Answer Key 1

J. Nahm

1. trivial.

2. Let

$$\phi \equiv \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2$$

$$\frac{d\phi}{da} = -2\sum_{i=1}^{n} (X_i - a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a^* = \bar{X}$$

이는 표본평균 $\bar{X}$ 도 모집단 평균 μ 에 대한 Least Squares Estimator 임을 뜻한다.

또한 다른 방법으로

$$\begin{aligned}
\phi &\equiv \sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X} + \bar{X} - a)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - a)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(\bar{X} - a) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - a)^2 + 2(\bar{X} - a)\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) && \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) = 0\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - a)^2 && \left(\text{왜냐면} \quad \sum_{i=1}^{n} (\bar{X} - a)^2 \geq 0\right) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2
\end{aligned}$$

따라서 $\sum_{i=1}^{n} (X_i - a)^2$ 은 $a = \bar{X}$ 일 때 최소값을 가진다.

마찬가지 답을 도출함.

두 방법 모두 익혀두세요.

3.

(1)

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i\right) = V\left(w_1 Y_1 + \cdots + w_n Y_n\right)$$
$$= w_1^{\,2} V(Y_1) + \cdots + w_n^{\,2} V(Y_n)$$
$$\quad + 2w_1 w_2 Cov(Y_1, Y_2) + 2w_1 w_3 Cov(Y_1, Y_3) + \cdots + 2w_{n-1} w_n Cov(Y_{n-1} Y_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} w_i^{\,2} \sigma_i^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} w_i w_j \sigma_{ij}$$

이 식에 대해 익숙하지 않은 학생들을 위하여 n=3에 대해 설명하면

$$V\left(\sum_{i=1}^{3} w_i Y_i\right) = V\left(w_1 Y_1 + w_2 Y_2 + w_3 Y_3\right)$$
$$= V(w_1 Y_1) + V(w_2 Y_2) + V(w_3 Y_3) + 2Cov(w_1 Y_1, w_2 Y_2) + 2Cov(w_1 Y_1, w_3 Y_3) + 2Cov(w_2 Y_2, w_3 Y_3)$$
$$= w_1^{\,2} V(Y_1) + w_2^{\,2} V(Y_2) + w_3^{\,2} V(Y_3) + 2Cov(w_1 Y_1, w_2 Y_2) + 2Cov(w_1 Y_1, w_3 Y_3) + 2Cov(w_2 Y_2, w_3 Y_3)$$
$$= w_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + w_2^{\,2}\sigma_2^{\,2} + w_3^{\,2}\sigma_3^{\,2} + 2w_1 w_2 Cov(Y_1, Y_2) + 2w_1 w_3 Cov(Y_1, Y_3) + 2w_2 w_3 Cov(Y_2, Y_3)$$
$$= w_1^{\,2}\sigma_1^{\,2} + w_2^{\,2}\sigma_2^{\,2} + w_3^{\,2}\sigma_3^{\,2} + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_{13} + 2w_2 w_3 \sigma_{23}$$
$$= \sum_{i=1}^{3} w_i^{\,2}\sigma_i^{\,2} + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j>i} w_i w_j \sigma_{ij}$$

(*제일 위 식에서 제일 아래 식으로 바로 갈 수 있도록 익혀두세요)

또한

$$E\left(\sum_{i=1}^{3} w_i Y_i\right) = E\left(w_1 Y_1 + w_2 Y_2 + w_3 Y_3\right)$$
$$= E(w_1 Y_1) + E(w_2 Y_2) + E(w_3 Y_3)$$
$$= w_1 E(Y_1) + w_2 E(Y_2) + w_3 E(Y_3)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} E(w_i Y_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{3} w_i E(Y_i)$$

(*제일 위 식에서 제일 아래 식으로 바로 갈 수 있도록 익혀두세요)

(2) If $\sigma_{ij} = 0$,

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2$$

(나중에 autocorrelation에서 이와 유사한 도출을 할 것임)

(3) If $\sigma_i^2 = \sigma^2$, $V\left(\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i\right) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} w_i^2$

(다음 주에 동분산 homoscedasticity에서 이와 유사한 도출을 할 것임)