UTPL

Álgebra Lineal

Guía didáctica

Facultad:
Ingenierías y Arquitectura

Carrera:
Redes y Analítica de Datos

Autor:
Katty Alexandra Rohoden Jaramillo

Universidad Técnica Particular de Loja

Álgebra Lineal
Guía didáctica
Katty Alexandra Rohoden Jaramillo

Diagramación y diseño digital:

Ediloja Cía. Ltda.
Marcelino Champagnat s/n y París
edilojacialtda@ediloja.com.ec
www.ediloja.com.ec

ISBN digital - 978-9942-47-463-6
Año de edición: octubre, 2025
Edición: primera edición

El autor de esta obra ha utilizado la inteligencia artificial como una herramienta complementaria. La creatividad, el criterio y la visión del autor se han mantenido intactos a lo largo de todo el proceso.

Loja-Ecuador

2 de octubre, 2025

Índice

1. Datos de información

1.1. Presentación de la asignatura

1.2. Competencias genéricas de la UTPL

- Pensamiento crítico y reflexivo.
- Organización y planificación del tiempo.

1.3. Competencias del perfil profesional

- Diseñar y evaluar la infraestructura de redes de telecomunicaciones mediante la aplicación de tecnologías emergentes siguiendo estándares internacionales para brindar conectividad sostenible y de calidad a la sociedad.

1.4. Problemática que aborda la asignatura

La finalidad de la asignatura de Álgebra lineal dentro del programa de Redes y Análisis de Datos es brindar al estudiante herramientas teóricas y prácticas para poder comprender conceptos fundamentales del álgebra lineal. Se pretende lograr que el estudiante entienda cómo aplicar estos conceptos fundamentales en el modelado, análisis y resolución de problemas reales en las redes y analítica de datos. Para lograr estos objetivos se propone también un enfoque computacional mediante la aplicación de herramientas de *software* como MATLAB, GeoGebra, Python y Desmos. El dominio de estas herramientas matemáticas permite que el estudiante cree algoritmos los cuales gestionen y analicen grandes cantidades de datos, lo cual será de gran ayuda en el momento de tomar decisiones basadas en datos y en mejorar el rendimiento de una infraestructura de red.

2. Metodología de aprendizaje

Para el desarrollo de la materia de Álgebra lineal se trabajará con metodologías que combinarán diferentes enfoques tanto teóricos como prácticos. Una de las metodologías que se usará será la metodología conocida como Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). Con esta metodología se pretende que usted como estudiante fomente el pensamiento crítico a través de la resolución de problemas de álgebra lineal. Por ejemplo, en los sistemas de recomendación como Netflix se puede plantear un problema que se resuelva usando el álgebra lineal, como se indica a continuación:

En el caso de Netflix, que recolecta grandes cantidades de datos, como qué vio el usuario, durante qué tiempo, el tipo de contenido, contenido similar a otros usuarios, etc. Toda esta cantidad de información se puede representar como una matriz de preferencias, en donde, cada fila represente a un usuario y cada columna represente una película o serie. Además, se puede usar el concepto de valor y vector propio para reducir la complejidad de los datos y encontrar patrones. En donde, por ejemplo, los vectores propios representen temas o géneros comunes entre usuarios y películas. Mientras que los valores propios pueden representar la importancia de cada uno de estos temas.

Por otro lado, para realizar una resolución de problemas más ágil se propone la integración de herramientas computacionales. Para lo cual, se sugiere que el estudiante se familiarice con herramientas como MATLAB (MathWorks, 2024), GeoGebra (Geogebra, 2024) y Python (*Python Software Foundation*, 2024). Ya que, a lo largo de la revisión de esta asignatura, haremos uso de las mismas para poder visualizar y resolver los problemas del álgebra lineal.

Para complementar el aprendizaje del álgebra lineal se usará la metodología basada en Clase Invertida. Para lo cual se propone la revisión de contenidos teóricos fuera del aula por parte del estudiante. Esto se logrará mediante el uso de videos, simulaciones o lecturas digitales. Esta información se encontrará previamente cargada en la plataforma, la cual estará organizada con base en los contenidos que se revisarán cada semana. El objetivo de esta metodología es permitir que el estudiante sea autónomo y desarrolle habilidades para resolver situaciones reales en donde tendrá el apoyo del docente mediante la retroalimentación que se dará en cada tutoría.

3. Orientaciones didácticas por resultados de aprendizaje

Primer bimestre

Resultado de aprendizaje 1

- Aplica los fundamentos del álgebra lineal y las propiedades de los espacios vectoriales en la resolución de problemas relacionados con el diseño y análisis de redes de telecomunicaciones.

Durante el primer bimestre de la asignatura de Álgebra lineal, en la carrera de Redes y Analítica de Datos, el logro del resultado de aprendizaje se alcanzará mediante una combinación de metodologías activas y herramientas tecnológicas. Se implementará el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), utilizando conceptos fundamentales del álgebra lineal, como operaciones con matrices, combinaciones lineales o identificación de subespacios. Además, la enseñanza de los fundamentos del álgebra lineal se complementará con la integración de herramientas computacionales como MATLAB, GeoGebra, Python (NumPy) o Desmos. Se fomentará el uso de estas herramientas, ya que le permitirán al estudiante experimentar con representaciones visuales de los espacios vectoriales, así como la validación de los resultados obtenidos en la resolución de ejercicios realizados por el estudiante. Esta combinación metodológica no solo refuerza la comprensión conceptual, sino que también entrena al estudiante para el uso aplicado y profesional del álgebra lineal, fortaleciendo su capacidad para modelar y resolver problemas complejos de forma eficiente y rigurosa.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Semana 1

La asignatura comienza con instrucción teórica y práctica en dos unidades esenciales: Fundamentos de álgebra lineal y Espacios vectoriales. Esto permitirá a los estudiantes aplicar los principios del álgebra lineal y las características de los espacios vectoriales para resolver problemas relacionados con el diseño y análisis de redes de telecomunicaciones. Para modelar y resolver sistemas lineales y representar estructuras matriciales de redes, los estudiantes aprenderán conceptos clave en la primera unidad, como la gestión de vectores, las operaciones con matrices, los determinantes y las inversas. Posteriormente, en la unidad de Espacios vectoriales, explorarán conceptos como subespacios, bases, dimensión, independencia lineal y cambio de base.

El estudio del álgebra lineal y los espacios vectoriales no solo representa una base matemática fundamental, sino también una poderosa herramienta para quienes nos apasionamos por el mundo de las redes y la analítica de datos. Cada concepto que aprenderán, desde el manejo de vectores hasta la transformación de coordenadas, será clave para comprender y mejorar la eficiencia de los sistemas que conectan al mundo. Los animo a enfrentar cada desafío con curiosidad y determinación. Recuerden que detrás de cada matriz, cada espacio y cada dimensión, hay una red esperando ser optimizada.

¡Vamos juntos hacia un aprendizaje significativo y aplicable, con mente analítica y visión de futuro!

Estimados estudiantes, bienvenidos a la primera semana de la asignatura de Álgebra lineal. Durante esta semana se revisará la unidad 1, específicamente los fundamentos del álgebra lineal, se recordará el concepto de sistemas de ecuaciones lineales y los métodos más usados para la solución de los mismos.

Para tener una idea general de esta unidad le invito a observar el siguiente video introductorio: unidad 1.

Unidad 1. Fundamentos de álgebra lineal

1.1. Introducción al álgebra lineal

El álgebra lineal es una rama fundamental de las matemáticas que se centra en el estudio de vectores, matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales. Uno de los principales objetivos del álgebra lineal es la comprensión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, mediante los cuales se pueden modelar fenómenos de diversas disciplinas.

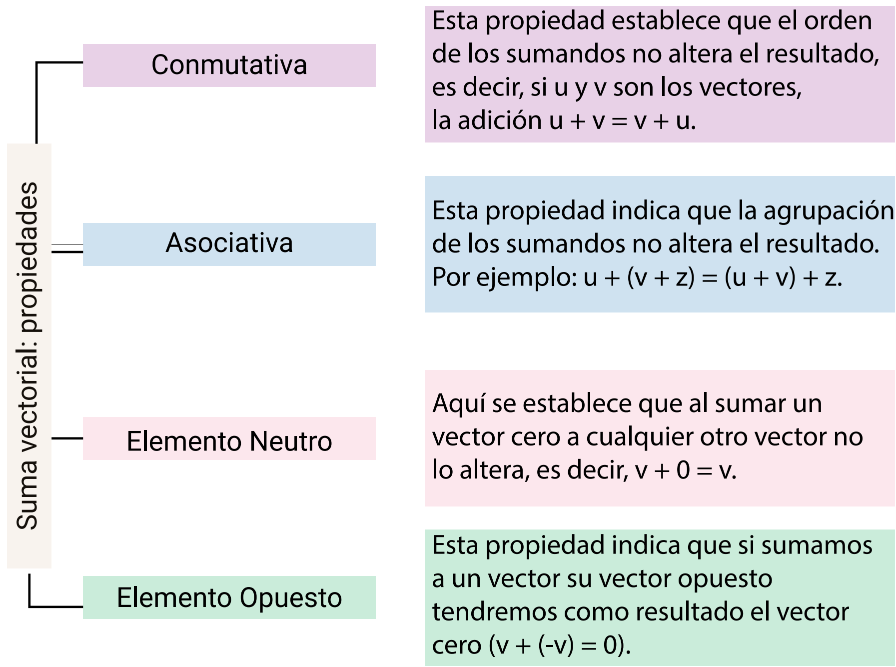
1.1.1. Adición de vectores

La adición de vectores en el álgebra lineal es una operación en la cual se combinan dos o más vectores para obtener un nuevo vector denominado vector suma. Por lo tanto, para obtener este vector suma se debe ir sumando componente a componente. Antes de revisar un ejemplo de cómo realizar la adición de vectores, se revisarán las propiedades de este tipo de operación (Arce, 2003).

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Figura 1

Suma vectorial: propiedades



Nota. Rohoden, K., 2025.

A continuación, se realiza un ejemplo de adición de vectores usando la propiedad asociativa.

- Si $u = (3, 5)$, $v = (2, 6)$ y $z = (0, 1)$, entonces $u + (v + z) = (u + v) + z$. Puede revisar el desarrollo de este ejercicio en la Tabla 1.

Tabla 1

Propiedad asociativa en la adición de vectores.

Operación	Desarrollo	Resultado
u + (v + z)	= (3, 5) + (2 + 0, 6 + 1) = (3, 5) + (2, 7) = (3 + 2, 5 + 7)	(5, 12)
(u + v) + z	= (3 + 2, 5 + 6) + (0, 1) = (5, 11) + (0, 1) = (5 + 0, 11 + 1)	(5, 12)

Nota. Se muestra la aplicación de la propiedad asociativa en la adición de vectores. Rohoden, K., 2025.

En la Tabla 1 se mostró un ejemplo de cómo se puede aplicar la propiedad asociativa en la adición de tres vectores. Si desea profundizar en este tema y practicar las operaciones con vectores, sugiero que revise el siguiente documento sobre los fundamentos de álgebra lineal.

1.1.2. Multiplicación escalar de un vector

La multiplicación escalar de un vector hace referencia a la multiplicación entre un número real (escalar) y cada componente del vector. Algunas características de esta multiplicación escalar son:

- El resultado es otro vector.
- La dirección del nuevo vector es la misma o tendrá una dirección opuesta si el escalar es negativo.
- La magnitud es el producto entre la magnitud del vector original y el valor absoluto del escalar.

Por ejemplo, considerar el vector v = (2, 8) y el escalar k = 3. La multiplicación escalar será de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$k \cdot v = 3 \times (2, 8) = (3 \times 2, 3 \times 8) = (6, 24)$$

Por lo tanto, al realizar la multiplicación del escalar por el vector, se obtiene como resultado que el vector original, v, se estira por un factor de 3 en la misma dirección.

Por ejemplo, en el campo de la informática, en la visualización de imágenes. El tamaño de una imagen se puede modificar mediante la multiplicación por un escalar.

1.1.3. Producto punto

El producto punto o producto interno es una operación en la cual se toman dos vectores y se obtiene como resultado un escalar. Básicamente, lo que hace el producto punto entre dos vectores es sumar los productos de cada uno de sus componentes.

Considerar dos vectores, u y v:

$$u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \; y \; \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces el producto punto será igual a:

$$u \cdot v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_j$$

- Si se tienen los vectores u y v:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{y } v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- El producto punto sería igual a:

$$u \cdot v = (1) \cdot (2) + (2) \cdot (-2) + (3) \cdot (3) = 7$$

Geométricamente, el producto punto representa la proyección de un vector sobre otro y se puede utilizar para el cálculo de ángulos y determinar la ortogonalidad entre vectores.

1.1.4. Ortogonalidad

En álgebra lineal, dos vectores son ortogonales si su producto punto es cero. Esto significa, que los dos vectores forman un ángulo recto. Por ejemplo, los vectores (1, 0) y (0, 1) son ortogonales, ya que su producto punto es cero, como se puede observar en la siguiente ecuación:

$$(1 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0$$

A continuación, se presenta una infografía que le permitirá repasar el concepto de vector, así como las diferentes operaciones entre vectores.

Vector.

Como pudo observar, el recurso permite sintetizar y relacionar conceptos clave de vectores en álgebra lineal. Presenta la definición de vector como punto de partida, lo cual es adecuado para comprender que se trata de una entidad matemática con magnitud, dirección y sentido. También se incluyen las operaciones fundamentales entre vectores, ya que estas constituyen la base del trabajo con vectores en álgebra lineal.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

1.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Para poder empezar con la revisión de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, es necesario recordar qué es una ecuación lineal.

De acuerdo (Kolman, 2019), una ecuación que se puede representar como $ax = b$ se denomina ecuación lineal. La gráfica de esta ecuación es una línea recta, de ahí el término de lineal.

1.2.1. Sistemas de ecuaciones lineales m x n

Por otro lado, se puede presentar una forma más general de definir un sistema de ecuaciones lineales, como un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas, el cual se representa de la siguiente manera.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

En donde a_{ij} y b_i se conocen como coeficientes y términos independientes, respectivamente. Cabe indicar que estos dos términos son constantes reales y que son valores conocidos. Además, la solución del sistema de ecuaciones lineales son todos los valores de $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ que satisfacen de forma simultánea a todas las ecuaciones del sistema.

1.2.2. Métodos de solución: eliminación de Gauss

El método de eliminación de Gauss también se lo conoce como método de eliminación gaussiana con sustitución regresiva. Es un método que permite resolver un sistema de ecuaciones lineales y se basa en dos fases:

- La **primera fase** consiste en un proceso de eliminación para reducir el número de incógnitas. Se puede dar el caso que también se eliminen ecuaciones.

- La **segunda fase** se basa en encontrar el valor de la última incógnita, sustituirla en la ecuación que la antecede (para poder obtener el valor de otra incógnita) y así sucesivamente hasta obtener la solución.

Para entender de mejor manera el método de eliminación de Gauss, se sugiere seguir el siguiente procedimiento (Núñez, 2019), el cual se encuentra en la imagen interactiva que se presenta a continuación:

Método de eliminación de Gauss.

Como pudo observar en el recurso, el método de eliminación de Gauss facilita la resolución sistemática de ecuaciones lineales al transformar la matriz en forma escalonada y aplicar sustitución regresiva, permitiendo identificar soluciones únicas, infinitas o determinar la inconsistencia del sistema.

A continuación, se realiza un ejemplo siguiendo el procedimiento de eliminación de Gauss. Para lo cual considerar el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 2x + 3y + 3z = 14 \\ 3x + y + 4z = 17 \end{cases}$$

Paso 1. Representar el sistema como matriz aumentada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 14 \\ 3 & 1 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Paso 2:.Eliminar los elementos debajo de la posición (1,1) en la matriz anterior.

- Fila 2 = Fila 2 − 2 × Fila 1
- Fila 3 = Fila 3 − 3 × Fila 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Eliminar el elemento debajo de (2,2)

- Fila 3 = Fila 3 − 5 × Fila 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -11 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Sustitución hacia atrás

- De la tercera ecuación:

$$-4z = -11 \Rightarrow z = \frac{11}{4}$$

- Sustituimos z en la segunda ecuación:

$$-y + z = 2 \Rightarrow -y + \frac{11}{4} = 2 \Rightarrow y = \frac{11}{4} - 2 = \frac{3}{4}$$

- Sustituimos y y z en la primera ecuación:

$$x + 2y + z = 6 \Rightarrow x + 2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{11}{4} = 6$$

$$x + \frac{6}{4} + \frac{11}{4} = 6 \Rightarrow x = 6 - \frac{17}{4} = \frac{7}{4}$$

Solución:

$$x = \frac{7}{4}, y = \frac{3}{4}, z = \frac{11}{4}$$

¡Excelente! Hemos concluido la primera semana y con el objetivo de aplicar y reforzar sus conocimientos, le invito a realizar el siguiente *quiz*.

Quiz -operaciones con vectores y sistemas de ecuaciones lineales.

Como pudo notar mediante el desarrollo del cuestionario, se reforzaron las propiedades y operaciones fundamentales con vectores, así como la aplicación del método de eliminación de Gauss en sistemas lineales, consolidando conceptos clave de esta primera semana.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, durante la primera semana se realizó una breve revisión de los fundamentos del álgebra lineal, en la cual, además, se ha recordado el concepto de sistema de ecuación lineal. Ahora es tiempo de poner en práctica lo aprendido a través de la resolución de una serie de ejercicios.

Actividad 1. Operaciones con vectores (adición de vectores, multiplicación escalar de un vector y producto punto).

- **Adición de vectores**

  a. Dados los vectores u = (3, 2) y v = (1, 4). Calcular la suma u + v.
  b. Dados los vectores u = (2, −1), v = (−3, 4) y z = (1, 2). Calcular la suma u + (v + z).
  c. Dados los vectores u = (1, 2, 3) y v = (4, −1, 0). Calcular la suma u + v.
  d. Dados los vectores u = (−2, 5) y v = (3, −4). Calcular la suma v + u.

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

- **Multiplicación escalar de un vector**

  a. Dado el vector u = (2, 3) y el escalar k = 4. Calcular $k \cdot u$.
  b. Dado el vector v = (−1, 5) y el escalar k = −2. Calcular $k \cdot v$.
  c. Dado el vector z = (3, −2, 4) y el escalar k = 0.5. Calcular $k \cdot z$.
  d. Dado el vector w = (7, −3, 0) y el escalar k = 0. Calcular $k \cdot w$.

- **Producto punto**

  a. Dados los vectores u = (1, 5) y v = (3, 8). Determinar el producto punto $u \cdot v$.
  b. Dados los vectores x = (1, −2, 3) y z = (4, 0, −1). Determinar el producto punto $x \cdot z$.
  c. Dados los vectores u = (3, 1) y v = (−1, 3). Determinar si los vectores son ortogonales.
  d. Dados los vectores w = (2, 0) y z = (5, 5). Verificar la ortogonalidad de los vectores.

Estrategia de trabajo

Revise una vez más los contenidos de la sección 1.1. Aplique la operación correspondiente a cada ejercicio y verifique el resultado. También le recomiendo revisar el siguiente enlace para profundizar sobre la operación de Producto punto.

Actividad 3: es importante diferenciar entre vectores y escalares, por lo que le invito a revisar el siguiente video titulado: “Introducción a vectores y escalares”. En donde se explica de forma clara dicha diferencia. Además, podrá comprender estos conceptos con aplicaciones prácticas; también, le servirá como base para temas posteriores como suma de vectores.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Semana 2

En esta semana se continúa con la unidad 1, sin embargo, se centra ya en el tema de matrices. Las matrices son herramientas fundamentales en el álgebra lineal, utilizadas para representar y manipular datos organizados en filas y columnas.

1.3. Definición de matriz

En los contenidos de esta semana, se revisará uno de los temas más importantes del álgebra lineal: **Las matrices.** *¿Han visto alguna vez esta palabra? Si es así, ¿en dónde la vieron por primera vez?*

Las matrices están por todas partes, y se utilizan para representar, organizar y procesar información de manera estructurada. Por ejemplo, en informática, una imagen digital es una matriz de píxeles, donde cada número representa la intensidad de color.

Por lo tanto, se puede definir a una matriz como una tabla de números organizada en filas y columnas. Además**,** se la puede representar, por lo general, con una letra mayúscula, como A.

Una definición más formal es que una matriz A de m x n es un arreglo de mn números reales o complejos, en donde, m representa las filas y n las columnas, como se puede observar a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Es importante destacar el concepto de diagonal de una matriz, la misma que está formada por los números $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{mn}$ de la matriz A, también conocida como la diagonal principal de la matriz.

En la figura 2, puede encontrar diferentes matrices, las mismas que se diferencian por su tamaño.

Por ejemplo, la matriz A tiene 3 filas y 3 columnas, por lo que se dice que su dimensión es de 3 x 3. Por otro lado, está la matriz D, la cual tiene un tamaño de 3 x 1, lo que significa que tiene 3 filas y 1 columna.

> Lo invito a revisar el resto de matrices de la figura 2 y a profundizar en este tema revisando el siguiente video sobre: Tipos de matrices.

Figura 2

Diferentes ejemplos de matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Nota. Rohoden, K., 2025.

1.4. Tipos de matrices

Ahora que ya conoce el concepto de matriz, se dará cuenta que no todas las matrices son iguales, ya que existen diferentes tipos según su forma o sus elementos. Acompáñeme a descubrir cada uno de los diferentes tipos de matrices que existen revisando la Tabla 2, en donde, se indica el tipo de matriz y su definición a manera de resumen, para que se vaya familiarizando con las mismas.

Tabla 2

Tipos de matrices.

Tipo de matriz	Definición
Matriz cuadrada	Tiene el mismo número de filas y columnas.
Matriz identidad	Matriz cuadrada con 1 en la diagonal principal y 0 en el resto.
Matriz nula	Todos sus elementos son cero.
Matriz diagonal	Matriz cuadrada con ceros fuera de la diagonal principal.
Matriz simétrica	Cumple $A = A^t$
Matriz triangular superior	Tiene ceros por debajo de la diagonal principal.

Nota. Se muestran los diferentes tipos de matrices junto con su definición. Rohoden, K., 2025.

1.4.1. Matriz cuadrada

Para empezar, se introducirá el concepto de un tipo especial de matriz que es una de las más conocidas en álgebra lineal. Esta matriz se conoce como matriz cuadrada, en donde el número de filas es igual al número de columnas, como se puede observar a continuación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

¿Pero por qué esta matriz es cuadrada? La respuesta es más sencilla de lo que supone, imagine a la matriz cuadrada como un cuadrado geométrico que tiene lados iguales. Lo mismo pasa con la matriz cuadrada, ya que tiene dimensionales iguales, es decir, n x n, o para este caso específico 3 x 3.

Seguro se preguntará que tiene de especial este tipo de matriz o por qué es una de las más conocidas en álgebra lineal. La respuesta es sencilla y se debe a que las matrices cuadradas son las únicas con las que se puede calcular el determinante, buscar su inversa, o analizar los valores propios y vectores propios, conceptos que se verán más adelante.

1.4.2. Matriz identidad

La matriz identidad es una matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos (1) y todos los demás elementos son ceros (0), como la matriz B que se muestra a continuación.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede decir, que una matriz identidad es una matriz que no cambia nada, o expresado de otra manera, es una matriz que no altera otra matriz cuando se multiplica con ella.

1.4.3. Matriz diagonal

Si en una matriz cuadrada cada término fuera de la diagonal principal es igual a cero, entonces, se dice que es una matriz diagonal, como la matriz B que se indica a continuación.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

¿Se puede concluir que una matriz identidad es también una matriz diagonal? ¡Claro que sí! de hecho, la matriz identidad es un caso especial de matriz diagonal, en donde, todos los valores de la diagonal son 1.

1.4.4. Matriz escalar

En las secciones anteriores se revisó el concepto de matriz cuadrada, diagonal e identidad. Entonces, ¿qué pasaría si todos los valores de la diagonal fueran iguales? Tal cual como la matriz que se indica a continuación, en donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales y el resto son ceros, entonces, se tiene una matriz escalar**.**

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerar que toda matriz identidad es una matriz escalar. Por ejemplo, en la matriz que se indica a continuación, se puede decir que la matriz identidad C se multiplicó por el escalar α = 5, dando como resultado la matriz escalar D.

$$\alpha \cdot A = D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Como pudo darse cuenta existen diferentes tipos de matrices, algunos ejemplos los puede encontrar en el siguiente juego de relacionar.

Tipos de Matrices

¡Muy buen trabajo!, en esta actividad se logra identificar correctamente varios tipos de matrices, lo que demuestra la comprensión de los conceptos básicos. Ahora, le recomiendo reforzar con ejemplos numéricos sencillos para diferenciar con mayor claridad las matrices que suelen confundirse, como la identidad y la diagonal.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

1.5. Operaciones con matrices

¿Alguno de ustedes ha sumado o multiplicado matrices antes? De esto se trata esta sección, de aprender a operar con las matrices, ya que estas siguen reglas distintas a las que se usan con números comunes. Por ejemplo, se pueden sumar matrices, pero solo si estas tienen el mismo tamaño, es decir, el número de filas es igual al número de columnas. A continuación, se revisan las principales operaciones que se pueden realizar con matrices.

1.5.1. Suma y resta de matrices

La suma (o resta) de matrices únicamente puede realizarse en el caso de operar con dos o más matrices con igual dimensión.

Recuerde que las matrices de igual dimensión es cuando el número de filas es igual al número de columnas.

Así pues, sean dos matrices $A = (a_{ij})_{m\times n}$ y $B = (b_{ij})_{m\times n}$ (de igual dimensión), la suma de dichas matrices, es decir, $A + B$ es igual a una matriz de similar dimensión a las sumadas $(m \times n)$ cuyos elementos corresponden a la suma de los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición. De forma más puntual, la suma de dos matrices corresponde a:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, sean las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

- Entonces la suma de las dos matrices se resuelve de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -3\\ 7 & 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 8\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 6\\ 2 & 10 & 5\\ 7 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

- Por otro lado, también se puede desarrollar la resta de matrices, lo cual se indica a continuación.

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -3\\ 7 & 0 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 8\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\\ -2 & 0 & -11\\ 7 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

Este mismo proceso se deberá seguir si la cantidad de matrices cambia, por ejemplo, al tener que sumar tres o más matrices.

Le invito a desarrollar el siguiente ejercicio sobre suma de matrices en Geogebra, contenido en la infografía que se presenta a continuación.

Ejemplo de suma de matrices en Geogebra

Como pudo observar, este ejercicio tiene dos objetivos, por un lado, conocer un poco más sobre el funcionamiento de Geogebra y, por otro lado, aplicar el concepto de suma de matrices.

1.5.2. Multiplicación de matrices

Continuando con la operación con matrices, ahora es el turno de la multiplicación de matrices.

> Para lo cual, se define el producto de una matriz *A* de dimensión *m x n* por una matriz *B* de dimensión *n x p* es igual a una matriz *C* cuyo elemento c_{ij} es igual al producto escalar de la *i*-ésima fila de la matriz *A* por la *j*-ésima columna de la matriz *B*.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Observe, que, de acuerdo con esta definición, el producto de dos matrices solo es posible si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

Para comprender un poco más sobre esta operación, revise el siguiente ejemplo, en donde, se quiere multiplicar las matrices A y B.

Por ejemplo, sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, la multiplicación de $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ será igual a

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 4 - 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 5 & 12 & 10 \end{pmatrix}$$

Como resultado de multiplicar A y B, puede observar que se obtiene una nueva matriz. Además, note que si el tamaño de la matriz A es 2 x 3 y el tamaño de la matriz B es 3 x 3, entonces la matriz resultante tendrá un tamaño de 2 x 3.

1.5.3. Propiedades de la suma matrices y el producto de una matriz por un escalar

Ahora que ya conoce como sumar y multiplicar matrices, es importante conocer las propiedades algebraicas que se aplican a estas operaciones. Para lo cual, considere las matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, y $C = (c_{ij})$ de dimensión $(m \times n)$, entonces puede encontrar las propiedades en la Tabla 3.

Tabla 3

Propiedades de la suma de matrices y el producto de una matriz por un escalar.

Propiedad	Ejemplo
En la propiedad asociativa la forma de agrupar las matrices en una suma no afectará el resultado.	$(A+B)+C=A+(B+C)$
La propiedad conmutativa se puede representar de la siguiente manera, sumando las matrices A y B.	$A+B=B+A$
La suma de una matriz con el elemento neutro da la misma matriz. En este ejemplo, 0 representa una matriz cuyos elementos son iguales a cero	$0+A=A$
Con la propiedad del elemento inverso aditivo, para cada matriz A, existe una matriz -A (cada elemento es el opuesto del elemento correspondiente en A) tal que su suma es la matriz nula.	$-A+A=0$
En la multiplicación de una matriz por un escalar, cada elemento de la matriz se multiplica por ese escalar.	$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$

Nota. Se presentan las propiedades de la suma y la multiplicación en matrices. Rohoden, K., 2025.

Finalmente, se ha culminado con los contenidos de estudio de la presente semana. Para aplicar sus conocimientos adquiridos, le invito a realizar el siguiente quiz.

Tipos y Operaciones con Matrices

El cuestionario permitió reforzar la identificación de diferentes tipos de matrices y la aplicación de operaciones básicas como suma, resta, multiplicación y multiplicación por un escalar, sentando bases sólidas para avanzar hacia temas más complejos del álgebra lineal.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, es momento de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

Actividad 1: construya una matriz cuadrada de orden 3×3 con números enteros aleatorios. Una vez que tenga esta matriz, realice lo siguiente:

- Modifique la matriz de tal manera que se convierta en una matriz identidad de orden 3×3.
- Ahora, transforme la matriz identidad en una matriz escalar multiplicando todos los elementos de la diagonal principal por un número escalar distinto de 1.
- Finalmente, compare las tres matrices construidas y discuta las diferencias y similitudes entre ellas.

Estrategia de trabajo

Se recomienda usar un *software* como Excel, GeoGebra o calculadoras científicas en línea para crear y modificar matrices, como, por ejemplo, Matrix Calculator - Symbolab. Adicionalmente, responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué elementos cambian al pasar de matriz aleatoria a identidad?
- ¿Qué característica conservan todas las matrices en la diagonal?
- ¿Cuál de las tres matrices conserva estructura, pero cambia escala?

Actividad 2: lea sobre el uso de motores de búsqueda mediante el uso de matrices. Para lo cual puede revisar la página 13 del libro de Kolman.

- ¿Qué motores de búsqueda consultó?
- ¿Cómo se usan las matrices en los motores de búsqueda?

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Estrategia de trabajo

Para esta actividad, se recomienda extraer y anotar los conceptos clave como: matriz de enlaces, importancia relativa, métodos de ponderación, etc. Reflexione: *¿cómo se puede determinar qué página tiene mayor relevancia?*

Actividad 3: finalmente, revise el siguiente *applet* de Geogebra, el cual le permitirá explorar de forma visual y práctica conceptos clave del álgebra lineal como las operaciones con matrices. En este *applet* usted podrá manipular directamente matrices y observar cómo cambian los resultados al aplicar operaciones básicas.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Semana 3

En esta semana se sigue revisando la unidad 1, y se centra en la definición de matriz escalonada y traspuesta de una matriz. Además, se integra un concepto muy importante del álgebra lineal que es la inversa de una matriz.

1.6. Transpuesta de una matriz

A continuación, se revisará un concepto de mucha importancia en el álgebra lineal: la transpuesta de una matriz. Básicamente, transponer una matriz *significa intercambiar sus filas por sus columnas.* A continuación, se presenta una definición más formal:

Dada una matriz cualquiera A, se llama transpuesta (A^t) a la matriz que resulta de cambiar ordenadamente las filas por las columnas (Núñez, 2019).

Para entender este concepto, se propone como ejemplo encontrar la transpuesta de la matriz A:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Su transpuesta será A^t

$$\boldsymbol{A}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

En la matriz transpuesta, A^t, se puede observar cómo se intercambiaron las filas por columnas. Recuerde que a lo largo de esta guía se representa la transpuesta de una matriz como A^t. Sin embargo, puede encontrar que en la literatura también se presenta como A^T, lo cual también es correcto.

A continuación, le invito a realizar el siguiente juego con la finalidad de reforzar el cálculo de la transpuesta de una matriz.

¿Transpuesta correcta?

Ha realizado un buen trabajo sobre la transpuesta de una matriz, mostrando comprensión de su definición y propiedades. Para afianzar el tema, le sugiero practicar con ejercicios que incluyan matrices no cuadradas, ya que allí suele haber más confusión.

1.6.1. Propiedades de la matriz transpuesta

¿Alguna vez se ha preguntado qué sucede si intercambiamos filas por columnas en una matriz? Eso es, precisamente, lo que hace la transposición. Al aplicar esta operación, cada fila de la matriz original se convierte en una columna, y cada columna en una fila, generando lo que se conoce como su matriz transpuesta.

Pero, ¿para qué sirve esta transformación? La transpuesta revela estructuras interesantes y posee propiedades fundamentales en álgebra lineal. En esta sección se exploran esas propiedades y se ve cómo se comporta la transposición frente a operaciones como la suma, el producto y la doble transposición. Para esto le invito a revisar la siguiente *tabla 4*, en donde se visualiza la propiedad junto con un ejemplo para su mejor comprensión.

Tabla 4

Propiedades de la matriz transpuesta.

Propiedad	Ejemplo
Una de las propiedades es trasponer dos veces la matriz, lo cual da la matriz original. $(A^t)^t = A$	$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ $(A^t)^t = A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$
La transposición de una suma de matrices es igual a la suma de sus transpuestas. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$	$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ $A + B = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ $(A+B)^t = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $B^t = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ $A^t + B^t = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$
Otra de las propiedades es poder multiplicar una matriz por un escalar y luego transponerla. Esto equivale a transponerla primero y luego multiplicarla. $(\alpha A)^t = \alpha A^t, \forall \alpha \in R, \alpha \neq 0$	$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, k = 2$ $kA = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$ $(kA)^t = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $kA^t = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

Nota. Elaborado con *OpenAI*, por ChatGPT, 2025, ChatGPT.

A continuación, se propone un ejercicio en donde se usa las propiedades de la matriz traspuesta. Este ejercicio consiste en demostrar que $(AB)^t=B^t A^t$, para lo cual, considerar las siguientes matrices.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora se resuelve siguiendo los siguientes pasos.

- Primero encontrar *AB*.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ (-8+18) & (-10+21) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}$$

- Como segundo paso encontrar la traspuesta del producto de las matrices, es decir, $(AB)^t$.

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

- Ahora calcular B^t y A^t.

$$B^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Finalmente se calcula $B^t A^t$, demostrando que se cumpla la propiedad.

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

1.7. Inversa de una matriz

La matriz inversa de una matriz cuadrada A es una matriz A^{-1} que satisface la condición

$$\boldsymbol{AA^{-1} = I}$$

donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad. En ese caso se dice que A es invertible, regular, no singular.

1.7.1. Propiedades de la inversa de una matriz

Una vez que se ha revisado el concepto de inversa de una matriz, se continuará revisando las propiedades de la misma. Preste mucha atención, a la siguiente infografía donde encontrará cada una de las propiedades de la inversa de una matriz, así como su expresión algebraica y un ejemplo para que comprenda de mejor manera el concepto de las mismas.

Propiedades de la inversa de una matriz.

Como pudo observar, a través de la infografía presentada se logra consolidar las propiedades fundamentales de la inversa de una matriz, destacando su relación con la transpuesta, el producto y los escalares. Estos resultados facilitan la manipulación algebraica y el análisis de sistemas lineales dentro del álgebra lineal.

1.8. Cálculo de la matriz inversa

¿Qué pasa si se quiere descomponer una multiplicación de matrices? O de una manera más sencilla, ¿cómo se puede invertir una matriz?

¿Todas las matrices son invertibles? La respuesta es no, ya que solo las matrices cuadradas que tienen determinante distinto de cero son invertibles. A continuación, se verán algunas formas de encontrar la inversa de una matriz.

1.8.1. Operaciones elementales

Las operaciones elementales son un método sencillo y seguro para encontrar la inversa de una matriz, para lo cual le pido que preste especial atención en el procedimiento que se indica a continuación.

Dada una matriz de orden n x m, se efectúa una operación elemental sobre una fila o columna, cuando se realiza cualquiera de las siguientes transformaciones:

Figura 3

Procedimiento de las operaciones elementales

Procedimiento de las operaciones elementales

Intercambiar dos filas o columnas

- En forma general se denota esta operación por E_{ij}, donde los índices hacen referencia a las filas o columnas intercambiadas.
- Cabe notar que para diferenciar si la operación es aplicada a una fila o una columna se emplea la notación F_{ij} para el caso del intercambio de filas o C_{ij} para el caso del intercambio de columnas.

Multiplicar una fila o columna por un número real diferente de cero:

Se denota en forma general por $\alpha \cdot E_i$, que indica que la fila o columna (F o C) i-ésima se multiplica por el número real .

Suma de Filas (o Columnas)

Consiste en multiplicar una fila o columna por un escalar no nulo y sumar el resultado a otra fila o columna. Se puede escribir como $F_i + kF_j$ (sumar la fila j multiplicada por k a la fila i) o $C_i + kC_j$ (sumar la columna j multiplicada por k a la columna i).

Nota. Rohoden, K., 2025.

Por otra parte, se llama matriz elemental a una matriz cuadrada, que resulta de efectuar una operación elemental sobre una fila o columna en la matriz identidad. Además, también se pueden realizar operaciones elementales inversas, como se indica en la siguiente Tabla 5. En dicha tabla, puede observar tres operaciones elementales para encontrar la inversa de una matriz:

- La primera operación consiste básicamente en cambiar una fila por otra.

- La segunda operación realiza una multiplicación por un escalar *k*, el cual debe ser distinto de cero.
- Y la tercera operación consiste en sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar distinto de cero.

Si desea practicar un poco más sobre el uso de las operaciones elementales para encontrar la inversa de una matriz le sugiero revisar a García Manzanas y Carballo Fidalgo (2022).

Tabla 5

Operaciones elementales inversas en matrices.

Operación elemental	Operación elemental inversa
Cambiar fila $\boldsymbol{i}$ por la $\boldsymbol{j}$	Cambiar la fila j por la i
Multiplicar una fila por $\boldsymbol{k \neq 0}$	Multiplicar una fila por $\frac{1}{k}$, $k \neq 0$
Sumar a la fila $\boldsymbol{i}$, la $\boldsymbol{j}$ multiplicada por $\boldsymbol{k \neq 0}$	Sumar a la fila i, la j multiplicada por $-k \neq 0$

Nota. Rohoden, K., 2025.

A continuación, le propongo el siguiente ejemplo en donde se usa la matriz elemental para cambiar la fila 1 con la fila 2 de la matriz A y así poder encontrar la inversa de la matriz. Para lo cual, le pido considerar la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Lo primero que se va a realizar es crear la matriz elemental, la cual se denominará como matriz E.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Luego se realiza la operación de multiplicación $E \cdot A$, con lo cual se obtiene una nueva matriz de iguales dimensiones a la matriz A.

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0)(2) + (1)(4) & (0)(1) + (1)(3) \\ (1)(2) + (0)(4) & (1)(1) + (0)(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Finalmente, la matriz A ha sido transformada por la matriz elemental E para intercambiar sus filas.

1.8.2. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan

El principio básico a emplear para el cálculo de la matriz inversa a través de matrices elementales es que las operaciones esenciales que ayudan a transformar la matriz A en matriz identidad se realizan sobre la matriz identidad, lo que da la matriz invertida de la matriz A.

Conocido este principio, cuya demostración se deja al estudiante, dada la matriz A cuadrada de orden n, por ejemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

el procedimiento para calcular la matriz inversa es el siguiente:

a. Construir una matriz extendida M conformada en la mitad izquierda por la matriz A y la mitad derecha por la matriz identidad $\boldsymbol{I}$ de idéntico orden que A, es decir, $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})$.

$$\boldsymbol{M} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b. A continuación, se debe a través de operaciones elementales aplicadas a la matriz M, transformar la parte izquierda, A, en una matriz identidad. La matriz que resulte en la parte derecha corresponderá a la matriz inversa de A.

Por tanto, para este ejemplo, las operaciones elementales a realizar, podrían ser las siguientes:

a. $(-1) \cdot F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

b. $F_2 - F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

c. $F_3 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

d. $F_2 + F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

e. $F_1 + F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

f. $(-1) \cdot F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Por tanto, la matriz inversa de A es

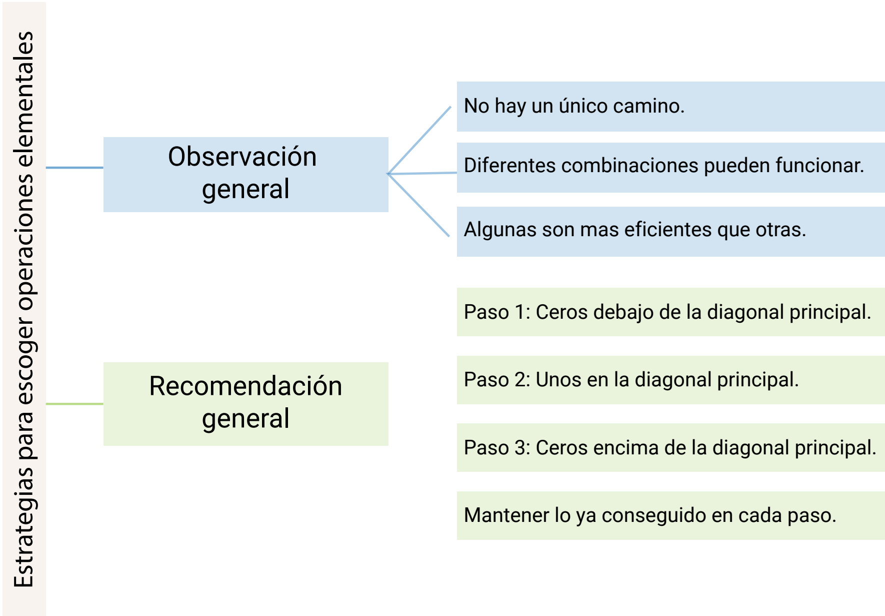
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En cuanto a cómo escoger las operaciones elementales a realizar, es evidente que el orden y las operaciones elementales presentadas no son únicas y que varias combinaciones de operaciones elementales pueden conducirnos en mayor o menor tiempo al objetivo propuesto. En forma general, se recomienda el proceso que se indica en la *figura* 4.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Figura 4

Estrategia recomendada para escoger operaciones elementales en Gauss-Jordan.



Nota. Elaborado con *Whimsical* [Ilustración], por Whimsical, 2025, Whimsical, CC BY 4.0.

Sin duda alguna, el método de Gauss-Jordan es un poco más complejo que el método de operaciones elementales, sin embargo, con un poco de práctica se puede aprender sin ningún problema.

Para poder comprender de mejor manera este método le animo a revisar el siguiente video titulado "Inversa de una matriz de 3x3 método de Gauss Jordan | Ejemplo 2", en donde, se indican algunos ejemplos del cálculo de la inversa de una matriz usando el método de Gauss-Jordan.

Para finalizar esta semana, le invito a participar en el siguiente quiz y así reforzar los conocimientos adquiridos.

Quiz "Transposición e inversión de matrices"

Como pudo observar, el cuestionario permitió reforzar las propiedades de la transposición y la inversión de matrices, consolidando herramientas esenciales para la resolución de sistemas lineales y el avance en el estudio del álgebra lineal.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, a continuación, le propongo algunas actividades para repasar los contenidos de la semana 3. Le invito a revisarlas y desarrollarlas.

Actividad 1: en los siguientes ejercicios se sugiere usar el concepto de matriz transpuesta, así como sus propiedades.

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar la matriz transpuesta A^t.
- Dada la matriz $B = (5)$,encontrar la matriz transpuesta B^t.
- Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Verificar que $(A^t)^t = A$.
- Plantee tres matrices diferentes de 3x3. Demuestre que $(ABC)^t = C^t\, B^t\, A^t$.

Estrategia de trabajo

- Repasar el concepto de determinante, para lo cual se recomienda revisar la bibliografía complementaria, específicamente el capítulo 3 de (Vera de Payer, 2020).

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

- **Identificar las dimensiones:** antes de transponer, anote el tamaño de la matriz original (por ejemplo, 2×3) y observe que la transpuesta tendrá dimensiones inversas (3×2). Esto ayuda a evitar errores en el número de filas/columnas del resultado.

- **Uso de colores o marcas (visual):** en clases presenciales o virtuales, colorear o marcar con números el orden de los elementos puede facilitar el seguimiento y evitar confusión.

Actividad 2: con base en el concepto de matriz inversa y el cálculo de la misma usando operaciones elementales (método de Gauss-Jordan), resuelva los siguientes ejercicios.

- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre A^{-1} utilizando el método de matriz aumentada $[\,A|I\,]$ y operaciones elementales.

- Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Aplique operaciones por filas hasta transformar $[\,B|I\,]$ en $[I|B^{-1}]$.

- Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Use operaciones elementales para convertir la matriz aumentada $[C|I]$ en forma reducida. Determine si la matriz es invertible. Si lo es, encuentre C^{-1}.

- Dada la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule D^{-1} usando el método de matriz extendida. Multiplique $D \cdot D^{-1}$ para comprobar que obtiene la matriz identidad.

Estrategia de trabajo

- **Refuerzo del concepto de matriz inversa:** le animo a revisar constantemente la bibliografía básica (Núñez, Vargas & Boada, 2019) con el fin de reforzar los conocimientos adquiridos sobre el concepto de matriz inversa. Recuerde que no todas las matrices tienen inversa, solo las cuadradas y de determinantes distintos de cero.

- **Planteamiento del procedimiento (Gauss-Jordan):** transforma la matriz *A* en la identidad y aplica las mismas operaciones a una matriz identidad de su mismo orden. Puede considerar los siguientes pasos:
    - Escriba la matriz aumentada [*I*].
    - Aplique operaciones elementales (intercambiar filas, multiplicar por escalares, sumar múltiplos de filas) hasta que la parte izquierda sea *I*.
    - La parte derecha resultante será A^{-1}.

Actividad 3: finalmente, le invito a revisar el siguiente sitio *web* donde se presenta de forma dinámica el método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa mediante operaciones elementales de fila. Además, usted podrá visualizar paso a paso la transformación y así comprender cómo las operaciones de fila equivalen a multiplicar por la inversa.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Semana 4

En la Semana 4 se abordarán conceptos fundamentales del álgebra lineal que permiten analizar sistemas de ecuaciones lineales desde una perspectiva matricial. Se iniciará con el estudio del determinante de una matriz, una herramienta clave para conocer propiedades como la invertibilidad. Se aprenderán distintos métodos para calcular determinantes, incluyendo la Regla de Sarrus y la Regla de Cramer.

1.9. Determinante de una matriz

Los determinantes constituyen un concepto de gran importancia dentro del campo de las matrices. Su interpretación geométrica permite calcular fácilmente áreas, volúmenes de determinadas figuras geométricas; es posible hallar las ecuaciones de un plano en el espacio o realizar productos vectoriales. Por otra parte, los determinantes son una herramienta para resolver con facilidad sistemas de ecuaciones lineales, además de permitir comprobar la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones lineales generales (Vera de Payer, 2020).

El determinante es una operación aplicable a matrices cuadradas que asocia a una matriz un escalar. Generalmente, el determinante de la matriz A se representa por $det\ (A)$, o $|A|$. Existen varias formas de calcular el determinante, en esta asignatura, primero se explicará una forma sencilla de calcular los determinantes para matrices de pequeño orden, específicamente orden 1, 2 y 3; a través de la Regla de Sarrus.

1.9.1. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden 1

Como punto de partida se va a establecer que el determinante de un escalar (matriz de orden 1) es igual al propio escalar. Por lo tanto, el determinante de una matriz cuadrada de orden 1, es decir, una matriz de tamaño 1x1, es simplemente el único valor numérico que contiene la matriz. Por ejemplo, suponga que se tiene la siguiente matriz

$$A = [5]$$

Al decir, que el determinante de una matriz de 1x1 es el único valor numérico que contiene la matriz, se está diciendo que el determinante será igual a 5, es decir, $det\ (A) = 5$.

1.9.2. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada de orden 2 o 3

Un método sencillo y fácil de memorizar para resolver determinantes de matrices de orden 2 o 3 (únicamente) es la Regla de Sarrus. Le invito a revisar la siguiente presentación interactiva donde podrá conocer los enunciados de la Regla de Sarrus para el cálculo de las determinantes:

Cálculo del determinante de una matriz de cuadra de orden 2 y orden 3.

Como pudo observar, encontrar el determinante de una matriz es bastante sencillo usando la Regla de Sarrus. Sin embargo, no olvide que la Regla de Sarrus **es solo aplicable a matrices de** 3 x 3 y no puede ser generalizada a matrices de mayor tamaño.

1.9.3. Propiedades del determinante

Las siguientes propiedades pueden asociarse al cálculo del determinante de una matriz; su demostración queda como trabajo adicional para el estudiante.

Figura 5

Propiedades de los determinantes

Propiedades de los determinantes	
Fila o columna nula	Si los elementos de una fila o columna son nulos el valor del determinante es nulo.
Filas o columnas iguales:	Un determinante con dos filas o columnas paralelas iguales es nulo.
Filas o columnas proporcionales:	Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales su valor es nulo.
Intercambio de filas o columnas:	Si cambiamos dos filas o columnas el determinante cambia de signo.
Factor común:	Para multiplicar un número por un determinante se multiplica el número por los elementos de una fila o columna cualquiera. Por tanto, en un determinante se puede sacar factor común, siempre que exista un número que multiplique a todos los elementos de una fila o columna.
Transpuesta:	$\lvert\mathbf{A}^t\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert$
Escala	$\lvert\alpha\cdot\mathbf{A}\rvert = \alpha^n\cdot\lvert\mathbf{A}\rvert$
Producto de matrices:	$\lvert\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert\cdot\lvert\mathbf{B}\rvert$

Nota. Rohoden, K., 2025.

1.9.4. Regla de Cramer

La regla de Cramer es un método que permite calcular la solución de un sistema con n ecuaciones y n incógnitas (aplicable solo a sistemas cuadrados, mismo número de ecuaciones que de incógnitas), siempre y cuando el determinante de la matriz asociada A sea diferente a cero (Lay, 2007).

La forma general del sistema de ecuaciones se puede representar como

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Recuerde que un sistema de ecuaciones también se puede escribir de la siguiente manera:

$$A \cdot x = b$$

Donde A es la matriz de coeficientes, $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$.

A continuación, lo invito a revisar los pasos que se siguen para aplicar la Regla de Cramer, los mismos que se presentan en la *Figura* 6.

Figura 6

Pasos para aplicar la Regla de Cramer.

1. Formar la matriz de coeficientes A
2. Calcular la determinante de A, det(A). Si det(A) = 0 el sistema no tiene solución.
3. Para cada incógnita, formar una matriz modificada reemplazando la columna correspondiente con el vector de términos independientes.
4. Calcular los determinantes de esas matrices:
   - D_x, reemplazando la columna de x.
   - D_y, reemplazando la columna de y.
   - D_z, reemplazando la columna de z.
5. Aplique la fórmula:
   $x = \frac{D_x}{\det(A)}$, $y = \frac{D_y}{\det(A)}$, $z = \frac{D_z}{\det(A)}$

Nota. Rohoden, K., 2025.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Para que entienda mejor la Regla de Cramer, lo invito a revisar el ejemplo contenido en la siguiente infografía.

Ejemplo de aplicación de la Regla de Cramer

Como pudo observar en el ejemplo que se presentó, aplicar la Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones, muestra cómo los determinantes facilitan obtener soluciones precisas de manera ordenada y directa.

Ahora lo invito a reflexionar sobre las siguientes cuestiones relacionadas con la Regla de Cramer.

- ¿Qué condiciones son necesarias para aplicar la Regla de Cramer a un sistema de ecuaciones?
- ¿Por qué la Regla de Cramer no se utiliza en sistemas grandes en aplicaciones reales?

Con la finalidad de verificar su comprensión en el cálculo del determinante, le invito a realizar el quiz que se presenta a continuación:

Quiz – Determinante de una matriz

¡Buen trabajo! Le recomiendo reforzar la interpretación de los resultados, especialmente en casos donde el determinante es cero.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, es momento de aplicar sus conocimientos a través de las actividades que se han planteado a continuación:

Actividad 1: utilice MATLAB para determinar la inversa de cada una de las siguientes matrices. Emplee el comando rref([A eye(size(A))]).

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estrategia de trabajo

- **Pruebe con matrices conocidas:** empiece con matrices pequeñas y conocidas para validar que el código esté bien implementado. Por ejemplo, use matrices cuya inversa ya conozca o que pueda verificar manualmente.
- **Análisis del producto** $A \cdot A^{-1}$**:** una vez obtenida la inversa, verifique la corrección multiplicando la matriz original por su inversa (*A*•*inv*(*A*)) y asegurándose de que el resultado sea, aproximadamente, la matriz identidad.
- **Finalice la actividad con un análisis reflexivo:** ¿cuál fue la matriz más compleja de invertir?, ¿cómo ayudó MATLAB a automatizar el proceso?

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Actividad 2: consulte sobre el método de cofactores para encontrar el determinante de una matriz.

- El método de cofactores se utiliza para encontrar el determinante de matrices de mayor tamaño; sin embargo, se vuelve complejo su uso al incrementar el orden de la matriz. Debido a esto, es más común utilizar el método de Gauss.
- Lo invitamos a que revise el funcionamiento del método de cofactores y desarrolle algunos ejercicios en donde aplique dicho método.

Estrategia de trabajo

- Comience revisando el concepto de cofactor y cómo se utiliza en la expansión del determinante por filas o columnas. Se recomienda consultar la bibliografía básica (Núñez, 2019).
- Estudie uno o dos ejemplos resueltos en los que se use el método de cofactores para matrices de 3×3. Practique el método con matrices 2×2 y 3×3 antes de avanzar a dimensiones mayores. Esto permite reforzar el procedimiento sin errores de cálculo.
- Una vez obtenido el determinante por cofactores, verifique el resultado utilizando una herramienta como Symbolab o MATLAB, comparando los valores obtenidos con el método automático.

Actividad 3: en el siguiente *applet* interactivo podrá explorar visualmente las propiedades fundamentales del determinante, como su comportamiento ante operaciones de filas, multiplicación de filas por escalar y la suma de filas. De esta manera, podrá adquirir una comprensión más profunda del significado algebraico, ya que podrá manipular directamente las filas de una matriz y así observar cómo cambian los valores del determinante en tiempo real.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Actividad 4: finalmente, nos encontramos en un excelente momento para repasar el material que se estudió en la unidad de Fundamentos del álgebra lineal. Le sugiero que realice la siguiente autoevaluación para determinar qué ideas comprende y cuáles requieren más explicación. Así podrá avanzar con más confianza en su aprendizaje y reforzar los temas que considere más importantes.

Autoevaluación 1

1. **La propiedad conmutativa de la adición de vectores establece que la agrupación de los sumandos no altera el resultado.**

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. **¿Cuál de las siguientes afirmaciones es** verdadera **respecto a la multiplicación escalar de un vector?**

   a. El resultado de la multiplicación escalar entre un número real y un vector siempre es un escalar.
   b. La dirección del nuevo vector siempre es opuesta al vector original.
   c. La magnitud del nuevo vector es el producto entre la magnitud del vector original y el valor absoluto del escalar.
   d. La multiplicación escalar solo es posible si el escalar es un número positivo.

3. **¿Cuál de las siguientes matrices es un ejemplo de una matriz identidad?**

   a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & -4 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

4. **La propiedad de la transpuesta que indica** $(A^t)^t=A$ **significa que al aplicar la operación de transponer una matriz dos veces, se obtiene la matriz original.**

   a. Verdadero.
   b. Falso.

5. **Dada la matriz** $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$**. El determinante será:**

   a. 3.
   b. 1.
   c. -1.
   d. -3.

6. **Dados los vectores u = (3, 1) y v = (-1, 3), ¿los vectores son ortogonales**?

   a. Verdadero.
   b. Falso.

7. **Dados los vectores u = (3, 2) y v = (1, 4), calcule la suma u + v**.

   a. (4,6).
   b. (2,-2).
   c. (2,6)
   d. (4,-2).

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

8. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **y** $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$**. ¿Cuál es la resta de las dos matrices?**

a. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

9. ¿Cuál es la condición fundamental para que la Regla de Cramer sea aplicable para resolver un sistema de ecuaciones lineales?

a. La Regla de Cramer es un método aplicable solo a sistemas no cuadrados.

b. La condición fundamental es que el determinante de la matriz de coeficientes asociada (A) debe ser igual de cero (det(A) = 0).

c. La condición fundamental es que el determinante de la matriz de coeficientes asociada (A) debe ser diferente de cero (det(A) ≠ 0).

d. Si el determinante de A es diferente a cero, la Regla de Cramer indica que el sistema no tiene solución por este método.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

10. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial R^4?

a. 3.
b. 2.
c. 4.
d. -3.

Ir al solucionario

Semana 5

Estimado estudiante, a partir de la semana 5 se revisará la unidad 2, la cual comprende el tema de espacios vectoriales. Además, los temas principales de esta unidad a estudiarse en esta semana son la definición de base y dimensión. Para tener una idea general de esta unidad, le invito a observar el siguiente video introductorio: unidad 2.

Unidad 2. Espacios vectoriales

2.1. Definición del espacio vectorial

Un espacio vectorial no es solo un lugar donde viven los vectores con flechas en el plano o el espacio. Es un conjunto de objetos, como, por ejemplo, vectores, funciones, polinomios, incluso matrices, que pueden sumarse y multiplicarse por números, llamados escalares, cumpliendo reglas muy específicas.

Entender qué es un espacio vectorial permite analizar sistemas de ecuaciones, estudiar independencia lineal, construir bases y comprender cómo se estructuran muchos problemas del mundo real. Así que, aunque al principio parezca abstracto, le aseguro que es una de las herramientas más poderosas en el álgebra lineal. ¿Listos para descubrirlo? Entonces ahora se empezará con una definición más formal de espacio vectorial.

> Un espacio vectorial (o espacio lineal) es un conjunto no vacío ***V***, cuyos elementos se llaman vectores, junto con dos operaciones: suma de vectores y multiplicación por un escalar (Núñez, 2019). Este espacio vectorial puede ser real o complejo, lo cual depende de los escalares que harán que se cumplan las dos operaciones.

Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, que está conformado por los vectores *x* de *n* componentes (x_1, ... ,x_n) reales, es un espacio vectorial real.

2.1.1. Propiedades de la suma de vectores

Se preguntará qué tiene que ver la suma de vectores con el espacio vectorial. Como respuesta, tiene que saber que para que un conjunto sea considerado espacio vectorial, la suma de sus vectores debe cumplir con algunas propiedades fundamentales, las cuales se muestran en la siguiente figura.

Figura 7

Propiedades de la suma de vectores

Clausura bajo la suma: $u + v \in V$
Conmutatividad: $u + v = v + u$
Asociatividad de la suma: $(u + v) + w = u + (v + w)$
Existencia del vector cero: $\exists 0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$
Existencia del opuesto: $\exists - u \in V tal que u + (-u) = 0$

Nota. Rohoden, K., 2025.

2.1.2. Propiedades de la multiplicación por escalares

En un espacio vectorial, la multiplicación por escalares también debe cumplir con ciertas propiedades. Estos escalares son números reales o complejos dependiendo del espacio. Estas propiedades se muestran en la figura que se presenta a continuación.

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Figura 8

Propiedades de la multiplicación por escalares

Propiedades de la multiplicación por escalares	
Clausura bajo el producto escalar:	$\alpha u \in V$
Distributividad del escalar sobre la suma:	$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
Distributividad sobre la suma de escalares:	$(\alpha+\mu)u = \alpha u + \mu u$
Asociatividad del producto escalar:	$\alpha(\mu u) = (\alpha\mu)u$
Existencia del scalar unidad	$1u = u$

Nota. Rohoden, K., 2025.

Algunos ejemplos de espacios vectoriales son el conjunto de vectores de *n* componentes reales, el cual se representa como $\mathbb{R}^n$. También se tiene que un espacio vectorial son los polinomios de grado menor o igual a 2, P_2.

Ahora se propone un ejemplo, en donde, se debe demostrar que V es un espacio vectorial. Para lo cual $V=\{(x,y):x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R}\}$. Además, se definen las operaciones de suma y multiplicación escalar:

$$(x1, y1) + (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2)$$

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Para poder demostrar que *V* es un espacio vectorial, debemos verificar que se cumplen las 10 propiedades de un espacio vectorial, lo cual se indica en la siguiente infografía:

Propiedades de un espacio vectorial.

Como todas las propiedades requeridas se cumplen, el conjunto $V = \mathbb{R}^2$ con las operaciones dadas sí es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2.2. Subespacios vectoriales

Un subespacio vectorial es un conjunto dentro de un espacio vectorial que también cumple con todas las propiedades necesarias para ser considerado un espacio vectorial por sí mismo. Es decir, si al sumar dos vectores del conjunto o multiplicar por un escalar se sigue dentro del mismo conjunto, entonces se tiene subespacio. Esta idea permite analizar partes del espacio original que conservan su estructura algebraica.

Por lo tanto, un subconjunto $S \subset V$ es un subespacio vectorial si:

- Contiene el vector cero.
- Es cerrado bajo la suma: $u,v \in S \Rightarrow u+v \in S$.
- Es cerrado bajo el producto escalar: $au \in S$.

Algunos ejemplos de subespacios vectoriales son la recta $x = y \ en \ \mathbb{R}^2$ y el plano $XY \ en \ \mathbb{R}^3$.

2.2.1. Formas implícita y paramétrica

Es importante saber que los subespacios pueden describirse de dos formas: forma implícita y la forma paramétrica. En la forma implícita se describe el subespacio mediante ecuaciones, como por ejemplo

$x+y+z=0$. Por otro lado, la forma paramétrica trabaja con combinación de vectores base.

Lo invito a revisar el siguiente ejemplo para mejorar la comprensión de las formas de representación de un subespacio vectorial.

En este ejemplo se repasará cómo pasar de la forma paramétrica a la forma implícita. Para lo cual se considera la recta que pasa por el punto $P_0=(1,2)$ que tiene dirección $v=(3,-1)$. La forma paramétrica se representa de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-t \end{cases} \quad con\ t\in\mathbb{R}$$

Ahora es necesario pasar a la forma implícita, para lo cual se va a despejar t de ambas ecuaciones:

- Despejando t de la primera ecuación, se obtiene $t=\frac{x-1}{3}$.
- Mientras que, despejando t de la segunda ecuación, se obtiene $t=2-y$.

A continuación, se igualan las dos expresiones de t:

$$\frac{x-1}{3}=2-y$$

x+3y=7

Siendo la forma implícita x+3y=7.

A continuación, se presenta un ejemplo para pasar de la forma implícita a la forma paramétrica. Dada la ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$

x+2y−z=3

Como primer paso, se debe resolver la ecuación para una variable, por ejemplo, para la variable *x*:

$$x=3-2y+z$$

Luego, se eligen parámetros libres, es decir, y=s y z=t, en donde s,t $\in \mathbb{R}$. Con esto ya podemos escribir la forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 3 - 2y + z \\ y = s \\ z = t \end{cases} \quad con\ s,t \in \mathbb{R}$$

También se puede escribir de forma vectorial, la cual sería la forma paramétrica:

$$r(s,t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para reforzar el concepto de subespacio vectorial y sus formas paramétrica e implícita le invito a revisar el artículo Espacios y subespacios vectoriales, en donde podrá encontrar varios ejemplos aplicados a este tema, así como las condiciones necesarias y suficientes para caracterizar subespacios.

Adicionalmente, a ello, le invito a participar del siguiente juego con el propósito de reforzar los conceptos de espacio y subespacio vectorial.

Espacios y subespacios vectoriales

Su participación en la actividad sobre espacios vectoriales demuestra comprensión de sus propiedades y definiciones clave. Le sugiero reforzar la relación entre los axiomas y ejemplos concretos, ya que esto facilita distinguir cuándo un conjunto es o no un espacio vectorial.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, a continuación, le invito a poner en práctica lo aprendido durante esta semana mediante su participación en las siguientes actividades:

Actividad 1: use Geogebra (Geogebra, 2024), para visualizar subespacios en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Estrategia de trabajo

Represente rectas que pasan por el origen, x = y. Esta recta representa el subespacio $(x, x) \in \mathbb{R}^2$. Pruebe ahora con esta recta, y = 2x.

Actividad 2: con base en los contenidos revisados sobre subespacios vectoriales, resolver los siguientes ejercicios.

- Obtener la forma paramétrica del subespacio de $\mathbb{R}^3$ con las ecuaciones en forma implícita: $\{x + z = 0,\ x + 2y + z = 0\}$.
- Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio de $\mathbb{R}^3$ dado por la forma paramétrica $\{(\alpha, \alpha, 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

Estrategia de trabajo

Dedique un tiempo específico a la lectura de la bibliografía básica (Núñez, 2019). Resalte las partes clave que aclaren dudas concretas o que enriquezcan sus actividades anteriores.

- ¿Qué es un subespacio?
- ¿Es el subespacio el conjunto de polinomios de grado ≤ 1 dentro de P_2?
- ¿Las matrices simétricas en M_{2x2} forman un subespacio?
- Como pasar de forma implícita a paramétrica y viceversa.

Actividad 3: revise el siguiente video donde se presenta una explicación conceptual y visual del Subespacio vectorial, así como las condiciones que debe cumplir un subconjunto de un espacio vectorial para ser considerado subespacio. Esta explicación se enfoca en un razonamiento paso a paso con ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Semana 6

Estimados estudiantes, durante esta semana se continúa trabajando en la unidad de espacios vectoriales. Pero en esta ocasión se revisan los conjuntos generadores y la dependencia e independencia lineal.

2.3. Definición de conjunto generador

Imagine un grupo de vectores que, combinados linealmente, pueden formar cualquier vector de un espacio o subespacio. Bien, a este grupo de vectores se lo conoce como **conjunto generador.** Es como tener las piezas básicas para construir todo lo que hay dentro del espacio. Comprenderlo ayuda a identificar de dónde nace el espacio vectorial y cómo se estructura.

Sea V un espacio vectorial en donde los vectores $v_1, v_2, \dots, v_r \subset V$, un conjunto generador, se define por $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ y lo denotaremos por $gen(S)$ (Núñez, 2019). Este conjunto generador es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, \dots, v_r$. Por lo tanto, el conjunto generador será igual a:

$$gen(S) = \{v \in V : v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r\}$$

Le invito a revisar el siguiente ejemplo con la finalidad de encontrar el conjunto generador. Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (-1,0,3)$. Encontrar el conjunto generado por $S = \{v_1, v_2\}$.

- El conjunto generado por $S = \{v_1, v_2\}$ está dado por:

$$\text{gen}(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 3)\}$$

$$(x, y, z) = (\alpha - \beta, \alpha, 3\beta)$$

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

- De donde:

$$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \alpha \\ z = 3\beta \end{cases} \quad con\ s, t \in \mathbb{R}$$

- Para resolver, reemplazar $\alpha = y$ y $\beta = \frac{z}{3}$ en la primera ecuación:

$$x = y - \frac{z}{3} \quad \Rightarrow x - y + \frac{z}{3} = 0 \quad \Rightarrow \ 3x - 3y + z = 0$$

- Por lo tanto, el conjunto generador será:

$$\text{gen}(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 3y + z = 0\}$$

- El conjunto generado por $S = \{(1{,}1{,}0), (-1{,}0{,}3)\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que contiene todos los vectores que satisfacen la ecuación $3x - 3y + z = 0$.

> Esto demuestra que con solo dos vectores se puede generar un plano dentro de $\mathbb{R}^3$, y evidencia el poder del conjunto generador para describir estructuras completas dentro de un espacio vectorial.

2.4. Dependencia e independencia lineal

2.4.1. ¿Qué es una combinación lineal?

Una combinación lineal ocurre cuando se multiplican vectores por escalares y luego se suman para formar un nuevo vector. Es como mezclar ingredientes en diferentes proporciones para obtener un resultado específico. Comprender las combinaciones lineales permite construir y analizar espacios vectoriales con mayor profundidad.

Por lo que, dado un conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$, una combinación lineal es toda expresión de la forma:

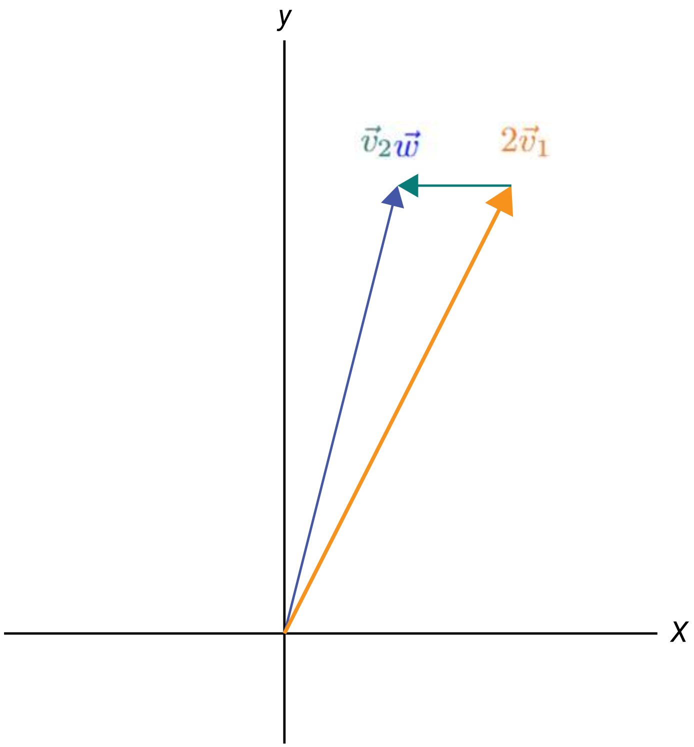
$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ son escalares.

Por ejemplo, considere los vectores $v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$. Entonces podemos concluir que el vector $w = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ es una combinación lineal de v_1 y v_2 ya que $w = 2v_1 + v_2$. Esta combinación lineal también la puede observar en la siguiente *figura 9*.

Figura 9

Visualización de la combinación lineal $w = 2\vec{v_1} + \vec{v_2}$ en $\mathbb{R}^2$.



Nota. Rohoden, K., 2025.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

2.4.2. Dependencia lineal

La dependencia lineal ocurre cuando un vector en un conjunto puede obtenerse a partir de una combinación de los otros. Es como tener piezas duplicadas en una caja de herramientas: algunas no son necesarias. Por lo que, un conjunto de vectores es linealmente dependiente si alguno de ellos se puede escribir como combinación lineal de los otros, o si el vector cero se puede obtener con coeficientes no todos nulos.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, \text{ con al menos un } \alpha i \neq 0$$

> Por ejemplo, si se tiene los vectores en $\mathbb{R}^2$,u=(1,1),v=(0,3) y w=(2,5). Entonces, son dependientes ya que:
>
> w=v+2u
>
> 0=v+2u-w

Por lo tanto, los vectores $u = (1,1)$, $v = (0,3)$ y $w = (2,5)$ son linealmente dependientes, ya que uno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros. En este caso, $w = v + 2u$, lo que implica que existe una relación no trivial entre ellos. Esta dependencia indica que no todos los vectores del conjunto aportan nueva dirección al espacio generado.

2.4.3. Independencia lineal

Ahora que ya se ha revisado qué es la dependencia lineal, se verá el caso contrario: la independencia lineal. Un conjunto de vectores es linealmente independiente cuando ninguno puede escribirse como combinación lineal de los otros. Es decir, cada vector aporta una dirección única al espacio. Esto es fundamental para construir bases, ya que asegura que no hay redundancia en la representación de los vectores del espacio.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Dicho de otra manera, un conjunto es linealmente independiente si la única forma de obtener el vector cero como combinación lineal es usando todos los coeficientes cero (Lay, 2007).

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

2.4.4. Propiedades de la dependencia e independencia lineal

Una vez revisados los conceptos de dependencia e independencia lineal, es momento de explorar sus propiedades. Estas ayudarán a analizar cómo se comportan los conjuntos de vectores al agregar, quitar o transformar elementos. Por ejemplo, si un conjunto es linealmente dependiente, cualquier conjunto que lo contenga también lo será; en cambio, si un conjunto es independiente, todo subconjunto suyo también lo será. Con estas propiedades, se puede evaluar con mayor claridad la estructura de los espacios vectoriales. A continuación, podrá encontrar dichas propiedades en la siguiente figura:

Figura 10

Propiedades de la dependencia e independencia lineal

Propiedades de la dependencia e independencia lineal	
Vector único:	*Un solo vector v≠0 es siempre independiente.*
Múltiplos:	*Dos vectores son dependientes si uno esmúltiplo del otro.*
Vector cero:	*Si un conjunto contiene al vector cero, es dependiente.*
Dependencia heredada:	*Si un conjunto es dependiente, añadir más vectores lo mantienedependiente.*
Ampliación	*Si un conjunto es independiente, se puede ampliar hasta una base.*

Nota. Rohoden, K., 2025.

A continuación, le invito a revisar la siguiente presentación interactiva donde se realizan algunos ejemplos que le permitirán comprender más a fondo sobre la dependencia y la independencia lineal.

Ejemplos de dependencia e independencia lineal

Como pudo observar, los ejemplos muestran que la independencia lineal se verifica cuando solo existe la solución trivial, mientras que la dependencia aparece al existir soluciones no triviales. Este criterio permite clasificar conjuntos de vectores y entender mejor la estructura de los espacios vectoriales.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

A manera de resumen, se presenta la siguiente infografía donde podrá repasar el concepto de dependencia e independencia lineal.

Conjunto generador, dependencia e independencia lineal

Como pudo observar, se muestra una adecuada organización de ideas y resalta conceptos clave de manera visual. Le recomiendo complementar con un ejemplo gráfico o numérico sencillo para reforzar la comprensión de cuándo un conjunto de vectores es dependiente o independiente.

2.5. Producto interno sobre un espacio vectorial

El producto interno de dos vectores $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$ se define como:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

Este producto interno se generaliza al espacio vectorial real $\mathbb{R}^n$. Este producto interno también se conoce como producto escalar euclidiano.

Por ejemplo, en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, el producto escalar euclidiano de los vectores $u=(3,\sqrt{2},-1)$ y $v=(3,-3,3\sqrt{2})$ es

$$u \cdot v = (3)(3) + (\sqrt{2})(-3) + (-1)(3\sqrt{2}) = 9 - 4\sqrt{2}$$

2.5.1. Norma de un vector

La norma es una medida de la longitud o magnitud de un vector. En espacios con producto interno, se define así:

$$\| u \| = \sqrt{u \cdot u}$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Es decir, la norma es la raíz cuadrada del producto interno del vector consigo mismo. Por ejemplo, para u=(3,4):

$$\|u\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Ahora se revisarán las propiedades de la norma de un vector. Estas propiedades permiten comprender cómo se comporta la longitud de un vector ante distintas operaciones. Además, garantizan que la norma tenga sentido geométrico y algebraico, asegurando consistencia al medir distancias o magnitudes en espacios vectoriales. Lo invito a revisar estas propiedades en la siguiente tabla:

Tabla 6

Propiedades de la norma de un vector en espacios vectoriales.

Propiedad	***Expresión matemática***	***Descripción***
No negatividad	$\|\|u\|\| \geq 0$ y $\|\|u\|\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$	*La norma de un vector nunca es negativa, y solo es igual a cero si el vector es el vector nulo.*
Homogeneidad	$\|\|\alpha u\|\| = \|\alpha\| \cdot \|\|u\|\|$	*Multiplicar un vector por un escalar cambia su norma en proporción al valor absoluto del escalar.*
Desigualdad triangular	$\|\|u+v\|\| \leq \|\|u\|\| + \|\|v\|\|$	*La norma del vector suma nunca excede la suma de las normas individuales.*
Norma del vector opuesto	$\|\|-u\|\| = \|\|u\|\|$	*Invertir la dirección del vector no altera su norma*

Nota. Rohoden, K., 2025.

¡Muy bien, finalizamos la semana 6! Ahora le invito a participar en el siguiente quiz para aplicar sus conocimientos.

Quiz – Conjuntos generadores y vectores

Como pudo observar, el presente cuestionario permitió reforzar los conceptos de conjuntos generadores, combinaciones lineales,

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

dependencia e independencia, así como el cálculo de producto interno y norma de vectores, fundamentales para comprender la construcción y análisis de espacios vectoriales.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, reforcemos el aprendizaje resolviendo las siguientes actividades.

Actividad 1: en los siguientes ejercicios, ponga en práctica el concepto de conjunto generador.

- Verifique si (1,1),(2,2) genera $\mathbb{R}^2$.
- Encuentre un conjunto generador del subespacio de $\mathbb{R}^3$ definido por $x+y+z=0$.

Estrategia de trabajo

- Antes de resolver los ejercicios, repase brevemente qué significa que un conjunto de vectores genere un espacio vectorial. Recuerde que generar un espacio significa que cualquier vector del espacio puede expresarse como combinación lineal de los vectores del conjunto.

Actividad 2: se debe analizar la independencia lineal, para lo cual realice lo siguiente para cada conjunto de vectores:

- Construya una matriz con los vectores como columnas.
- Aplique reducción por filas (escalonamiento) o calcula el rango.
- Conclusión:
  - Si el rango es igual a la dimensión del espacio, el conjunto genera ese espacio.

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

- Si el rango es menor, no lo genera.

Como un recurso adicional, puede usar calculadoras en línea o *software* como GeoGebra, Symbolab (Symbolab, 2024) o Desmos Matrix Calculator (Desmos Studio, 2024).

Estrategia de trabajo

- Comience con una explicación corta y clara sobre qué significa que un conjunto de vectores sea linealmente independiente. Recuerde que un conjunto de vectores es independiente si ninguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros.
- Se recomienda utilizar las herramientas Geogebra Classic, Symbolab Matrix RREF Calculator, Desmos Matrix Tool.

Actividad 3: revise el siguiente sitio *web* donde se presenta la definición y práctica de combinaciones lineales en espacios vectoriales, explicando cuándo un vector puede expresarse como combinación de otros mediante escalares, acompañado de ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Este material fortalece la comprensión, ya que va desde una formulación teórica hasta ejercicios concretos.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Semana 7

En la semana 7 se abordan conceptos clave del álgebra lineal como base y dimensión, que permiten representar espacios vectoriales de forma única y eficiente. Se estudia el cambio de base y las transformaciones de coordenadas para expresar vectores desde distintas perspectivas. Además, se revisarán los temas de rango, nulidad y los espacios renglón y columna para entender la estructura de una matriz. Finalmente, se introducen conceptos de norma y producto internos, que aportan una visión geométrica sobre longitud y ángulo en los vectores.

2.6. Concepto de base y dimensión

¿Alguna vez se ha preguntado cuáles son los vectores mínimos necesarios para construir todo un espacio vectorial?

A eso se le conoce como base: lo cual no es más que un conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio. Y la dimensión simplemente dice cuántos vectores hay en esa base.

> Le invito a revisar en las siguientes secciones cómo identificar bases y calcular la dimensión en distintos contextos.

2.6.1. Base y dimensión

Una base de un espacio o subespacio vectorial es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio. Toda base es un sistema generador mínimo y un conjunto de vectores linealmente independientes máximos.

En $\mathbb{R}^n$, la base canónica está formada por los vectores:

$$(1,0,\ldots,0),\ (0,1,\ldots,0),\ \ldots,(0,0,\ldots,1)$$

Una base alternativa de $\mathbb{R}^3$ es

$$(1,0,0),\ (1,1,0),\ (0,2,-3)$$

Por otro lado, la dimensión de un espacio es el número de vectores que forman una base. Por definición, el espacio vectorial cero tiene dimensión cero (Strang, 2016).

Con el siguiente ejemplo, podrá aplicar el concepto de dimensión. Para lo cual considere el subespacio $S \subset \mathbb{R}^3$ definido por la expresión paramétrica:

$$S = (\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Ahora, para encontrar la dimensión, se seguirán los siguientes pasos:

- El **paso 1** consiste en identificar los parámetros libres; en este caso, la expresión paramétrica tiene dos parámetros libres: α y β.

- Como **segundo paso,** se va a escribir el vector como una combinación lineal. Es decir, cada vector de *S* puede escribirse como combinación lineal de dos vectores:

$$(\alpha, \beta, 3\alpha - 5\beta) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,-5)$$

- Finalmente, declaramos el conjunto generador (y base) de *S* como:

$$(1,0,3),\ (0,1,-5)$$

Ahora sí, se puede concluir que, como la base tiene dos vectores linealmente independientes, la dimensión será igual a 2:

$$dim\,(S) = 2$$

2.6.2. Matriz de cambio de base

En un espacio vectorial, dadas dos bases $B=v_1,v_2,...,v_n$ y $B'=v_1',v_2',...,v_n'$, la matriz de cambio de base de *B* a *B´* es la matriz que expresa los vectores de *B* como combinaciones lineales de los vectores de *B´* (Lay, 2007).

Esta matriz se construye colocando las coordenadas de los vectores de *B* en función de la base *B´* como columnas.

Cuando se trabaja con diferentes bases en un mismo espacio vectorial, es necesario contar con una herramienta que permita traducir coordenadas de una base a otra. Esa herramienta es la matriz de cambio de base. Esta matriz no solo permite transformar vectores entre sistemas de referencia distintos, sino que también posee propiedades clave como ser cuadrada e invertible, que garantizan que el cambio de base sea coherente y reversible. A continuación, en la siguiente tabla se presentan las propiedades y su importancia para la correcta comprensión de las transformaciones lineales y representaciones matriciales.

Tabla 7

Propiedades de la matriz de cambio de base.

Propiedad	**Explicación**
Matriz cuadrada de orden n	*La matriz de cambio de base tiene dimensión n x n, donde n es la dimensión del espacio vectorial. Esto garantiza que puede operar correctamente sobre coordenadas de vectores en ese espacio.*
Es invertible	*Siempre existe una matriz inversa que realiza el cambio en sentido contrario. Si P es la matriz de cambio de base de B a B´, entonces P^{-1} es la matriz de cambio de B´ a B.*
La matriz identidad representa un cambio de base a sí misma	*Si se desea expresar un vector en la misma base, la matriz de cambio correspondiente es la identidad I_n, ya que no se realiza ninguna transformación.*

Nota. Rohoden, K., 2025.

Ahora le invito a revisar el siguiente ejemplo, con el cual podrá comprender cómo usar la matriz de cambio de base:

Sean las bases en $\mathbb{R}^2$, B=(2,3), (1,−1) y B'=(1,0), (0,1) (base canónica).

La matriz de cambio de base de B a B' es:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

$$(1,-1) = 1(1,0) - 1(0,1)$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.7. Transformación de coordenadas

Una transformación de coordenadas es expresar un mismo vector respecto a una base distinta. En lugar de ver un vector como una combinación de los vectores de la base canónica (por ejemplo, (1,0)(1,0)), ver como combinación de otros vectores diferentes, que forman otra base.

Por lo tanto, el vector no cambia, pero la forma en que lo describe sí, dependiendo de la base que se use.

Por ejemplo, si se tienen las siguientes bases:

Base canónica:
B' = (1,0),(0,1)

Nueva base:
B = (2,3),(1,−1)

Suponer que se tiene el vector v en base canónica, es decir:

$$v = 1\,(1,0) + 2\,(0,1)$$

Ahora, la pregunta es: ¿cómo se ve este mismo vector en base B?

- Para esto encontrar la combinación de vectores (2,3) y (1,−1) que dé el vector (1,2). Es decir:

$$v = \alpha(2{,}3) + \beta(1,-1)$$

- Para esto, buscar los valores de α y β que cumplan:

$$\alpha(2{,}3) + \beta(1,-1) = (1{,}2)$$

- Por lo tanto, se puede representar en un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 1 \\ 3\alpha - \beta &= 2 \end{aligned}$$

Ahora, resolver este sistema de ecuaciones:

- Sumar ambas ecuaciones

$$(2\alpha + \beta) + (3\alpha - \beta) = 1 + 2$$

$$5\alpha = 3 \implies \alpha = \frac{3}{5}$$

- Sustituyendo

$$2(3/5) + \beta = 1 \Rightarrow 6/5 + \beta = 1 \Rightarrow \beta = -1/5$$

- Como resultado

$$(1{,}2) = \frac{3}{5}(2{,}3) - \frac{1}{5}(1,-1)$$

- Por lo que, las coordenadas del vector v en la base B son:

$$[v]_B = \left(\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5}\right)$$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

2.8. Rango, nulidad, espacio renglón y espacio columna

Es importante saber que el análisis de una matriz va más allá de sus entradas numéricas, ya que existen conceptos adicionales que permiten comprender su estructura y comportamiento. Estos elementos están directamente relacionados con la solución de sistemas de ecuaciones y la dimensionalidad de los subespacios que genera una matriz.

En esta sección, se explora cómo identificar y utilizar estas nociones fundamentales para interpretar mejor la información que una matriz representa.

2.8.1. Rango y nulidad de una matriz

El rango de una matriz es el número de filas (o columnas) linealmente independientes**.** Para encontrar el rango, se transforma la matriz a su forma escalonada por filas. El número de filas no nulas en esa forma es el rango**.**

Por otro lado, la nulidad es el número de variables libres en un sistema homogéneo asociado a la matriz. En forma simple:

Nulidad = número de columnas - rango

2.8.2. Espacio renglón y espacio columna

El espacio renglón es el subespacio generado por las filas de la matriz. Se forma tomando todas las combinaciones lineales de las filas y su dimensión es igual al rango. Mientras que el espacio columna es el subespacio generado por las columnas de la matriz. Incluye todos los vectores que se pueden obtener como combinaciones lineales de las columnas. También tiene dimensión igual al rango.

Ahora revise los siguientes ejemplos, contenidos en la presentación interactiva que se muestran a continuación:

Ejemplo de rango y espacio renglón.

Como pudo observar, el cálculo del rango y la identificación del espacio renglón y columna, permiten reconocer la independencia de filas y columnas, lo que facilita comprender la estructura de una matriz y los subespacios que genera.

A continuación, le invito a realizar el siguiente crucigrama, el cual le permitirá reforzar conceptos clave como: base, dimensión, rango, nulidad, espacio renglón/columna y norma de un vector.

Fundamentos de la base y dimensión.

El desarrollo del crucigrama evidencia un buen dominio de los conceptos fundamentales. Además, le sugiero incorporar pistas que inviten a razonar más allá de la definición, como relaciones entre los términos o aplicaciones.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es momento de aplicar sus conocimientos a través de las actividades que se han planteado a continuación:

Actividad 1. Verificar la base en los siguientes ejercicios:

- Dado los vectores $v_1 = (1,0,2)$, $v_2 = (0,1,3)$ y $v_3 = (1,1,5)$ en $\mathbb{R}^3$. ¿Se forma una base de $\mathbb{R}^3$?

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

- Sea el siguiente sistema homogéneo, encuentre una base del espacio solución. Además, determine la dimensión.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

Estrategias de trabajo

- Para determinar si un conjunto de vectores forman una base, se sugiere organizar los vectores como columnas de una matriz. Además, se pueden aplicar las siguientes técnicas: determinante y reducción por filas.
- Para el sistema homogéneo, se sugiere que el estudiante escriba la matriz aumentada del sistema homogéneo y que use el método de eliminación de Gauss.

Actividad 2. Ejercicios relacionados con el cálculo del rango y la nulidad.

- Dada la siguiente matriz, determine el rango y la nulidad de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Dada la siguiente matriz, encuentre una base del núcleo B, calcule su dimensión. ¿Cuál es el rango de B?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estrategias de trabajo

- Se sugiere aplicar la reducción por filas y que aplique el teorema del rango-nulidad. Se debería verificar que *rango + nulidad = número de columnas*.

Actividad 3: revise el siguiente material educativo sobre Rango y nulidad, el cual presenta una guía de estudio clara y estructurada sobre el teorema del rango y la nulidad**,** presentando definiciones, fórmulas clave y ejemplos ilustrativos que conectan el rango de una matriz con la dimensión de su núcleo. También relaciona los conceptos teóricos con problemas resueltos paso a paso, facilitando que el estudiante comprenda cómo calcular ambos valores, interprete su significado en términos de soluciones de sistemas lineales y observe la relación fundamental: *dim* (*V*) = *rango* + *nulidad*.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Actividad 4: finalmente, estimado estudiante, le invito a desarrollar la autoevaluación que se presenta a continuación:

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Autoevaluación 2

1. **¿Qué es un espacio vectorial?**

   a. Un conjunto de números reales junto con una operación de multiplicación.

   b. Un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman vectores, junto con dos operaciones (suma de vectores y multiplicación por un escalar) que cumplen ciertas propiedades.

   c. Un conjunto de matrices invertibles.

   d. Un subconjunto de vectores que forman un ángulo recto.

2. **La propiedad de clausura bajo la suma en un espacio vectorial establece que, si sumas dos vectores cualesquiera de ese espacio, el resultado es siempre un escalar.**

   a. Verdadero.
   b. Falso.

3. **¿Cuál de las siguientes es una propiedad correcta de la multiplicación por escalares en un espacio vectorial?**

   a. $\alpha(u + v) = \alpha u + \mu v$

   b. $1 \cdot u = 0$

   c. $\alpha(\mu u) = (\alpha\mu)u$

   d. $(\alpha + \mu)u = \alpha + \mu + u$

4. El ejemplo $V = \{(x,y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones $(x1, y1) + (x2, y2) = (x1 + x2, y1 + y2)$ y $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ demuestra que $(x1, y1) + (x2, y2) = (x2, y2) + (x1, y1)$.¿Qué propiedad se está demostrando aquí?

5. Un subconjunto $W \subset V$ puede ser un subespacio vectorial, aunque no contenga el vector cero.

a. Verdadero.
b. Falso.

6. Dada la recta en forma paramétrica: $x = 1 + 3t$, $y = 2 - t$ con $t \in \mathbb{R}$. Encuentre su forma implícita.

7. ¿Qué es una combinación lineal de un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$?

a. La multiplicación de los vectores entre sí.
b. Una expresión de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, donde α_i son escalares.
c. La suma de los vectores sin ningún escalar.
d. El vector cero multiplicado por un escalar.

8. ¿Los vectores $u = (3,1)$ y $v = (4,5)$ en $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes? Demuestre su respuesta.

9. Para que un conjunto de vectores sea una base de un espacio vectorial, ¿qué dos características esenciales debe poseer?

a. Deben ser ortogonales y la suma de sus componentes debe ser cero.
b. Deben ser linealmente independientes y el número de vectores debe ser igual a la dimensión del espacio.
c. Deben generar todo el espacio y ser linealmente independientes.
d. Deben incluir el vector cero y tener la misma magnitud.

10. Calcule el producto interno (o producto escalar euclidiano) de los vectores $u = (3, \sqrt{2}, -1)$ y $v = (3, -3, 3\sqrt{2})$.

Ir al solucionario

Semana 8

Actividades finales del bimestre

Estimado estudiante:

Se ha llegado al final del primer bimestre, en estas primeras siete semanas se establecieron los fundamentos del álgebra lineal, comenzando con las operaciones básicas con vectores y la definición de matrices, incluyendo su traspuesta e inversa.

También se revisó el cálculo de determinantes y su relevancia en el análisis de matrices, así como los conceptos de espacios y subespacios vectoriales. Además, se abordaron los conjuntos generadores y las nociones de dependencia e independencia lineal, que son fundamentales para entender la estructura de los espacios vectoriales.

Al final del bimestre se revisaron los conceptos de base y dimensión, cambio de base y la transformación de coordenadas, proporcionando herramientas clave para representar vectores en distintas bases y comprender cómo se relacionan entre sí.

- **Semana 1.** Introducción al álgebra lineal, operaciones básicas con vectores.
- **Semana 2.** Definición de matriz, tipos de matrices y operaciones con matrices.
- **Semana 3.** Transpuesta de una matriz e inversa de una matriz.
- **Semana 4.** Determinante de una matriz, cálculo del determinante de una matriz.
- **Semana 5.** Espacios y subespacios vectoriales.
- **Semana 6.** Conjunto generador, dependencia e independencia lineal.

- **Semana 7.** Concepto de base y dimensión, matriz de cambio de base y transformación de coordenadas.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, para garantizar un buen desempeño en la evaluación bimestral, le recomiendo dedicar esta semana a repasar con profundidad cada uno de estos temas a través del desarrollo de las siguientes actividades.

Actividad 1. Resumen de los contenidos del primer bimestre. Elabore una hoja de referencia personal con:

- Definiciones.
- Propiedades.
- Fórmulas de: norma, determinante, producto interno.

Estrategias de trabajo

- La estrategia principal será la síntesis guiada, es decir, identificar y escribir con sus propias palabras las definiciones fundamentales (vectores, matrices, espacios vectoriales, etc.), propiedades clave (como clausura, asociatividad, etc.), y fórmulas importantes (cálculo de norma, determinante, producto interno).

- Utilice la bibliografía básica (Núñez, 2019) para consultar los temas revisados a lo largo del primer bimestre.

Actividad 2. Mapa conceptual integrador. Cree un mapa conceptual que integre los principales conceptos revisados en cada semana.

Estrategias de trabajo

- Por ejemplo, conecte visualmente conceptos como base, rango, norma, etc.

- Herramientas recomendadas: Coggle, Lucidchart.

Actividad 3. Visualizar gráficamente los conceptos de subespacio vectorial, combinación lineal y cambio de base, con el fin de reforzar la comprensión geométrica de los vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Estrategias de trabajo

- Usar la herramienta **GeoGebra (2D y 3D),** para representar y analizar visualmente distintos conceptos clave del álgebra lineal, como:
  - Subespacios (rectas y planos que pasan por el origen).
  - Generación de subespacios por combinación lineal.
  - Vectores ortogonales y proyecciones.
  - Cambio de base en $\mathbb{R}^2$.
  - Herramientas recomendadas: GeoGebra Graphing Calculator (2D), GeoGebra 3D Calculator.

Actividad 4. Analice las siguientes matrices e indique su tipo. Pueden ser: cuadrada, identidad, diagonal, triangular superior, triangular inferior, simétrica, nula, fila, columna o no clasificable.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Estrategias de trabajo

- Antes de comenzar el análisis, debe revisar las definiciones de cada tipo de matriz (cuadrada, identidad, diagonal, triangular, simétrica, nula, fila, columna, etc.), preferiblemente usando una tabla resumen o infografía, como apoyo visual. Esto puede realizarse con ayuda de la bibliografía básica (Núñez, 2019) o recursos interactivos (e.g., Khan Academy, GeoGebra, o páginas como Superprof o Symbolab).

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

- Se sugiere construir una tabla con los nombres de las matrices en una columna y en las demás columnas las propiedades relevantes a verificar (forma, elementos fuera de la diagonal, simetría, etc.), marcando con √ las características que cumplen. Esta herramienta visual permite identificar fácilmente el tipo de cada matriz.

- Identifique al menos dos propiedades en cada matriz, por ejemplo, la matriz A es cuadrada, identidad y diagonal.

Actividad 5. Observe el siguiente video: Subespacios y bases para un subespacio, en el cual, se usan ejemplos gráficos y algebraicos para que el estudiante analice y verifique paso a paso si un conjunto dado cumple con las condiciones de incluir el vector cero, ser cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar. Además, conecta la teoría con situaciones concretas, facilitando así una base sólida para temas más avanzados como espacios, solución y bases.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Actividad 6. Finalmente, para consolidar los conocimientos adquiridos durante las semanas 1 a la 7, revise la siguiente presentación interactiva que resume los contenidos estudiados.

Repaso del primer bimestre.

Este recurso le sirve para repasar vectores, matrices, determinantes, espacios vectoriales, base y dimensión, ya que muestra una buena organización de los conceptos y sus relaciones. Sería útil que amplíe un poco más sus conocimientos, incluyendo ejemplos breves para cada tema, lo que le facilitará la comprensión y aplicación de los conceptos.

Segundo bimestre

Resultado de aprendizaje 2

- Analiza las transformaciones de matrices y vectores, comprendiendo su papel en el análisis y optimización de redes de telecomunicaciones.

Para lograr el resultado de aprendizaje dentro de la carrera de Redes y Analítica de Datos, durante las unidades correspondientes al segundo bimestre, se abordarán las transformaciones lineales, cambio de base, valores y vectores propios, diagonalización y forma de Jordan. Estos conceptos permiten representar, simplificar y optimizar sistemas de redes mediante herramientas como MATLAB o GeoGebra. El proceso se apoya en metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Problemas, fortaleciendo la conexión entre teoría y el uso aplicado y profesional del álgebra lineal.

Contenidos, recursos y actividades de aprendizaje recomendadas

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Semana 9

Durante el segundo bimestre se estudiarán las unidades de Transformaciones lineales y matrices y Valores y vectores propios, con las que el estudiante adquirirá herramientas fundamentales para comprender cómo las estructuras algebraicas pueden representar y transformar información. A lo largo de estas unidades se explorarán conceptos como funciones lineales, representaciones matriciales y cambio de base, que permiten analizar sistemas complejos, simplificar procesos y modelar fenómenos en diversos contextos de la ingeniería, con proyección hacia su aplicación en áreas como redes, sistemas dinámicos y procesamiento de señales.

El estudio de matrices y transformaciones lineales tiene una aplicación concreta en los sistemas que hacen posible las comunicaciones a nivel global. El álgebra lineal es la base para algoritmos que se usan en la optimización de la transmisión de datos, así como para la estructura de las redes inalámbricas.

Es así que la materia de Álgebra lineal les permite construir herramientas que luego les permitirán resolver problemas reales del mundo digital. El dominio de esta materia marcará la diferencia en cómo se diseñan y se mejoran las redes del futuro.

¡Adelante con decisión, cada paso cuenta en este camino hacia la excelencia profesional!

Muy bien, inicia con la semana 9, en la que se revisará la unidad 3 con el concepto de transformación lineal, una herramienta clave para comprender cómo se pueden modelar y manipular espacios vectoriales mediante funciones que preservan estructuras algebraicas. También se revisarán sus propiedades fundamentales, como la aditividad y la homogeneidad, que definen su comportamiento matemático. Además, se estudiará la matriz asociada a una transformación lineal, lo que permitirá representar estas funciones de manera explícita y trabajar con ellas utilizando operaciones matriciales. Estos conocimientos son básicos para conectar el álgebra lineal con aplicaciones prácticas en diversas ramas de la ingeniería.

Para tener una idea general de esta unidad le invito a observar el siguiente video introductorio: unidad 3.

Unidad 3. Transformaciones lineales y matrices

3.1. Concepto de transformación lineal

Imagine que exista una regla que transforme un vector en otro sin romper la estructura del espacio. Esa es justamente la idea de una transformación lineal. Es como una máquina matemática que toma vectores de un espacio y los lleva a otro, respetando las operaciones de suma y multiplicación por escalares. Estudiar estas transformaciones ayuda a entender cómo cambian los vectores y qué propiedades se conservan en el proceso.

Entonces, una transformación lineal es una función $T: V \to W$ entre espacios vectoriales que cumple con las siguientes propiedades:

- La propiedad de **aditividad** en donde $T(u+v)=T(u)+T(v)$.
- Y la propiedad de **homogeneidad** en donde $T(\alpha u)=\alpha T(u)$.

Estas propiedades son importantes, ya que aseguran que la estructura vectorial se conserve. Considere la siguiente función en donde se demuestra que es lineal por cumplir con las dos propiedades mencionadas.

$$T(x,y) = (2x, 3y) \ es\ lineal\ porque:$$

- $T((x_1 + x_2, y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, 3y_1 + 3y_2)$
- $T(\alpha x, \alpha y) = (2\alpha x, 3\alpha y)$

3.1.1. Propiedades de las transformaciones lineales

Las transformaciones lineales también deben cumplir con algunas propiedades. En este sentido, si se tienen los espacios vectoriales V y W y $T: V \to W$ una transformación lineal. Sean u y v vectores en V y α un escalar. Entonces se cumplen las propiedades que se indican en la tabla.

Tabla 8

Propiedades fundamentales de las transformaciones lineales.

Propiedad	Expresión matemática	Explicación
Preserva el vector cero	$T(0_v) = 0_w$	La transformación de un vector nulo siempre da como resultado el vector nulo del espacio de llegada.
Preserva la negación	$T(-v) = -T(v)$	Aplicar la transformación a un vector negativo es lo mismo que transformar el vector original y luego negar el resultado.
Preserva la resta	$T(u - v) = T(u) - T(v)$	La transformación respeta la operación de resta entre vectores.
Combinación lineal básica	$T(u + \alpha v) = T(u) + \alpha T(v)$	Una transformación lineal respeta la combinación de vectores y escalares.
Combinación lineal general	$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$	La transformación puede distribuirse sobre cualquier combinación lineal de vectores en V.

Nota. Elaborado con *OpenAI*, por ChatGPT, 2025, ChatGPT.

Ahora realice el siguiente *quiz* para reforzar los conocimientos adquiridos sobre una transformación lineal. Esta actividad le permitirá repasar también las propiedades de linealidad.

Quiz- ¿es transformación lineal?

Como pudo observar en el *quiz* sobre transformaciones lineales, esta es una herramienta efectiva para reforzar conceptos clave, promoviendo el razonamiento crítico al identificar propiedades y aplicaciones de estas transformaciones.

3.2. Matriz asociada a una transformación lineal

Ya se conoce que una transformación lineal es una función que preserva la suma y la multiplicación escalar**.** Ahora es momento de aprender que toda transformación lineal puede representarse mediante una matriz que actúa sobre un vector por multiplicación.

Dada una base canónica, cualquier transformación lineal puede representarse como una matriz *A*, tal que:

$$T(x) = Ax$$

Lo que significa que la transformación T se puede implementar como una multiplicación matricial.

A continuación, se desarrolla un ejemplo para que quede claro cómo se construye esta matriz T, para lo cual va a suponer que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por:

$$T(x,y) = (3x + y, 2x - y)$$

El siguiente paso es aplicar T a los vectores base:

- $T(1{,}0) = (3(1) + 0{,}2(1) - 0) = (3{,}2)$
- $T(0{,}1) = (3(0) + 1{,}2(0) - 1) = (1, -1)$

Por lo tanto, la matriz asociada será:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hemos culminado con los contenidos de la presente semana y para poner en práctica los conocimientos adquiridos, le invito a participar del siguiente juego de completar.

Transformaciones lineales y matrices.

Como pudo observar, a través del desarrollo de este recurso se reforzaron los conceptos de transformación lineal, sus propiedades fundamentales y la forma de representarlas mediante matrices, consolidando así la comprensión de su utilidad en el álgebra lineal.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, a continuación, se presentan una serie de actividades que le permitirán aplicar y reforzar los conceptos aprendidos mediante ejercicios, representaciones geométricas y análisis de propiedades de las transformaciones lineales.

Estas actividades están diseñadas para ser trabajadas individualmente, tanto en formato digital como en papel, y buscan desarrollar habilidades de razonamiento algebraico y geométrico:

Actividad 1. Verifique si las siguientes funciones son transformaciones lineales.

- $T_1(x, y) = (x + y, y - x)$
- $T_2(x, y) = (x^2, y)$

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

Estrategias de trabajo

- Antes de resolver, repase las dos condiciones fundamentales que debe cumplir una transformación T para ser lineal: aditividad y homogeneidad.
- Puede usar *software* como GeoGebra, CAS, MATLAB o Python (SymPy) para simbolizar y verificar algebraicamente las propiedades. Esto refuerza el análisis riguroso.

Actividad 2. Ponga en práctica el concepto de transformación lineal desarrollando los siguientes ejercicios.

- Sea A una matriz m x n. Demuestre que la transformación $T: M_{n\times k} \to M_{m\times k}$ definida como $T(B) = AB$ es lineal.
- Demuestre que la siguiente transformación es lineal: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+3y \\ x+2y \end{bmatrix}$$

- ¿Es lineal la transformación f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por f(x) = x + 1?

Estrategias de trabajo

- Construya tablas donde compare el resultado de $T(u+v)$ y $T(u)+T(v)$, así como $T(cu)$ y $cT(u)$. Este formato ayuda a visualizar diferencias y similitudes.
- Después de verificar o refutar la linealidad, debe justificar su conclusión de forma escrita, conectando con las definiciones teóricas. Esto promueve la claridad y rigor en la argumentación.

Actividad 3. Revise el siguiente artículo donde se presenta una Definición de transformación lineal entre espacios vectoriales con el desarrollo de algunos ejemplos como la transposición de matrices, el operador

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

derivado y la determinación de transformaciones no lineales. Además, también podrá encontrar la verificación de aditividad y homogeneidad.

Nota. Por favor, complete las actividades en un cuaderno o documento Word.

Semana 10

En la semana 10 se profundizará en el análisis estructural de las transformaciones lineales a través de conceptos fundamentales como la composición de transformaciones, el núcleo y la imagen, así como los valores asociados de nulidad y rango. Con estos temas comprenderá cómo las transformaciones pueden combinarse, cómo afectan al espacio vectorial y qué información preservan o descartan.

De esta manera podrá desarrollar la capacidad de analizar la efectividad y las limitaciones de una transformación, dar soluciones a sistemas de ecuaciones y determinar dimensiones clave dentro del espacio.

3.3. Composición de transformaciones lineales

Cuando aplicamos una transformación lineal y luego otra, el resultado es como si aplicáramos una sola transformación: **la composición.** En álgebra lineal, esta combinación se traduce en la multiplicación de matrices. Así, componer transformaciones es más que aplicar fórmulas; es conectar movimientos en el espacio de manera ordenada y precisa.

> Por lo tanto, se puede decir que la composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices.

Si se tienen dos transformaciones lineales:

- $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con matriz A.
- $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con matriz B.

Entonces la composición *S* o *T* está representada por: *S(T(x))=B(Ax)=(BA)x*.

Revisar el siguiente ejemplo para mejorar la comprensión de este tema:

- Considere que las transformaciones T y S están dadas por las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En donde, A es la matriz de T y B es la matriz de S. Por lo tanto, la composición *S(T(x))* está dada por la matriz producto de $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Entonces:

$$S(T(x,y)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ y \end{bmatrix}$$

La transformación compuesta *S(T(x,y))* puede representarse de forma algebraica mediante la multiplicación de matrices: $B \cdot A$.

Esto demuestra que aplicar dos transformaciones lineales consecutivas es equivalente a aplicar una sola transformación cuya matriz es el producto de las matrices individuales. Esta propiedad es clave en el estudio de álgebra lineal y tiene aplicaciones directas en gráficos por computadora, animación, robótica y modelado 3D (Number Analytics, 2022).

3.4. Núcleo e imagen de una transformación

En el estudio de las transformaciones lineales, dos conceptos clave ayudan a entender cómo se comporta una función entre espacios vectoriales: el núcleo y la imagen.

Estos elementos permiten analizar la estructura de una transformación, identificar si es invertible, y saber qué tanta información del espacio original se conserva. El conocer y entender estos conceptos sirve para resolver sistemas de ecuaciones, optimizar cálculos y modelar fenómenos en distintas áreas de las matemáticas y la ciencia.

3.4.1. Núcleo e imagen de una transformación

En esta sección se presenta un concepto clave en el estudio de las transformaciones lineales: *el núcleo de una transformación.*

¿Pero qué representa exactamente el núcleo?

El núcleo permite identificar qué vectores del espacio de partida se transforman en el vector cero del espacio de llegada.

Si se tienen dos espacios vectoriales V y W y una transformación lineal $T: V \to W$, se define el núcleo de T como $N(T)$ al conjunto:

$$N(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$$

Es decir, el núcleo contiene todos los vectores v en V tales que al aplicar la transformación T, el resultado es el vector nulo 0 en W.

Por otro lado, se define la imagen de una transformación lineal para V y W espacios vectoriales y $T: V \to W$ como $I_m(T)$ al conjunto:

$$I_m(T) = \{w \in W : w = T(v) \ para \ cierto \ v \in V\}$$

En conclusión, $I_m(T)$ es un subespacio vectorial de W y $N(T)$ es un subespacio vectorial de V.

Le invito a revisar la Tabla 9 que presenta una comparación entre el núcleo y la imagen de una transformación lineal. Esta distinción es fundamental para comprender el comportamiento de las transformaciones lineales en distintos contextos algebraicos y geométricos.

Tabla 9

Núcleo vs. Imagen de una Transformación Lineal.

Concepto	Definición	Notación	Utilidad principal
Núcleo	Conjunto de vectores en V que se transforman en el vector cero en W.	$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$	Determina si la transformación es inyectiva. Relacionado con soluciones de sistemas homogéneos
Imagen	Conjunto de todos los vectores en W que son imagen de algún vector en V.	$Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$	Indica el rango de la transformación.

Nota. Elaborado con *OpenAI*, por ChatGPT, 2025, ChatGPT.

3.5. Nulidad y rango

En el análisis de transformaciones lineales, la nulidad y el rango son dos medidas que permiten evaluar la eficiencia y el alcance de la transformación. La **nulidad** indica cuántas direcciones del espacio de partida se pierden al transformarse, mientras que el **rango** señala cuántas dimensiones efectivas se conservan en el espacio de llegada. Juntas, estas nociones brindan información clave sobre la estructura de la transformación y su relación con los sistemas de ecuaciones lineales.

Se define la nulidad como *dim*(N(T)) y el rango de T como *dim*(I_m (T)).

Para comprender este tema, le invito a revisar el ejemplo contenido en la siguiente infografía:

Ejemplo de nulidad y rango.

Como pudo observar, la transformación analizada muestra cómo calcular núcleo, imagen, nulidad y rango, evidenciando la estructura del espacio.

En este sentido, la siguiente tabla resume su definición, relación con los sistemas de ecuaciones y forma de representación.

Tabla 10

Nulidad vs. Rango de una Transformación Lineal.

Concepto	Definición	Relación con sistemas	¿Cómo se representa?
Nulidad	Dimensión del núcleo de una transformación lineal (cantidad de soluciones que van al vector cero).	Determina cuántas soluciones libres tiene un sistema homogéneo.	$dim(N(T))$
Rango	Dimensión de la imagen de una transformación lineal (cantidad de salidas distintas posibles).	Determina cuántas ecuaciones independientes existen en el sistema.	$dim(I_m(T))$

Nota. Elaborado con *OpenAI*, por ChatGPT, 2025, ChatGPT.

A continuación, le invito a revisar el siguiente documento sobre Transformaciones Lineales, el mismo que contiene una variedad de ejercicios que le permitirán repasar los contenidos de esta semana.

Además, puede realizar el siguiente juego para repasar las definiciones de composición, núcleo, imagen, rango y nulidad.

Definiciones de núcleo, imagen, rango, nulidad, composición.

Al finalizar esta actividad podrá diferenciar entre conceptos de composición, núcleo e imagen, así como entre rango y nulidad. Además, podrá evidenciar su comprensión en las definiciones y relaciones entre estos conceptos.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, con el objetivo de reforzar su aprendizaje, le invito a participar del desarrollo de las siguientes actividades:

Actividad 1: consulte sobre el teorema de las dimensiones y resuelva los siguientes puntos.

- ¿Qué establece el teorema de las dimensiones?
- Demuestre mediante un ejemplo cómo funciona este teorema.

Estrategia de trabajo

Realice una lectura comprensiva sobre el teorema de las dimensiones, en donde, las dimensiones se refieren a los valores de rango y nulidad. Además, puede realizar algunos ejercicios con el fin de comprobar el teorema.

Actividad 2: simulación con Octave/Python para determinar rango y nulidad.

- Cree una función para trabajar con matrices.
- Calcule el rango y nulidad.
- ¿Se cumple el teorema de las dimensiones?

Estrategia de trabajo

- Implementa un *script* en GNU Octave, Matlab o Python (con numpy o scipy).
- Define una matriz de transformación A.
- Utilice los comandos null(A) y rank(A).

Actividad 3: finalmente, le invito a dar lectura al siguiente material sobre el tema Núcleo e imagen. Este recurso ofrece una exposición clara y detallada sobre el núcleo y la imagen de una transformación lineal,

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

presentando definiciones formalizadas, ejemplos resueltos paso a paso y una introducción al teorema de las dimensiones que vincula ambas nociones con la dimensión del espacio original.

Nota. Por favor, complete la actividad en un cuaderno o documento Word.

Semana 11

La semana 11 se centrará en el tema del cambio de base, un concepto que permite representar un mismo vector en diferentes sistemas de referencia dentro de un espacio vectorial. Se estudiará la construcción y uso de la matriz de cambio de base, lo cual permite transformar coordenadas de un vector al pasar de una base a otra.

Comprender cómo se construye y aplica esta matriz es clave para resolver problemas en los que se requiere adaptar representaciones según distintos marcos de análisis, facilitando así el estudio y simplificación de transformaciones lineales en contextos matemáticos y de ingeniería.

3.6. Cambio de base

El cambio de base es una transformación lineal específica que permite expresar los vectores y las matrices de transformación en diferentes sistemas de coordenadas.

¿Pero por qué cambiar de base?

En muchos problemas de ingeniería, física o programación, no es eficiente trabajar en la base estándar. Por lo que cambiar de base permite:

Figura 11

Usos del cambio de base

Usos del cambio de base

Simplificación:	Simplificar cálculos (diagonalización, rotación, simetría).
Conveniencia:	Adaptar una representación a un sistema de referencia más conveniente.
Compresión:	Comprender mejor el comportamiento de una transformación lineal.
Representaciones locales:	Trabajar con representaciones locales (por ejemplo, en coordenadas polares, en redes o señales)

Nota. Rohoden, K., 2025.

3.7. Concepto de base

Una base de un espacio vectorial V es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan todo el espacio.

Cualquier vector $x \in V$puede escribirse de forma única como combinación lineal de los vectores de la base:

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \Longrightarrow [x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, con el vector $x = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ y la base no estándar $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Lo que se quiere lograr es expresar al vector x como combinación lineal de los vectores de B, es decir:

$$x = av_1 + bv_2$$

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

- Por lo tanto, lo primero que se hace es plantear la combinación lineal como se indica a continuación:

$$x = a\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2a-b\\a+b\end{bmatrix}$$

- Luego, se iguala esta combinación al vector x, esto es igualar los componentes de la siguiente manera:

$$\begin{cases}2a-b=5\\a+b=1\end{cases}$$

- Como paso final se resuelve el sistema de ecuaciones.
  - De la segunda ecuación despejar b, quedando $b = 1 - a$.
  - Luego sustituir el valor de b en la primera ecuación: $2a - (1-a) = 5 \Rightarrow 2a - 1 + a = 5 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2$.
  - Reemplazando a en $b = 1 - a$, b tiene un valor de -1.
- Se tiene como resultado que las coordenadas del vector x respecto de la base B son:

$$[x]_B = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

Pero, ¿qué significa este resultado?

- En la base estándar $\varepsilon = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$, el vector x tiene coordenadas $(5{,}1)$.
- En la base B, este mismo vector se representa como:

$$x = 2 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2$$

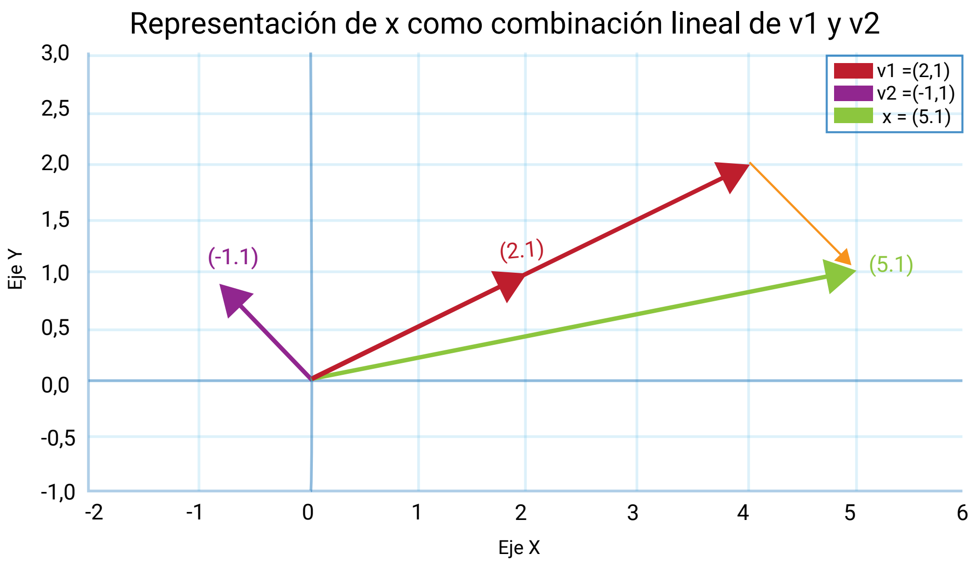
Esto significa que el vector no cambia en el espacio, sino que cambia su expresión en un sistema de referencia distinto.

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

En la Figura se observa la representación gráfica de los vectores $\overrightarrow{v_1} = (2,1), v\vec{2} = (-1,1)$, y su combinación lineal que da como resultado el vector $\vec{x} = (5,1)$. La figura 12 muestra cómo x puede obtenerse mediante $2 \cdot \overrightarrow{v_1} + (-1) \cdot \overrightarrow{v_2}$.

Figura 12

Representación gráfica de la combinación lineal de vectores en una base no estándar.



Nota. Rohoden, K., 2025.

3.7.1. Matriz de cambio de base

La matriz de cambio de base permite cambiar las coordenadas de un vector en una base por las coordenadas del mismo vector en otra base.

En este sentido, sea $B = v_1, \ldots, v_n$ y $B' = v_1', \ldots, v_n'$, dos bases de un mismo espacio vectorial. La matriz de cambio de base de B' a B es:

$$P_{B \leftarrow B'} = [[v_1']_B \cdots [v_n']_B]$$

Por lo que se cumple $[x]_B = P_{B\leftarrow B'} \cdot [x]_{B'}$. Lo que significa que si se conocen las coordenadas de un vector respecto a la base B', se pueden encontrar las coordenadas en la base B multiplicando por esta matriz.

Lo invito a revisar la siguiente infografía para reforzar los conceptos de cambio de base.

Cambio de base y matriz de cambio de base.

Como pudo observar en el recurso, se presentan de manera organizada los conceptos de cambio de base y cómo se relacionan entre sí. También se desarrollaron algunos ejemplos numéricos para visualizar mejor el proceso de transformación entre bases.

¿Cómo se construye la matriz de cambio de base?

Para la construcción de la matriz de cambio de base se deben seguir los siguientes pasos.

- El primer paso consiste en definir las bases. No olvidar que ambas bases deben estar en el mismo espacio vectorial V.

$$B = v_1, \dots, v_n$$

$$B' = v_1', \dots, v_n'$$

- En el segundo paso se expresa cada vector de B' en coordenadas de B. Es decir:

$$v_i' == a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n \Rightarrow [v_i']_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

- Como tercer paso, debemos formar la matriz, para lo cual se agrupan los vectores como columnas:

$$P_{B\leftarrow B'} = [[v_1']_B \ \ [v_2']_B \cdots [v_n']_B]$$

Para entender de mejor manera la construcción de la matriz de cambio de base, le invito a revisar el siguiente ejemplo.

Sean las siguientes bases en $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \left\{v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\} (base\ estándar)$$

$$\mathcal{B}' = \left\{v_1' = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, v_2' = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Para encontrar $P_{B\leftarrow B'}$, expresar v_1' y v_2' en términos de la base estándar, de la siguiente manera:

$$P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

Recuerde que para cambiar de coordenadas en *B* a *B´*, se debe usar la matriz inversa, como se indica a continuación:

$$P_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{B}'})^{-1}$$

Lo invito a profundizar en el tema de cambio de base revisando el Applet de Geogebra que permite visualizar cómo se realiza un cambio de base en álgebra lineal. Este recurso le va a permitir manipular vectores que representan la base original y la nueva base, así como ver en tiempo real cómo cambian las coordenadas del vector.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Una vez realizada esta actividad, le pido que responda a las siguientes preguntas en un documento Word:

- ¿Qué pasa cuándo se invierte la base?
- ¿Cómo se relaciona la inversa de la matriz con el cambio de base inverso?

Actividades de aprendizaje recomendadas

Continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

Actividad 1: verifique de forma geométrica el concepto de base. Tomar como referencia el ejemplo de la sección 3.7

- Grafique los vectores v_1 y v_2.
- Grafique el vector $x = 5\hat{\imath} + 1\hat{\jmath}$.
- Grafique la combinación $x = 2 \cdot v_1 - v_2$

Debería poder observar cómo el vector sigue en el mismo punto del plano, pero se descompone según direcciones nuevas.

Estrategia de trabajo

- Se recomienda realizar esta actividad en la herramienta de Geogebra Classic, en donde, deberá dibujar los vectores antes mencionados. Además, podrá dibujar de forma manual las coordenadas del vector x respecto de la base B. Finalmente, se debe dibujar la combinación y verificar que esta coincide con el vector x.

Actividad 2: observe el siguiente video titulado "Cambio de bases", el cual ofrece una visualización intuitiva y profundamente conceptual del cambio de bases en álgebra lineal, explicando cómo una misma transformación lineal puede representarse de forma distinta dependiendo del sistema de referencia elegido. A través de animaciones dinámicas, el recurso permite que analice la relación entre la geometría y el álgebra de las matrices, comprendiendo cómo el cambio de base afecta la representación matricial sin alterar la acción de la transformación sobre los vectores.

Actividad 3: finalmente, le invito a reforzar sus conocimientos, participando en la siguiente autoevaluación.

Autoevaluación 3

1. **Una transformación lineal T: V → W debe cumplir con las propiedades de aditividad y homogeneidad.**

   a. Verdadero.
   b. Falso.

2. **¿Cuál de las siguientes propiedades no es una propiedad fundamental de las transformaciones lineales?**

   a. T(0_V) = 0_W
   b. T (u - v) = T(u) - T(v)
   c. T(cu) = cT(u)
   d. T (u^2) = $(T(u))^2$

3. **Si una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por T (x, y) = (x + y, y - x), demuestre si T (0,0) = (0,0) y T(-u) = -T(u) para un vector u= (1,2).**

4. **Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por T (x, y) = (3x + y, 2x - y), ¿cuál es su matriz asociada T?**

   a. $T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
   b. $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
   c. $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
   d. $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

5. **Dada la función F: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por F (x, y, z) = (x + y, z + 1). Determine si F es una transformación lineal. Justifique su respuesta aplicando las propiedades de aditividad (F(u+v) = F(u) + F(v)) y homogeneidad (F(au) = aF(u)).**

6. **Considere la transformación lineal T: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por T (x, y) = (4x - y, 0, x + 2y). Construya la matriz asociada (T) a esta transformación lineal, utilizando el procedimiento de aplicar T a los vectores de la base canónica.**

7. **Para la transformación lineal T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por T(x, y, z) = (x - y, y - z, x - z). ¿Cuál es la nulidad y rango?**

a. 1,1.
b. 1,2.
c. 2,1.
d. 2,2.

8. **Para la transformación lineal T: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por T(x, y, z) = (x - 2y, 0, 2x - 4y), si se determina que una base del núcleo N(T) es {(2,1,0), (0,0,1)}, ¿cuál es la nulidad de T, dim(N(T))?**

a. 0.
b. 1.
c. 2.
d. 3.

9. **Si el vector v = (5,1) en la base estándar se desea expresar en una nueva base B = {u1= (2,1), u2= (-1,1)}, ¿cuáles son las coordenadas del vector v en la base B (es decir, $[v]_B$)?**

a. $[v]_B = (2,-1)$
b. $[v]_B = (1,-2)$
c. $[v]_B = (3,2)$
d. $[v]_B = (-1,2)$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

10. La composición de dos transformaciones lineales está representada por la suma de sus matrices asociadas.

a. Verdadero.
b. Falso.

Ir al solucionario

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Semana 12

Estimado estudiante, durante la semana 12 se abordarán conceptos fundamentales para el análisis de transformaciones lineales: los valores propios y vectores propios.

Estos elementos permiten comprender cómo actúa una transformación lineal sobre ciertos vectores que solo cambian de escala, sin modificar su dirección. Se estudiará la ecuación característica, que surge al resolver el determinante de la matriz $A - \lambda I$, y cuya solución permite identificar los valores propios de una matriz.

Además, se presentará el proceso sistemático para obtener tanto los valores propios como sus respectivos vectores propios asociados, destacando su importancia en aplicaciones como la diagonalización de matrices, la resolución de sistemas dinámicos y la compresión de datos. Para tener una idea general de esta unidad le invito a observar el siguiente video introductorio: unidad 4.

Unidad 4. Valores y vectores propios

4.1. Definición de valor propio y vector propio

Imagine que se aplica una transformación lineal a un vector y, en lugar de cambiar de dirección como suele suceder, el vector solo cambia de tamaño. ¿Eso es posible? ¡Sí! Y justamente a esos vectores especiales se los conoce como vectores propios. Lo interesante es que el factor por el que se multiplican recibe el nombre de valor propio.

En esta sección se revisará este concepto fundamental, que no solo es clave en álgebra lineal, sino que también tiene aplicaciones en física, ciencia de datos, ingeniería y más.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Un valor propio λ de una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un número escalar tal que existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ que cumple:

$Av = \lambda v$

A este vector *v* se lo conoce como vector propio (autovector) asociado a λ.

En la *tabla 11* puede encontrar una comparativa entre valor propio y vector propio. Además, en esta tabla podrá observar en qué aplicaciones es mejor usar el vector propio y en cuál el valor propio.

Tabla 11

Valor Propio vs Vector Propio.

Concepto	Definición	Notación típica	Aplicaciones
Vector propio	Es un vector no nulo que, al ser transformado por una matriz cuadrada, conserva su dirección.	$v \neq 0 \, tal \, que \, A \cdot v = \lambda \cdot v$	Análisis de sistemas lineales, reducción de matrices, estabilidad de sistemas.
Valor propio	Es un escalar que indica en cuánto se escala un vector propio bajo una transformación lineal.	$\lambda \in \mathbb{R} o \mathbb{C}$, tal que existe $v \neq 0$ con $A \cdot v = \lambda \cdot v$	Clasificación de transformaciones, compresión de datos, análisis espectral.

Nota. Elaborado con *OpenAI*, por ChatGPT, 2025, ChatGPT.

4.2. Ecuación característica

Sea una matriz cuadrada A de orden n, λ un valor propio de A y v un vector propio de A asociado a λ, entonces se cumple que $Av = \lambda v$, lo cual equivale a

$$Av = \lambda I v$$

En donde I es la matriz identidad de orden n tal que

$$Av = \lambda I v \;\rightarrow\; Av - \lambda I v = 0 \rightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

En donde, $(A - \lambda I)v = 0$ es la representación matricial de un sistema lineal homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas que, al desarrollarse, se obtiene:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

En donde, el sistema homogéneo tiene dos posibilidades:

- **Solución única:** la cual corresponde a la solución trivial $v = 0$, es decir, el vector nulo. Esta posibilidad se descarta, ya que v es un vector propio y, por lo tanto $v \neq 0$.
- **Infinitas soluciones:** se da cuando el determinante de la matriz $(A - \lambda I)$ es cero, la cual es una solución válida, por lo que:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Lo cual representa la ecuación característica que, al ser desarrollada, se obtiene un polinomio característico de la matriz A y se representa como:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

A continuación, puede desarrollar el siguiente *quiz*, el cual podrá identificar si un vector es propio, relacionar valores propios con su interpretación geométrica, comprender el papel de la ecuación característica y reconocer cómo GeoGebra representa estos conceptos.

Quiz- vectores y valores propios.

Con esta actividad demostró la habilidad para identificar la relación entre vectores propios y sus valores correspondientes en diferentes casos, en donde, su desempeño refleja un buen entendimiento de este tema. Además, logró comprender la interpretación geométrica de los valores propios, reconocer la utilidad de la ecuación característica y aplicar estos conceptos en el análisis de transformaciones lineales y matrices.

4.3. Obtención de valores y vectores propios

A continuación, se presenta un ejemplo en donde se determina el polinomio característico, la ecuación característica, los valores propios y los vectores propios de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

Lo primero es determinar el polinomio característico, el cual se mencionó anteriormente que corresponde a $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$, resolviendo:

$$\begin{aligned} P(\lambda) = det\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] &= det\left[\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right] \\ &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 12 \\ &= 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 12 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 6 \end{aligned}$$

Lo que da un polinomio característico igual a $P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 6$. Por lo tanto, la ecuación característica será $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$.

Los valores propios son las raíces del polinomio característico; esto equivale a las soluciones de la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \rightarrow (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$$

Por otro lado, los vectores propios de A son soluciones no nulas del sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$, en donde λ es un valor propio de A:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se procede a calcular el valor de los vectores propios por separado, empezando con $\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} 3-6 & -2 \\ -6 & 2-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dando un sistema de ecuaciones como el que se indica a continuación:

$$\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 = 0 \\ -6x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Se procede a despejar $x_1 = -\frac{2}{3}x_2$. Por lo tanto, cualquier vector solución del sistema debe cumplir $x_1 = -\frac{2}{3}x_2$. Entonces, se puede escribir el vector v de la siguiente forma:

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \neq 0$$

Con este resultado, se concluye que cualquier múltiplo no nulo del vector $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 6$.

Se sigue el mismo procedimiento para determinar el vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$.

$$\begin{pmatrix} 3+1 & -2 \\ -6 & 2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para lo cual, el sistema de ecuaciones sería el siguiente:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -6x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Despejar x_1, dando como resultado $x_1 = \frac{1}{2}x_2$. Entonces, se puede escribir el vector v de la siguiente forma:

$$v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 \neq 0$$

Por lo tanto, un vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ sería $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, es momento de reforzar los conocimientos adquiridos resolviendo las siguientes actividades:

Actividad 1: calcule los valores propios de una matriz 3×3, luego verifique usando GeoGebra o Python.

Estrategia de trabajo

- Proponga una matriz $A \in \mathbb{R}^{3x3}$.
- Calcule $de(A - \lambda I)$.
- Resuelva la ecuación característica.
- Verifique las raíces.

Actividad 2: encuentre los valores y vectores propios para las siguientes matrices.

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
- $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Estrategia de trabajo

- Revise detenidamente los contenidos de la semana 12.
- Resuelva el ejemplo planteado en la semana 12.

Actividad 3: observe el siguiente video titulado "Introducción a los valores propios y vectores propios", en el cual se explica qué son los valores propios y vectores propios mediante transformaciones lineales. Muestra cómo ciertos vectores conservan su dirección al ser transformados. El enfoque visual y paso a paso facilita su comprensión algebraica y geométrica.

Semana 13

En la Semana 13, el estudio se centrará en los valores propios mediante los conceptos de multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica, esenciales para comprender la estructura interna de una matriz y su diagonalización.

La multiplicidad algebraica se refiere al número de veces que un valor propio aparece como raíz del polinomio característico, mientras que la multiplicidad geométrica indica la dimensión del espacio propio asociado a ese valor propio, es decir, cuántos vectores propios linealmente independientes existen para este.

4.4. Multiplicidad algebraica y geométrica

4.4.1. Multiplicidad algebraica

La multiplicidad algebraica, m_a, de un valor propio, λ es el número de veces que aparece como raíz del polinomio característico $det(A - \lambda I)$. Es un concepto puramente algebraico y está vinculado a la estructura del polinomio que representa la matriz.

> Por ejemplo, si se tiene el polinomio $P(\lambda)=(\lambda-2)^2 (\lambda-3)$, entonces $\lambda=2$ tiene una m_a igual a 2, mientras que para $\lambda=3$ tiene una m_a igual a 1.

Cabe destacar que la suma de todas las multiplicidades algebraicas de los valores propios es igual al grado del polinomio característico, es decir, al orden de la matriz. Esta multiplicidad no indica necesariamente cuántos vectores propios existen asociados a ese valor propio, sino cuántas veces se cuenta como solución algebraica.

4.4.2. Multiplicidad geométrica

La multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio propio asociado a λ, es decir, la cantidad de vectores propios linealmente independientes asociados a ese valor propio. Se obtiene resolviendo el sistema homogéneo:

$$(A - \lambda I)v = 0$$

En donde, $m_g(\lambda)$ representa la multiplicidad geométrica y corresponde al número de variables libres en la solución. Este sistema puede tener una, dos o más soluciones linealmente independientes, dependiendo de cuántas variables libres tenga el sistema. Si hay más de un vector propio independiente, entonces se dice que tiene una multiplicidad geométrica mayor que uno.

Lo invito a revisar el siguiente ejemplo, dada la siguiente matriz A, encontrar los valores propios y las multiplicidades, algebraicas y geométricas de cada valor propio.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Se procede a encontrar el polinomio característico de A:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3$$

Con base en este resultado se concluye que la matriz A tiene un solo valor propio, el cual es $\lambda = 2$. Por lo tanto, la multiplicidad algebraica es igual a $m_a(2) = 3$.

El siguiente paso es buscar los vectores propios que están asociados a $\lambda = 2$. Para esto, resolver el sistema lineal homogéneo $(A - 2I)v = 0$.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

$$(A-2I)v=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2+5x_3=0 \\ \quad 3x_3=0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se observa que $x_3=0$, y al sustituirlo en la primera ecuación, obtenemos $x_2=0$. Mientras que la variable x_1 puede tomar cualquier valor.

Por lo tanto, si x es un vector propio de la matriz A asociado al valor propio $\lambda=2$, entonces:

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores propios son los múltiplos no nulos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; por lo tanto, la multiplicidad geométrica del valor propio $\lambda=2$ es 1. Con este ejemplo, se demuestra que $m_g(\lambda=2)\leq m_a(\lambda=2)$.

Es importante tener clara la diferencia entre multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica. Puede profundizar sobre este tema en la siguiente infografía.

Multiplicidad algebraica y geométrica.

Revisar la infografía sobre multiplicidad algebraica y geométrica permite visualizar de manera clara la relación entre los valores propios y sus dimensiones asociadas. La presentación facilita la comprensión de conceptos que suelen ser abstractos, mostrando ejemplos y comparaciones que refuerzan el aprendizaje.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

4.4.3. Relación entre multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica

Si A es una matriz cuadrada de orden n y λ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$ y multiplicidad geométrica $m_g(\lambda)$, entonces se cumple que $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Esto significa que siempre existirá al menos un vector propio para cada valor propio (es decir, la multiplicidad geométrica es al menos 1), y nunca puede haber más vectores propios linealmente independientes que la cantidad de veces que se repite como raíz del polinomio característico.

Esta desigualdad es de vital importancia porque determina si una matriz puede ser diagonalizada: *una matriz es diagonalizable sí y solo sí, para cada valor propio, su multiplicidad geométrica es igual a su multiplicidad algebraica.*

Para reforzar los conocimientos adquiridos en esta semana, le invito a revisar el siguiente material educativo sobre Multiplicidad algebraica y geométrica. Una vez revisados los contenidos teóricos de este enlace, le invito a desarrollar los ejercicios indicados al final del recurso.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, es momento de aplicar sus conocimientos a través de las actividades que se han planteado a continuación:

Actividad 1: proponga una matriz de orden 3 y, realice lo siguiente:

- Calcular los autovalores.
- Calcular $m_g(\lambda)$ y $m_a(\lambda)$.

Estrategia de trabajo

- Proponga una matriz $A \in \mathbb{R}^{3x3}$.
- Se recomienda revisar la referencia de García Manzanas y Carballo Fidalgo (2022), para guiarse en el cálculo de los valores y vectores propios.
- Comprueba que $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.

Actividad 2: realice los siguientes ejercicios:

- Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Calcule el polinomio característico de A.
b. Determine la multiplicidad algebraica de cada valor propio.
c. Calcule la multiplicidad geométrica resolviendo el sistema $(A - \lambda I)v = 0$.

- Sea la matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a. Calcule el polinomio característico de B.
b. Identifique todos los valores propios y sus multiplicidades algebraicas.
c. Calcule la dimensión del subespacio propio asociado a cada valor propio (m_g).

Actividad 3: le invito a revisar el siguiente material educativo sobre el Polinomio característico, en el cual se explica cómo obtener los valores propios de una matriz a partir del polinomio característico. Presenta

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

ejemplos y propiedades clave como la relación entre traza, determinante y autovalores.

Semana 14

En la Semana 14 se introducirá el concepto de matrices semejantes, fundamentales para entender cuándo dos matrices representan la misma transformación lineal en diferentes bases. A partir de ello, se estudiará la caracterización de matrices diagonalizables, identificando las condiciones necesarias para que una matriz pueda reducirse a una forma diagonal, lo que simplifica notablemente su análisis y cálculo.

Finalmente, se explorarán las matrices ortogonalmente diagonalizables, aquellas que no solo pueden diagonalizarse, sino hacerlo mediante un cambio de base ortonormal, lo cual es de gran importancia en aplicaciones geométricas, físicas y computacionales.

4.5. Matrices semejantes

Se dice que dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz invertible C de orden n tal que:

$$B = C^{-1}AC$$

Por ejemplo, si se tienen las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y , verificar que satisfacen el concepto de matrices semejantes, es decir, que se cumpla $B = C^{-1}AC$.

El primer paso es calcular la inversa de C, la cual sería $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ya que $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto:

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Por lo tanto, se comprueba que $B = C^{-1}AC$, lo que implica que A y B son semejantes. Además, si A y B son semejantes, se cumple también que tienen el mismo polinomio característico y los mismos valores propios.

4.6. Diagonalización de matrices

4.6.1. Caracterización de matrices diagonalizables

Una matriz es diagonalizable si posee vectores propios linealmente independientes. En ese caso, existe una matriz (cuyas columnas son vectores propios) y una matriz diagonal D, tales que:

$$A = PDP^{-1}$$

Por ejemplo, verificar que la siguiente matriz A es diagonizable:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Como primer paso, encontrar los valores propios de A, para lo cual se calcula el polinomio característico:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - (1)(2)$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

  Resolviendo la ecuación característica:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

  Los valores propios serían $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 2$.

- Como segundo paso, se calculan los vectores propios asociados a los valores propios encontrados.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Para lo cual se resuelve $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para cada valor propio:

$$\lambda_1 = 5 \rightarrow (A - 5I) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

De donde: $\mathbf{x = 2y \Rightarrow v_1} = \begin{bmatrix} 2y \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ por lo tanto $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\lambda_2 = 2 \rightarrow (A - 5I) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

De donde: $\mathbf{x = -y \Rightarrow v_2} = \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{y} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, por lo tanto $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Como tercer paso, se construyen las matrices P y D. P es la matriz formada por los vectores propios como columnas:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

D es la matriz diagonal con los valores propios:

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Como último paso, se verifica que se cumpla $A = PDP^{-1}$, para lo cual se calcula P^{-1} (revisar el proceso en la sección 1.8).

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Luego calcular PD:

$$PD = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Y finalmente PDP^{-1}

$$PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Identificar si una matriz es diagonizable puede ser un poco desafiante. Por lo que, lo invito a revisar la siguiente infografía interactiva, que le permitirá identificar una matriz diagonizable siguiendo algunos pasos.

Camino hacia la diagonalización.

Explorar el recurso interactivo sobre diagonalización ofrece una visión clara de cómo se relacionan valores propios, vectores propios y la transformación a una matriz diagonal. La presentación visual facilita la comprensión de un proceso que suele ser abstracto.

4.6.2. Matrices ortogonalmente diagonizables

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{nxn}$es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz ortogonal Q (es decir, $Q^t = Q^{-1}$) y una matriz diagonal D tal que:

$$A = QDQ^t$$

Esto significa que la diagonalización puede realizarse mediante un cambio de base ortonormal, es decir, utilizando una base de vectores ortonormales.

Una condición necesaria y suficiente para que una matriz A sea ortogonalmente diagonizable es sí y solo si es simétrica, es decir $A^t = A$.

A continuación, se desarrolla un ejemplo para demostrar que una matriz sea diagonizable.

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tenemos que los valores propios son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 1$. Mientras que los vectores propios corresponden a:

Para $\lambda_1 = 3$: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = 1$: $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ahora hay que ortonormalizar estos vectores, para lo cual, primero se verifica que sean ortogonales. Para esto, el producto punto debe ser igual a 0:

$$v_1 \cdot v_2 = (1)(-1) + (1)(1) = -1 + 1 = 0$$

Para normalizar, los vamos a dividir por su norma:

- Para v_1: $\| v_1 \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Para v_2: $\| v_2 \| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Con estos vectores normalizados, se forma la matriz Q, la cual se construye con los vectores ortonormales como columnas:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Además, la matriz diagonal es igual a:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

Para continuar con la verificación de una matriz diagonizable, se calcula Q^t.

$$Q^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula:

$$DQ^t = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Y finalmente se demuestra que $A = QDQ^t$:

$$QDQ^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A$$

Para profundizar sobre los temas revisados en esta semana, lo invito a revisar el siguiente sitio *web* sobre Diagonalización ortogonal de matrices simétricas. En donde, se revisa el tema de diagonalización ortogonal de matrices simétricas y se explica cómo ciertas matrices pueden simplificarse usando bases ortonormales, facilitando su análisis.

Esta explicación refuerza la importancia de que los valores propios sean reales y destaca el papel de la multiplicidad geométrica en la posibilidad de diagonalizar una matriz, conectando de manera práctica con los conceptos revisados en esta sección.

¡Hemos culminado la semana 14! Para reforzar sus conocimientos, le invito a participar del desarrollo del siguiente *quiz*:

Quiz- matrices semejantes y diagonalización.

A través del desarrollo del cuestionario, se reforzó la comprensión de las matrices semejantes y los criterios de diagonalización, destacando la importancia de los valores propios y vectores propios en el análisis de matrices.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, continuemos con el aprendizaje mediante su participación en las actividades que se describen a continuación:

Actividad 1: esta actividad consiste en determinar si las matrices de los ejercicios propuestos en la actividad 2 de la semana 13 son diagonizables. Específicamente, estas matrices son:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; y \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Estrategia de trabajo

- Inicie con un repaso interactivo del criterio de diagonalización:
  - Una matriz es diagonalizable si existe una base de vectores propios linealmente independientes**.**
- Organice el desarrollo del ejercicio de la siguiente manera:
  - Cálculo del polinomio característico.
  - Determinación de la multiplicidad geométrica y multiplicidad algebraica.

- Conclusión sobre la diagonalizabilidad.

- Construya una tabla comparativa para cada matriz que contenga: matriz, valores propios, multiplicidad algebraica, si es diagonizable o no, y su justificación.

Actividad 2: utilice Python (NumPy), para ejecutar el siguiente código para encontrar los valores y vectores propios de la matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- import numpy as np
- C = np.array([[4, 1], [0, 4]])
- valores, vectores = np.linalg.eig(C)
- *print*(valores).
- *print*(vectores).

Además, responda lo siguiente:

- ¿Cuáles son los valores propios y su m_a?
- ¿Cuántos vectores propios linealmente independientes devuelve este código?
- Indique si C es diagonizable.

Estrategia de trabajo

- Revise un tutorial breve sobre cómo instalar y ejecutar Python, y cómo utilizar bibliotecas como NumPy.

- Se recomiendan plataformas interactivas como Google Colab, Jupyter Notebooks o Replit, que no requieren instalación local y permiten la ejecución directa del código.

- Se sugiere graficar los vectores propios con librerías como Matplotlib, para reforzar el entendimiento geométrico.

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

Actividad 3: finalmente, le invito a revisar la siguiente herramienta digital: Calculadora de diagonalización de matrices, la cual permite automatizar el proceso de diagonalización de matrices cuadradas, mostrando paso a paso los valores propios, vectores propios y las matrices P y D que verifican la relación $A = PDP^{-1}$. Es una herramienta útil para verificar procedimientos manuales, visualizar patrones algebraicos y reforzar la comprensión del proceso**.**

Semana 15

En la Semana 15 se estudiará la definición de matriz no diagonalizable, es decir, una matriz que no posee una base completa de vectores propios. Para lo cual, se introducen los conceptos de bloques de Jordan y matriz de Jordan, que permiten representar matrices no diagonalizables en una forma estructurada. A través del estudio de la forma canónica de Jordan, se aprenderá a construir representaciones equivalentes de matrices mediante vectores generalizados, lo cual es fundamental para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales, analizar transformaciones lineales complejas y profundizar en el álgebra lineal avanzada.

4.7. Matrices no diagonalizables

Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ se dice no diagonalizable si no existe una matriz invertible P tal que: $A = PDP^{-1}$ donde D es diagonal. Esto sucede cuando no hay suficientes vectores propios linealmente independientes para construir la base que permita la diagonalización.

Una matriz A no es diagonalizable si:

- Tiene al menos un valor propio cuya multiplicidad algebraica es mayor que su multiplicidad geométrica.
- El número total de vectores propios linealmente independientes es menor que *n*.

Por ejemplo, si se tiene la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Polinomio característico:** $det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 2$, $m_a(2) = 2$.

- **Vectores propios:** $(A-2I)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_2=0\Rightarrow v=\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}$. Se concluye que solo hay un vector propio y que la multiplicidad geométrica es 1.

Como no hay suficientes vectores propios, se concluye que A no es diagonalizable.

Comprender sobre matrices diagonizables y no diagonizables puede ser un concepto un poco complejo. Por lo cual, lo invito a realizar el siguiente juego que le permitirá reforzar sobre estos conceptos.

Diagonalización.

Esta actividad sobre matrices diagonalizables y no diagonalizables permite visualizar de manera práctica las diferencias entre ambos tipos de matrices. La actividad facilita la comprensión de las condiciones necesarias para la diagonalización y refuerza conceptos clave de valores y vectores propios.

4.8. Forma de Jordan

4.8.1. Bloque de Jordan

El bloque de Jordan de orden *k* es una matriz cuadrada de orden *k*, en donde los componentes de la diagonal principal son iguales a λ, contiene solo unos en la diagonal superior y ceros en las demás posiciones (Strang, 2016). A estos bloques los vamos a denotar como $B_k(\lambda)$:

$$B_k(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Algunos ejemplos de bloques de Jordan se indican a continuación:

$$B_2(-3) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B_3(4) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.8.2. Matriz de Jordan

Una matriz de Jordan es una matriz cuadrada que en su diagonal contiene bloques de Jordan y ceros en las demás posiciones, como se indica a continuación:

$$B_k(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{k_1}(\lambda_1) & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & B_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & B_{k_j}(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

A continuación, se muestran ejemplos de matrices Jordan, los cuales se encuentran contenidos en la siguiente infografía. Le invito a revisarla:

Ejemplos- matrices de Jordan.

Como pudo observar, se identifican las distintas formas que pueden adoptar las matrices de Jordan según su orden, mostrando ejemplos prácticos que ilustran cómo se organizan los bloques y facilitando la comprensión de esta representación fundamental en álgebra lineal.

4.8.3. Forma canónica de Jordan

Cuando una matriz no es diagonalizable, puede escribirse en su forma canónica de Jordan con vectores generalizados:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Un vector propio generalizado es un vector no nulo v de A si existe un escalar λ tal que $(A-\lambda I)^p v = 0$ para algún valor entero positivo p. Por lo que, se dice que v es un vector propio generalizado de A asociado a λ.

Ahora se propone un ejercicio en donde se aplica la forma canónica de Jordan. Para lo cual considerar la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- **Polinomio característico:** $det(A-\lambda I) = (4-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda = 4$, $m_a(4) = 3$.

- **Vectores propios:** $(A-2I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Este sistema tiene solo una solución linealmente independiente para $(A-\lambda I)v = 0$, por lo tanto, la multiplicidad geométrica es igual a 1. En conclusión, A no es diagonizable.

- **Forma canónica de Jordan:**

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta ya es la forma de Jordan de la matriz, ya que es un bloque Jordan de tamaño 3 asociado al único valor propio $\lambda = 4$.

Índice I Bimestre II Bimestre Solucionario Referencias

Actividades de aprendizaje recomendadas

Es momento de aplicar sus conocimientos a través de las actividades que se han planteado a continuación:

Actividad 1: para las siguientes matrices determinar:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A_4 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Los valores propios.
- La multiplicidad algebraica y geométrica.
- Concluir si las matrices son diagonizables o no, justificar.

Estrategia de trabajo

Se recomienda revisar de forma detallada la unidad 4 y 5 del libro de Kolman. En específico, centrarse en:

- Los valores y vectores propios de una matriz cuadrada.
- Multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica.
- Diagonalización ortogonal.
- Forma canónica de Jordan.

Actividad 2: observe el siguiente video titulado "Forma canónica de Jordan real", en el cual se estudia la forma canónica de Jordan real de un endomorfismo real que posee autovalores complejos, trabajando con la extensión compleja del espacio vectorial real.

Actividad 3: desarrolle la siguiente autoevaluación con el objetivo de evaluar los aprendizajes adquiridos en la presente unidad.

Autoevaluación 4

1. ¿Cuál de las siguientes es la definición correcta de un valor propio λ de una matriz cuadrada *A*?

a. Un escalar tal que $Av = 0$ para algún vector $v \neq 0$.
b. Un escalar tal que $Av = \lambda v$ para algún vector $v \neq 0$.
c. Un escalar que representa el determinante de la matriz A.
d. Un escalar que es el resultado del producto punto de dos vectores.

2. ¿Cómo se define la multiplicidad geométrica de un valor propio λ?

a. El número de veces que λ aparece como raíz del polinomio característico.
b. La dimensión del subespacio propio asociado a λ.
c. El número total de vectores propios de una matriz.
d. El grado del polinomio característico.

3. La ecuación característica de una matriz cuadrada *A* se obtiene al igualar a cero el determinante de la matriz $(A - \lambda I)$.

a. Verdadero.
b. Falso.

4. Para cualquier valor propio λ, su multiplicidad geométrica ($m_g(\lambda)$) es siempre mayor o igual a su multiplicidad algebraica ($m_a(\lambda)$).

a. Verdadero.
b. Falso.

Índice | I Bimestre | II Bimestre | Solucionario | Referencias

5. **Una matriz cuadrada *A* es diagonalizable si cumple con la siguiente condición:**

   a. La matriz *A* es simétrica.
   b. Todos sus valores propios son distintos.
   c. Posee suficientes vectores propios linealmente independientes para construir una base.
   d. Su determinante es diferente de cero.

6. **¿Cuál de las siguientes situaciones indica que una matriz cuadrada *A* no es diagonalizable?**

   a. La suma de las multiplicidades algebraicas de todos los valores propios es igual al orden de la matriz.
   b. La multiplicidad algebraica de al menos un valor propio es mayor que su multiplicidad geométrica.
   c. Todos sus valores propios son reales.
   d. El determinante de la matriz es cero.

7. **Dada una matriz cuadrada *A*, el polinomio característico $P(\lambda)$ se define matemáticamente como:**

   a. $A - \lambda I$
   b. $det(A - \lambda I)$
   c. $Av = \lambda v$
   d. $det(A)$

8. **Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, encuentre sus valores propios.**

   a. $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 2$
   b. $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1$
   c. $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$
   d. $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

9. Un bloque de Jordan de orden n se caracteriza por tener valores propios λ en la diagonal principal y unos en la diagonal inferior.

a. Verdadero.
b. Falso.

10. ¿Qué tipo de elementos contiene una matriz de Jordan en su diagonal principal?

a. Solo ceros.
b. Valores de uno.
c. Bloques de Jordan.
d. Escalares arbitrarios sin estructura.

Ir al solucionario

Semana 16

Actividades finales del bimestre

Estimados estudiantes

¡Bienvenidos a la semana de repaso final!

En la parte final de la materia, se revisarán de manera integrada los conceptos fundamentales de las transformaciones lineales, explorando sus propiedades esenciales como núcleo e imagen, así como su comportamiento frente a cambios de base. Se revisará la obtención e interpretación de valores y vectores propios, la relación entre sus multiplicidades, algebraicas y geométricas, que permiten comprender si una matriz es diagonalizable o no. También se revisan las matrices semejantes, su diagonalización y el tratamiento de matrices no diagonalizables mediante la forma canónica de Jordan. Esta semana es clave para afianzar conceptos, resolver dudas y prepararse de forma integral para evaluaciones y aplicaciones posteriores en cursos más avanzados. ¡Aproveche este espacio para fortalecer lo aprendido y cerrar con éxito el ciclo académico!

- **Semana 9.** Concepto de transformación lineal.
- **Semana 10.** Definición de núcleo e imagen de una transformación.
- **Semana 11.** Cambio de base y matriz de cambio de base.
- **Semana 12.** Definición y cálculo de valores y vectores propios.
- **Semana 13.** Multiplicidad algebraica y geométrica.
- **Semana 14.** Concepto de matrices semejantes, diagonalización de matrices.
- **Semana 15.** Matrices no diagonizables.

Actividades de aprendizaje recomendadas

Estimado estudiante, para garantizar un buen desempeño en la evaluación bimestral, le recomiendo dedicar esta semana a repasar con profundidad cada uno de estos temas a través del desarrollo de las siguientes actividades:

Actividad 1. Resumen de los contenidos del segundo bimestre.

Instrucciones: elabore una hoja de referencia personal con:

- Definiciones.
- Propiedades.
- Fórmulas de: cambio de base, valores y vectores propios, multiplicidad algebraica y geométrica.

Estrategias de trabajo

- Se recomienda que revise los contenidos proporcionados durante las semanas 9 a 15, y que se enfoquen en temas clave como transformación lineal, cambio de base, valores y vectores propios, y multiplicidades. También se puede consultar la bibliografía básica (Núñez, 2019) o recursos digitales (GeoGebra, Khan Academy, Symbolab).

- También se recomienda el uso de mapas conceptuales para organizar las definiciones, propiedades y fórmulas.

Actividad 2: defina 6 funciones $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (algunas lineales, otras no).

- Justifique cuáles son transformaciones lineales y por qué, verificando las propiedades de aditividad y homogeneidad.

- Herramientas sugeridas: GeoGebra o Desmos.

Estrategias de trabajo

- Elabore una tabla en donde se registren las funciones, si cumplen o no cada propiedad, y una conclusión sobre su linealidad.
- Prepare una breve explicación escrita donde justifique su clasificación, fomentando el desarrollo del pensamiento lógico y la comunicación matemática.

Actividad 3: elija una matriz diagonalizable y, calcule:

- Valores propios, vectores propios, construir P y D y verificar que $A = PDP^{-1}$.
- Compare A y D para reflexionar sobre las ventajas de trabajar con la forma diagonal.

Estrategia de trabajo

- Elija una matriz cuadrada de orden 2×2 o 3×3 con valores enteros simples, preferentemente simétrica o con valores propios reales distintos para garantizar su diagonalización.
- Compare las matrices A y D y reflexione sobre la simplicidad operativa de la forma diagonal (por ejemplo, facilidad para calcular potencias de matrices, resolver sistemas o entender la estructura geométrica de la transformación).

Actividad 4: resolución de ejercicios.

Instrucciones: resuelva ejercicios que incluyan los temas del bimestre utilizando la bibliografía básica (Núñez, 2019), donde encontrará una amplia variedad de problemas. Esta actividad le ayudará a reforzar los conceptos clave y prepararse eficazmente para la evaluación.

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Estrategia de trabajo

Para esta actividad de cierre de bimestre, se recomienda que el estudiante adopte un enfoque estructurado y reflexivo en la resolución de ejercicios. Primero, debe identificar los temas clave vistos (transformaciones lineales, cambio de base, valores y vectores propios, multiplicidades, semejanza y diagonalización) y clasificar los ejercicios según el concepto principal que abordan. Posteriormente, debe resolver los ejercicios seleccionados de forma escrita y justificada, asegurándose de aplicar correctamente las definiciones, propiedades y procedimientos estudiados. El uso de herramientas digitales como MATLAB, GeoGebra o Python (NumPy) se recomienda para verificar resultados y visualizar conceptos complejos. Finalmente, se puede elaborar una ficha resumen con errores frecuentes detectados y estrategias para evitarlos, promoviendo así una preparación eficaz y consciente para la evaluación.

Actividad 6: finalmente, para consolidar los conocimientos adquiridos durante las semanas que conforman el segundo bimestre, revise la siguiente presentación interactiva que resume los contenidos estudiados.

Repaso del segundo bimestre.

El recurso propuesto consiste en una presentación interactiva de repaso de las semanas 9 a 15, permite consolidar los aprendizajes revisados sobre transformaciones lineales, núcleo e imagen, valores y vectores propios, y diagonalización de matrices. Con este recurso se pretende fomentar una comprensión integrada y visual de los conceptos avanzados del álgebra lineal.

4. Solucionario

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	Falso	Esa es la propiedad asociativa**.** La propiedad conmutativa establece que el orden de los sumandos no altera el resultado (u + v = v + u).
2	c.	El resultado de la multiplicación escalar es otro vector, no un escalar.
3	b.	La matriz identidad es una matriz cuadrada donde todos los elementos de la diagonal principal son unos (1) y todos los demás elementos son ceros (0).
4		La transposición de una matriz es un operador que intercambia filas por columnas. Al aplicar este operador dos veces, se revierte el proceso, volviendo a la disposición original de los elementos de la matriz.
5	b.	Para una matriz de orden 2, el determinante se calcula sumando el producto de la diagonal principal y restando el producto de la diagonal secundaria: $det(A) = (2)(4) - (1)(7) = 8 - 7 = 1$.
6	a.	Dos vectores son ortogonales si su producto punto es cero. El producto punto u · v se calcula sumando los productos de cada una de sus componentes: u · v = (3) (-1) + (1)(3) = -3 + 3 = 0. Dado que el producto punto es cero, los vectores u y v son ortogonales.
7	a.	Para sumar vectores, se suman componente a componente: u + v = (3 + 1, 2 + 4) = (4, 6).
8	c.	Para la resta de matrices, se restan los elementos que ocupan la misma posición: $\begin{bmatrix} (3)-(-1) & 1-(-1) & (2)-(4) \\ (0)-(2) & (5)-(5) & (-3)-(8) \\ (7)-(0) & (0)-(1) & (4)-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Autoevaluación 1		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	c.	La Regla de Cramer es un método aplicable solo a sistemas cuadrados, lo que significa que debe haber el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. La condición fundamental es que el determinante de la matriz de coeficientes asociada (A) debe ser diferente de cero (det(A) ≠ 0).
10	c.	La dimensión de un espacio vectorial se define como el número de vectores en cualquier base del espacio. En el caso de R4, su dimensión es 4, porque cualquier base está compuesta por exactamente cuatro vectores linealmente independientes que generan todo el espacio.

Ir a la autoevaluación

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b.	La definición fundamental de un espacio vectorial es un conjunto no vacío de vectores con las operaciones de suma y multiplicación escalar que satisfacen un conjunto específico de axiomas o propiedades.
2	a.	La propiedad de clausura bajo la suma indica que la suma de dos vectores (u + v) que pertenecen a un espacio vectorial (V) debe ser otro vector que también pertenezca a ese mismo espacio (u + v ∈ V), no un escalar.
3	c.	La propiedad de asociatividad del producto escalar es $a(\mu u) = (a\mu)u$. Las otras opciones presentan combinaciones incorrectas de las propiedades.
4	Propiedad conmutativa de la suma	Al mostrar que (x1 + x2, y1 + y2) es igual a (x2 + x1, y2 + y1), se verifica que el orden de los sumandos no altera el resultado de la adición de vectores, lo cual es la definición de la propiedad conmutativa.
5	b.	Una de las tres condiciones fundamentales para que un subconjunto sea un subespacio vectorial es que debe contener el vector cero.
6	x + 3y = 7	Para transformar de paramétrica a implícita, se despeja el parámetro 't' de ambas ecuaciones y se igualan las expresiones resultantes. Despejando t de la primera: t = (x - 1) /3. Despejando t de la segunda: t = 2 - y. Igualando: (x - 1) /3 = 2 - y, lo que se simplifica a x - 1 = 6 - 3y, y finalmente a x + 3y = 7.
7	b.	Una combinación lineal es toda expresión de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, donde los ai son escalares reales.
8	No, son linealmente independientes.	Para determinar la dependencia, se busca si existen escalares a y β, no ambos cero, tal que a (3,1) + β (4,5) = (0,0). Esto genera el sistema: 3a + 4 β = 0 a + 5 β = 0. Al resolver este sistema, se encuentra que la única solución es a = 0 y β = 0. Dado que la única combinación lineal que produce el vector cero es con todos los coeficientes nulos, los vectores son linealmente independientes.

Autoevaluación 2		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
9	c.	Una base de un espacio o subespacio vectorial es un conjunto de vectores que son linealmente independientes y que, además, generan todo el espacio.
10	$9 - 6\sqrt{2}$	El producto interno se calcula sumando el producto de cada componente correspondiente: $(3)(3) + (\sqrt{2})(-3) + (-1)(3\sqrt{2}) = 9 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 9 - 6\sqrt{2}$.

Ir a la autoevaluación

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	a.	Para que una función sea considerada una transformación lineal, es esencial que preserve la suma de vectores (aditividad) y la multiplicación por un escalar (homogeneidad). Estas propiedades aseguran que la estructura vectorial se conserve durante la transformación.
2	d.	Las propiedades listadas en a, b, c, y d son propiedades fundamentales de las transformaciones lineales. La opción 'd' no es una propiedad estándar y sugiere una operación que generalmente no se conserva en transformaciones lineales, ya que involucra un cuadrado que va más allá de la estructura lineal.
3	Las dos propiedades se cumplen.	La propiedad T(0_V) = 0_W establece que una transformación lineal envía el vector cero del espacio vectorial de origen al vector cero del espacio vectorial de destino. Además, T(-u) = -T(u) es otra propiedad fundamental que se deriva de la homogeneidad, donde el escalar es -1.
4	b.	La matriz asociada a una transformación lineal se construye aplicando la transformación a los vectores de la base canónica y usando los resultados como columnas de la matriz. Para T (1,0) = (3,2) y T (0,1) = (1,-1), la matriz es $\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$.
5	No, F no es una transformación lineal.	Para que una función sea una transformación lineal, debe cumplir con dos propiedades fundamentales: aditividad y homogeneidad. Además, una propiedad clave que se deriva de estas es que una transformación lineal debe mapear el vector cero del espacio de partida al vector cero del espacio de llegada.
6	$\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$	Para construir la matriz asociada a una transformación lineal, se aplica la transformación a cada uno de los vectores de la base canónica del espacio de partida y los resultados obtenidos forman las columnas de la matriz. Los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$.

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Autoevaluación 3		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
7	b.	El núcleo de T (N(T)): {(x, x, x) | x ∈ $\mathbb{R}$}. Una base para N(T) es {(1, 1, 1)}. La nulidad (dim(N(T))) es el número de vectores en la base del núcleo. En este caso, dim(N(T)) = 1. La imagen de T (Im(T)): Un subespacio generado por {(1, 0, 1), (-1, 1, 0)}. Una base para Im(T) es {(1, 0, 1), (-1, 1, 0)}. El rango (dim(Im(T))) es el número de vectores en la base de la imagen. En este caso, rango(T) = 2.
8	c.	La nulidad de una transformación lineal se define como la dimensión del núcleo de la transformación (dim(N(T))). Si una base para el núcleo de T está compuesta por los vectores {(2,1,0), (0,0,1)}, esto significa que el núcleo está generado por dos vectores linealmente independientes. Por lo tanto, la dimensión del núcleo, y consecuentemente la nulidad de T, es 2.
9	a.	Para encontrar las coordenadas de un vector en una nueva base, se debe expresar el vector original como una combinación lineal de los vectores de la nueva base. Sea $v = (5,1)$, $u_1 = (2,1)$ y $u_2 = (-1,1)$. Buscamos escalares α y β tales que $v = \alpha u_1 + \beta u_2$: $(5,1) = \alpha\,(2,1) + \beta\,(-1,1)$ $(5,1) = (2\alpha - \beta, \alpha + \beta)$ Esto genera un sistema de ecuaciones: 1.2α - β = 5 2.α + β = 1 Sumando ambas ecuaciones, eliminamos β: (2α - β) + (α + β) = 5 + 1 3α = 6, α = 2. Sustituyendo α = 2 en la segunda ecuación: 2 + β = 1 β = 1 – 2, β = -1. Por lo tanto, las coordenadas del vector v en la base B son (2, -1), lo que se denota como $[v]_B = (2, -1)$.
10	b.	La composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de matrices.

Ir a la autoevaluación

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
1	b.	Un valor propio λ de una matriz cuadrada A es un número escalar tal que existe un vector no nulo v (llamado vector propio) que cumple la relación $Av = \lambda v$.
2	b.	La multiplicidad geométrica de un valor propio λ es la dimensión del subespacio propio asociado a ese valor propio, que se obtiene como el número de variables libres al resolver el sistema homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$.
3	Verdadero	La ecuación característica se define como $det\left(A - \lambda I\right) = 0$. Esta ecuación surge de la necesidad de que el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)v = 0$ tenga soluciones no triviales (infinitas soluciones), dado que el vector propio v no puede ser el vector nulo.
4	Falso	La relación correcta entre las multiplicidades es que la multiplicidad geométrica es siempre menor o igual a la multiplicidad algebraica, es decir, $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.
5	c.	Una matriz es diagonalizable si posee vectores propios linealmente independientes en cantidad suficiente para formar una base del espacio vectorial. Esto permite que la matriz sea expresada como $A = PDP^{-1}$, donde P es la matriz formada por los vectores propios y D es una matriz diagonal con los valores propios.
6	b.	Una matriz A es no diagonalizable si tiene al menos un valor propio cuya multiplicidad algebraica es mayor que su multiplicidad geométrica. Esto implica que no hay suficientes vectores propios linealmente independientes para diagonalizar la matriz.
7	b.	El polinomio característico P(λ) de una matriz A se define como el determinante de la matriz $(A - \lambda I)$, es decir, $det\left(A - \lambda I\right)$.

Autoevaluación 4		
Pregunta	**Respuesta**	**Retroalimentación**
8	b.	Para encontrar los valores propios, se calcula el polinomio característico $det\ (A-\lambda I)\ =0$. $$det\begin{bmatrix}3-\lambda & -2\\ -6 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)-(-2)(-6) = (\lambda^2-5\lambda+6)-12$$ $$=\lambda^2-5\lambda-6$$ Resolviendo la ecuación característica $\lambda^2-5\lambda-6=(\lambda-6)(\lambda+1)=0$. Por lo tanto, los valores propios son $\lambda_1=6$ y $\lambda_2=-1$.
9	Falso	Un bloque de Jordan de orden n tiene los valores propios λ en la diagonal principal, pero los unos se encuentran en la diagonal superior, no en la inferior.
10	c.	Una matriz de Jordan es una matriz cuadrada que en su diagonal contiene bloques de Jordan y ceros en las demás posiciones.

Ir a la autoevaluación

Índice
I Bimestre
II Bimestre
Solucionario
Referencias

5. Referencias bibliográficas

Arce, S., C., Castillo, E., W., & González, V., J. (2003). *Álgebra lineal*. Universidad de Costa Rica.

Desmos Studio. (2024). *Desmos Graphing Calculator* [Software en línea]. https://www.desmos.com/

García Manzanas, R., & Carballo Fidalgo, R. (2022). *Álgebra y geometría. Tema 6: Diagonalización*. Universidad de Salamanca. Recuperado de https://campus.usal.es

GeoGebra. (2024). *GeoGebra (Versión en línea) [Software]*. https://www.geogebra.org/

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal* (8.° ed.). Pearson Educación.

Lay, D. (2007). Álgebra lineal y sus aplicaciones (3.° ed.). Pearson Educación.

MathWorks. (2024). *MATLAB (Versión R2024a) [Software]*. The MathWorks, Inc. https://www.mathworks.com

Number Analytics. (2022, 4 marzo). *Linear Transformation: The Backbone of Computer Graphics*. https://www.numberanalytics.com/blog/linear-transformation-the-backbone-of-computer-graphics

Núñez, L. A., Vargas, E. & Boada, E. (2019). Álgebra lineal: (ed.). Santiago de los Caballeros, Universidad Abierta para Adultos (UAPA). https://elibro.net/es/ereader/bibliotecautpl/176649?page=12.

García Manzanas, R., & Carballo Fidalgo, R. (2022). *Álgebra y Geometría*. Departamento de Matemática Aplicada y Ciencias de la Computación, Universidad de Cantabria. Licencia Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Recuperado de https://ocw.unican.es/pluginfile.php/2579/course/section/2690/tema1_matrices.pdf

Python Software Foundation. (2024). *Python (versión 3.x) [Software]*. https://www.python.org/

Strang, G. (2016). Álgebra lineal y sus aplicaciones (4.° ed.). Thomson.

Symbolab. (2024). *Symbolab Math Solver* [Software en línea]. https://www.symbolab.com/

Vera de Payer, E., & Dimitroff, M. (2020). *Álgebra lineal: teoría, práctica y aplicaciones* (Ed. Jorge Sarmiento Editor - Universitas). https://elibro.net/es/ereader/bibliotecautpl/174522