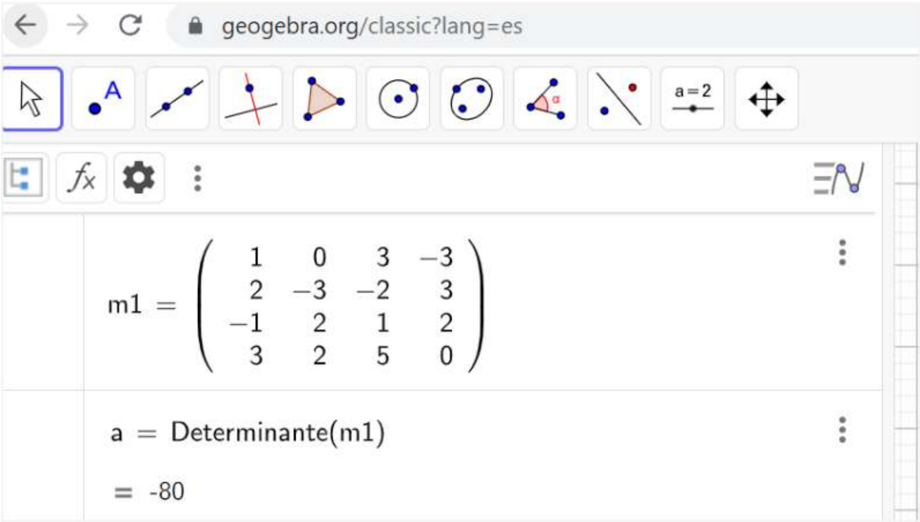
- **GeoGebra.** Calcular el determinante de la matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución.

Figura 16

Determinante de una matriz mediante GeoGebra



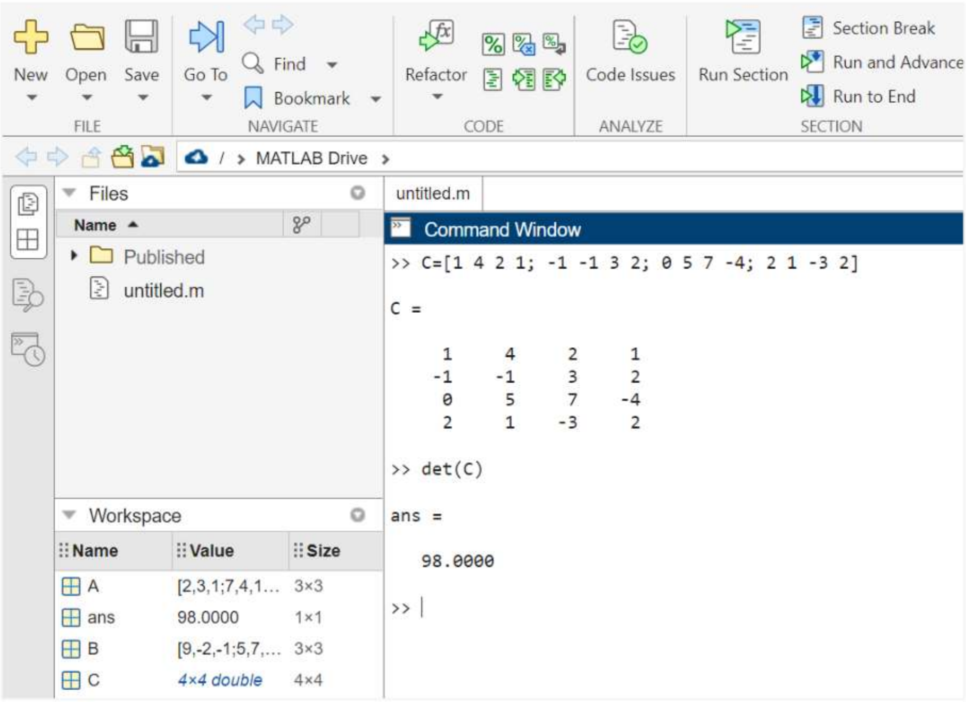
Nota. Viñamagua, G., 2023.

- **Matlab.** Calcular el determinante de C

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 & -4 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Figura 17

Cálculo de determinantes mediante Matlab



Nota. Viñamagua, G., 2023.

3.7 Aplicaciones de determinantes

Las aplicaciones de matrices son de gran utilidad debido a su versatilidad y capacidad para dar soluciones a problemas complejos en diversas áreas. Las matrices permiten representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera eficiente, lo que es esencial en campos como la física, la ingeniería, la economía y seguridad en la criptografía, a continuación, se presentan algunos problemas.

Problema 1. En una granja se venden pollos, pavos y perdices a razón de 1,2, 0,9 y 2,4 dólares/kg respectivamente. En cierta semana, los ingresos totales de la granja ascendieron a 3.420 dólares. Además, se sabe que la cantidad de pollo vendida superó en 100 kg a la de pavo y que se vendió de perdiz la mitad que de pavo.

a. Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad vendida de cada tipo de carne.
b. Expresar matricialmente el problema.

Solución.

Realizamos el planteamiento del problema.

x: Kg de pollo vendidos

y: Kg de pavo vendidos

z: Kg de perdiz vendidos

$$\left.\begin{array}{c} 1.2x + 0,9y + 2.4z = 3420 \\ x = y + 100 \\ z = \frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 1.2x + 0,9y + 2.4z = 3420 \\ x - y = 100 \\ -y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

Realizamos los cálculos para resolver el sistema lineal de ecuaciones y encontrar las tres incógnitas x, y y z, aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1,2 & 0,9 & 2,4 & 3120 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-1,2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2,1 & 2,4 & 3300 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2,1F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6,6 & 3300 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{c} x - y = 100 \\ y - 2z = 0 \\ 6,6z = 3300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1100\text{kg} \\ y = 1000\text{kg} \\ z = 500\text{kg} \end{array}\right.$$

En conclusión, se han vendido 1100 kg de carne de pollo, 1000 kg de carne de pavo y 500 kg de carne de perdiz.

Problema 2. Una compañía representa a 3 refinerías de petróleo, cada refinería produce 3 productos basados en el crudo, alquitrán, gasóleo y gasolina, se sabe que de un barril de petróleo se extrae:

- Alquitrán. Refinería 1: 2; Alquitrán. Refinería 2: 3; Alquitrán. Refinería 3: 5; Total de demanda Alquitrán: 36
- Gasóleo. Refinería 1: 3; Gasóleo. Refinería 2: 7; Gasóleo. Refinería 3: 4; Total de demanda Gasóleo: 39
- Refinería 1: 4; Gasolina. Refinería 2: 2; Gasolina. Refinería 3: 3; Total de demanda Gasolina: 33

¿Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda?

Solución. Planteamiento del problema es construir el sistema lineal de ecuaciones teniendo en cuenta el enunciado del problema.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 36 \\ 3x + 7y + 4z = 39 \\ 4x + 2y + 3z = 33 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales de 3 incógnitas.

$$x = \frac{|A_1|}{|A|};\, y = \frac{|A_2|}{|A|};\, z = \frac{|A_3|}{|A|}$$

Calculamos el determinante de A.

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (42 + 30 + 48) - (140 + 16 + 27) = 120 - 183 = -63$$

Calculamos las variables x, y y z.

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 33 & 3 & 5 \\ 39 & 7 & 3 \\ 33 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{2*7*33+3*39*4+36*3*2-4*7*36-2*39*2-33*3*3}{-63} = \frac{-315}{-63} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 36 & 5 \\ 3 & 39 & 4 \\ 4 & 33 & 3 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{2*39*3+36*4*4+5*3*33-4*39*5-33*4*2-3*36*3}{-63} = \frac{-63}{-63} = 1$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 36 \\ 3 & 7 & 39 \\ 4 & 2 & 33 \end{vmatrix}}{det(A)} = \frac{2*7*33+3*39*4+36*3*2-4*7*36-2*39*2-33*3*3}{-63} = \frac{-252}{-63} = 4$$

$x = \frac{-252}{-63} = 4$, $y = \frac{-63}{-63} = 1$; y $z = \frac{-315}{-63} = 5$

Por lo tanto, la cantidad de barriles del crudo necesarios para cada refinería es:

$$\begin{cases} 4 \text{ barriles para la Refiner}\text{í}\text{a } 1 \\ 4 \text{ barriles para la Refiner}\text{í}\text{a } 2 \\ 4 \text{ barriles para la Refiner}\text{í}\text{a } 3 \end{cases}$$

3.8 Recursos interactivos

En la siguiente infografía, se proporciona una explicación detallada de la aplicación de determinantes. Esta herramienta utiliza el simulador matemático GeoGebra en línea. Esta demostración gráfica te permitirá visualizar y comprender de manera interactiva las coordenadas de intersección que se forman entre las rectas que pasen por los puntos dados. Te recomendamos seguir las instrucciones cuidadosamente para obtener el máximo beneficio de esta herramienta. ¡Disfruta del aprendizaje a través de esta experiencia práctica y visualmente intuitiva proporcionada por GeoGebra!

Aplicación de determinantes

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de las operaciones de determinantes, cálculo por medio de los simuladores matemáticos y sus aplicaciones, se recomienda la lectura del libro. Álgebra lineal y sus aplicaciones de: Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer las aplicaciones de determinantes.
4. Leer y comprender los métodos para calcular un determinante.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, determinantes.
6. Finalmente, le animo a desarrollar la autoevaluación 3, donde se presentan una serie de ejercicios y actividades relacionados con el tema de determinantes y sus operaciones. Estas actividades le ayudarán a confirmar y fortalecer sus conocimientos.

Autoevaluación 3

Seleccione la opción correcta.

1. **Cuál es la definición de determinante de una matriz**:

    a. A cada matriz cuadrada A se le concede un escalar (real) particular denominado determinante de A, denotado por $|A|$ o por: $\det(A)$. Este escalar permite caracterizar algunas propiedades de la matriz, por ejemplo, el determinante de A es no nulo sí y sólo sí, A es invertible.

b. A cada matriz cuadrada A se le concede un número complejo particular denominado determinante de A, denotado por $|A|$ o por: $\det(A)$. Este complejo permite caracterizar algunas propiedades de la matriz, por ejemplo, el determinante de A es no nulo sí y sólo sí, A es invertible.

c. A cada matriz transpuesta A se le concede un escalar (real) particular denominado determinante de A, denotado por $|A|$ o por: $\det(A)$. Este escalar permite caracterizar algunas propiedades de la matriz, por ejemplo, el determinante de A es nulo, sí y sólo sí, A es invertible.

2. **Seleccionar la opción correcta con el enunciado de la siguiente propiedad de los determinantes:**

   a. El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su traspuesta: $|A| = |A^T|$

b. El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su inversa:

$|A| = |A^-1|$

c. El determinante de una matriz cuadrada es igual a k por la matriz

A: $|A| = k[A]$

3. **Seleccionar la opción correcta con el enunciado de la siguiente propiedad de los determinantes**

   a. El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es 0
   b. El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es 1
   c. El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es -1

4. **Calcular el determinante de la matriz A, por el método de Sarrus.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

   a. 9
   b. 8
   c. 10

5. **Calcular el determinante de la matriz A, por el método de Laplace.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a. 50
b. 60
c. 62

6. **Calcular el determinante de la matriz A, por el método de Gauss.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a. 15
b. 30
c. 32

7. **Calcular el determinante de la matriz A, por el método de cofactores.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

a. 158
b. 162
c. 160

8. **Calcular el determinante de A, mediante el simulador matemático Wólfram Alpha.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. 120
b. 50
c. 0

9. **Calcular el determinante de A, mediante el simulador matemático GeoGebra y Matlab.**

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

a. 6
b. 8
c. -7

10. **Resolver el siguiente problema sobre aplicaciones de los determinantes.**

Esperanza vende revistas. El jueves, viernes y sábado vendió en total 91. El jueves vendió 5 más que el viernes y el sábado vendió 6 más que el jueves. ¿Cuántos vendió cada día?, considerar, x: Revistas jueves; y: Revistas viernes y z: Revistas sábados

a. $x = 30; \quad y = 25; \quad z = 36$

b. $x = -30; \quad y = 25; \quad z = -36$

c. $x = 20; \quad y = 36; \quad z = 30$

Ir al solucionario

Resultados de aprendizaje 1 a 3:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de determinantes.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos de sistemas de ecuaciones lineales.

  Aplica los conceptos de matrices.

  Aplica los conceptos de determinantes.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos de determinantes.

- Carrera de finanzas

  Resolver y discutir un sistema de ecuaciones lineales mediante diferentes métodos.

  Conocer y aplicar el concepto de matriz y rango en la discusión de ecuaciones lineales.

  Aplicación de determinantes como herramienta para la discusión de sistemas y cálculo de soluciones.

- Carrera de logística y transporte

Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedica algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

Conoce el concepto de sistemas de ecuaciones lineales.

Conoce el concepto de matriz, vector y rango.

Conoce el álgebra de matrices: producto punto, producto cruz, determinante, inversa, dependencia lineal.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 7

Actividades finales del primer bimestre

Estimados estudiantes, en esta semana número 7 de estudio, le invitamos a revisar todos los contenidos del primer bimestre con el fin de obtener buenos resultados en la evaluación presencial. A continuación, le sugerimos las siguientes actividades para lograrlo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Repasar los apuntes y materiales de estudio correspondientes al primer bimestre.
2. Realizar ejercicios y problemas relacionados con los temas abordados: sistemas lineales de ecuaciones, determinantes y
3. Consultar fuentes adicionales, como libros, base de datos, biblioteca virtual y Reas, para ampliar y profundizar en los conceptos clave de las unidades 1 y 2.

4. Participar en sesiones de estudio en grupo o solicitar ayuda a tus compañeros, como también de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con su tutor en caso de dificultad.
5. Explorar y utilizar los simuladores matemáticos relacionados con la Solución de un sistema lineal de ecuaciones, matrices y determinantes.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 8

Actividades finales del primer bimestre

Estimados estudiantes, en esta última semana 8 de estudio, te invitamos a revisar todos los contenidos del segundo bimestre con el fin de obtener buenos resultados en la evaluación presencial. A continuación, le sugerimos las siguientes actividades para lograrlo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

1. Repasar los apuntes y materiales de estudio correspondientes al primer bimestre.
2. Realizar ejercicios y problemas relacionados con los temas abordados: sistemas lineales de ecuaciones, determinantes y
3. Consultar fuentes adicionales, como libros, base de datos, biblioteca virtual y Reas, para ampliar y profundizar en los conceptos clave de la unidad 2 y 3.
4. Participar en sesiones de estudio en grupo o solicitar ayuda a tus compañeros, como también de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con su tutor en caso de dificultad.
5. Explorar y utilizar los simuladores matemáticos relacionados con la solución de un sistema lineal de ecuaciones, matrices y determinantes.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 4:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones con vectores.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos y operaciones con vectores.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones con vectores.

- Carrera de finanzas

  Conocer la estructura algebraica del espacio vectorial en términos abstractos y los elementos básicos.

- Carrera de logística y transporte

  Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedicar algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

  Conoce el concepto de matriz, vector y rango.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje esperado en las carreras mencionadas, como Administración de Empresas, Contabilidad y Auditoría, Economía, Finanzas, Ingeniería en Logística y Transporte, y Tecnologías de la Información, revisar regularmente el progreso y evaluar si está alcanzando sus metas sobre la comprensión de las propiedades de los vectores en R2, R3 y Rn, así como, sus operaciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 9

El estudio de los espacios vectoriales no difiere mucho del estudio de R^n, ya que se pueden aplicar las experiencias geométricas en R^2 y R^3 para visualizar algunos conceptos generales. La unidad comienza con las definiciones básicas de los espacios vectoriales y se desarrolla gradualmente a lo largo del mismo. La finalidad de esta sección es demostrar la similitud entre otros espacios vectoriales y R^n, utilizando la terminología de espacio vectorial para analizar aspectos importantes de las matrices rectangulares, como el rango. Además, se aplican los conceptos estudiados a situaciones prácticas, como señales discretas y ecuaciones en diferencias utilizadas en los sistemas de control digital, como en el transbordador espacial. También se aborda el estudio de las aplicaciones, que representan un cambio de enfoque en comparación con las secciones más teóricas de la presente unidad.

Unidad 4. Vectores en R^n

4.1 Introducción

En el aprendizaje de vectores se analizan diferentes conceptos, propiedades y aplicaciones relacionadas con estas entidades matemáticas. Algunos de los temas que se estudian en este apartado de vectores incluyen: definición de vectores, representación de vectores, propiedades de los vectores, operaciones con vectores, independencia lineal, producto escalar, producto vectorial, uso de los simuladores matemáticos para operaciones con vectores y las aplicaciones de los vectores.

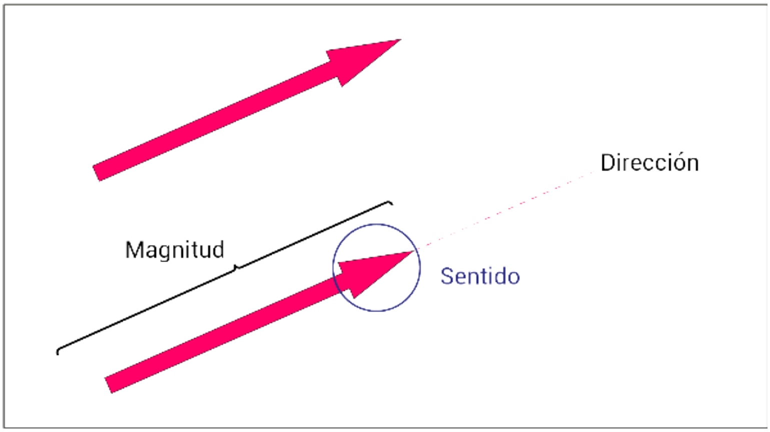
4.2 Definición de un vector geométricamente

Los vectores son segmentos de una línea recta que tienen una dirección específica dentro de un plano bidimensional o tridimensional. También se les conoce como elementos de un espacio vectorial. Su expresión matemática representa los vectores mediante una letra con una flecha encima, y visualmente, se emplea el recurso de una flecha para señalarlos.

A continuación, en la figura 18, se ilustra la magnitud, dirección y sentido de un vector.

Figura 18

Representación gráfica de un vector



Nota. Viñamagua, G., 2023.

4.3 Características de vectores

Los vectores tienen las siguientes características:

- **Sentido**: viene representado por la punta de la flecha que se expresa gráficamente, indicando el lugar hacia el cual se dirige el vector.

- **Dirección**: es la recta sobre la que se plantea el vector, la cual es continua e infinita en el espacio.
- **Módulo**: se trata de la longitud entre el inicio y fin del vector, es decir, dónde empieza y dónde termina la flecha.
- **Amplitud**: es la expresión numérica de la longitud gráfica del vector.
- Punto de aplicación: se refiere al lugar geométrico en el que inicia el vector a nivel gráfico.
- **Nombre**: es la letra que acompaña al vector que se representa gráficamente, coincidiendo con la magnitud o con la suma del punto de aplicación y el fin de su valor.

4.4 Tipos de vectores

Existen diferentes categorías en las que se pueden clasificar los vectores, conózcalos en la siguiente infografía:

[Tipos de vectores]

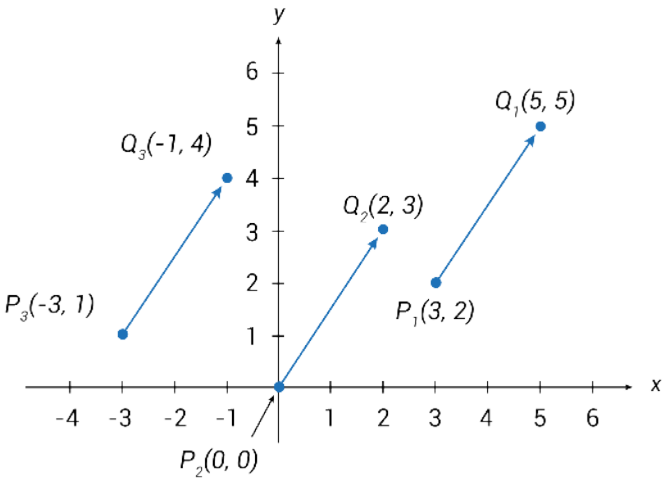
4.5 Vectores en el plano

Un vector en el plano se puede denotar como un par ordenado de números reales (x, y), donde "x" representa la componente horizontal del vector y "y" representa la componente vertical del vector. Por ejemplo, el vector $u = [x_1 y_1]$; donde son números reales, denominados componentes de u. Cabe notar que se refiere a un vector en el plano simplemente como vector.

Ejemplo 1. Representación de vectores en el plano.

Figura 19

Representación gráfica de vectores en el plano



Nota. Adaptado de *Algebra lineal fundamentos y aplicaciones* (p. 234), por Kolman y Hill, 2013, Pearson.

Partiendo de que, un vector es una también una matriz, se dice que los vectores:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

son iguales si: $x_1 = x_2$ y $u = [2\ 1]$ y $v = [0\ 1]$. En otras palabras, dos vectores son iguales si sus componentes respectivas también son iguales.

Ejemplo 2. Los vectores: $u = [2 \quad 1]$ y $v = [2 \quad 1]$; Son iguales, ya que sus componentes respectivas son diferentes.

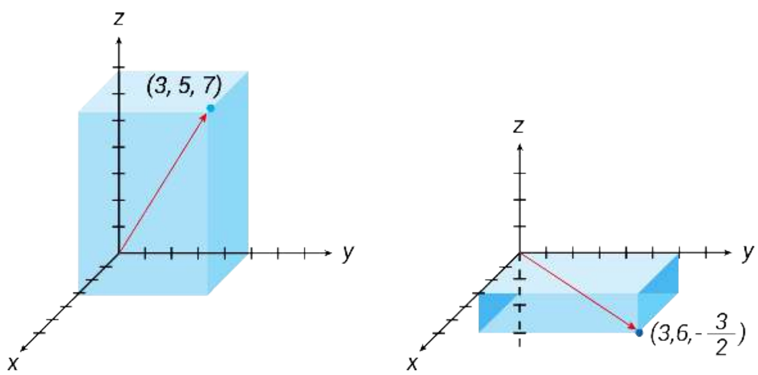
Ejemplo 3. Los vectores: $u = [2 \quad 1]$ y $v = [0 \ 1]$; No son iguales, ya que sus componentes respectivas son diferentes

4.6 Vectores en el espacio

Un vector en el espacio es cualquier fracción orientada que tiene su origen en un punto y su extremo final en el otro. En el espacio tridimensional, los vectores se representan con una flecha en el espacio, donde la longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la dirección de la flecha indica la dirección del vector que se estudia en el próximo apartado. Además, un vector en el espacio puede estar compuesto por tres componentes: una componente en el eje x, una componente en el eje y, y una componente en el eje z que son números reales.

Figura 20

Representación gráfica de vectores en el espacio



Nota. Adaptado de *Algebra lineal fundamentos y aplicaciones* (p. 233), por Kolman y Hill, 2013, Pearson.

Interpretación.

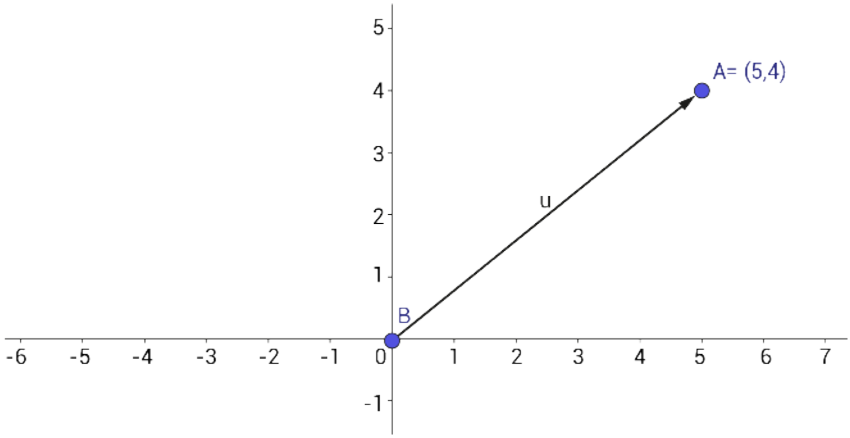
El plano xy es el que está determinado por los ejes x y y. Los planos xz y yz se definen de manera similar. En R^3, los componentes de un vector u se denotan como x_1, y_1, z_1. Por lo tanto, $u = (x_1, y_1, z_1)$.

4.7 Vectores en R^2

Los vectores en R^2 se refieren a los vectores en un espacio vectorial bidimensional conocido como espacio euclidiano de dos dimensiones. R^2 representa el conjunto de todos los vectores con dos componentes, donde cada componente es un número real.

Figura 21

Representación gráfica de vector en 2D



Nota. Viñamagua, G., 2023.

Interpretación.

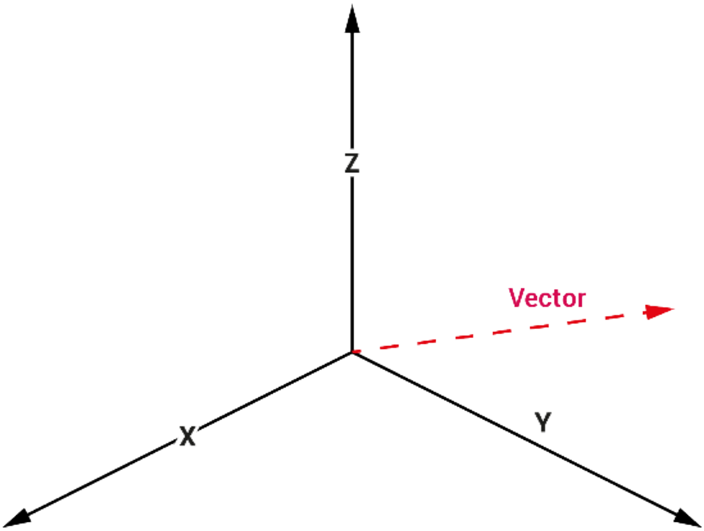
Los vectores en R^2 se pueden representar como un par ordenado de números reales (x, y), donde "x" es la primera componente y "y" es la segunda componente del vector. Gráficamente, un vector en R^2 se puede visualizar como una flecha en un plano cartesiano, donde la posición de la flecha indica la ubicación del vector en relación con el origen y la dirección de la flecha indica la dirección del vector.

4.8 Vectores en R^3

Los vectores en R^3 se refieren a los vectores en un espacio tridimensional conocido como espacio euclidiano tridimensional. R^3 representa el conjunto de todos los vectores con tres componentes, donde cada componente es un número real.

Figura 22

Representación gráfica de vector en 3D



Nota. Viñamagua, G., 2023.

Un vector en R^3 se puede representar como una terna ordenada de números reales (x, y, z), donde "x" es la primera componente, "y" es la segunda componente y "z" es la tercera componente del vector. Gráficamente, un vector en R^3 se puede visualizar como una flecha en un sistema de coordenadas tridimensional, donde la posición de la flecha indica la ubicación del vector en relación con el origen y la dirección de la flecha indica la dirección del vector.

4.9 Vectores en R^n

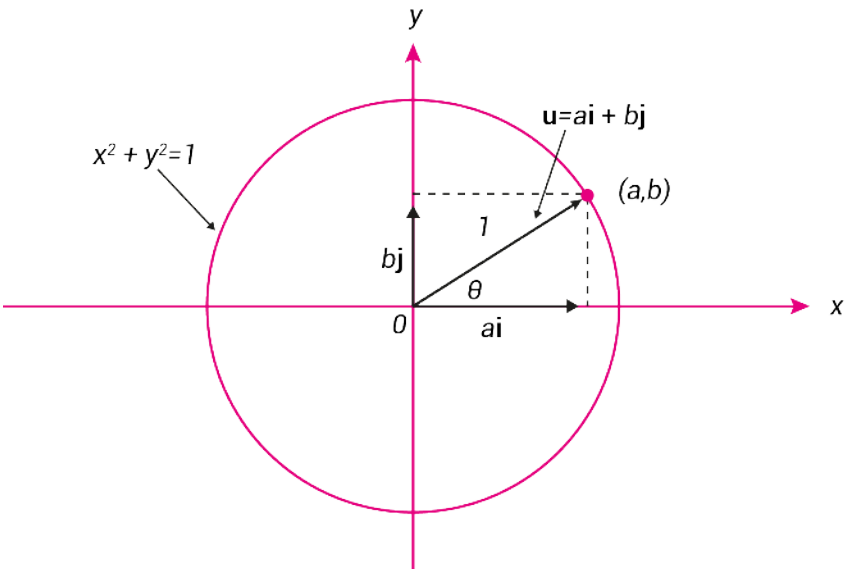
Los vectores en R^n, hacen referencia a los vectores en un espacio vectorial n-dimensional llamado **espacio euclidiano n-dimensional**. En esto, R^n representa el conjunto de cada uno de los vectores con n-componentes, donde cada componente es un número real. Los vectores en R^n se puede representar como un patrón ordenado de n-números reales, por ejemplo, $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, donde cada x_i es la i-ésima componente del vector. Por ejemplo, los números complejos se los denota por: C para representar al $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$ conjunto de todos los vectores de dimensión $n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, donde cada es un número complejo.

4.10 Vector unitario

Un vector unitario es un vector con longitud 1.

Figura 23

Círculo centrado en el origen con radio 1



Nota. Adaptado de *Álgebra lineal fundamentos y aplicaciones* (p. 238), por Grossman y Flores, 2012, McGraw Hill.

Ejemplo. El vector $u = \left(\frac{1}{2}\right) i + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) j$; es un vector unitario, ya que:

$$|u| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

4.11 Longitud de un vector

La longitud (también llamada magnitud o norma) del vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en es: R^nes: $||u|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$; También llamado módulo de un vector y siempre es un número positivo menos el vector nulo tiene módulo cero.

Ejemplo. Sean los vectores $u = (2, 3, 2, -1)$ y $v = (4, 2, 1, 3)$; calcular:

$$||u|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$$

$$||v|| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{30}$$

4.12 Distancia entre dos puntos

Se define como la longitud del vector $u - v$, donde: $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$; Por consiguiente, la distancia está dada por:

$$||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Ejemplo. Sean los vectores $u = (2, 3, 2, -1)$ y $v = (4, 2, 1, 3)$; calcular la distancia entre u y v:

$$||u - v|| = \sqrt{(2-4)^2 + (3-2)^2 + (2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{22}$$

4.13 Definición del ángulo entre dos vectores en R^n

En el ángulo θ entre dos vectores diferentes de cero en R^n está definido por

$$||u|| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{18}$$

$$||v|| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{30}$$

Ejemplo. Determinar el ángulo entre los vectores: $u = (-4, 0, 2, -2)$ $v = (2, 0, -1, , 1)$

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||||v||} = \frac{-12}{\sqrt{24}\sqrt{6}} = -1$$

Por consiguiente, $\theta = \pi$. Es lógico considerar que, u y v tienen direcciones opuestas, ya que $u =- 2v$.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de la definición de vectores, representación de vectores y sus propiedades, se recomienda la lectura del libro. Álgebra lineal y sus aplicaciones de: Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales,, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer el concepto de un vector en el plano y espacio.
4. Leer y comprender las propiedades de los vectores.
5. Analizar los ejercicios resueltos en los libros de Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores: Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, dedicado a los vectores.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 10

Unidad 4. Vectores en R^n

4.14 Producto escalar

El producto escalar, también conocido como producto punto o producto interno, consiste en una operación entre dos vectores que da como resultado un número escalar, es decir, un número real. Se denota por el símbolo "$\cdot$" o por la notación $\langle u, v\rangle$. El producto punto de dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ en R^3 se calcula de la siguiente forma:

$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$; o sea, se multiplican los componentes correspondientes de los dos vectores y se suman los resultados. El resultado del producto punto es un número escalar (real), no un vector. Este número representa la proyección del vector u sobre el vector v (o viceversa) y cuantifica la similitud o la relación entre los dos vectores. Por otro lado, sí, el producto escalar es cero: $u \cdot v = 0$, significa que los vectores son ortogonales o perpendiculares entre sí. El producto escalar tiene algunas propiedades útiles.

Propiedades del producto escalar. Si, u, v y w, son vectores en R^n y c es un escalar, entonces:

a. $u \cdot u \geq 0; u \cdot u = 0$; si y solo si $u = 0$
b. $u \cdot v = v \cdot u$
c. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
d. $(cu) \cdot v = u \cdot (cv) = c(u \cdot v)$

Ejemplo 1. Determinar el producto escalar de los vectores:

$u = (3, 7, 5)$ y $v = (2, -3, 1)$

$u \cdot v = (3)(2) + (7)(-3) + (5)(1) = -10$

Ejemplo 2. Determinar el producto escalar de los vectores:

$u = (12, 4, 6)$ y $v = (8, 9, -1)$

$u \cdot v = (12)(8) + (4)(9) + (6)(-1) = 126$

Ejemplo 3. Determinar el producto escalar de los vectores:

$u = (5, -2, 10)$ y $v = (7, 4, 4)$

$u \cdot v = (5)(7) + (-2)(4) + (10)(4) = 67$

4.15 Producto vectorial

El producto vectorial, también conocido como producto cruz, es una operación entre dos vectores que produce un nuevo vector perpendicular a los vectores originales. Se denota por el símbolo "x".

El producto vectorial de dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ en se calcula de la siguiente forma:

Las operaciones para el producto vectorial están sujetas a ciertas propiedades que definen las reglas y características del espacio vectorial.

Paso 1. Identifica los componentes de los vectores. *u* tiene componentes (u_1, u_2, u_3) y *v* tiene componentes (v_1, v_2, v_3).

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = +i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Paso 2. Calcula el producto vectorial resolviendo el determinante por cofactores de la primera fila (i, j, K).

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)i - (u_1 v_3 - u_3 v_1)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k$$

Paso 3. Realiza las operaciones de multiplicación y resta.

$$u \times v = (u_2 v_3 - u_3 v_2)i - (u_1 v_3 - u_3 v_1)j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)k$$

Como resultado del producto vectorial se tiene un nuevo vector que es perpendicular (ortogonal) a los vectores u y v. La dirección del vector resultante sigue la regla de la mano derecha: si se coloca la mano derecha extendida con los dedos en la dirección de u y se gira hacia v, el pulgar apuntará en la dirección del resultado. El producto vectorial tiene algunas propiedades útiles.

4.16 Propiedades del producto vectorial o cruz:

- Anti conmutativa $u \times v = -(v \times u)$: No es conmutativo
- Distributiva respecto de la suma: $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$
- Asociatividad con la multiplicación escalar:
  $(ku) \times v = k(u \times v) = u \times (kv)$

Ejemplo 1. Determinar el producto vectorial de los vectores:

$u = (3, 1, 0)$ y $v = (2, 1, -1)$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3j + z$$

Ejemplo 2. Determinar el producto vectorial de los vectores:

$u = (3, -2, 4)$ y $v = (1, 5, -3)$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = +i\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -14i + 13j + 17z$$

Ejemplo 3. Hallar el área del paralelogramo que tiene como dos de sus lados a los siguientes vectores: $u = (2, 3, -2)$ y $v = (5, 0, -1)$

Solución. Como el área de un paralelogramo coincide con el módulo del producto vectorial de los vectores que lo forman. Entonces:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{vmatrix} = +i\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -3i - 8j - 15z$$

Finalmente calculamos su módulo:

$$Área = \sqrt{(3)^2 + (-8)^2 + (-15)^2} = \sqrt{298} = 17,26$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de las propiedades de los vectores, las operaciones sobre producto escalar y producto vectorial, se recomienda la lectura del libro. Álgebra lineal y sus aplicaciones de: Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer las propiedades del producto punto.
4. Leer y comprender la diferencia entre el producto escalar y el producto punto.
5. Analizar los ejercicios resueltos en los libros de Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores: Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, dedicado a los vectores.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 11

Unidad 4. Vectores en R^n

4.17 Rectas y planos

Las rectas en R^2**,** están definidas por dos puntos distintos cualesquiera, $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en R^2 determinan una línea recta cuya ecuación es: $ax + by + c = 0$; donde a, b y c son números reales, y a y b no son simultáneamente cero. Entonces, P_1 y P_2 pertenecen a la recta y sus coordenadas satisfacen la ecuación:

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Ahora escribimos todas las ecuaciones anteriores como un sistema lineal de ecuaciones en las incógnitas a, b y c, con lo que obtenemos:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$$

Se sabe que este, es un sistema homogéneo, por lo tanto, tiene una solución no trivial sí y solo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero, entonces:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se puede concluir que, todo punto $P(x, y)$ de la recta satisface el determinante igual a cero y, recíprocamente, todo punto que satisface dicha igualdad pertenece a la recta.

Ejemplo 1. Hallar una ecuación de la recta determinada por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$:

Paso 1. Obtén las coordenadas de los puntos dados. $P_1(1, 3)$ y $P_2(4, 6)$.

Paso 2. Utiliza la fórmula de la ecuación de la recta. $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$

Paso 3. Sustituir los valores de las incógnitas en la fórmula

$$y - 3 = \frac{3-6}{1-4}(x-1); \Rightarrow y - 3 = \frac{-3}{-3}(x-1); \Rightarrow y = x - 1 + 3; \Rightarrow y = x + 2$$

Paso 4. La ecuación de la recta determinada por los puntos: $P_1(2, 3)$ y $P_2(-1,$ ¡$5)$ es: $x - y + 2 = 0$

Las rectas en R^3, están determinadas en R^3 si se especifican su dirección y uno de sus puntos. Sea $u = (a, b, c)$ un vector no nulo distinto de cero en R^3, y sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto en R^3. Sean w_0 el vector asociado con P_0, y x el vector asociado con el punto $P(x, y, z)$. La recta L que pasa por P_0 y es paralela a u consiste en los puntos $P(x, y, z)$ tales que: $x = w_0 + tu; -\infty < t < \infty$.

Esta ecuación se denomina ecuación ***paramétrica*** **de** L, ya que contiene el parámetro t, al que puede asignarse cualquier número real. También puede escribirse en términos de las componentes, como:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$

que se denominan **ecuaciones paramétricas de** L. con, $-\infty < t < \infty$

Ejemplo 2. Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta L que pasa por los puntos $P_0(2, 3, -4)$ y $P_1(3, -2, 5)$.

Solución. La recta que se busca es paralela al vector $u = \overrightarrow{P_0P_1}$. Ahora: $u = (3 - 2, -2 - 3, 5 - (-4)) = (1, -5, 9)$. Como P_0 está en la recta, podemos escribir ecuaciones paramétricas de L de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \\ z = -4 + 9t \end{cases}$$

Despejando t de cada ecuación e igualando los resultados, se obtienen las ecuaciones en forma simétrica de la recta que pasa por P_0 y es paralela a u:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Los planos en R^3, pueden determinarse mediante un punto en el plano y un vector perpendicular al plano. Este vector se denomina normal al plano. Para obtener una ecuación del plano que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que contiene el vector no nulo $n = (a, b, c)$ como normal, procedemos de la manera siguiente.

Un punto $P(x, y, z)$ está en el plano, si y sólo si, el vector es perpendicular a n. Por lo tanto, $P(x, y, z)$ está en el plano, sí y solo si: $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Como, $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, entonces, se puede escribir de la siguiente manera:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Simplificando se obtiene la ecuación: $ax + by + cz + d = 0$

Ejemplo 3. Determinar una ecuación del plano que pasa por el punto $(3, 4, -3)$ y es perpendicular al vector $n = (5, -2, 4)$.

Solución. Al sustituir en $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, obtenemos la ecuación del plano como:

$$5(x - 3) - 2(y - 4) + 4(z + 3) = 0$$

$$5x - 15 - 2y + 8 + 4z + 12 = 0$$

$$5x - 2y + 4z = 5$$

4.18 Resolución de vectores utilizando los simuladores matemáticos

Los cálculos y gráficos generados a través de simuladores matemáticos se presentan y se animan en una pantalla de computadora o dispositivo móvil. El uso de las figuras creadas por un *software* se ha extendido ampliamente y está experimentando un rápido crecimiento en diversas aplicaciones.

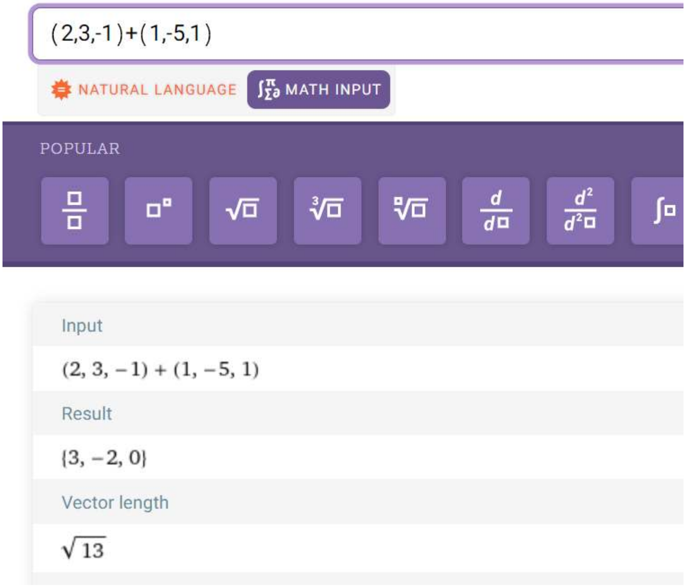
- **Wólfram Alpha**

Ejemplo 1. Dados los vectores: $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -5, 1)$ y $w = (3, 4, 5)$. Realizar la siguiente operación: $u + v = \sqrt{13}$

Solución.

Figura 24

Suma de dos vectores mediante Wólfram Alpha

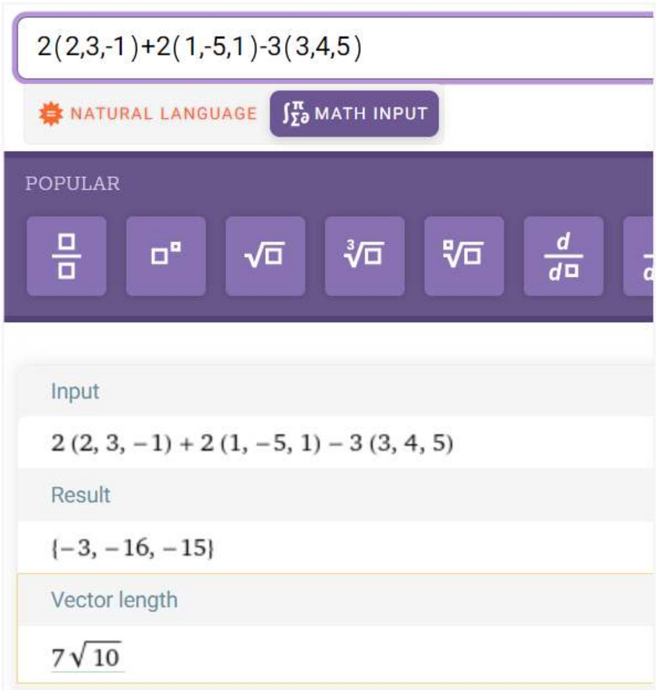


Nota. Viñamagua, G., 2023.

Dados los vectores: $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -5, 1)$ y $w = (3, 4, 5)$. Realizar la siguiente operación: $2u + 2v - 3w = 7\sqrt{10}$

Figura 25

Operaciones de vectores mediante Wolfram Alpha



Nota. Viñamagua, G., 2023.

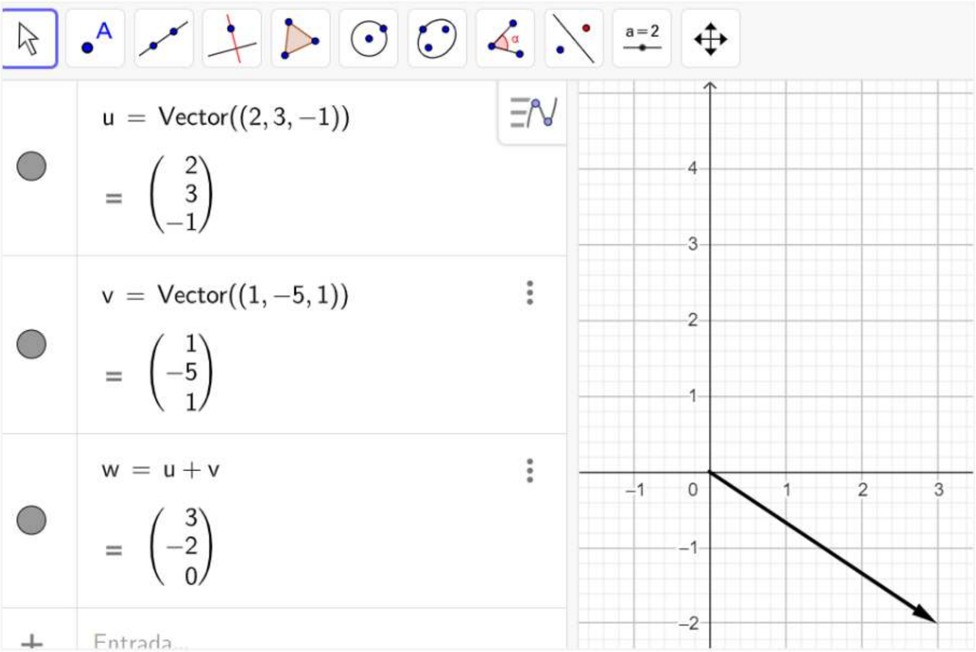
- **GeoGebra**

Ejemplo 1. Dados los vectores: $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -5, 1)$ y $w = (3, 4, 5)$. Realizar la siguiente operación: $u + v = \sqrt{13}$

Solución.

Figura 26

Suma de dos vectores mediante GeoGebra

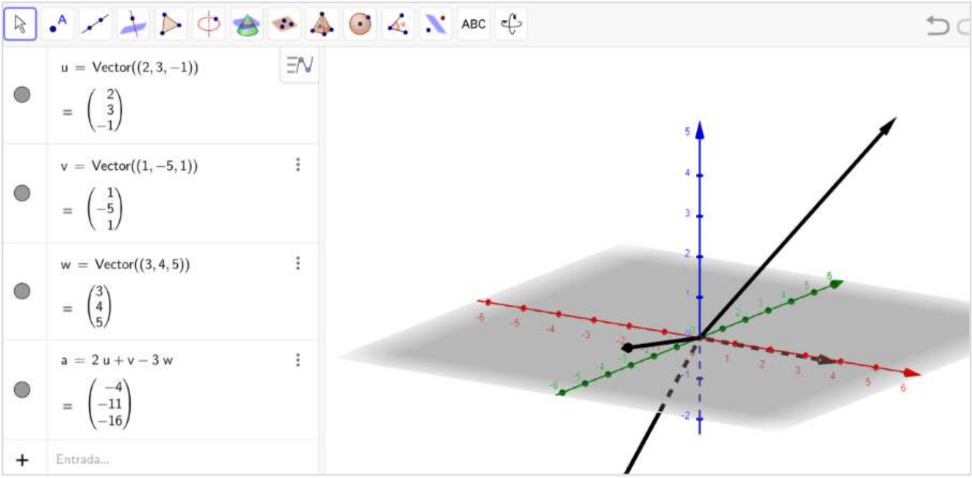


Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Dados los vectores: $u = (2, 3, -1)$, $u = (2, 3, -1)$ y $w = (3, 4, 5)$. Realizar la siguiente operación: $2u + 2v - 3w = 7\sqrt{10}$

Figura 27

Operaciones de vectores mediante GeoGebra



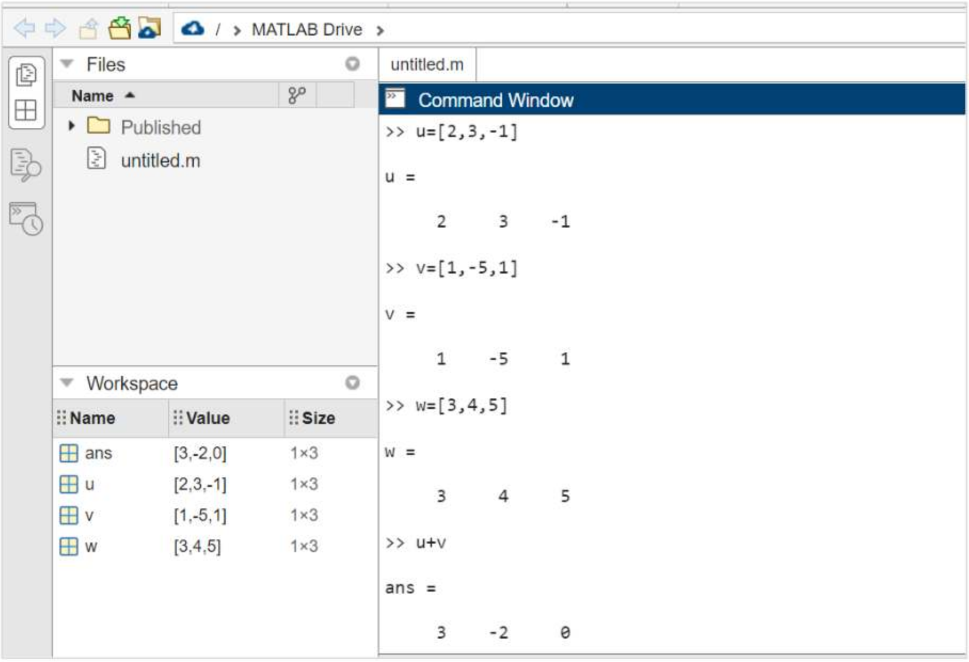
Nota. Viñamagua, G., 2023.

- **Matlab**

Ejemplo 1. Dados los vectores: $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -5, 1)$ y $w = (3, 4, 5)$. Realizar la siguiente operación: $u + v = \sqrt{13}$

Figura 28

Suma de vectores mediante Matlab

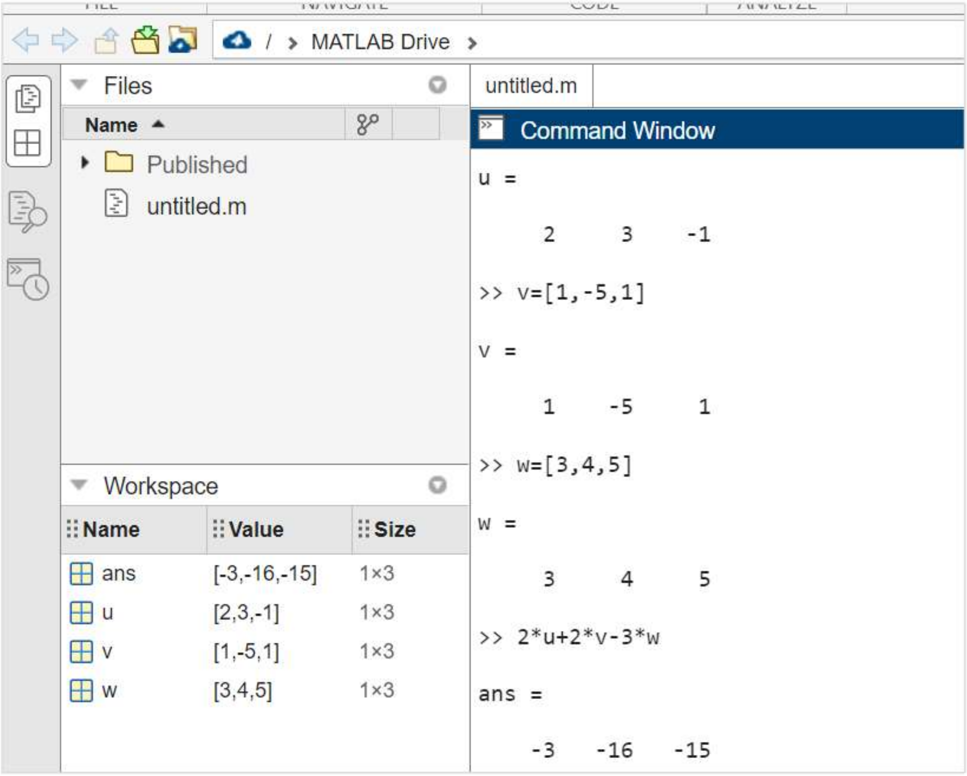


Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Dados los vectores: $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -5, 1)$ y $w = (3, 4, 5)$. Realizar la siguiente operación: $2u + 2v - 3w = 7\sqrt{10}$

Figura 29

Operaciones con vectores mediante Matlab



Nota. Viñamagua, G., 2023.

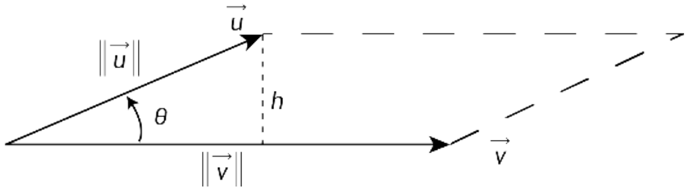
4.19 Aplicaciones de los vectores

Los vectores son herramientas matemáticas fundamentales que se utilizan en una amplia variedad de campos y aplicaciones como en la física, geometría, programación por computadora, ingeniería, ciencias de la computación, astronomía, navegación y cartografía. Estas son solo algunas de las aplicaciones de los vectores en diversas áreas del conocimiento y su utilidad en la resolución de problemas en otras ciencias y tecnología. A continuación, se presentan algunos problemas resueltos.

Problema 1. Cálculo del área del paralelogramo sustentado por dos vectores. Sean y dos vectores , no paralelos, como se muestra en la siguiente:

Figura 30

Área del paralelogramo sustentado por dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, no paralelos



Nota. Viñamagua, G., 2023.

Tomando como base al vector v, tenemos: $\acute{A}rea = \text{base} \times \text{altura} = ||\vec{v}|| \times h$

Si: $\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{||\vec{u}||}$ Entonces: $\acute{A}rea = ||\vec{u}||||\vec{v}|| \operatorname{sen}\theta$

Finalmente, por la propiedad del producto vectorial se tiene: $\acute{A}rea = ||\vec{u} \times \vec{v}||$

Problema 2. Encuentra el área del triángulo cuyos vértices son los siguientes puntos $A(2,1,0)$, $B(4,0,3)$ y $C(-1,2,3)$

Solución.

Paso 1. Calculamos los vectores que forman los lados del triángulo mediante las distancias:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,3) - (2,1,0) = (2,-1,3)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (-1,2,3) - (4,0,3) = (-5,2,0)$$

Paso 2. Se conoce que, el área de un triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores que lo forman. Entonces se calcula el producto vectorial de los vectores:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ -5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = +i\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -6i - 15j - k$$

Paso 3. Por último, se calcula el módulo: $|u \times v| = \sqrt{(-6)^2 + (-15)^2 + (-1)^2} = 16.19$

Paso 4. Por lo tanto, se calcula el área del triángulo mediante la siguiente fórmula:

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}|u \times v| = \frac{1}{2}(16.19) = 8.09u^2$$

Problema 3. Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores: $2u + 2v - 3w = u = (1, -2, 1)$, $v = (2, 0, -1)$ y $w = (1, 2, 3)$

Solución. Por lo definido anteriormente:

$$Volumen = |(u \times v)w| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 14 + 4 = 20u^3$$

Entonces el volumen del paralelepípedo es $30u^3$

4.20 Recursos interactivos

En la siguiente infografía, se proporciona una explicación detallada de la demostración gráfica del área del paralelogramo y rectángulo. Esta herramienta utiliza el simulador matemático GeoGebra en línea. Esta demostración gráfica te permitirá visualizar y comprender de manera interactiva los pasos relacionados con el cálculo del área mediante vectores. Te recomendamos seguir las instrucciones cuidadosamente para obtener el máximo beneficio de esta herramienta. ¡Disfruta del aprendizaje a través de esta experiencia práctica y visualmente intuitiva proporcionada por GeoGebra!

[Área del paralelogramo y rectángulo]

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen.

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje del uso de los simuladores matemáticos para realizar operaciones con vectores y sus aplicaciones, se recomienda la lectura del libro. Álgebra lineal y sus aplicaciones de: Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer y consultar, cuáles simuladores son los más usados en el capítulo de vectores.
4. Leer y comprender los métodos para resolver problemas de vectores aplicados a otras ciencias y la vida cotidiana.
5. Analizar los ejercicios resueltos en los libros de álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, dedicado a los vectores.
6. Finalmente, le animo a desarrollar la autoevaluación 4, donde se presentan una serie de ejercicios y actividades relacionadas con el tema de la unidad 4, Vectores. Estas actividades le ayudarán a confirmar y fortalecer sus conocimientos.

Autoevaluación 4

Seleccione la opción correcta.

1. **Cuál es la definición de un vector en R^2**

a. Los vectores en R^2 representan el conjunto de todos los vectores con dos componentes, donde cada componente es un número real.
b. Los vectores en R^2 representan el conjunto de todos los vectores con tres componentes, donde cada componente es un número natural.
c. Los vectores en R^2 representan una ecuación de primer grado con todos los vectores con dos componentes, donde cada componente es un número racional.

2. **Cuál es la definición de un vector en R^3**

a. Los vectores en R^3 se refieren a los vectores en un espacio bidimensional conocido como espacio euclidiano bidimensional.
b. Los vectores en R^3 se refieren a los vectores unitarios en el plano cartesiano conocido como espacio euclidiano unidimensional.
c. Los vectores en R^3 se refieren a los vectores en un espacio tridimensional conocido como espacio euclidiano tridimensional.

3. **Cuál es la definición de un vector en R^n**

a. Los vectores en R^n, hacen referencia a los vectores en un espacio vectorial de dos dimensiones llamado ***espacio euclidiano bi-dimensional***.

b. Los vectores en R^n, hacen referencia a los vectores en un espacio vectorial n-dimensional llamado ***espacio euclidiano n-dimensional***.

c. Los vectores en R^n, hacen referencia a los vectores en un espacio vectorial tridimensional llamado ***espacio euclidiano tridimensional***.

4. **Dados los vectores:** $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$; ¿Cómo se calcula la distancia entre los vectores u y v?

a. $||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

b. $||u - v|| = \sqrt{(u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + \cdots + (u_n + v_n)^2}$

c. $||u - v|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 - (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$

5. **Calcular la longitud de los siguientes vectores:** $u = (1, 1, -1, -1)$ **y** $v = (2, 2, 2, 2)$

a. $||u|| = 4y||v|| = 2$

b. $||u|| = 3y||v|| = 5$

c. $||u|| = 2y||v|| = 4$

6. **Dados los vectores:** $u = (3i + 4j)v = (-4i + 3j)$**, calcule el ángulo entre los dos vectores.**

a. $\theta = 180^{\circ}$

b. $\theta = 90^{\circ}$

c. $\theta = 45^{\circ}$

7. **Calcular el producto escalar de:** $u = (-2, 1, 4)v = (3, 3, -2)$.

a. $u \cdot v = -11$

b. $u \cdot v = 11$

c. $u \cdot v = 1$

8. **Calcular el producto vectorial de:** $u = (-2, 1, 4)v = (3, 3, -2)$.

a. $u \times v = (4, 8, 1)$

b. $u \times v = (14, 8, 9)$

c. $u \times v = (-14, 8, -9)$

9. **Determinar una ecuación del plano que pasa por los puntos**

$P_1(2,-2,1)$, $P_2(-1,0,3)$ **y** $P_3(5,-3,4)$

a. $a=8, \quad b=15, \quad c=3, \quad d=17 \quad \text{y} \quad 8x+15y+3z+17=0$

b. $a=8, \quad b=15, \quad c=-3, \quad d=17 \quad \text{y} \quad 8x+15y-3z+17=0$

c. $a=8, \quad b=15, \quad c=-5, \quad d=7 \quad \text{y} \quad 6x+15y-3z+7=0$

10. **Resolver el siguiente problema sobre aplicaciones de los vectores: Hallar el área del triángulo sustentado por los vectores:**

$u=(1,2,-1)yv=(2,-1,0)$

a. $Área=\frac{\sqrt{30}}{2}$

b. $Área=\frac{\sqrt{30}}{4}$

c. $Área=\frac{\sqrt{10}}{4}$

Ir al solucionario

Resultado de aprendizaje 5:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones de espacios vectoriales.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos y operaciones de espacios vectoriales.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones de espacios vectoriales.

- Carrera de finanzas

  Conocer el espacio vectorial y las ecuaciones.

- Carrera de logística y transporte

  Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedicar algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

  Conoce las características de un espacio vectorial, subespacio vectorial y sus operaciones.

Para alcanzar el resultado de aprendizaje esperado en las carreras mencionadas, como Administración de Empresas, Contabilidad y Auditoría, Economía, Finanzas, Ingeniería en Logística y Transporte, y Tecnologías de la Información, se propone que el enfoque de los contenidos se centre en la comprensión de los conceptos de espacio vectorial, subespacio y bases. Se busca que el estudiante sea el foco principal de atención en el aula y se estimule su motivación para que adquiera las competencias necesarias en el proceso de formación y pueda resolver problemas de álgebra lineal de manera efectiva.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Recuerde revisar de manera paralela los contenidos con las actividades de aprendizaje recomendadas y actividades de aprendizaje evaluadas.

Semana 12

El objetivo de este capítulo es descomponer la acción de una transformación lineal $x \rightarrow Ax$; en elementos que sean fácilmente comprensibles. A excepción de las matrices abordadas en este capítulo, son cuadradas. Las principales aplicaciones descritas aquí se centran en sistemas dinámicos discretos, incluyendo el ejemplo de los búhos manchados. Sin embargo, los conceptos fundamentales como los vectores y valores propios son valiosos tanto en matemáticas puras como aplicadas, y se presentan en situaciones más generales. Los valores propios también son utilizados para el estudio de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos continuos, proporcionando información crítica en el diseño de ingeniería, y surgen naturalmente en campos como la física, química y análisis matemático.

Unidad 5. Espacios vectoriales

5.1 Introducción a los espacios vectoriales

Los espacios vectoriales, son conceptos fundamentales en álgebra lineal, que es una rama de la matemática, que estudia la definición, axiomas de y operaciones de los espacios vectoriales. En esta unidad se aborda cómo los espacios vectoriales proveen un marco matemático para el estudio de espacios y subespacios vectoriales, la dimensión, la independencia lineal, las transformaciones lineales y sus aplicaciones.

5.2 Definición de espacio vectorial

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de elementos, llamados vectores, en el que se definen dos operaciones básicas: la suma y el producto por un escalar (número real). Los axiomas son válidos para todos los vectores u, v y w en V y también los escalares α y β reales.

Sean, $u+v$ la suma de vectores en V, y αv al producto de un número real α por un vector $v \in V$. Entonces se cumple:

1. $u+v \in V$
2. $u+v=v+u$
3. $(u+v)+w=u+(v+w)$
4. Existe un vector nulo $0v \in V$ tal que: $v+0v=v$
5. Para cada v en V, existe un opuesto $(-v) \in V$ tal que: $v+(-v)=0v$
6. $\alpha v \in V$
7. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$
8. $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$
9. $\alpha(\beta v)=(\alpha\beta)v$
10. $1v=v$

Tener en consideración que V es un espacio vectorial real.

Ejemplo 1. De la definición de espacio vectorial se puede afirmar que es un espacio vectorial.

Los espacios R^n, con $n \geq 1$, son los ejemplos de espacios vectoriales.

Los vectores de R^n, son n - uplas de números reales, esto es:

$(p+q)(x)=p(x)+q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)(\alpha p)=\alpha p(x)=(\alpha a_0)+(\alpha a_1)x$
$+(\alpha a_2)x^2 \in P_2 \ R^n=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n); conx_i \in R\}$

Por otra parte, en R^n, la suma de vectores y el producto por un escalar se definen de siguiente manera:

$u=(u_1, u_2, \ldots, u_n)yv=(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in R^n$

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \in R^n$

$\alpha v = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n) \in R^n$

Se comprueba que las operaciones definidas verifican los axiomas de espacio vectorial.

Ejemplo 2. De acuerdo con las propiedades enunciadas, para cada $mynR^m xn$ es un espacio vectorial.

Se tiene que R^{2x3}, es un espacio vectorial cuyos vectores son las matrices de 2 x 3.

Ejemplo 3.

Sea, P_2 el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 2, incluyendo el polinomio nulo. Así mismo, tener en cuenta que; la suma de polinomios y la multiplicación por un escalar.

Sean: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2 y q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \in P_2$

Realizamos las operaciones:

$(p + q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)$

$(\alpha p) = \alpha p(x) = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x + (\alpha a_2)x^2 \in P_2$

Se demuestra que, las operaciones verifican todos los axiomas de espacio vectorial. Rememorar, el vector nulo en este espacio es el polinomio nulo, es decir, el polinomio cuyos coeficientes son todos iguales a cero.

5.3 Subespacios vectoriales

Un subespacio de un espacio vectorial V es un subconjunto H de V que tiene tres propiedades:

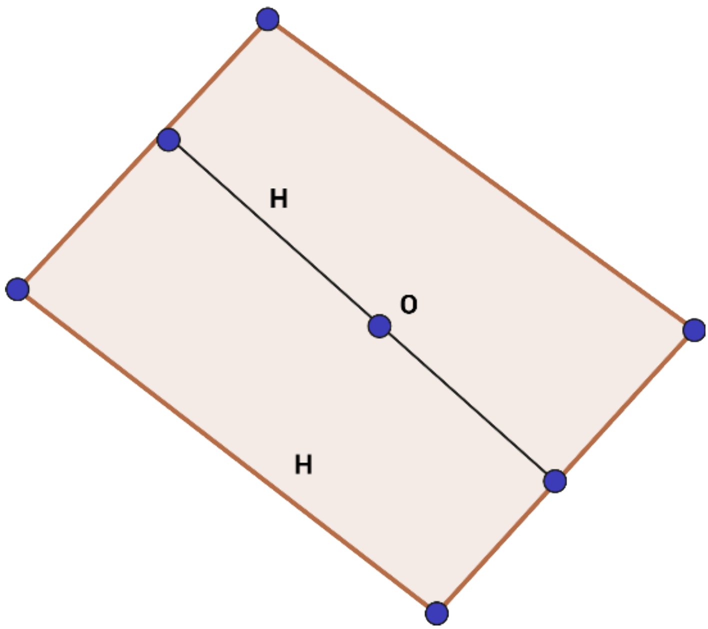
a. El vector cero de V está en H.

b. H es cerrado bajo la suma de vectores. Es decir, por cada u y v en H, la suma está en V.
c. H es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Es decir, para cada u en H y cada escalar c, el vector $c \cdot (u)$ está en H.

Así, cada subespacio es un espacio vectorial. Por el contrario, todo espacio vectorial es un subespacio de sí mismo y, posiblemente, de otros espacios más grandes. El término subespacio se utiliza cuando al menos dos espacios vectoriales están en mente, con uno dentro del otro, y la frase subespacio de V identifica a V como el espacio más grande.

Figura 31

Representación gráfica de un subespacio vectorial en V



Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 1. El conjunto que consta solo del vector cero en un espacio vectorial V es un subespacio de V, llamado subespacio cero, y se representa como $\{0\}$.

Ejemplo 2. El espacio vectorial R^2 no es un subespacio de R^3 porque R^2 ni siquiera es un subconjunto de R^3. (Todos los vectores en R^3 tienen tres entradas, mientras que los vectores de R^2 tienen solo dos). El conjunto.

$H = [s\,t\,0]$, con s y t, números reales

es un subconjunto de R^3 que se "ve" y "actúa" como R^2, aunque lógicamente es distinto de R^2. Demostrar que H es un subespacio de R^3.

Si el vector cero está en H, y H es cerrado bajo la suma de vectores y la multiplicación escalar, debido a que estas operaciones sobre los vectores de H siempre producen vectores cuyas terceras entradas son iguales a cero (y, por lo tanto, pertenecen a H). Entonces, H es un subespacio de R^3.

Ejemplo 3. Determinar el valor de x para que el vector $(1, x, 5) \in R^3$, pertenezca al subespacio $< (1, 2, 3), (1, 1, 1) >$.

Solución.

$(1, x, 5)$ pertenece al subespacio $< (1, 2, 3), (1, 1, 1) >$ si y solo si $(1, x, 5)$ es combinación lineal de $(1, 2, 3)$ y $(1, 1, 1)$, o sea, si existen $\alpha, \beta \in$, tales que:

$(1, x, 5) = \alpha(1, 2, 3) + \beta(1, 1, 1)$, entonces:

$$\begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ x = 2\alpha + \beta \\ 5 = 3\alpha + \beta \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, tenemos $\alpha = 2$, $\beta = -1$ y $x = 3$

5.4 Dependencia e independencia lineal

En este apartado se identifica y se estudian los subgrupos que generan un espacio vectorial V o un subespacio H tan "eficientemente" como sea posible. La idea clave es la de independencia lineal, definida como en R^n.

Linealmente independiente. Se dice que un conjunto indexado de vectores $\{v_1, \ldots, v_p\}$ en V es *linealmente independiente* si la ecuación vectorial: $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0$; tiene solamente la solución trivial, $c_1 = 0, \cdots c_p = 0$.

Linealmente dependiente. Se dice que el conjunto $\{v_1, \ldots, v_p\}$ es *linealmente dependiente* sí $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0$; tiene una solución no trivial, es decir, si hay algunos pesos, $c_1, \ldots, c_p$, no todos cero, tales que la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0$ sea válida.

En tal caso, la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p = 0$ se llama una relación de dependencia lineal entre $v_1, \ldots, v_p$.

Al igual que en R^n, un conjunto que contiene un único vector v es linealmente independiente si y solo sí $v \neq 0$. Además, un conjunto de dos vectores, es linealmente dependiente si y solo si uno de los vectores es un múltiplo del otro. Y cualquier conjunto que contenga al vector cero es linealmente dependiente.

Ejemplo 1. Sea $p_1(t) = 1, p_2(t) = typ_3(t) = (4 - t)$. Entonces, $\{p_1, p_2, p_3\}$ es linealmente dependiente en "P" debido a $p_3 = 4p_1 - p_2$.

Ejemplo 2. Determinar si los vectores

$v_1 = (1, 0, 1, 2)$, $v_2 = (0, 1, 1, 2)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 3)$ en R^4, son linealmente dependientes o si son linealmente independientes.

Solución.

Inicialmente, formamos la ecuación: $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$, que debemos resolver para c_1, c_2 y c_3. El sistema homogéneo resultante sería:

$$c_1 + c_3 = 0$$

$$c_2 + c_3 = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

$$2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Esto muestra que los vectores dados son linealmente independientes.

5.5 Bases y dimensión

Definición. Un conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si:

i. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente.
ii. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera a V.

Se conoce que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera a R^n. De esta forma, se dice que: t***odo conjunto de n vectores linealmente independiente en R^n es una base en R^n*** y se define:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \cdots; \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1. Si $U, W \leq V$ dos subespacios distintos de V y $dim(V) = n$, $dim(U) = dim(W) = n - 1$, ¿Cuánto vale la dimensión de $U \cap W$?

Solución. Sabemos que:

$$n - 1 = max\{dim(U), dim(W)\} \leq dim(U + W) \leq dim(V) = n$$

Por tanto, $dim(U + W) = n, n - 1$.

Pero sí. $dim(U + W) = n - 1$, al ser U, $W \subseteq U + W$, y coincidir las dimensiones, se deduce que $U = U + W = W$, lo cual es falso, por ser $U \neq W$.

Consecuentemente, $dim(U + W) = n$ y llevándolo a:

$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$, deducimos que:

$dim(U \cap W) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

Ejemplo 2. Calcular la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $R^n (n \geq 2)$:

a. $U_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$
b. $U_2 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1 = x_n = 0\}$
c. $U3 =< \{(1,1,1,\ldots,1), (1,2,2,\ldots,2), (1,3,3,\ldots,3), \ldots, (1,n,n,\ldots,n)\} >$

Solución

a. Es claro que
$U_1 = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)/x_1 = x_2 = \cdots = xn\} = \{(x_1, x_1, \ldots, x_1)/x_1 \in R\} =< \{(1,1,\ldots,1)\} >$
y por tanto $dim(U_1) = 1$.
b. El subespacio U_2 está definido por dos ecuaciones linealmente independientes: $x_1 = 0, x_n = 0$. Por tanto,
$dim(U_2) = dim(R^n) - 2 = n - 2$.
c. Colocando los generadores de como filas de una matriz $n \times n$, se tiene:

$$\dim(U_3) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & n & \cdots & n \end{pmatrix} = 2$$ ya que las dos primeras columnas de la matriz son linealmente independientes y a partir de la segunda, todas son iguales.

Ejemplo 3. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores {(1,3), (1,-1)} son bases para R^2.

Solución. Si son bases para R^2 porque son dos conjuntos, además son linealmente independientes y ninguno es múltiplo del otro.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{-49}{24} \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

5.6 Recursos interactivos

En la siguiente infografía, se proporciona una explicación detallada de la demostración gráfica de los espacios vectoriales y el cambio de base. Esta herramienta utiliza el simulador matemático GeoGebra en línea. Esta demostración gráfica te permitirá visualizar y comprender de manera interactiva los conceptos relacionados con los espacios vectoriales y el cambio de base. Te recomendamos seguir las instrucciones cuidadosamente para obtener el máximo beneficio de esta herramienta. ¡Disfruta del aprendizaje a través de esta experiencia práctica y visualmente intuitiva proporcionada por GeoGebra!

Espacios vectoriales y cambio de base

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de la definición y los axiomas de los espacios vectoriales, se recomienda la lectura del libro. Álgebra lineal y sus aplicaciones de: Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer sobre los conjuntos linealmente independientes, bases y dimensión.
4. Leer y comprender las propiedades de los vectores.

5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, espacios vectoriales.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 13

Unidad 5. Espacios vectoriales

5.7 Técnica para seleccionar una base para V que es un subconjunto de S

En este apartado se estudia otro método eficaz para determinar una base para el espacio vectorial V generado por un conjunto de vectores dado, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. La técnica consiste en seleccionar una base para V que es un subconjunto de S, que produce una base para V, pero no se garantiza que sea un subconjunto de S. Por otro lado, con cada matriz A se asocia un número único que, nos da información sobre la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A.

5.8 Definición

Sea A una matriz de $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Las filas de A.

$$v_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$
$$v_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})$$
$$\vdots$$
$$v_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})$$

Consideradas como vectores en R^n, generan un subespacio de R^n, denominado el espacio fila de A. Análogamente, las columnas de A.

$$w_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, w_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta como vectores de R^m, generan un subespacio de R^m, denominado el espacio columna de A.

Ejemplo 1. Sea donde $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ donde $v_1 = (1, -2, 0, 3, -4)$, $v_2 = (3, 2, 8, 1, 4)$, $v_3 = (2, 3, 7, 2, 3)$, $v_4 = (-1, 2, 0, 4, -3)$ y sea V el subespacio de R^5 dado por: $V = genS$. Determinaremos una base para V.

Solución. Observe que V es el espacio fila de la matriz A cuyas filas son los vectores dados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es equivalente por filas a la matriz en forma escalonada reducida por filas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los espacios “fila” de A y B son idénticos, y una base para el espacio fila de B está formada por sus filas no nulas. Por lo tanto, $w_1 = (1, 0, 2, 0, 1)$, $w_2 = (0, 1, 1, 0, 1)$ y $w_3 = (0, 0, 0, 1, -1)$ forman una base en V.

5.9 Procedimiento para determinar una base para el subespacio V de R^n

El procedimiento para determinar una base para el subespacio V de R^n dado por $V = genS$, donde $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de vectores en R^n dados como filas, es el siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

Paso 1. Formar la matriz cuyas filas son los vectores dados en S.

Paso 2. Determinar la forma escalonada reducida por filas B, de la matriz A.

Paso 3. Las filas no nulas de B forman una base para V.

Ejemplo 1. Escriba v como una combinación lineal de la base determinada en $v = (5, 4, 14, 6, 3)$ que está en V, siendo V el subespacio.

Solución. Tenemos $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ y $j_3 = 4$ de modo que: $v = 5w_1 + 4w_2 + 6w_3$.

La solución también proporciona una base para el espacio fila de la matriz A. Observe que los vectores de dicha base no son filas de la matriz A.

5.10 Definición de rango

La dimensión del espacio fila de A se denomina ***rango*** fila de A y la dimensión del espacio columna de A se denomina rango columna de A.

Ejemplo 1. Determinaremos una base para el espacio columna de la matriz A.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ y calcularemos el rango columna de A.

Solución.

Al escribir las columnas de A, como vectores fila, obtenemos la matriz A^T, cuya forma escalonada reducida por filas es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-49}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, los vectores $(1, 0, 0, \frac{11}{24})$, $(0, 1, 0, \frac{-49}{24})$ y $(0, 0, 1, \frac{7}{3})$ forman una base para el espacio fila de A^T. Por lo tanto, los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{49}{24} \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio columna de A, de lo cual se concluye que el rango columna de A es 3.

Ejemplo 2. Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ donde, $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 1)$, $v_3 = (0, 2, 1, 2)$, $v_4 = (3, 2, 1, 4)$ y $v_5 = (5, 0, 0, -1)$. Determine una base para el subespacio de R^4, $V = gens$.

Solución.

Paso 1. Transformamos la matriz a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 = 2F_2 \\ F_4 = 3F_4 \\ F_5 = 5F_5}]{} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{F_2}{2}]{}$$

Paso 2. Realizamos las operaciones elementales para transformar la matriz aumentada a una forma escalonada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3 + 3F_2 \\ F_4 + 4F_2 \\ F_5 + 10F_2}]{} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{2F_3}{5}]{} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 3. Obtener la matriz escalonada en la cual los elementos debajo de la diagonal principal sean cero.

$$\frac{F_4}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_5 - 4F_4]{} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos las filas no nulas y estas forman la base pedida.

$$Base = \left\{(1,2,1,1), \left(0,1,\tfrac{1}{2},1\right), \left(0,0,1,\tfrac{4}{5}\right), (0,0,0,1)\right\}$$

Ejemplo 3. Sean $[x]_C = [3b_1 + b_2] = 3[b_1]_C + [b_2]_C S = \{v_1, v_2\}$ y $T = \{w_1, w_2\}$ bases para R^2, donde:

$v_1 = (1,2)$, $v_2 = (0,1)$ si la matriz de transición de S a T es, determine los vectores de la base T.

Solución.

Es suficiente aplicar la matriz de transición a los vectores de la base S, para obtener los vectores de la base T.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_S \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}_T, w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_T$$

5.11 Coordenadas y cambio de base

Se conoce, que, si V es un espacio vectorial de dimensión n, V tiene una base S de n vectores; hasta este momento no nos ha interesado el orden de los vectores en S. Sin embargo, en esta sección hablaremos de base ordenada $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ para V. En este sentido, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada para V, diferente a la anterior. Si $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base ordenada para el espacio vectorial V de dimensión n, entonces cada vector v en V se puede expresar en forma única como $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$, donde $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, son números reales. Nos referiremos a:

$[v]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ como vector de coordenadas de v con respecto a la base ordenada S.

Las entradas de $[v]_S$ son las coordenadas de v con respecto a S. Observe que el vector de coordenadas $[v]_S$ depende del orden de los vectores en el conjunto S; un cambio en el orden en que aparecen puede modificar las coordenadas de v con respecto a S. Supondremos que todas las bases consideradas en esta sección son bases ordenadas.

Ejemplo 1. Sea, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para R^4, donde: $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (2,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,2,-1)$, $v_4 = (0,1,-1,0)$. Si $v = (1,2,-6,2)$. Calcule $[v]_S$

Solución.

Para determinar $[v]_S$ necesitamos calcular las constantes $c_1 + c_2 + c_3$ y c_4, tales que: $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4$, que es simplemente un problema de combinación lineal. Esta ecuación origina un sistema lineal cuya matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

o en forma equivalente, $\left[v_1^T \; v_2^T \; v_3^T \; v_4^T \mid v^T\right]$

Al transformar la matriz en (1) a su forma escalonada reducida por filas, obtenemos la solución (verifique) $c_1 = 3$, $c_2 = -1$, $c_3 = -2$, $c_4 = 1$, de modo que el vector de coordenadas de v con respecto a la base S es:

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2. Sea, $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base para R^3, y sea: $v = (2, -1, 3)$ calcule $[v]_S$.

Solución. Como S es la base canónica, $v = (2e_1, -1e_2, 3e_3)$de modo que:

$$[v]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

En este ejemplo, el vector de coordenadas $[v]_S$ de v con respecto a S coincide con v, pues S es la base canónica para R^3.

Ejemplo 3. Considere dos bases, $B = b_1, b_2$ y $C = c_1, c_2$ de un espacio vectorial V, de manera que: $b_1 = 4c_1 + c_2$ y $b_2 = 6c_1 + c_2$. Suponga que: $x = 3b_1 + b_2$; Es decir, suponga que: $[x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ Encuentre: $[x]_C$.

Solución. Aplique el mapeo de coordenadas determinado por C a x en la ecuación $x = 3b_1 + b_2$. Puesto que el mapeo de coordenadas es una transformación lineal, $[x]_C = [3b_1 + b_2] = 3[b_1]_C + [b_2]_C$, podemos escribir esta ecuación vectorial como una ecuación matricial, utilizando los vectores en la combinación lineal como las columnas de una matriz: $[x]_C = [[b_1]_C \ [b_2]_C] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Esta fórmula da $[x]_C$, una vez que se conocen, las columnas de la matriz. A partir de $b_1 = 4c_1 + c_2$ y $b_2 = 6c_1 + c_2$, $[b_1]_C = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $[b_2]_C = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ Por lo tanto, la ecuación $[x]_C = [[b_1]_C \ [b_2]_C] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ da la solución:

$$[x]_C = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje de sistemas homogéneos, sistemas de coordenadas, la dimensión de un espacio vectorial, se recomienda la lectura del Álgebra lineal y sus aplicaciones de Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada, y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer y consultar la dimensión de un espacio vectorial.

4. Leer y comprender el rango, coordenadas y cambio de base.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, espacios vectoriales.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 14

Unidad 5. Espacios vectoriales

5.12 Resolución de espacios vectoriales utilizando los simuladores matemáticos

Los simuladores matemáticos, son herramientas útiles para comprender y visualizar los conceptos de espacios y subespacios vectoriales. A través de estos simuladores, es posible interactuar con los vectores y observar cómo se comportan en diferentes configuraciones. Aquí se utiliza los simuladores matemáticos Wólfram Alpha, GeoGebra y Matlab que ayudan en el estudio de espacios y subespacios vectoriales, como cálculo del resultado y la representación gráfica en un espacio tridimensional o bidimensional.

- **Wólfram Alpha**

Ejemplo 1. Convierta a otro sistema de coordenadas, $(1, 1, -3)$ en coordenadas esféricas.

Solución

Figura 32

Convierta a otro sistema de coordenadas mediante Wolfram Alpha

Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Encontrar el rango, base, base ortonormal y dimensión de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Figura 33

Operaciones de vectores mediante Wólfram Alpha

Nota. Viñamagua, G., 2023.

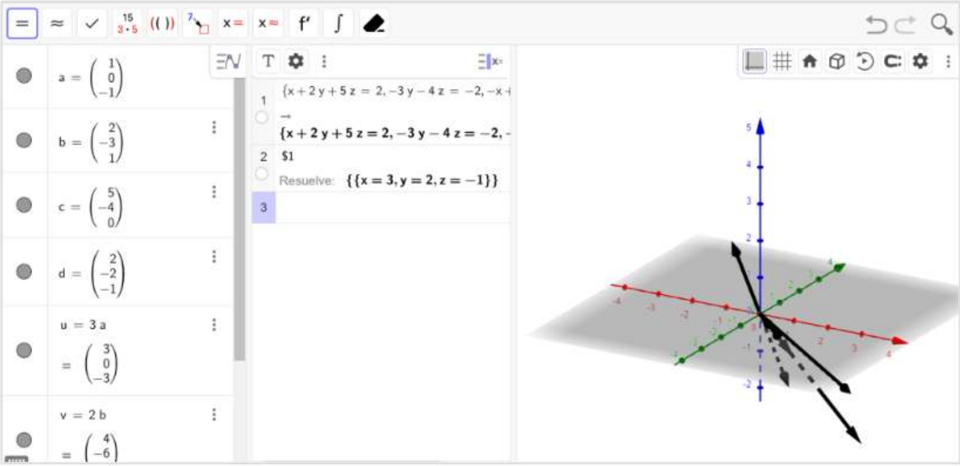
- **GeoGebra**

Ejemplo 1. Resolver la combinación lineal en utilizando GeoGebra

Solución

Figura 34

Combinación lineal mediante GeoGebra



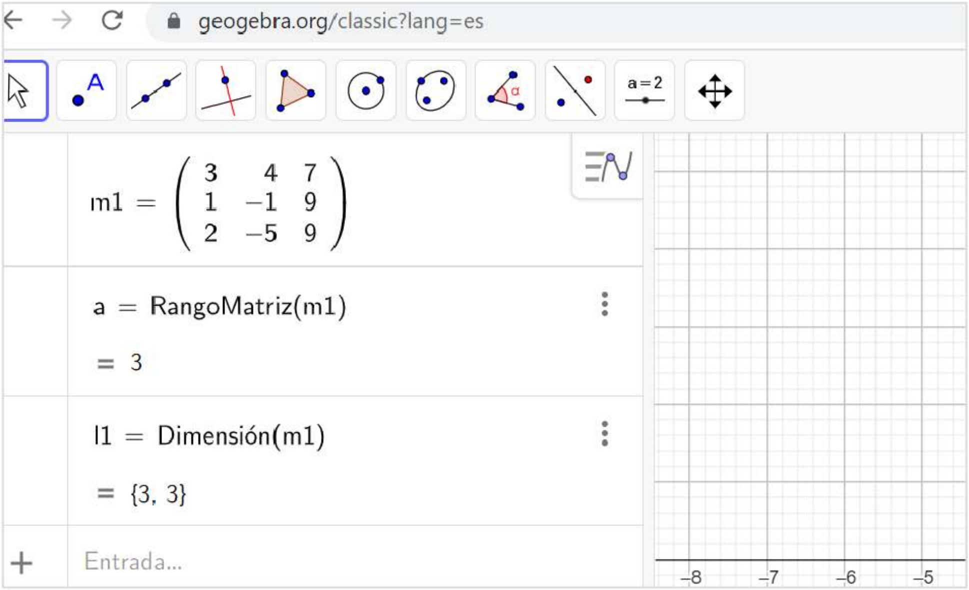
Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Calcular el rango y la dimensión de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Figura 35

Rango de una matriz mediante GeoGebra



Nota. Viñamagua, G., 2023.

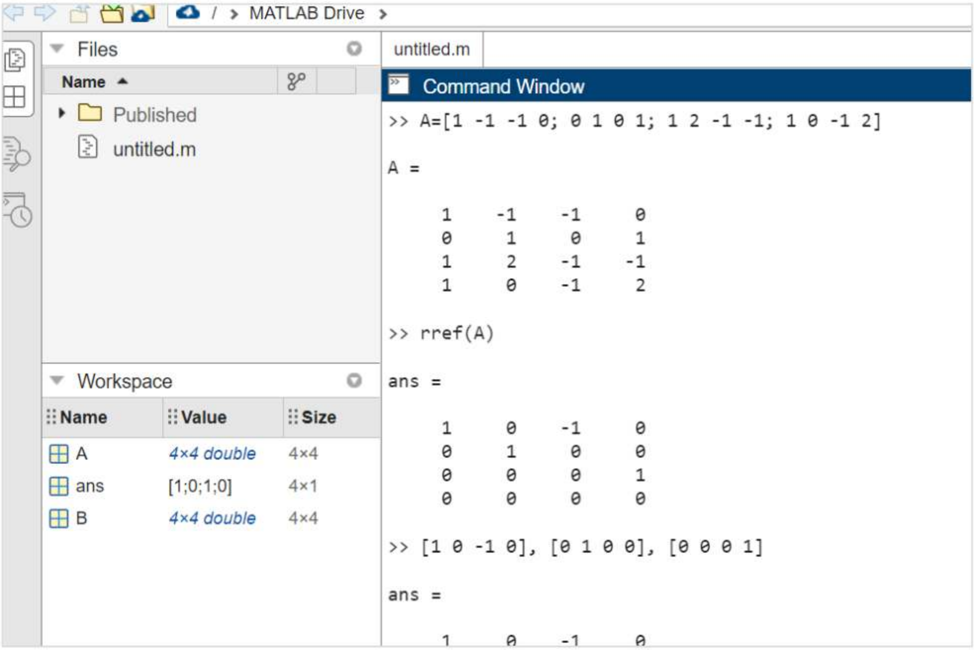
- **Matlab**

Ejemplo 1. Encontrar las bases para los espacios vectoriales fundamentales asociados a una matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Figura 36

Encontrar bases para los espacios fundamentales mediante Matlab



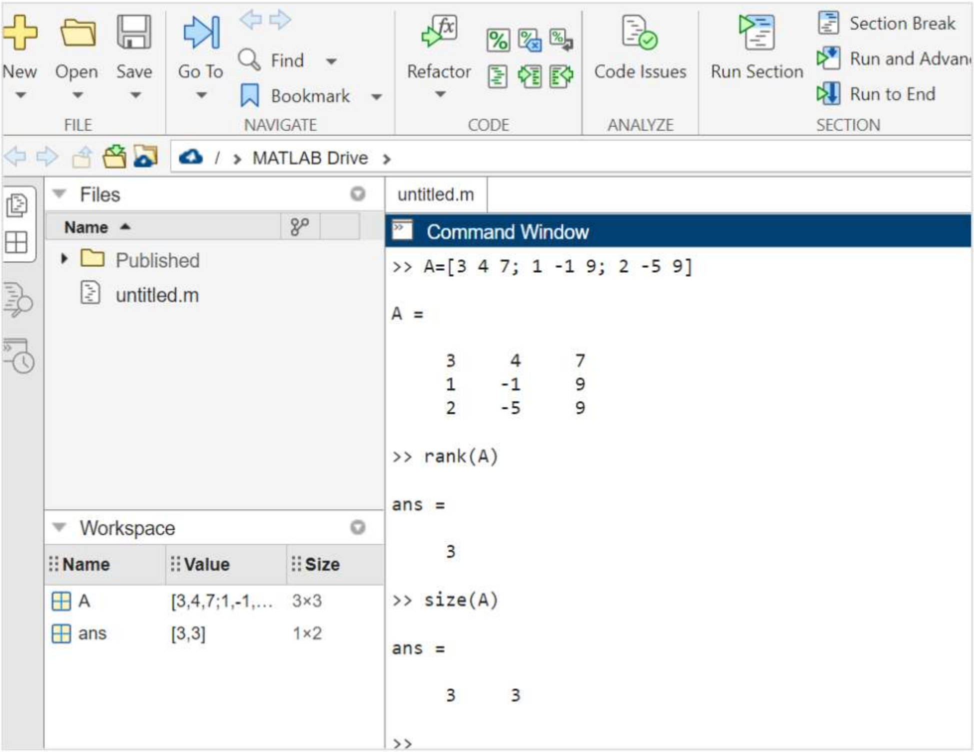
Nota. Viñamagua, G., 2023.

Ejemplo 2. Calcular el rango y la dimensión de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 9 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Figura 37

Rango de una matriz mediante Matlab



Nota. Viñamagua, G., 2023.

5.13 Aplicaciones de espacios vectoriales

Los espacios y subespacios vectoriales tienen una amplia gama de aplicaciones en diferentes áreas del conocimiento, como, por ejemplo: se utilizan para estudiar y representar líneas, análisis de datos, compresión de imágenes, cálculos criptográficos, planos y otros objetos geométricos, como también, los subespacios vectoriales permiten identificar patrones, relaciones y agrupamientos en los datos, lo que es fundamental en el análisis exploratorio de datos y la extracción de información. A continuación, se presentan algunos problemas resueltos.

Problema 1. Una compañía compra 2 unidades del artículo A, 3 unidades del artículo B y 5 unidades del artículo C. Si sabemos que el gasto total es de 2875 euros, que el precio del artículo B es el doble del precio del artículo A y que el precio del artículo C es el triple del precio del artículo A, ¿podemos averiguar los precios de los artículos? Si es cierto, calcúlalos. ¿Podemos averiguar los precios de los artículos si nos dicen que se han pagado 345 euros en concepto de IVA al 16 % para las unidades de A y B y al 7 % para las unidades de C? Si es cierto, calcúlalos.

Solución. Las variables: x = precio unitario del artículo A, y = precio unitario del artículo B y z = precio unitario del artículo C. **Restricciones**:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 2875 \\ y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$$

Resolución: x =125 euros, y = 250 euros, z = 375 euros. Modelo ampliado: hallar x, y, z que cumplan (mismas variables):

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 2875 \\ y = 2x \\ z = 3x \\ 0.16(2x + 3y) + 0.07(5z) = 345 \end{cases}$$

Entonces, el sistema no es compatible: no podemos calcular los precios para que se cumplan todas las restricciones.

Problema 2. Calcular y explicar para qué sirve el rango de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución. Se calcula el determinante de A.

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1(-27) + 3(-9) = 0$$

luego su rango es como mucho 3.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ En conclusión: el rango es 3.

Por otra parte, un **rango de una matriz** es una medida importante en el álgebra lineal y se utiliza para comprender las propiedades y la estructura de los espacios vectoriales. El rango de una matriz es la dimensión del espacio de vectores que se pueden generar mediante combinaciones lineales de las columnas (o filas) de la matriz. Además, permite saber cuántas columnas o filas son linealmente independientes. Si el rango de una matriz es igual al número de columnas o filas, entonces se dice que la matriz tiene rango completo o rango máximo. Esto significa que todas las columnas (o filas) son linealmente independientes y, por lo tanto, pueden generar todo el espacio vectorial.

Por otra parte, el rango de una matriz determina la base y la dimensión de un espacio vectorial: El rango de una matriz es igual a la dimensión del espacio generado por sus columnas (o filas). Si las columnas (o filas) son linealmente independientes, entonces el rango es igual al número de columnas (o filas) y proporciona una base para el espacio vectorial.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Para ampliar la exploración del aprendizaje del uso de los simuladores matemáticos para realizar operaciones con espacios, subespacios vectoriales y sus aplicaciones, se recomienda la lectura del libro. Álgebra lineal y sus aplicaciones de: Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald's, J. J. (2021).
2. Participar de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con el tutor.
3. Leer y consultar, las aplicaciones de espacios y subespacios vectoriales.
4. Leer y comprender los métodos para resolver problemas de espacios vectoriales.
5. Analizar los ejercicios resueltos del libro Álgebra Lineal y sus Aplicaciones de los autores Grossman, Lay y Kolman, además de abordar los ejercicios planteados en el capítulo, espacios vectoriales.
6. Finalmente, le animo a desarrollar la autoevaluación 5, donde se presentan varios ejercicios y tareas relacionadas con el tema de la unidad 5, Espacios vectoriales. Estas actividades le ayudarán a confirmar y fortalecer sus conocimientos.

Autoevaluación 5

Seleccione la opción correcta.

1. **Sea V un espacio vectorial con las operaciones** $\oplus$ y $\odot$ y sea W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si, y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

a. Si u y y son vectores cualesquiera en W, entonces $u \oplus v$ no está en W; y (2) Si c es cualquier número real y u es cualquier vector en W, entonces $c \odot v$ no está en W.

b. Si u y v son vectores cualesquiera en W, entonces $u \pm v$ está en W; y (2) Si c es cualquier número real y u es cualquier vector en W, entonces $c \div v$ está en W.

c. Si u y v son vectores cualesquiera en W, entonces $u \oplus v$ está en W; y (2) Si c es cualquier número real y u es cualquier vector en W, entonces $c \odot v$ está en W.

2. **Sea** $V = C^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n); c_i\}$ es un número complejo para $i = 1, 2, \ldots, n$ y el conjunto de escalares es el conjunto de números complejos. Entonces.

a. C^n también es un espacio bidimensional

b. C^n también es un espacio tridimensional

c. C^n también es un espacio vectorial

$$U = \{X \in M_{2\times 2}(R)/BX = 3X\}.$$

3. **Considere los vectores**

$v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (1, -2, 1), v_3 = (-3, 2, -1)$ y $v_4 = (2, 0, 0)$

en R^3. **¿Es el conjunto $S = v_1, v_2, v_3, v_4$** linealmente dependiente o independiente?

a. S es linealmente independiente
b. S es linealmente dependiente
c. S no es linealmente ni dependiente

4. **Calcular la longitud de los siguientes vectores: $u = (1, 1, -1, -1)$ y**

$v = (2, 2, 2, 2)$

a. $||u|| = 4y||v|| = 2$

b. $||u|| = 3y||v|| = 5$

c. $||u|| = 2y||v|| = 4$

5. **Si V es un espacio vectorial de dimensión 1, ¿cómo son sus bases?**

a. Las bases de V constan de un único vector no nulo

b. Las bases de V no constan de un único vector no nulo

c. Las bases de V constan de varios vectores no nulos

6. **Se considera la aplicación lineal** $L: R^2 \to R^3$ definida por:

$L(x, y) = (x, y, x + y)$. Calcular la matriz M asociada a L.

a. La matriz asociada a L es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b. La matriz asociada a L es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c. La matriz asociada a L es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7. **Se considera la aplicación lineal** $L: R^2 \to R^3$ definida por:

$L(x, y) = (x, y, x + y)$. Calcular la dimensión y una base del

subespacio $U = \{X \in M_{2\times2}(R) / MX + MX^t = 0\}$.

a. $\dim(U) = 1$ y una base es: $B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

b.

$\dim(U) = 1$ y una base es: $B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

c.

$\dim(U) = 1$ y una base es: $B'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

d.

8. **Determinar si los siguientes conjuntos de vectores**

$\{(0,0),(1,2),(2,4)\}$ son bases para R^2.

a. Son tres y son linealmente independientes, por lo tanto, si constituyen una base para R^2.

b. Son tres y no pueden ser linealmente independientes, por lo tanto, no constituyen una base para R^2.

c. Son tres y no pueden ser linealmente dependientes, por lo tanto, si constituyen una base para R^2.

9. **Resolver Determinar si,** $T = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_3 = 0\}$ **es o no un subespacio de** R^3**, justificando la respuesta.** Tenga en cuenta. (*i*) El vector nulo de R^3 es (0,0,0) y 0.0=0, luego pertenece T. (*ii*) $u = (2,5,0) \in T$ porque 2.0 = 0, y $v = (0,1,9) \in T$ porque 0.9=0, sin embargo, en la suma $u + v = (2,-4,9)$ resulta 2.9 ≠0

a. Tomando dos vectores de T su suma no está en T, entonces T si es un subespacio de R^3.

b. Tomando 1 vector ϵ T su suma no está en T, entonces es un subespacio de R^2.

c. Tomando dos vectores de T su suma no está en T, entonces T no es un subespacio de R^3.

10. **Determinar si los vectores $u = (1, 2.0), v = (3, 0, 2), w = (0, 1, 1)$ de R^3, son o no linealmente independientes.**

Considerar

$c_1 u + c_2 v + c_3 w = (0, 0, 0) = (-c_1 - 3c_2, 2c_1 + c_3, 2c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$

y mediante un sistema homogéneo encontrar el valor de c_1, c_2 y c_3

a. Los vectores u y v son linealmente independientes.

b. Los tres vectores dados son linealmente independientes.

c. Los tres vectores dados no son linealmente independientes.

11. **Encontrar una base y la dimensión de $s = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 - 2x_2 = 0 \wedge x_3 = 5x_4\}$ subespacio de R^4**

Considerar: y mediante un sistema homogéneo encontrar el valor.

a. $B = \{(2,1,0,0),(0,0,5,1)\}$ no es una base del subespacio S y la $dimS = 2$.

b. $B = \{(2,1,0,0),(0,0,5,1)\}$ no es una base del subespacio $dimS = 3$

c. $B = \{(2,1,0,0),(0,0,5,1)\}$ es una base del subespacio $dimS = 2$

12. **Sea el subespacio vectorial** $S = \{(x,y,z) \in R^3 / \langle (x,y,z)/(1,1,-2) \rangle = 0\}$; otorgar dos vectores de S.

a. $\begin{cases} x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 0; (0,0,0) \in S \\ x = 0, y = 2 \Rightarrow z = 1; (0,2,1) \in S \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 0, y = 1 \Rightarrow z = 0; (0,0,1) \in S \\ x = 0, y = 1 \Rightarrow z = 1; (0,2,1) \in S \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 1; (0,1,1) \in S \\ x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 1; (0,2,1) \in S \end{cases}$

13. **La matriz de transición en** de la base $\left\{\binom{1}{0},\binom{0}{1}\right\}$ a la base

$\left\{\binom{2}{3},\binom{-3}{-4}\right\}$ **es.**

a. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

14. **Calcular el rango de la matriz A, utilizando el simulador matemático Wólfram Alpha**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

a. 15
b. -5
c. 5

15. **Calcular el rango de la matriz A, utilizando el simulador matemático GeoGebra**

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

a. 5
b. 4
c. 3

Ir al solucionario

Resultados de aprendizaje 4 y 5:

- Carrera de administración de empresas

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones con vectores.

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones de espacios vectoriales.

- Carrera de contabilidad y auditoría

  Aplica los conceptos y operaciones con vectores.

  Aplica los conceptos y operaciones de espacios vectoriales.

- Carrera de economía

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones con vectores.

  El estudiante analiza, interpreta y aplica los conceptos y operaciones de espacios vectoriales.

- Carrera de finanzas

  Conocer la estructura algebraica del espacio vectorial en términos abstractos y los elementos básicos.

  Conocer el espacio vectorial y las ecuaciones.

- Carrera de logística y transporte

  Determina y resuelve los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), valora cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedicar algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema.

- Carrera de tecnología de la información

  Conoce el concepto de matriz, vector y rango.

  Conoce las características de un espacio vectorial, subespacio vectorial y sus operaciones.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 15

Estimados estudiantes, en esta semana número 15 de estudio, te invitamos a revisar todos los contenidos del segundo bimestre con el fin de obtener buenos resultados en la evaluación presencial. A continuación, te sugerimos las siguientes actividades para lograrlo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Repasar los apuntes y materiales de estudio correspondientes al segundo bimestre.
2. Realizar ejercicios y problemas relacionados con los temas abordados: vectores en R^2, R^3 y R^n.
3. Consultar fuentes adicionales, como libros, base de datos, biblioteca virtual y Reas, para ampliar y profundizar en los conceptos clave de la unidad 4.
4. Participar en sesiones de estudio en grupo o solicitar ayuda a tus compañeros, como también de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con su tutor en caso de dificultad.

5. Explorar y utilizar los simuladores matemáticos relacionados con vectores en R^2, R^3 y R^n.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 16

Estimados estudiantes, en esta última semana nro. 16 de estudio, te invitamos a revisar todos los contenidos del segundo bimestre con el fin de obtener buenos resultados en la evaluación presencial. A continuación, te sugerimos las siguientes actividades para lograrlo.

Actividades de aprendizaje recomendadas

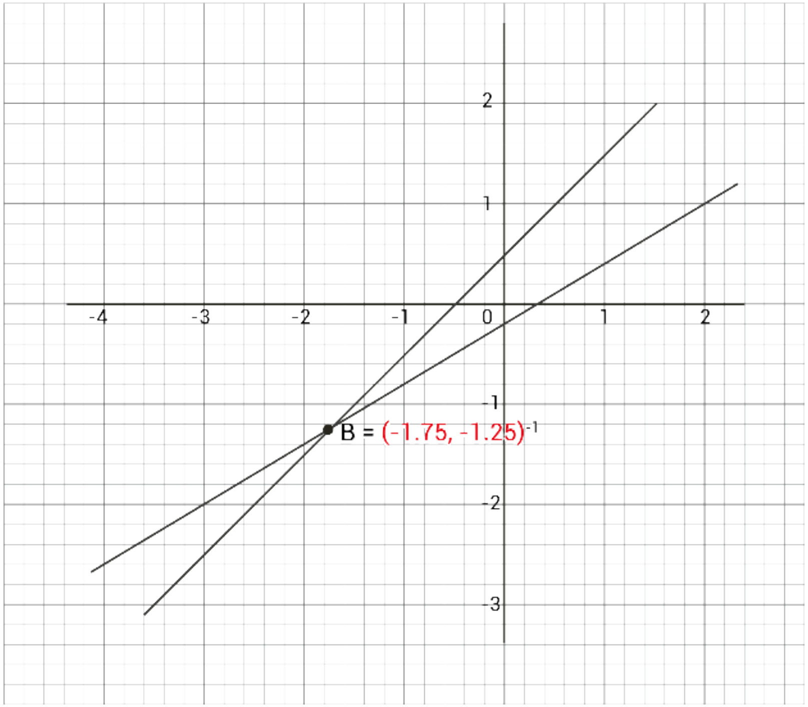
Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

1. Repasar los apuntes y materiales de estudio correspondientes al segundo bimestre.
2. Realizar ejercicios y problemas relacionados con los temas abordados: espacios y subespacios vectoriales.
3. Consultar fuentes adicionales, como libros, base de datos, biblioteca virtual y Reas, para ampliar y profundizar en los conceptos clave de la unidad 5.
4. Participar en sesiones de estudio en grupo o solicitar ayuda a tus compañeros, como también de las tutorías semanales, bandeja de entrada y anuncios en la plataforma Eva, donde puede interactuar con su tutor en caso de dificultad.
5. Explorar y utilizar los simuladores matemáticos relacionados con los espacios vectoriales.

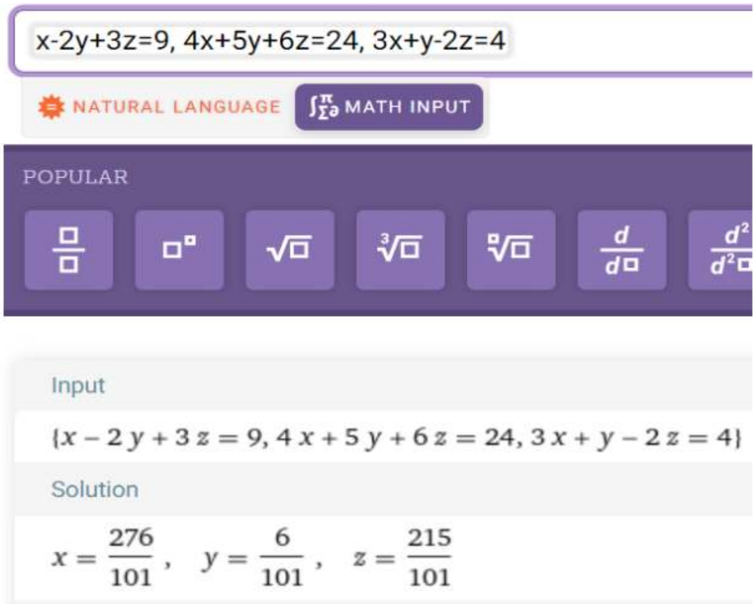
4. Autoevaluaciones

Autoevaluación 1

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a	Una ecuación representa una relación lineal entre variables y tiene la forma general de "$ax + by + c = 0$"
2	b	La representación gráfica de una ecuación lineal es una recta
3	c	La representación gráfica de funciones no lineales no es una línea recta
4	c	Del concepto un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de dos o más ecuaciones, en el cual se relacionan dos o más incógnitas y se busca los valores de las incógnitas
5	b	Los sistemas compatibles tienen solución única o infinidad de soluciones
6	a	Los sistemas incompatibles no tienen solución.
7	a	Utilizando el método de Gauss – Jordán, que consiste en realizar operaciones básicas de fila en la matriz ampliada del sistema, con el objetivo de llevarla a una forma escalonada reducida.
8	b	Consiste en encontrar el determinante de la matriz de coeficientes del sistema que es 42 y los determinantes adicionales al reemplazar una columna de la matriz por el vector de términos independientes.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	a	Mediante el simulador matemático GeoGebra, se puede resolver de la siguiente manera: Punto de intersección: (-1,75; -1,25) 

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	a	Mediante el simulador Wólfram Alpha, se puede resolver de la siguiente manera:



Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 2

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	c	Concepto de matriz que se denomina a todo conjunto de números o expresiones ordenadas en una estructura de filas y columnas, de modo general a las filas se identifican con las letras m y n para las columnas
2	c	Tiene que cumplir esta igualdad $A = BA = I_n$ donde n es el tamaño de las matrices.
3	b	Para multiplicar dos matrices $A(\mathrm{mxn})$ y $B(\mathrm{nxp})$ se multiplica cada fila de A por cada columna de B
4	b	Considerar qué: el rango de una matriz es el número de líneas linealmente independientes, es decir no Proporcionales
5	a	Realizar las operaciones de manera que se cumpla el teorema; $AB = BA = I$
6	a	Revisar el método el método de Gauss - Jordan y transformar la matriz en su forma escalonada reducida, lo que implica realizar una serie de operaciones elementales de fila en la matriz original.
7	c	Revisar el método el método de la matriz adjunta y como calcular los cofactores de cada elemento de la matriz.
8	c	Ingresar a, www.wolframalpha.com y compilar la matriz con el comando inverse.

<table>
<tr><th>Pregunta</th><th>Respuesta</th><th>Retroalimentación</th></tr>
<tr><td>9</td><td>a</td><td>Ingresar a, www.geogebra.org y compilar la matriz inversa en la interface “entrada”

<pre>
Command Window
>> A=[5 2 4; -4 -1 -5; 3 0 8]

A =

     5   2   4
    -4   -1   -5
     3   0   8

>> inv(A)

ans =

   -1.3333   -2.6667   -1.0000
    2.8333   4.6667   1.5000
    0.5000   1.0000   0.5000
</pre>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>a</td><td>Se necesita 90 unidades de chatarra, 72 de carbón mineral y 25 de aleaciones.
Se organiza los datos en dos matrices; su producto nos da la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Chatarra} \\ \text{Carbón} \\ \text{Aleaciones} \end{array} \begin{array}{c} \square \quad A \quad B \quad C \\ \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \text{Chatarra} \\ \text{Carbón} \\ \text{Aleaciones} \end{array} \begin{pmatrix} 90 \\ 72 \\ 25 \end{pmatrix}$$
</td></tr>
</table>

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 3

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a	Definición de matriz. A cada matriz cuadrada A se le concede un escalar (real) particular denominado determinante de A, denotado por $\lvert A\rvert$ o por: $det(A)$. Este escalar permite caracterizar algunas propiedades de la matriz, por ejemplo, el determinante de A es no nulo sí y sólo sí, A es invertible
2	a	El determinante de una matriz cuadrada es igual al de su traspuesta: $\lvert A\rvert = \lvert A^T\rvert$
3	a	Propiedad de los determinantes. El determinante de una matriz con alguna fila o columna de ceros es 0
4	b	Aplicando el método de Sarrus el determinante es igual a 8
5	b	Aplicando el método de Laplace el determinante es igual a 60
6	b	Aplicando el método de Gauss el determinante es igual a 30
7	c	Aplicando el método de cofactores el determinante es igual a 160
8	c	Aplicando el simulador matemático Wólfram Alpha el determinante es igual a 0.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
9	c	Aplicando el simulador matemático GeoGebra y Matlab el determinante es igual a -7. Command Window >> A=[2 1 4 3; 3 2 1 -2; -1 0 -2 -1; -4 -3 -2 0] A = 2 1 4 3 3 2 1 -2 -1 0 -2 -1 -4 -3 -2 0 >> det(A) ans = -7

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
10	a	Considerar las variables x, y; z. $\begin{cases} x+y+z=91 \\ x=y+5 \\ z=x+6 \end{cases}$ $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3$ $D_x=\begin{vmatrix} 91 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-9$; $D_y=\begin{vmatrix} 1 & 91 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix}=-75$; y $D_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 91 \\ 1 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-108$ $\begin{cases} x=\frac{-90}{-3}=30 \\ y=\frac{-75}{-3}=25 \\ z=\frac{-108}{-3} \end{cases}$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 4

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	a	Leer la definición. Los vectores en R^2 representan el conjunto de todos los vectores con dos componentes, donde cada componente es un número real
2	c	Leer la definición. Los vectores en R^3 se refieren a los vectores en un espacio tridimensional conocido como espacio euclidiano tridimensional
3	b	Consultar la definición. Los vectores en R^n, hacen referencia a los vectores en un espacio vectorial n-dimensional llamado ***espacio euclidiano n-dimensional***
4	a	La distancia entre vectores se calcula mediante la siguiente fórmula: $\|u-v\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$
5	c	Utilizar la siguiente fórmula: $\|u\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$
6	b	Para determinar el ángulo entre los vectores apoyarse en la siguiente fórmula: $cos\ cos\,\theta = \frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}$
7	a	Tener en consideración la siguiente igualdad: $u\cdot v = u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$
8	c	Tener en consideración la siguiente igualdad: $u\times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$
9	b	Una ecuación del plano descrito está dada por: $ax+by+cz+d=0$, en consecuencia: $\begin{array}{r} 2a-2b+c+d=0 \\ -a+3c+d=0 \\ 5a-3b+4c+d=0 \end{array}$ $a=\frac{8}{17}r;\quad b=\frac{15}{17}r;\quad c=\frac{3}{17}r;\quad y\quad d=r$
10	a	Área del triangulo= $\frac{\|u\times v\|}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

Ir a la autoevaluación

Autoevaluación 5

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
1	c	Revisar la definición: (1) Si u y v son vectores cualesquiera en W, entonces $u \oplus v$ está en W; y (2) Si c es cualquier número real y u es cualquier vector en W, entonces $c \odot v$ está en W
2	b	Los subespacios vectoriales: Se dice que H es un subespacio vectorial de V si H es un subconjunto no vacío de V, y H es un espacio vectorial, junto con las operaciones de suma entre vectores y multiplicación por un escalar definidas para V
3	c	C^n También es un espacio vectorial $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
4	b	S es linealmente dependiente, ya que, tiene soluciones no triviales. Dos de las infinitas soluciones son $c1 = 1, c2 = 2, c3 = 1, c4 = 0; c1 = 1, c2 = 1, c3 = 0, c4 = -1$.
5	a	Si V es un espacio vectorial de dimensión 1, ¿cómo son sus bases? Las bases de V constan de un único vector no nulo.
6	a	Tener en consideración: $L(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
7	a	Tener en consideración: $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x & y+z \\ y+z & 2t \\ 2x+y+z & y+z+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y \\ t = 0 \end{cases}$
8	b	Son tres y no pueden ser linealmente independientes, por lo tanto, no constituyen una base para $\mathbb{R}^2$.
9	c	Considerando: (i) El vector nulo de $\mathbb{R}^2$ es (0,0,0) y 0.0=0, luego pertenece T (ii) $u = (2,5,0) \in T$ orque 2.0 = 0, y $v = (0,1,9) \in T$ porque 0.9=0, sin embargo, en la suma $u + v = (2,-4,9)$ resulta 2.9 ≠0 Tomando dos vectores de T su suma no está en T, entonces T no es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
10	b	Considerar: $c_1 u + c_2 v + c_3 w = (0,0,0) = (-c_1 - 3c_2, 2c_1 + c_3, 2c_2 + c_3) = (0,0,0)$ y mediante un sistema homogéneo encontrar el valor de c_1, c_2 y c_3. Los tres vectores dados son linealmente independientes.

Pregunta	Respuesta	Retroalimentación
11	c	De las condiciones. $x_1 - 2x_2 = 0 \wedge x_3 = 5x_4$ que definen a S, se puede escribir $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1, x_2, 5x_3, x_4)$ $x_2(2,1,0,0) + x_4(0,0,5,1), x_2 x_4 \in R$ $c_1 = c_2 = 0$; Entonces: $B = \{(2,1,0,0),(0,0,5,1)\}$ es una base del subespacio S y la $dimS = 2$.
12	a	Los vectores deben cumplir: $\langle (x,y,z)/(1,1,-2) \rangle = 0 \Leftrightarrow x + y - 2z = 0$ $x = 0, y = 0 \Rightarrow z = 0; (0,0,0) \in S$ $x = 0, y = 2 \Rightarrow z = 1; (0,2,1) \in S$
13	b	La matriz de transición entre dos bases diferentes a la canónica requirió expresar los vectores de una base en términos de la otra, para llegar a la solución: $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$
14	c	Insertar el comando. $\mathbf{rank}\ \{\{2,1,3,-2,-1\},\{3,2,5,-1,1\},\{1,1,0,-7,1\},\{3,2,1,10,1\},\{0,1,1,-4,-1\}\}$
15	a	Insertar la matriz A en GeoGebra $\{\{5,1,3,-2,-1\},\{3,4,5,-1,1\},\{1,1,3,-7,1\},\{3,2,1,2,1\},\{0,1,1,-4,1\}\}$ Escribir el comando: RangoMatriz(m1) = 5

Ir a la autoevaluación

5. Referencias bibliográficas

Lay, D. C., Lay, S. R., y McDonald, J. J. (2021). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson.

Kolman, B. y Hill, D.R. (2013). *Algebra lineal fundamentos y aplicaciones*. Pearson.

GUERRERO CHIRINOS, R. A. Influencia de la plataforma GeoGebra en el aprendizaje de las operaciones con Matrices / Marco Vinicio Andrade Bastidas. [s. l.]: Universidad Técnica Particular de Loja, 2023. Disponível em: https://research.ebsco.com/linkprocessor/plink?id=b2edf8be-cc75-3902-9606-4e5a2989ec1a. Acesso em: 26 nov. 2024.

Grossman, S. y Flores, J. (2012). *Algebra lineal fundamentos aplicaciones*. Pearson Educación.

Wólfram Alpha. (2023). Procesamiento de álgebra, cálculo numérico y simbólico. Recuperado de www.wolframalpha.com

GeoGebra. (2023). Software matemático dinámico para todos los niveles educativos. Recuperado de www.geogebra.org

Matlab. (2023). Lenguaje de cálculo técnico desarrollado por MathWorks. Recuperado de https://matlab.mathworks.com