双三次插值的核心思想是考虑十六邻域的像素点、加权求和求解一个点的像素。那么主要问题是如何确定权重。

对于新图像中的点(x',y')，将其映射到原图像中点(x,y)，其中$x=x'/c$，c为缩放比例，y 同。由于这个数可能是一个小数，其实际对应到的位置需要取整。因此设$x_I=\text{int}(x)$，y 同。

然后考虑加权。根据相关研究，最优样条函数为$\sin(x)$型，具体为啥是这个形式我也不知道，但就趋势来说，距离所求点越近的像素对所求点影响越大，这点是容易理解的。为了简化计算，使用一个多项式函数逼近最优样条函数。在双三次插值中，一般使用的是：

$$S(x)=\begin{cases}(a+2)|x|^3-(a+3)|x|^2+1 & 0\le|x|<1\\ a|x|^3-5a|x|^2+8a|x|-4a & 1<|x|\le 2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

值得注意的是，该式可以通过设置不同的a值来逼近不同的样条函数。如当$a=1$时是$\sin(\pi x)/\pi x$的泰勒展开，当$a=-0.5$时则是逼近三次 Hermite 样条函数（用该函数计算的系数与用三次 Hermite 样条插值求得的系数相似）。在本次实现中取$a=-0.5$。

对实际加权运算，设十六邻域矩阵为 M，x 方向为$[x_I-1,x_I,x_I+1,x_I+2]$。可以看出，所求点(x_I,y_I)并不是十六邻域的中心点。但因为周围点的系数本身就是通过其与所求点的距离衡量，所以这不构成问题。

已知 H 之后，还需计算其 x、y 两方向的系数。系数实际就是将十六邻域中某点与所求点该维度距离带入样条函数 S。这里需要注意的是，设十六邻域中某点坐标为x_N，距离计算公式应为$x-x_N$，而不是x_I-x_N。因为对于新图像中不同的点(x',y')，其映射到原图像中点(x,y)一定不同，但取整后的(x_I,y_I)可能相同。如果使用x_I-x_N进行计算，那么这些相同点的加权后结果也会相同，从而缺乏平滑过渡造成整数值过渡线出现锯齿式 artifacts。最邻近插值的 artifacts 也是因同样的原因出现。

通过以上分析，可得系数矩阵计算式。设 x 方向系数矩阵为 L，y 方向系数矩阵为 R：

$$L=[S(1+x-x_I),S(x-x_I),S(x_I+1-x),S(x_I+2-x)]$$

R 换成 y，同。

显然，加权求和值为矩阵乘法 LMR。

以上过程可以采用多种实现方式，如直接写成常规的加权求和，对每个像素二重循环：

$$F(x,y)=\sum_{row=-1}^{2}\sum_{col=-1}^{2}f(x_I+row,y_I+col)S(row-v)S(col-u)$$

其中 $v=x-x_N$ ，u 换成 y，同。

不使用样条函数采样，直接对 x、y 两个方向进行三次 Hermite 样条插值也可以达到类似的效果，只是计算量会增大。
本次实现中采取矩阵方式。

另外在实现中需要注意的问题是，因为对每个像素都要取十六邻域进行加权求和，为了避免处理边界上点时溢出，需要将原图边界对称 padding 2 像素。padding 后，在访问原图像素点时需要加上一个 2 像素的偏置。