



# Dynamik von Innovationen in stochastischen Modellen

Werner Ebeling \*

R.Feistel\*\*, I. Hartmann-Sonntag\*, A. Neiman\*\*\*

L.Schimansky-Geier\*, A.Scharnhorst\*\*\*

\* Humboldt-Universität, Berlin

\*\*Inst. Ostseeforschung, Warnemünde,

\*\*\*Ohio University, Ohio\*\*\*, KNAW, Amsterdam

## 1. Einleitung



- Stochast. Effekte spielen in sozioökon. Prozessen eine wichtige Rolle,
- zum Beispiel bei Innovationen und bei Übergängen zu anderen Technologien,
- Das einfache Bild: Das Neue/Bessere ersetzt das Alte/Schlechte ist zu einfach!!
- Wir benutzen Agenten, die sich stochastisch bewegen (Rolle des Zufalls!) und entwickeln zwei einfache (agent-based) mathem. Mod:

## Vorwort



- Ein wesentlicher Schritt bei der Entwicklung von Wissenschaft und Technologie ist die Ersetzung von alten durch neue Elemente (Ideen, Erfindungen, Technologien), die meist der Befriedigung elementarer Bedürfnisse auf eine neue (bessere, günstigere) Weise dienen.
- Das neue vorteilhafte Element muss sich im Wettbewerb, in den es mit einer kleinen Zahl von Realisierungen eintritt, erst durchsetzen. In diesem stochastischen Prozess der Durchsetzung, kann auch eine neue und bessere Lösung nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit überleben.
- Anhand einfacher mathematischer Modelle für Substitutions- und Übergangsprozesse wird demonstriert, wie sich das Neue durchsetzen kann.

### 1) Diskretes Urnen-Modell: Agenten, die zwischen Urnen springen Schicksal neuer Agenten/Technologien im Verdrängungswettbewerb auf dem Markt



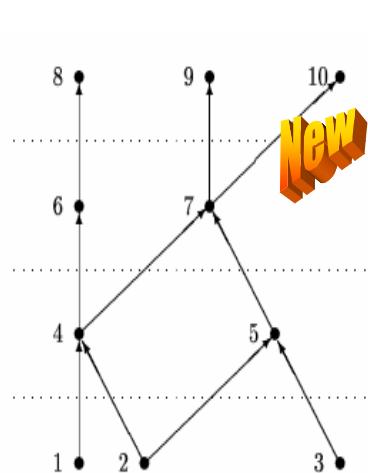
- stochastic effects are important if the advantage of the NEW is small
- selection is vague with a broad region of neutrality; in order to win the competition the NEW needs big advantage.
- technologies with nonlinear growth rates have only a chance to win in niches or with external support.

## 2) Modell Brownscher Agenten-Dynamik auf Landschaften: Übergänge zu neuen Technologien

- Technologies are modelled as active Brownian agents/particles with velocity-dependent forward thrust, external confinement and collective interactions.
- We simulate the dynamics of such transitions by Langevin equations and estimate parameters of the dynamics as the transition rates.



## 2. Stochastisches Urnenmodell



- Econ evo as agent dynamics in a **discrete** network
- A special role play transitions to new technologies (node 10).
- By changing the old, by new ideas, inventions= transition to a new node
- Fate of the NEW = stochastics on nodes
- Urn models !!!



Zur Begründung der agenten-basierten Methodik zitieren wir einen Experten:

*Agent-Based Computational Economics*, K. Judd and L. Tesfatsion, eds,  
ELSEVIER/North-Holland, forthcoming 2005.

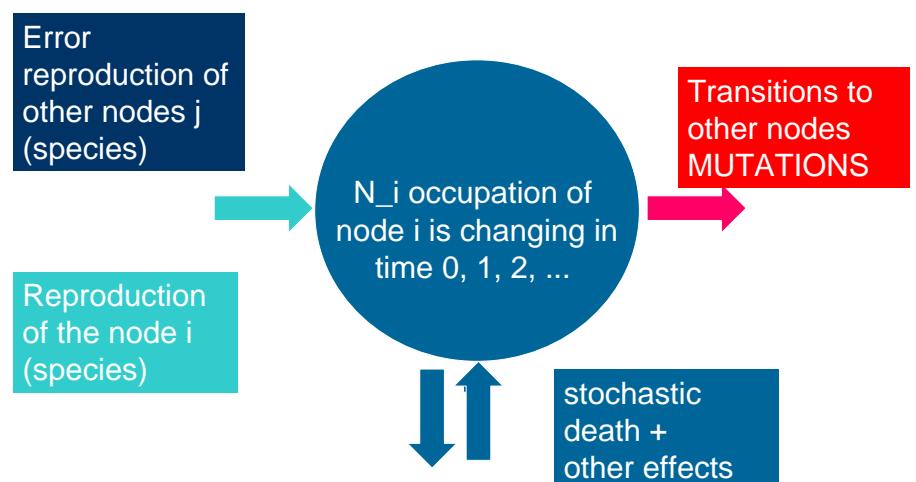
Out-of-Equilibrium Economics and Agent-Based Modeling

By W. Brian Arthur

### Abstract

Standard neoclassical economics asks what agents' actions, strategies, or expectations are in equilibrium with (consistent with) the outcome or pattern these behaviors aggregatively create. Agent-based computational economics enables us to ask a wider question: how agents' actions, strategies, or expectations might react to—might endogenously change with—the patterns they create. In other words, it enables us to examine how the economy behaves out of equilibrium, when it is not at a steady state.

## Stochastischer Wechsel der Besetzung von Knoten



# Zur Geschichte stochast. Urnenmodelle



- Paul & Tatjana Ehrenfest 1907: Urn models (flees jump from dog to dog) . **First biophys. Appl!!!!**
- Bartholomay 1958/59, Bartlett 1960: Birth and death processes, survival probabilities
- Kimura/Eigen: Applications to problems of evolution  
**Applications to genetics  
population dynamics, etc.**

Transformation gegeb. det. DGL. auf  
stochast. Problem? Rezept ist klar für  
Polynome (transition probs ~ coeff.)

Special cases: Lotka-Volterra, Eigen-Schuster,...

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j \left( A_{ij} x_j + B_{ij} N x_i x_j + \sum_k C_{ijk} N^2 x_i x_j x_k \right)$$

# Wann lohnt stochast Analyse?



- In der Regel sind stochast Effekte sehr klein ( $N \gg 1$ ). Es gibt aber Ausnahmen ( $N=0,1$ ): Innovationen!
- Besonders interessant Innov mit Hyperzykluscharakter (vgl. Theorie der Hyperzyklen nach Eigen/Schuster)
- HC sind ringförmig vernetzte Technol mit hyperbol Wachstum (WINDOWS, GOOGLE, alles oder nichts!)

Hyperzycl. vernetzte Technologien



Node  
(species) 1

Node  
(species) 2

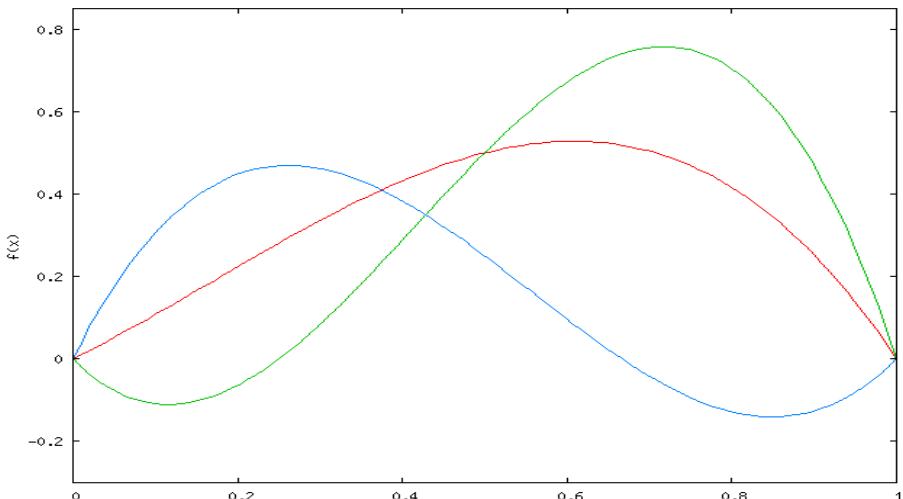
Node  
(species) 3

Node  
(species) 3

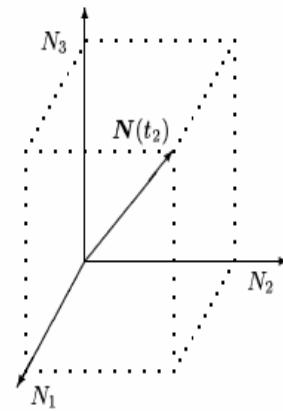
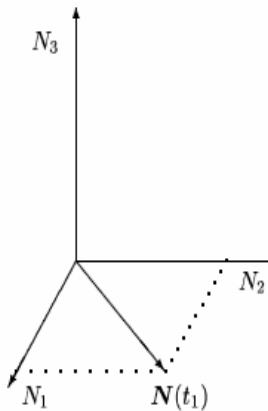
$$\frac{d}{dt}x = f(x) = a x + b x^2 - (a+b)x^3$$

u.a.mit Attraktor in der Mitte

oder mit Separatrix



## Besetzungszahlraum



Stochast Modell (birth & death):  
def Knoten für Sorten und  
Besetzungszahlen



$o_i$  non-occupied  $N_i = 0$

$\bullet_i$  occupied  $N_i > 0$

Def Übergangswahrsch abhängig von  
Koeffizienten in der det Dgl. Wahl der Koeff  
erlaubt Modellierung vieler Prozesse

$$W(N_1, \dots, N_i+1, \dots, N_j-1, \dots, N_s | N_1, \dots, N_i, \dots, N_j, \dots, N_s)$$

$$= A_{ij} N_j + B_{ij} N_i N_j + \sum_k C_{ijk} N_i N_j N_k$$

1. Spontaneous generation (simple innovation)

$$A_i^{(0)}$$



2. Self-reproduction

$$A_i^{(1)} N_i$$



Error reproduction

$$A_{ij}^{(1)} N_j$$



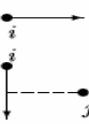
Catalytic self-reproduction  
(sponsored self-reproduction)

$$\begin{cases} B_{ij}^{(1)} N_i N_j \\ C_{ijk}^{(1)} N_i N_j N_k \end{cases}$$



3. Spontaneous decay

$$A_i^{(2)} N_i$$



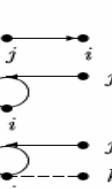
Catalytic decay

$$B_{ij}^{(2)} N_i N_j$$



4. Mutation (innovation)

$$A_{ij}^{(3)} N_j$$



Mutation (innovation) with re-production

$$\begin{cases} B_{ij}^{(3)} N_i N_j \\ C_{ijk}^{(3)} N_i N_j N_k \end{cases}$$



Betrachte binären Verdrängungs wettbewerb: 1=ALT, 2=NEU

- Consider a two-component system:
- The MASTER with dominant occupation:
- The NEW species with one, or a few, representatives which try to survive and (if possible) to win the competition.
- In general we will assume that the NEW is better with respect to reproductive rates

Formuliere eine Mastergl. als Balance elementarer Prozesse: Lösung i.a.schwer oder unmöglich - Hier Simplexbed  $N = \text{const}$

$$\frac{\partial P(N; t)}{\partial t} = W(N|N') P(N') - W(N'|N) P(N)$$

$$N = \{N_0, N_1, N_2, \dots, N_s\} .$$

ALT  $\rightarrow$  NEU = binärer Wettbewerb.  
Wie scharf ist stochast. Selektion?  
Was ist stochast. Neutralität ?

Node  
(species) 1



Node  
(species) 2

The message is:

Stochastic selection is very weak, nearly always neutral

## Binäre Substitution N=const



$$\frac{\partial P(N_2; t)}{\partial t} = W_{N_2-1}^+(N_2 | N_2 - 1)P(N_2 - 1; t)$$

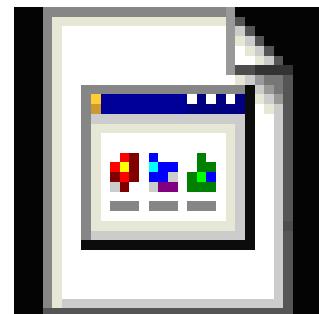
$$W_{N_2+1}^-(N_2 | N_2 + 1)P(N_2 + 1; t)$$

$$- W_{N_2}^+(N_2 + 1 | N_2)P(N_2; t)$$

$$- W_{N_2}^-(N_2 - 1 | N_2)P(N_2; t)$$

Only 1 independent variable N\_2 (represent of the NEW)

## Stochastische Simulation eines Prozesses mit anzieh Rändern (Pohl)



Komitee2.exe

## Das allgemeine Überlebensproblem (survival between 2 absorbers)



- Untersuche den allgemeinsten 1 step Prozess (W+, W-) zwischen 2 Absorbern
- X=0 <---o... <---->o<----> ...o--->X=N
- keine Absorber dazwischen, aber evtl. Extrema der Übergangswahrsch W+,W- evtl. Attraktoren

## Station Prob und Überlebensw



$$P(N_2; t \rightarrow \infty) = \sigma_1 \delta_{0, N_2} + \sigma_2 \delta_{N, N_2}$$

mit

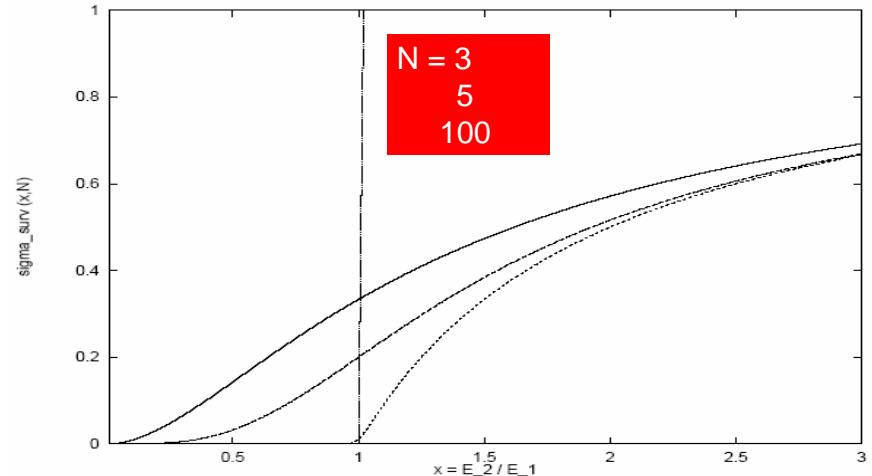
$$\sigma_1 + \sigma_2 = 1$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht eine Trajektorie, die bei  $X(0)=N_2(0)>0$  beginnt, den Absorber  $X=N$  ?



$$\sigma = \frac{1 + \sum_{j=1}^{N_2(0)-1} \prod_{i=1}^j \frac{W_i^-}{W_i^+}}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{i=1}^j \frac{W_i^-}{W_i^+}}$$

Prob. of survival infinite generations in dep. on pop. size  $N=3,5,100$  + determ. result

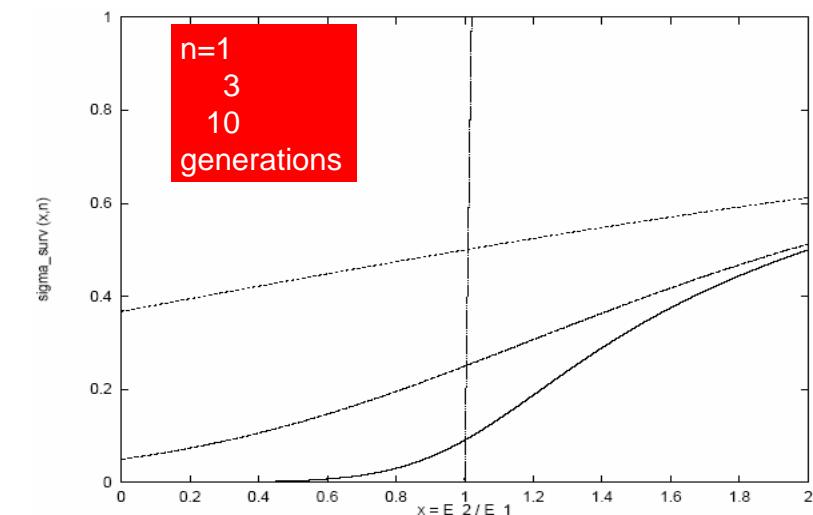


Lineare Raten, Überlebenswahrsch  
Bartholomay, Bartlett: N-gross

$$\sigma_2 = \begin{cases} 0 & \text{for } E_2 < E_1 \\ 1 - \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{N_2(0)} & \text{for } E_2 > E_1 \end{cases} \quad (24)$$

with  $N_2(0) = N_2(t=0)$  the initial state of the system. Is  $N_2(0)$  the number of users at time  $t=0$  of the technology 2, then  $\sigma_2$  is the probability, that for  $t \rightarrow \infty$   $N_2 = N$  users change to technology 2.  $\sigma_1$  is the probability that for  $t \rightarrow \infty$   $N_2 = 0$  (i.e.,  $N_1 = N$ ) the system returns to species 1, this means the new species has not survived. In general,  $\sigma_i$  is the survival probability of

Prob of survival  $n=10,3,1$  generations (from below) and determin. result as function of relative advantage (N-large)



Traditionelle Aussagen werden vage:  
Schlechter/Neutral/Besser



- Deleterious?
- neutral ??????
- Advantageous?
- Neutrality gets a new dynamic meaning (depending on N and n) !!!

Einfachstes Modell: lineare+quad W-terme

$$\frac{d}{dt}x_i = f(x) = a_i x_i + b_i x_i^2 - \varphi(t)x, \quad x_1 + x_2 = \text{const}$$

Separatrix

$$W(N_2) = \frac{a_1}{N} N_1 N_2 + \frac{b_1}{NV} N_1^2 N_2$$

$$W^+(N_2) = \frac{a_2}{N} N_1 N_2 + \frac{b_2}{NV} N_1 N_2^2$$

Nichtlin Raten = hyperzykl vernetzte Technologien (selbstbeschleun.)

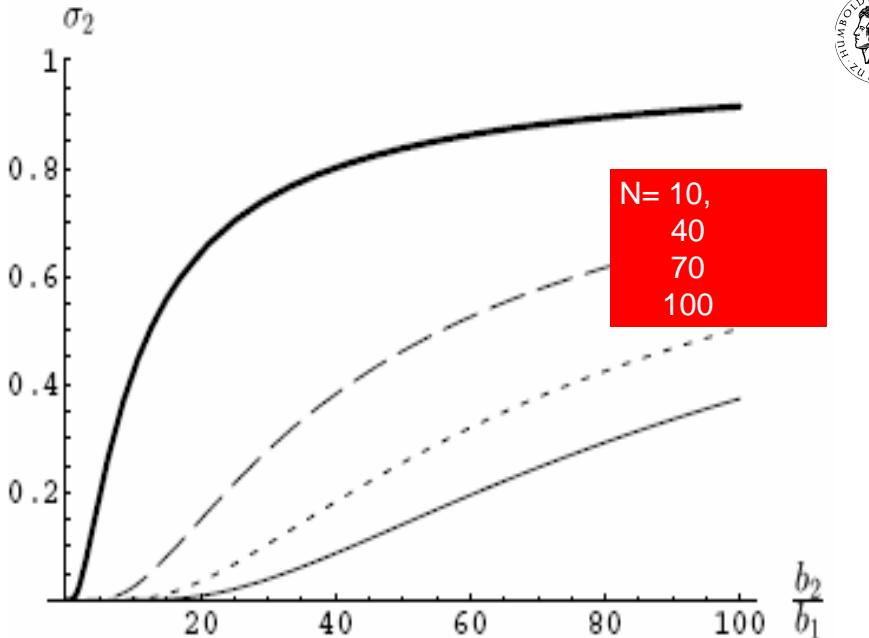
- DETERMINIST. BILD:
- Wachstum ist hyperbolisch ! (singulär für endliche Zeiten)
- Resultat hängt nicht nur vom (relativen) Vorteil sondern auch wesentlich von den Anfangsbedingungen ab!
- Das (unterkritische) Neue hat keine Chance ! (once-forever selection)
- B: moderne Infotec (Windows, Google,...)

Überlebenswahrsch. von 2

$$\sigma_{N_2(0), N} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{N_2(0)-1} \prod_{i=1}^j \frac{E_1 + b_1 \frac{N-i}{V}}{E_2 + b_2 \frac{i}{V}}}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{i=1}^j \frac{E_1 + b_1 \frac{N-i}{V}}{E_2 + b_2 \frac{i}{V}}}$$

Einfach für  $N_2(0)=1$





Der allgemeinste Fall von Ü-Wahrsch dritter Ordnung:

Das Neue, mit  $N_2(0)$  startend, hat immer eine Chance (survival prob > 0)

$$\sigma_{N_2(o),N} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{N_2(o)-1} \prod_{i=1}^j \frac{a_1 + b_1 \frac{N-i}{V} + c_1 \frac{i}{V}}{a_2 + b_2 \frac{i}{V} + c_2 \frac{N-i}{V}}}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{i=1}^j \frac{a_1 + b_1 \frac{N-i}{V} + c_1 \frac{i}{V}}{a_2 + b_2 \frac{i}{V} + c_2 \frac{N-i}{V}}}$$



Der allgemeinste Fall von Ü-Wahrsch bis dritte Ordnung:



Die Zustände  $N_2=0$  und  $N_2=N$  sind immer noch Absorber, aber in der Mitte können determ. Separatoren liegen

$$W^-(N_2) = \frac{a_1}{N} N_1 N_2 + \frac{b_1}{NV} N_2 N_1^2 + \frac{c_1}{NV} N_1 N_2^2$$

$$W^+(N_2) = \frac{a_2}{N} N_1 N_2 + \frac{b_2}{NV} N_1 N_2^2 + \frac{c_2}{NV} N_2 N_1^2$$

Hyperzykl vorn Techn. verhalten sich stoch qualitativ anders als det!

- Deterministic picture: If a separatrix exists, the NEW has no chance at all.
- Exception: the NEW gets support, to cross the separatrix
- Stochastic picture: New hypertechns with better rates have a good chance.
- However this is true only for small niches

$$x_i = 0 \quad S_i \quad x_i = C$$

Fig. 1. Deterministic phase space with two fixpoint attractors and the separatrix point

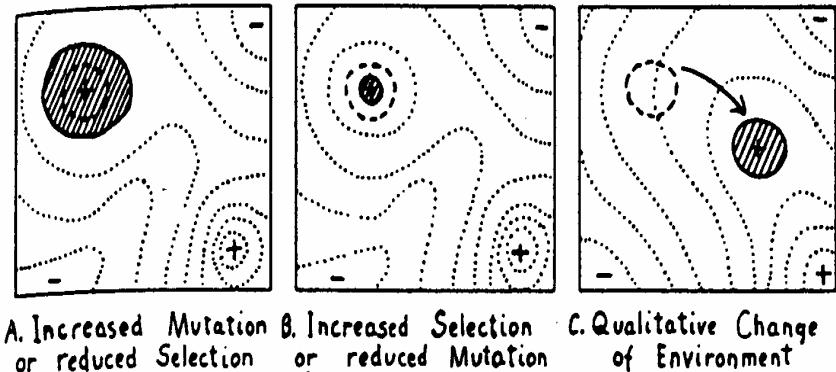
## A few references: discrete m.

- Feistel/Ebeling: Evolution of Complex Systems. Kluwer Dordrecht 1989
- Ebeling/Engel/Feistel: Physik der Evolutionsprozesse. Berlin 1990
- studia biophysica **84**, 87 (1981)
- J.Theor.Biol. **39**, 325 (1981)
- J. Evol. Economics **6**, 1 (1996)
- BioSystems **19**, 91(1986), in press(2006)
- Physica A **287**, 599 (2000)
- arXiv:cond-mat/0406425 18 Jun 2004

## G\_O\_E\_THE

Idee aus der Biologie: Wright Fitness landscape  
Evolution as Optimization Process

Adaptive Landscape/Fitness Landscape



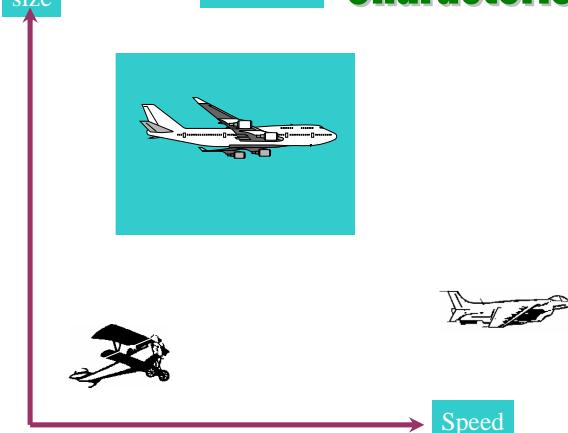
## 3. Modell Brownscher Agenten für Übergänge zu neuen Technologien

- Grundidee: Beschreibung einer Techn durch kontinuierl Parameter: Größe, Gewicht, Abmessungen, Leistung, techn Daten, ..., LANDSCHAFT
- Raum der kont. Charakteristiken (Metcalfe, Saviotti seit 1984)
- Scharnhorst: G\_O\_E\_THE (geometrisch orientierte Evolutionstheorie)

## G\_O\_E\_THE

Basics

Characteristics Space

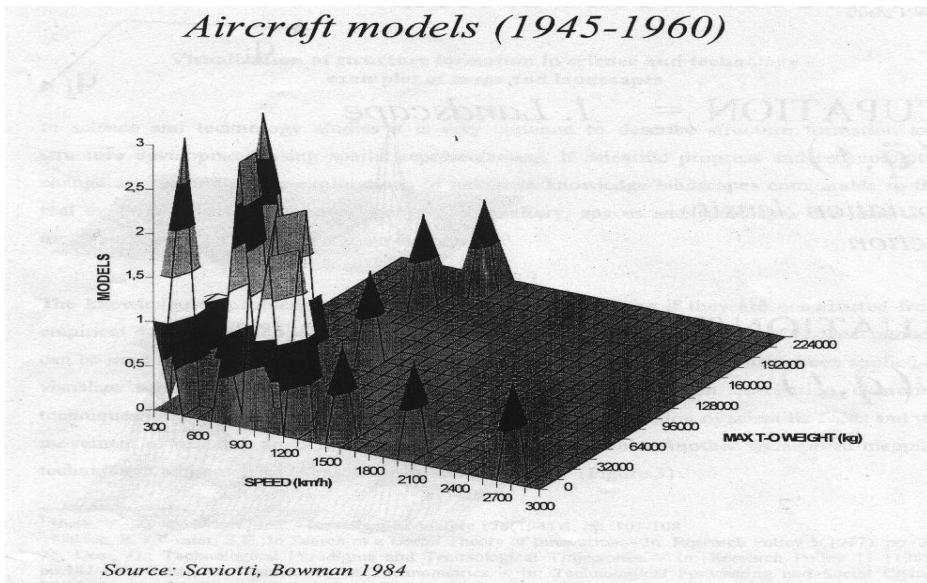


Technological Evolution:

Characteristics Space of Output Indicators

Metcalfe, Saviotti 1984

## Darstellung nach Saviotti/Bowman, 1984



# evolino

Dynamik evolutionärer Suchagente in komplexen Landschaften



**evolino – Dynamik evolutionärer Suchagente in komplexen Landschaften – Anwendung auf die Modellierung der Rolle von Kompetenzen und Metakompetenz**

[Deutsch >>](#)

**evolino – Dynamics of evolutionary search agents in complex landscapes – application to the modeling of competences**

[English >>](#)

Entstanden in Rahmen des Projektes:  
"Die Modellierung von Kompetenzen als Selbstorganisationsdispositionen menschlichen Handels"

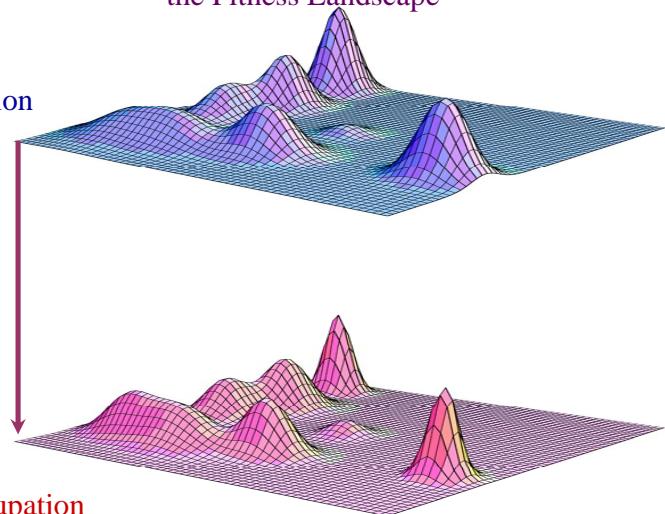
Gefördert durch das BMBF und den Europäischen Sozialfond, im Auftrag der ABWF

## G\_O\_E-THE

The Occupation Landscape Changes According  
the Fitness Landscape



Valuation



Die Eigensche Evo-Theorie entspr. im kont.  
Fall einer Diffgl für die Dichten bzw. einer  
überdämpften Langevin-GI. für Koordinaten

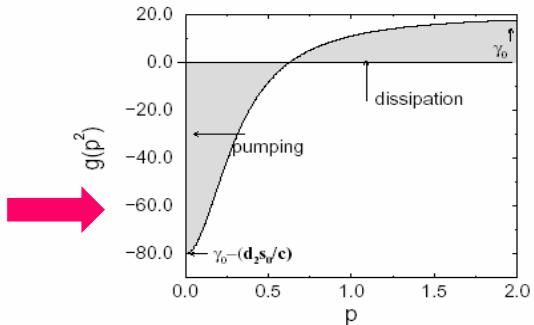
$$\gamma_0 \frac{d}{dt} \mathbf{x} + \frac{1}{m} \frac{dU}{dr} = +\sqrt{2D} \cdot \xi(t); \quad v = \frac{d}{dt} \mathbf{x}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} n = \nabla [D \nabla n + m \gamma_0 n \nabla U]$$

In der ABM - Theorie betrachten wir die Geschw.  
als unabhängige Variable, weiter  
berücksichtigen wir Trägheit und Vortrieb !!!

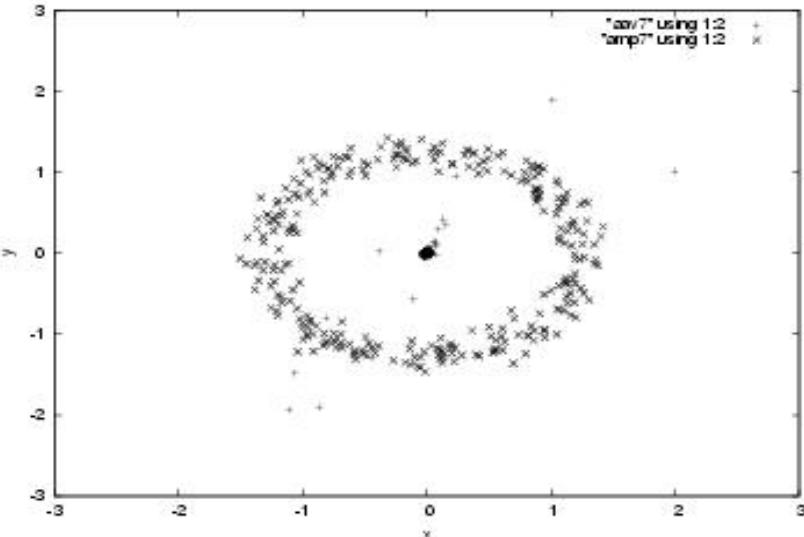
$$\frac{d}{dt} v + \frac{1}{m} \frac{dU}{dr} = -\gamma(v^2)v + \sqrt{2D} \cdot \xi(t)$$

### Depot model - SET



Active friction: Zero of the velocity  $v_0^2 = \frac{d}{c}\mu$ ;  $\mu = \frac{qd}{c\gamma_0} - 1$

### Dynamik von Agenten, die linear zum Zentrum getrieben werden



### Velocity-dependent friction: $\gamma(v^2)$

Thermal equilibrium:  $\gamma(v) = \gamma_0 = \text{const.}$

Energy support (pumping) requires negative parts of  $\gamma(v)$   
Rayleigh:

$$\mathbf{F} = (a - bv^2)\mathbf{v}$$

Gruler

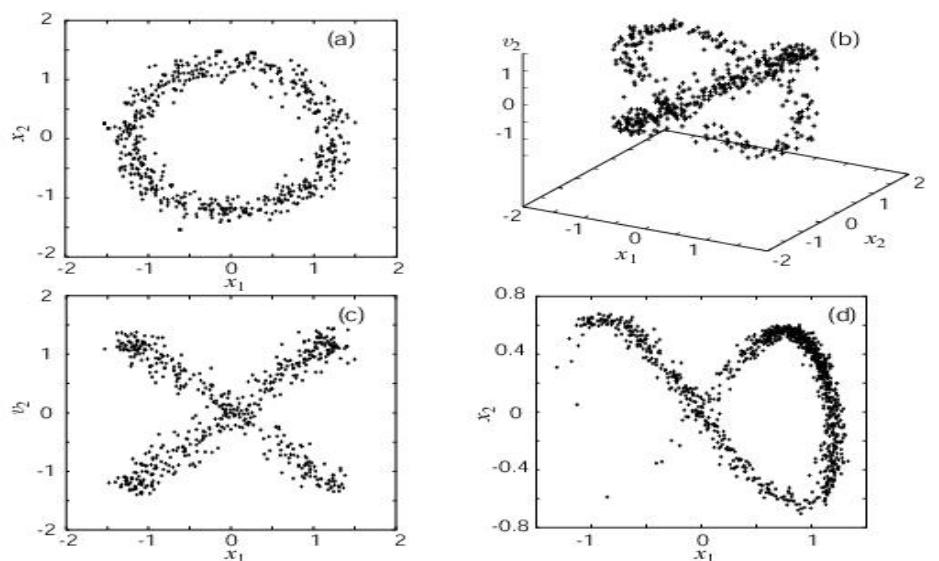
$$\mathbf{F} = G \left( \frac{v_0}{|\mathbf{v}|} - 1 \right) \mathbf{v}$$

Depot model (SET-model):

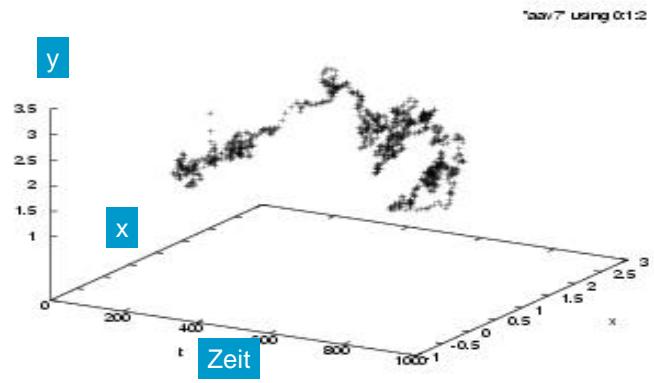
$$\gamma(v^2) = \left( \gamma_0 - \frac{dq}{c + dv^2} \right)$$

$c, d, q$  = positive constants characterizing the energy flows from a depot to the particle

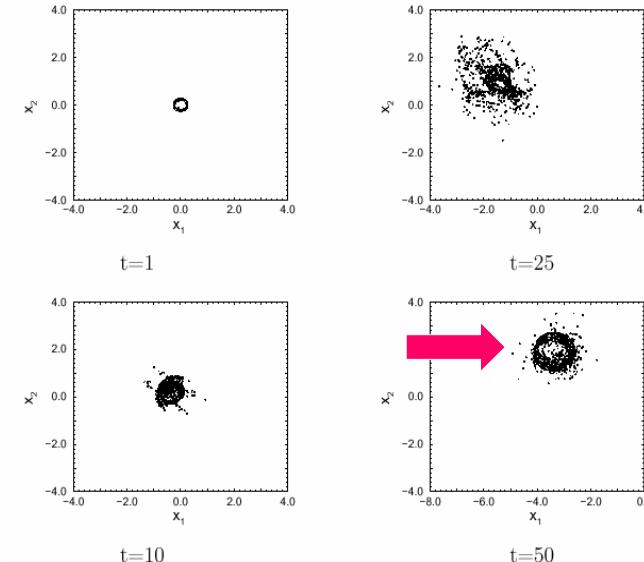
### Rotationen (links/rechts): (limit cycles)



Schwärme von Agenten/Techn mit koll WW,  
lineare paarw Anziehung, die sich um das  
gemeins Zentrum (Schwerpunkt) bewegen

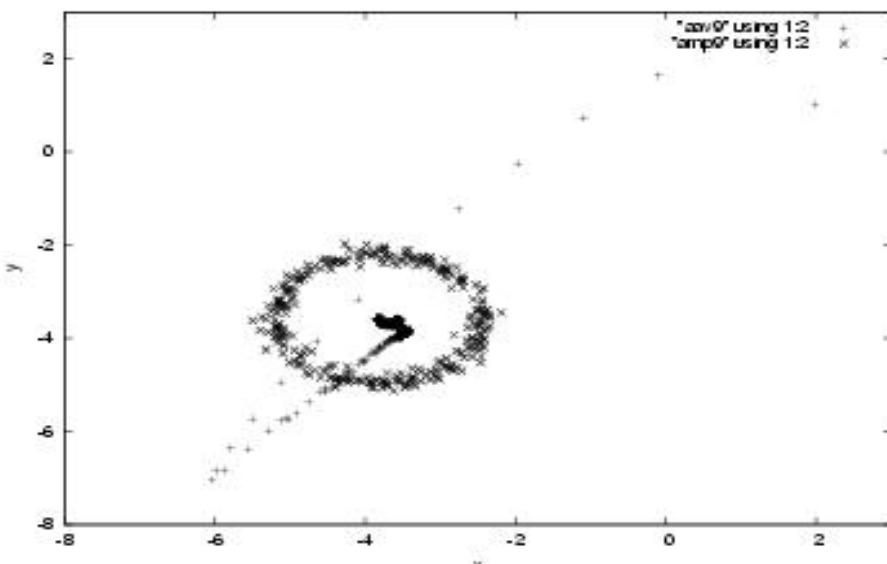


2000 Agenten mit paarweise linearer Anziehung

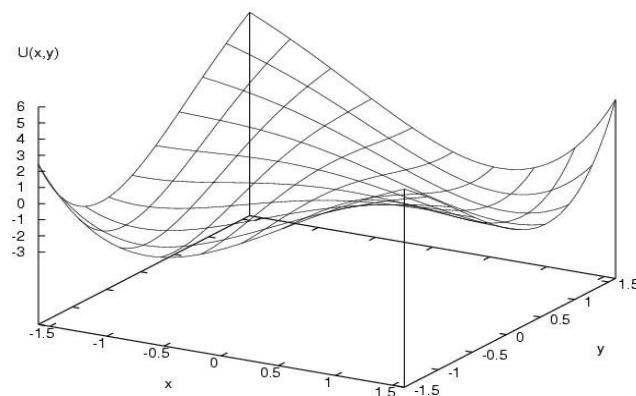


Swharm.gif

Rotationen um das Zentrum



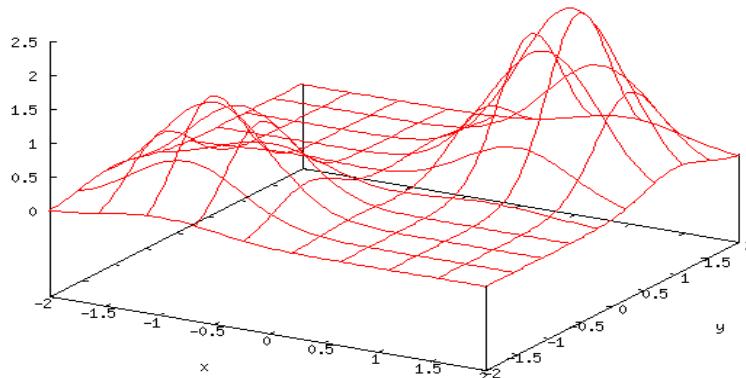
Übergänge zwischen 2 Anziehungszentren  
(from good to better)



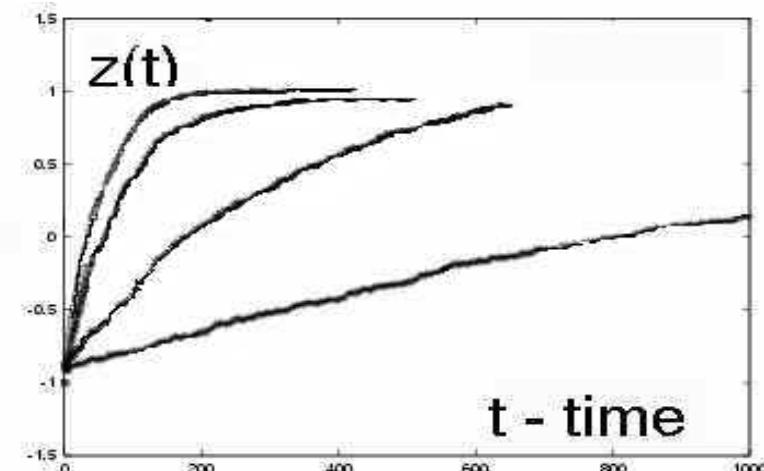
# Wertelandschaft (2 Maxima)



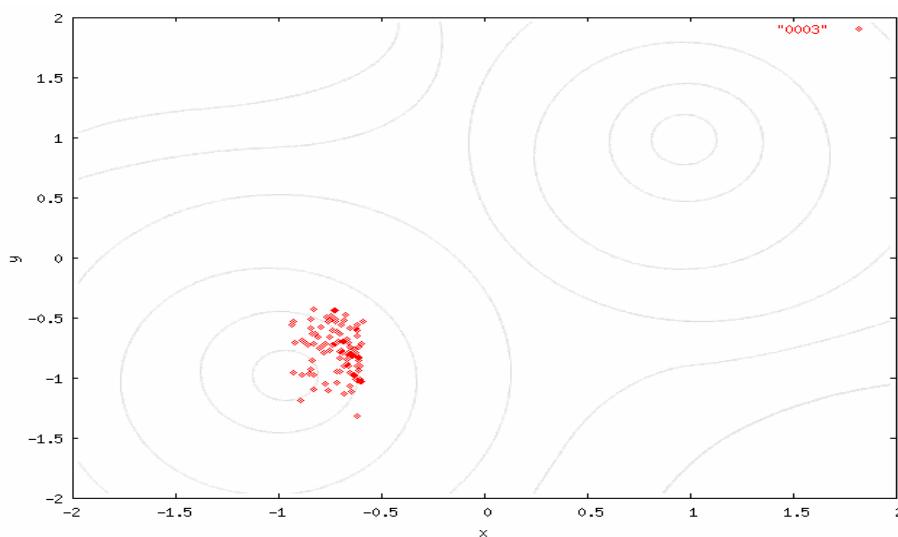
landscape with 2 hills:1.5;0.0;2.4---



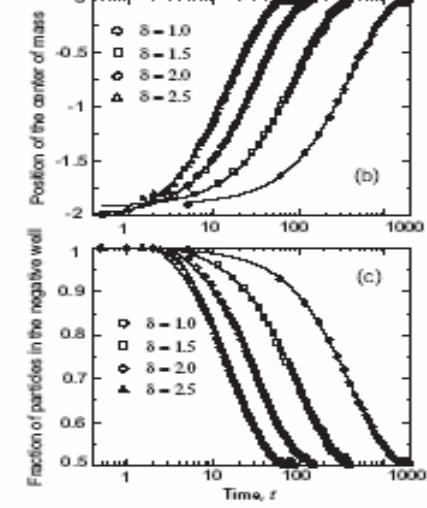
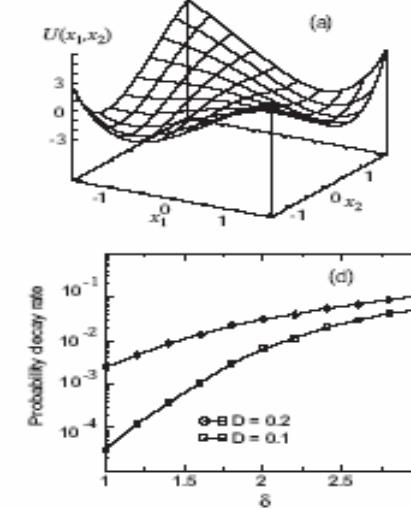
Trajektorien entlang der Diagonale (max to max) als Funktion des Antriebs  
delta=2.5;2.0;1.7;1.5



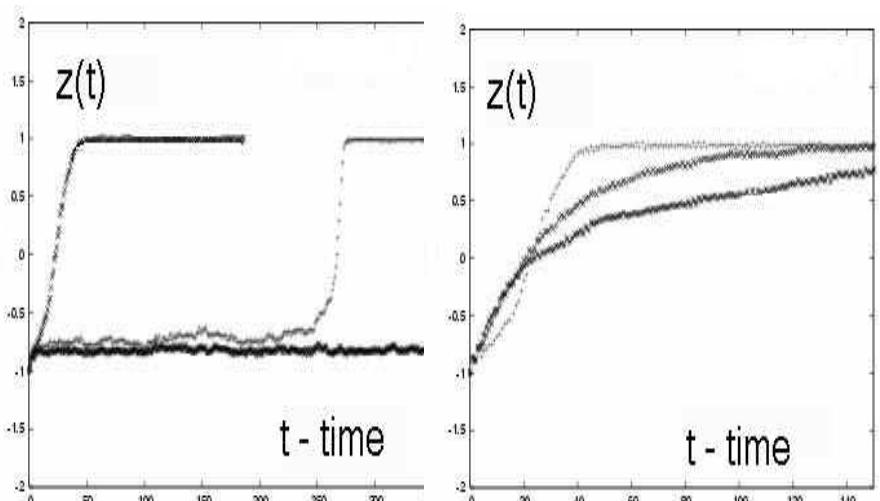
# Simulation des Überganges von Agenten zum neuem Zentrum (Wertehügel)



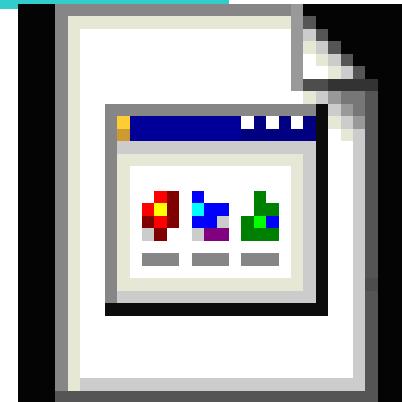
# Übergangszeiten u. Wahrscheinl



## Einfluß der kollekt relativen Anziehung l:a=0.5;1.0;1.2      r:a=0.5;0.0:-0.2



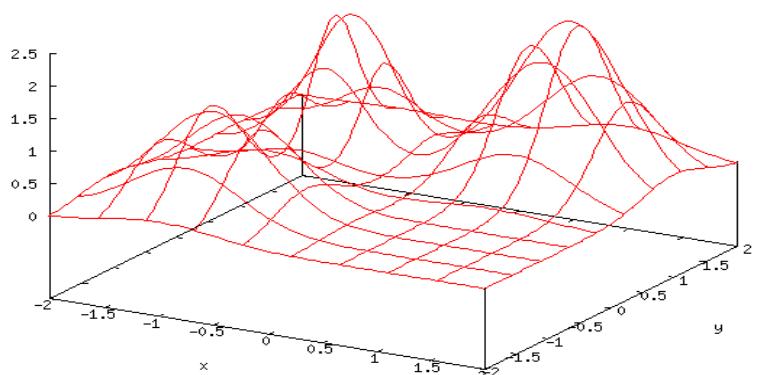
## Übergänge zwischen 3 Werte Maxima



# 3max46.exe

## Wertelandschaft mit 3 Maxima

landscape with 3 hills:1.5;2.0;2.4---



## Landschaften mit vielen Extrema



- ➡ 1. Agenten auf Ratchets (Sägezahn-Potentiale) (Tilch et al.)
- ➡ • 2. Landschaften mit zufällig verteilten Extrema (Asselmeyer, Dunkel et al.)

# Referenzen zu Brown-Agenten



- Phys. Rev. Lett. **80**, 5044-5047 (1998)
- BioSystems **49**, 5044-5047 (1999)
- Eur. Phys. Journal B **15**, 105-113 (2000)
- Phys. Rev. E **64**, 021110 (2001)
- Schweitzer: Brownian agents..Berlin 2002
- Phys. Rev E **65**, 061106 (2002)
- Phys. Rev E **67**, 046403 (2003)
- Adv. Complex Systems 4, 71 (2001)
- Fluctuation & Noise Lett., (2004)

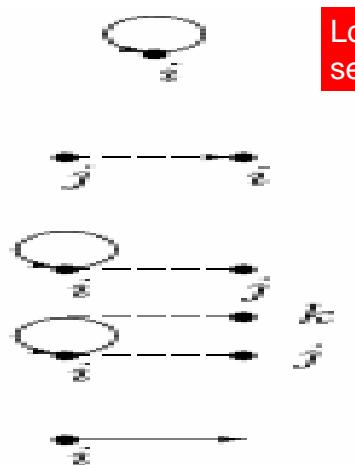


## Zusammenfassung



- Stochastische Effekte sind manchmal für sozio-ökonomische Prozesse wichtig:
- Bei Innov mit linearen Raten erweist sich die stoch Selektion bei geringem Vorteil als vage, neutral. Gewinnen braucht große Vorteile !!!
- Hyperzykl. Systeme können nur in Nischen gewinnen, brauchen Förderung/Schutz!
- Komplexe Übergangs/Evolutions Prozesse mod als Dynamik Brown-Agenten auf Landschaften!
- Antrieb, kollekt. WW usw. --> inter. Effekte!!!

Use edges between the nodes fo characterizing processes like self-reproduction, mutations, catalytic reproductions, decay etc.



Loop =  
selfreproduction

# Solve if possible

- Analytical solutions.  
This is possible only  
for a few examples  
as:
- The Fisher-Eigen-  
Schuster problem
- Survival  
probabilities
- Simulations by  
means of a fast  
computer with  
sufficient memory
- Formulate efficient  
algorithms
- Extrapolate and  
compare with  
analytical results



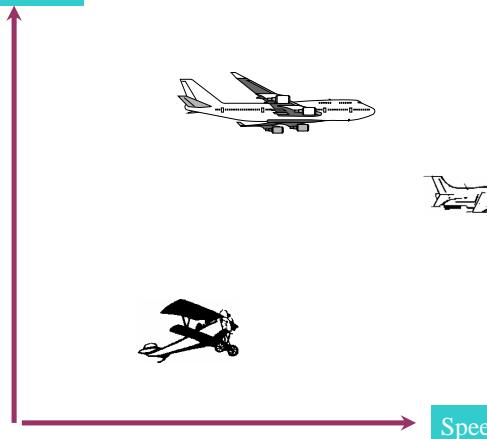
G\_O\_E\_THE

Basics 1

Characteristics Space



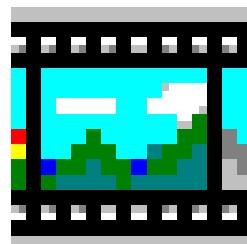
Engine size



Technological Evolution:

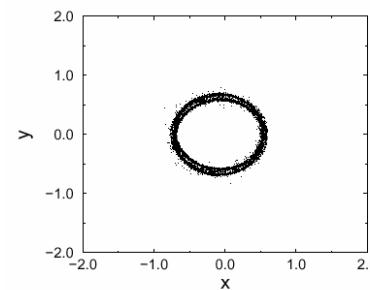
Characteristics Space of Output Indicators

## Slideshow 3 hills



ASlides5a1.5.exe

10000 aktive Teilchen um linear anziehendes  
Zentrum: Einschwingprozess !



Swaest1.gif

# Evolution von Netzwerken von Agenten(Illustration Erdmann)

