Answer Key for Problem Set 3

남 준우 교수

1.

(1) 선형

(2) 비선형

(3) 선형

(4) 비선형

2

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \beta X_i \right)^2$$

(1)
$$\frac{d\phi}{d\beta} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta X_i) X_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\beta} = \frac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2}$$

(2) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2}$ 로부터

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2} \right) = \frac{\sum_i X_i E\left(Y_i\right)}{\sum_i X_i^2} = \frac{\sum_i X_i (\beta X_i)}{\sum_i X_i^2} = \beta_2$$

따라서 $\hat{\beta}$ 는 불편 추정량이다.

(3) Let $k_i = \dfrac{X_i}{\sum_i X_i^2}$, then $\hat{\beta} = \sum_i k_i Y_i$. $V(\hat{\beta}) = \sigma^2 \sum_i k_i^2 = \dfrac{\sigma^2}{\sum_i X_i^2}$.

(4) 표본회귀선 $y_i = \hat{\beta}X_i + \tilde{e}_i$ 가 $(\bar{X}, \bar{y})$ 점을 지나는가를 확인하기 위해 $\hat{\beta}\bar{X} \overset{?}{=} \bar{y}$ 가 성립하는가를 보면 알 수 있다.

$\hat{\beta} = \dfrac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2}\bar{X} \neq \bar{y}$. 따라서 표본회귀선 $y_i = \hat{\beta}X_i + \tilde{e}_i$ 가 $(\bar{X}, \bar{y})$ 점을 지나지 않는다.

이는 또한 절편이 없는 모형의 normal equation 에서 표본회귀선 $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$ 의 조건이 충족되지 않는다는 사실로부터 재확인할 수 있다.

(5) $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2}$ 로부터

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\frac{\sum_i X_i Y_i}{\sum_i X_i^2}\right) = \frac{\sum_i X_i E(Y_i)}{\sum_i X_i^2} = \frac{\sum_i X_i(\alpha + \beta X_i)}{\sum_i X_i^2} = \alpha\frac{\sum_i X_i}{\sum_i X_i^2} + \beta \neq \beta$$

따라서 $\hat{\beta}$ 는 불편 추정량이 되지 못한다.

3. (1)

$$b_1 = \bar{Y} - b_2\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} v_i Y_i$$

로 표현할 수 있다. 여기서

$$v_i = \frac{1}{n} - w_i\bar{X}$$

$$w_i \equiv \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

를 나타낸다.

(2)

$$E(b_1) = \sum_{i=1}^{n} v_i E(Y_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} v_i(\beta_1 + \beta_2 X_i) = \beta_1 \sum_{i=1}^{n} v_i + \beta_2 \sum_{i=1}^{n} v_i X_i$$

여기서

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} v_i X_i = 0$$

이 성립한다.

따라서 $E(b_1) = \beta_1$..

(3)

$$V(b_1) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2} - 2\bar{X}\frac{1}{n} w_i + \bar{X}^2 w_i^2 \right) = \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}$$

$$V(\mathrm{b}_1) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} \right) = \sigma^2 \left(\frac{\sum_i X_i^2}{n \sum_i (X_i - \bar{X})^2} \right)$$

4.

(1) If $Z_i = 2X_i$,

(*) $$y_i = b_1{*} + b_2{*} Z_i + e_i{*}$$
$$\Rightarrow y_i = b_1{*} + b_2{*} 2X_i + e_i{*}$$

Compare equation (*) with $y_i = b_1 + b_2 X_i + e_i$, $b_1 = b_1{*}$, $b_2 = 2b_2{*}$, $e_i = e_i{*}$

(2) If $W_i = X_i + 2$,

(**) $$y_i = b_1{*} + b_2{*} W_i + e_i{*}$$
$$\Rightarrow y_i = b_1{*} + b_2{*}(2 + X_i) + e_i{*}$$
$$\Rightarrow y_i = (b_1{*} + 2) + b_2{*} X_i) + e_i{*}$$

Compare equation (**) with $y_i = b_1 + b_2 X_i + e_i$, $b_1 = b_1 * + 2$, $b_2 = b_2 *$, $e_i = e_i *$

5. 수업시간 중 설명.