Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

# Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

8ο Εξάμηνο

# Γραμμική Παραμετροποίηση, Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων, Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων

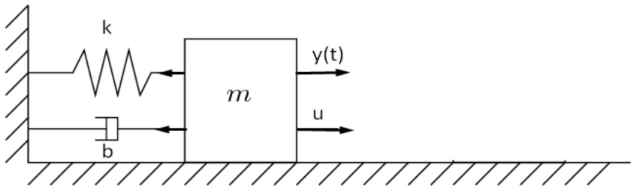
Σφυράκης Εμμανουήλ
AEM:9507
sfyrakise@ece.auth.gr

4 Μαρτίου 2022

## Περιεχόμενα

# 1 Θέμα 1

Στόχος του πρώτου θέματος είναι η μοντελοποίηση και προσομοίωση του συστήματος μάζας-ελατηρίου αποσβεστήρα του σχ. 1.1




Σχήμα 1.1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα

## 1.1 Γραμμική Παραμετροποίηση

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα του σχ. 1.1 είναι η εξής:

$$m\ddot{y} = u - ky - b\dot{y} \tag{1}$$

Όπου:

- m: Η μάζα του αντικειμένου
- k: η σταθερά του ελατηρίου
- b: η σταθερά απόσβεσης
- u: μια εξωτερική δύναμη
- y: η μετατόπιση της μάζας

Φέρνουμε την (1) στη μορφή:

$$\ddot{y} = -\frac{b}{m}\dot{y} - \frac{k}{m}y + \frac{1}{m}u \tag{2}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $\theta^* = \left[\frac{b}{m}\,\frac{k}{m}\,\frac{1}{m}\right]^T$ και $\Delta = \left[-\dot{y} - yu\right]^T$ και η εξίσωση (2) παίρνει την μορφή:

$$\ddot{y} = \theta^{*T}\Delta \tag{3}$$

Επειδή θέλουμε στην εξίσωση (3) να απαλλαχτούμε από τυχόν μη υπολογίσιμες παραγώγους, φτιάχνουμ ένα ευσταθές πολυώνυμο Λ(s) τάξης 2 με το οποίο θα φιλτράρουμε την (3). Το φίλτρο αυτό έχει την μορφή $\Lambda(s) = (s + \rho_1)(s + \rho_2)$ όπου $\rho_1, \rho_2 > 0$ ώστε να επιτυγχάνεται η ευστάθεια του Λ(s).

Οπότε η νέα εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$y = \theta_\lambda^T \zeta \tag{4}$$

Όπου:

- $\theta_\lambda : \left[\theta_1^{*T} - \lambda^T \quad \theta_2^{*T}\right]^T$
- $\theta_1^* : \left[\frac{b}{m} \quad \frac{k}{m}\right]^T$
- $\theta_2^* : \left[\frac{1}{m}\right]^T$
- $\lambda : [p_1 + p_2 \quad p_1 p_2]^T$

Άρα τελικώς προκύπτει:

$$\theta_\lambda = \left[\frac{b}{m} - (p_1 + p_2) \quad \frac{k}{m} - p_1 p_2 \quad \frac{1}{m}\right]^T \tag{5}$$

Για το $\zeta$ γνωρίζουμε ότι: $\zeta = [-\frac{\Delta_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \frac{\Delta_m^T(s)}{\Lambda(s)} u]$ όπου $n = 2$ η τάξη της εξόδου και $m = 0$ η τάξη της εισόδου. Οπότε η τελική έκφραση και για το $\zeta$ είναι:

$$\zeta = \left[-\frac{sy}{\Lambda(s)} \quad -\frac{y}{\Lambda(s)} \quad \frac{u}{\Lambda(s)}\right]^T \tag{6}$$

## 1.2 Αλγόριθμος ελαχίστων τετραγώνων

Ζητούμενο του παρόντος ερωτήματος είναι ο υπολογισμός της τιμής $\theta_0$ η οποία ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ της πραγματικής και της εκτιμώμενης εξόδου. Αναλυτικότερα:

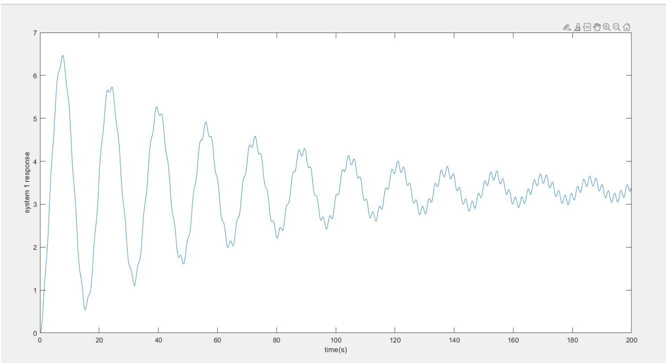
$$\theta_0 = argmin_\theta \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{(y(t_i) - \hat{y}(t_i))^2}{2} \tag{7}$$

Η λύση της (7) είναι κατά τα γνωστά:

$$\theta_0 = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \zeta(t_i)\zeta^T(t_i)\right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \zeta(t_i)\zeta^T(t_i)\right) \tag{8}$$

## 1.3 Προσομοίωση αλγορίθμου

Η απόκριση του συστήματος για τις δοθείσες τιμές των παραμέτρων δίνεται στο σχ. 2.2




Σχήμα 1.2: Απόκριση συστήματος

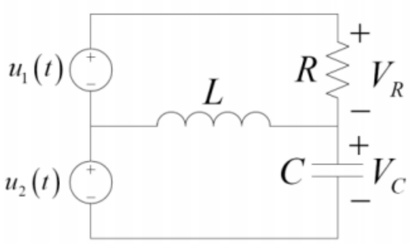
Στόχος είναι η βέλτιστη επιλογή πόλων που ελαχιστοποιούν το σφάλμα της εξ.(9)

$$e = |\frac{m-\hat{m}}{m}| + |\frac{b-\hat{b}}{b}| + |\frac{k-\hat{k}}{k}| \tag{9}$$

Από την προσομοίωση του συστήματος στο Matlab, παρατηρούμε ότι το ελάχιστο δυνατό σφάλμα είναι $e = 0.0018$ και προκύπτει για $p_1 = 1.3$ και $p_2 = 1.5$. Οι αντίστοιχοι εκτιμώμενοι παράμετροι είναι : $\hat{m} = 9.9935, \hat{b} = 0.3, \hat{k} = 1.4984$

# 2 Θέμα 2

Το δεύτερο σύστημα που θα μας απασχολήσει δίνεται στο σχ.2.1 όπου $u_1(t) = sin(2t)$ και $u_2(t) = 2V$.




Σχήμα 2.1: Ηλεκτρικό κύκλωμα προς μελέτη

## 2.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

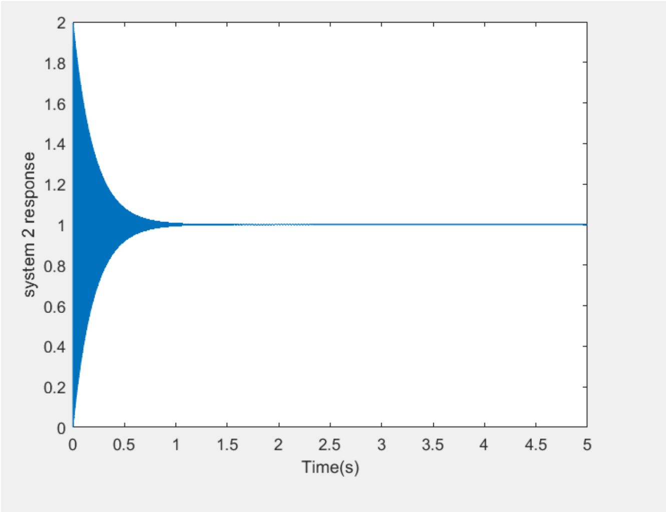
Η εξίσωση του συστήματος, σύμφωνα με τον νόμο του Kirchhoff, είναι:

$$\ddot{V_c} + \frac{1}{RC}\dot{V_c} + \frac{1}{RC}V_c = \frac{1}{RC}\dot{u_2} + \frac{1}{LC}u_2 + \frac{1}{RC}u_1 \tag{10}$$

Όπου:

- R: Η αντίσταση του συστήματος
- C: Ο πυκνωτής του συστήματος
- L: Το πηνίο του συστήματος
- $V_c$: Η τάση στα άκρα του πυκνωτή C
- $V_R$: Η τάση στα άκρα της αντίστασης R
- $u_1(t)$: Η ημιτονοειδής πηγή τάσης του συστήματος
- $u_2(t)$: Η πηγή σταθερής τάσης του συστήματος

Η απόκριση του συστήματος, θεωρώντας ως έξοδο την τάση $V_c$, δίνεται στο σχ. 1.2




Σχήμα 2.2: Απόκριση ηλεκτρικού κυκλώματος (2.1)

Με ανάλογο τρόπο όπως εργαστήκαμε και στο θέμα 1, έχουμε:

$$\theta^* = \left[\tfrac{1}{RC}, \tfrac{1}{LC}, \tfrac{1}{RC}, \tfrac{1}{LC}, \tfrac{1}{RC}, 0\right]^T, \Delta = \begin{bmatrix} -\dot{V}_c & -V_c & \dot{u_2} & u_2 & u_2 & \hat{u_1} & u_1 \end{bmatrix}^T$$

Επειδή θέλουμε στην εξίσωση (10) να απαλλαχτούμε από τυχόν μη υπολογίσιμες παραγώγους, φτιάχνουμ ένα ευσταθές πολυώνυμο Λ(s) τάξης 2 με το οποίο θα την φιλτράρουμε. Το φίλτρο αυτό έχει την μορφή $\Lambda(s) = (s + \rho_1)(s + \rho_2)$ όπου $\rho_1, \rho_2 > 0$ ώστε να επιτυγχάνεται η ευστάθεια του Λ(s).

Οπότε η νέα εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$y = \theta_\lambda^T \zeta \tag{11}$$

Όπου:

- $\theta_\lambda : \begin{bmatrix} \theta_1^{*T} - \lambda^T & \theta_2^{*T} \end{bmatrix}^T$
- $\theta_1^* : \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$
- $\theta_2^* : \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix}^T$
- $\lambda : \begin{bmatrix} p_1 + p_2 & p_1 p_2 \end{bmatrix}^T$

Άρα τελικώς προκύπτει:

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - (p_1 + p_2) & \frac{1}{LC} - p_1 p_2 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 \end{bmatrix}^T \tag{12}$$

Για το $\zeta$ γνωρίζουμε ότι: $\zeta = [-\frac{\Delta_{n-1}^T(s)}{\Lambda(s)} y \quad \frac{\Delta_m^T(s)}{\Lambda(s)} u]$ όπου $n = 2$ η τάξη της εξόδου και $m = 1$ η τάξη της εισόδου. Οπότε η τελική έκφραση και για το $\zeta$ είναι:

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{sV_c}{\Lambda(s)} & -\frac{V_c}{\Lambda(s)} & \frac{su_2}{\Lambda(s)} & \frac{u_2}{\Lambda(s)} & \frac{su_1}{\Lambda(s)} & \frac{u_1}{\Lambda(s)} \end{bmatrix}^T \tag{13}$$

Στη συνέχεια γίνεται χρήση της μεθόδου ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, όπως περιγράφηκε στο θέμα 1. Για τα διάφορα ζευγάρια πόλων και αντίστοιχων παραμέτρων που προκύπτουν, υπολογίζουμε το μέσο απόλυτο σφάλμα(MAE), μεταξύ της προβλεπόμενης και της πραγματικής εξόδου του συστήματος. Η εξίσωση αυτή δίνεται από τον τύπο (14).

$$e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |V_C(t_i) - \hat{V_C}(t_i)| \tag{14}$$

Το ελάχιστο δυνατό σφάλμα προκύπτει για $p_1, p_2 = 400$ και ισούται με $e = 0.0012$. Οι αντίστοιχες ζητούμενοι παράμετροι είναι $\frac{\hat{1}}{RC} = 10.0001$ και $\frac{\hat{1}}{LC} = 2499309$. Εν συνεχεία, για την εύρεση του ζητούμενου πίνακα μεταφοράς H, θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση (10) από όπου και τελικά προκύπτει η εξ. (15)

$$V_C = \left[ \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \frac{\frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \right] U = \left[ \frac{10.0001s}{s^2 + 10.0001s + 499309} \frac{10.0001s + 2499309}{s^2 + 10.0001s + 2499309} \right] U \tag{15}$$

## 2.2 Εσφαλμένη λήψη μετρήσεων

Με την εσφαλμένη λήψη μετρήσεων $V_R$, $V_C$ (έστω 2 εσφαλμένες μετρήσεις), προκύπτει για το ίδιο ζευγάρι πόλων ότι: $\frac{\hat{1}}{RC} = 23.1757$, $\frac{\hat{1}}{LC} = 21936915$.

Το αντίστοιχο μέσο απόλυτο σφάλμα προκύπτει $e = 0.0275$. Άρα παρατηρούμε ότι έστω και ελάχιστες εσφαλμένες μετρήσεις μπορούν να οδηγήσουν σε μεγάλη αύξηση του σφάλματος και γενικότερη μείωση της απόδοσης του μοντέλου μας.