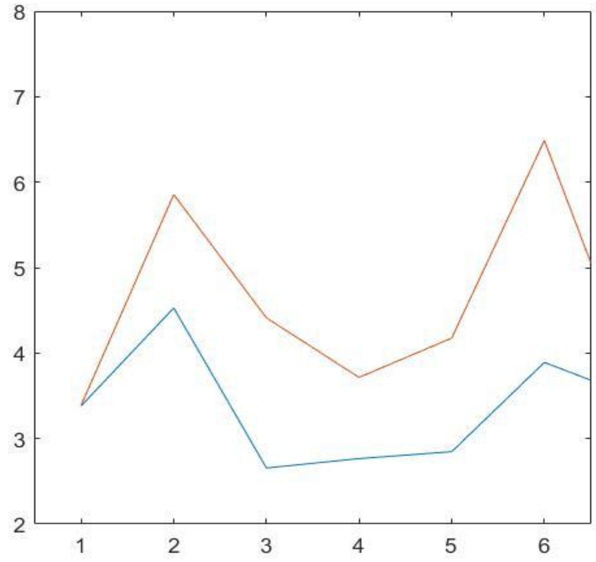
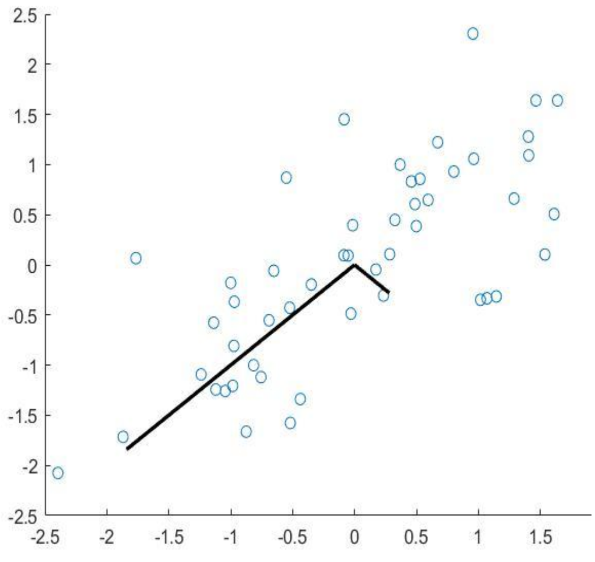
Στατιστική Μοντελοποίηση και Αναγνώριση Προτύπων - ΤΗΛ311

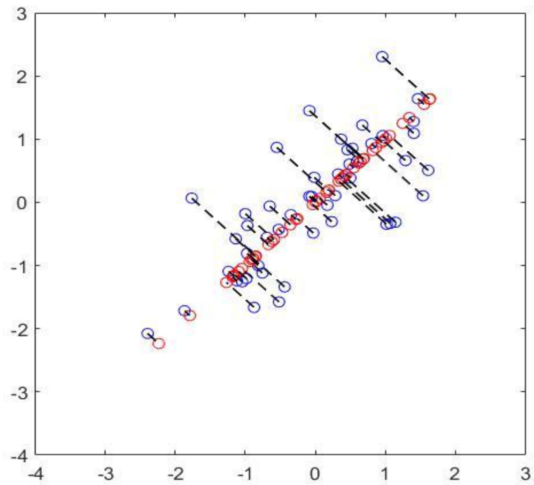
Αναφορά 1ης σειράς ασκήσεων
Σοφοκλής Φιλάρετος Γαβριηλίδης
Α.Μ. : 2014030062

Θέμα 1: Principal Component Analysis (PCA)

Αποτελέσματα :



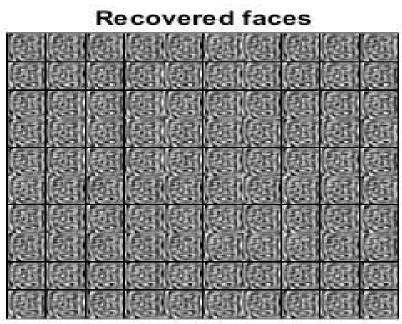




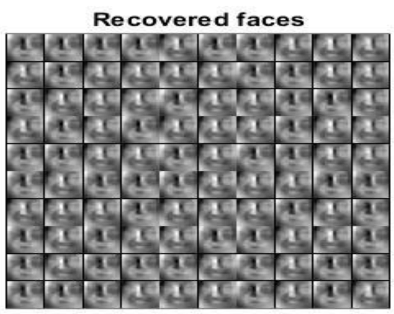
Παραπάνω βλέπουμε τα δεδομένα σε 2D στην εικόνα 1. Στην εικόνα 2 βλέπουμε τις κύριες συνιστώσες PCA και τις 2 ευθείες μέγιστης διασποράς και Στην εικόνα 3 την προβολή των συνιστωσών στην κύρια ευθεία σε 1D

Στην συνέχεια παρατηρούμε την εικόνα με τα 100 πρόσωπα και δεξιά τις 39 κύριες συνιστώσες που βρήκαμε

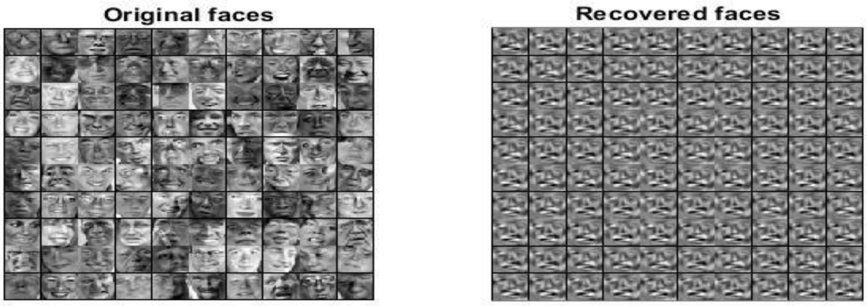
Παρακάτω βλέπουμε τα ανακτυμένα πρόσωπα με διαφορα συνιστώσες K



για K=100



για K=10



για K=50

Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται ο αριθμός K των συνιστωσών(μέχρι ένα σημείο) τόσο καλύτερη γίνεται η ανάκτηση

Θέμα 2: LDA (Linear Discriminant Analysis)

Στατιστική Μοντελοποίηση και Αναγνώριση Προτύπων

1η Σειρά Ασκήσεων

Σοφοκλής Φιλάρετος Γαβριηλίδης
Α.Μ.: 2014030062

Θέμα 2: Linear Discriminant Analysis-(LDA)

Ισοπίθανες ω_1, ω_2 Gaussian. $\Rightarrow P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$

$\mu_1 = \begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}$, $\mu_2 = \begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix}$

$\Sigma_1 = \begin{bmatrix}11 & 9\\9 & 11\end{bmatrix}$, $\Sigma_2 = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ | Ζητείται διάνυσμα προβολής w

Για Σ_w^{-1}:

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix} \quad (1)$$

$$w = \Sigma_w^{-1}[\mu_1 - \mu_2] \quad (2)$$

$$\Sigma_w = \sum_{i=1}^{2} P_i \Sigma_i = P_1\Sigma_1 + P_2\Sigma_2 = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix}11 & 9\\9 & 11\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}13 & 9\\9 & 13\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6{,}5 & 4{,}5\\4{,}5 & 6{,}5\end{bmatrix}$$

$$(=) \boxed{\Sigma_w = \begin{bmatrix}6{,}5 & 4{,}5\\4{,}5 & 6{,}5\end{bmatrix}} \qquad \det\Sigma_w = \frac{1}{6{,}5\cdot 6{,}5 - 4{,}5\cdot 4{,}5} = \frac{1}{22}$$

$$[\mu_1 - \mu_2] = \begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}10\\15\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-15\\-10\end{bmatrix}$$

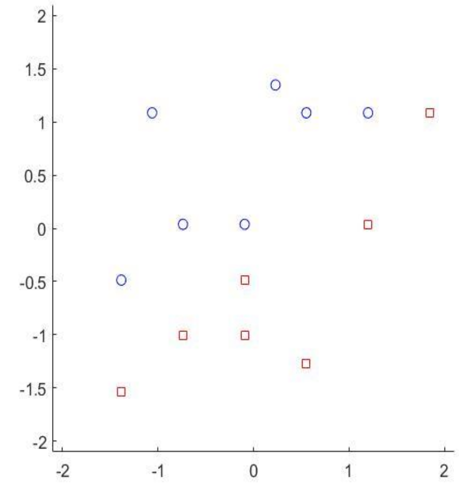
Άρα η (2) $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$

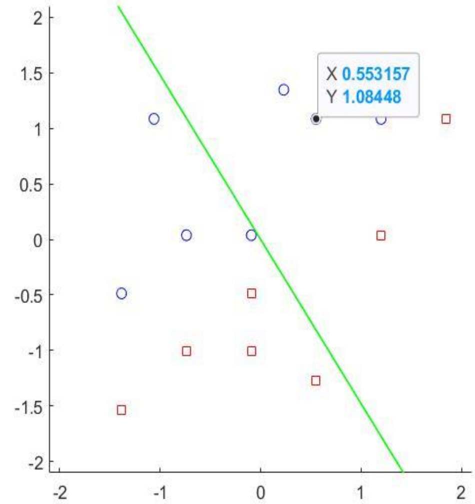
$$w = \frac{1}{22}\begin{bmatrix}6{,}5 & -4{,}5\\-4{,}5 & 6{,}5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-15\\-10\end{bmatrix} = \frac{1}{22}\begin{bmatrix}6{,}5\cdot(-15) + 4{,}5\cdot 10\\4{,}5\cdot 15 - 6{,}5\cdot 10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{52{,}5}{22}\\ \frac{2{,}5}{22}\end{bmatrix} (=)$$

$$\Leftrightarrow w = \begin{bmatrix}-2{,}39\\0{,}114\end{bmatrix}$$

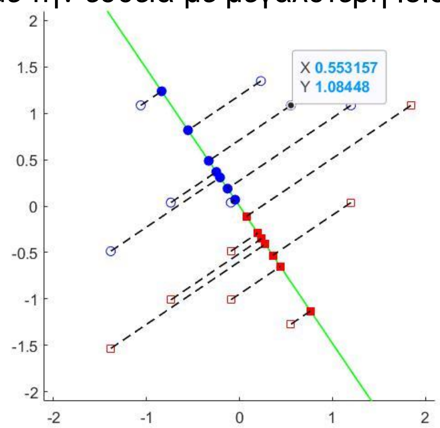
Θέμα 3: Linear Discriminant Analysis (LDA) vs PCA

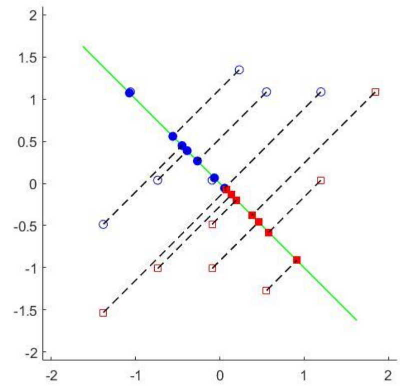
Αποτελέσματα :ι





Στις παραπάνω 2 εικόνες βλέπουμε τα δείγματα και δεξια με κανονικοποίηση , LDA και κρατάμε την ευθεία με μεγαλύτερη ιδιοτιμή

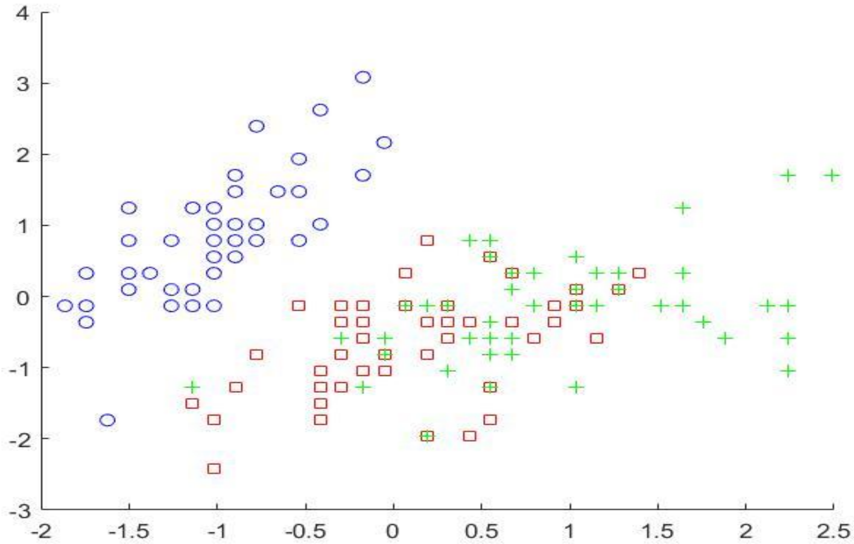




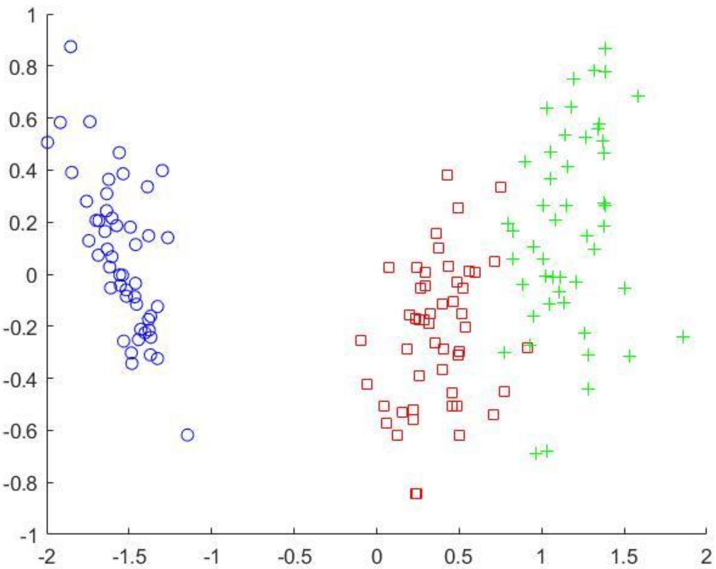
Σε αυτές τις 2 εικόνες βλέπουμε την ανακατασκευή των δειγμάτων από 1D σε 2Dμε PCA(1) και με LDA(2) και τις προβολές τους στο διάνυσμα. Παρατηρούμε καλύτερα αποτελέσματα με LDA.

Μέρος 2.

Before LDA



After LDA



Εδώ βλέπουμε τον διαχωρισμό των δεδομένων με LDA

Θέμα 4: Bayes

Θέμα 4 : Bayes

Classes w_1, w_2 a priori $P(w_1)$, $P(w_2)$

$$P(x|w_1) = N(\mu_1, \Sigma_1) \quad / \quad P(x|w_2) = N(\mu_2, \Sigma_2)$$

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,4 \\ -0,4 & 1,2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \Sigma_1^{-1} = \frac{1}{\det\Sigma_1} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1,2^2 - 0,4^2} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1,28} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94 & 0,31 \\ 0,31 & 0,94 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_2^{-1} = \frac{1}{\det\Sigma_2} \begin{bmatrix} 1,2 & -0,4 \\ -0,4 & 1,2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1,28} \begin{bmatrix} 1,2 & -0,4 \\ -0,4 & 1,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,94 & -0,31 \\ -0,31 & 0,94 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\det\Sigma_2 = \det\Sigma_1 = 1,28}$$

α) Σύνορο Απόφασης

$P(w_1|x) = P(w_2|x)$: με Bayes $P(x|w_1) \cdot P(w_1) = P(x|w_2) \cdot P(w_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{P(w_1)}{\cancel{2\pi^{d/2}|\Sigma_1|^{1/2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1} (x-\mu_1)\right] = \frac{P(w_2)}{\cancel{2\pi^{d/2}|\Sigma_2|^{1/2}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \cdot \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)\right] \quad (1)$$

γ) Για $\boxed{P(w_1) = 0,5} \Rightarrow P(w_2) = 1 - P(w_1) = 0,5$

η (1) γίνεται: $\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2)\right]$

ln κατά μέλη

$$\Leftrightarrow -\cancel{\frac{1}{2}}(x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1) = -\cancel{\frac{1}{2}}(x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x-3 & x-3 \end{bmatrix} \frac{1}{\det\Sigma_1} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-3 \\ x-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-6 & x-6 \end{bmatrix} \frac{1}{\det\Sigma_2} \begin{bmatrix} 1,2 & -0,4 \\ -0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-6 \\ x-6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1,6(x-3) & 1,6(x-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-3 \\ x-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8(x-6) & 0,8(x-6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-6 \\ x-6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

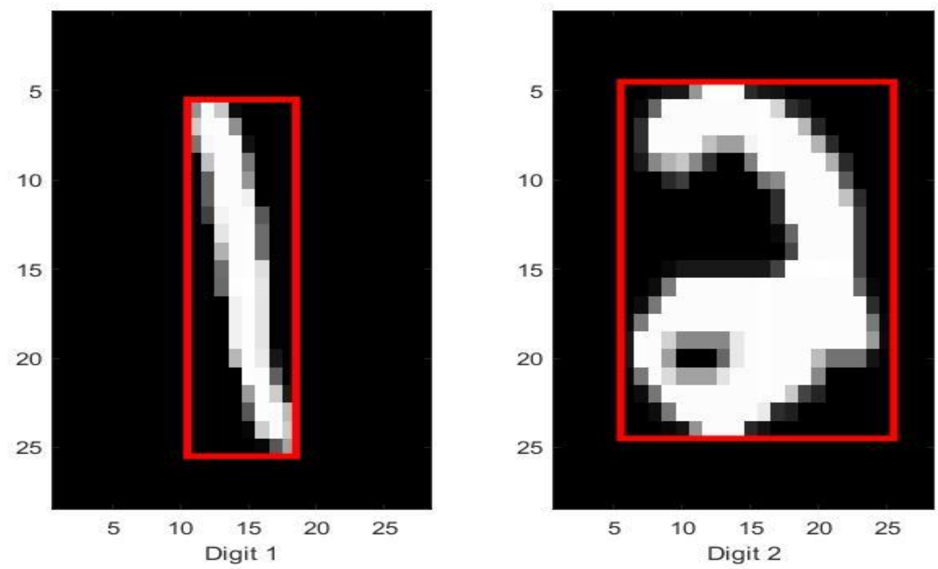
$$\Leftrightarrow 1,6(x-3)^2 + 1,6(x-3)^2 = 0,8(x-6)^2 + 0,8(x-6)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cancel{3,2}(x^2 - 6x + 9) = \cancel{1,6}(x^2 - 12x + 36) \Leftrightarrow 2x^2 - \cancel{12x} + 18 = x^2 - \cancel{12x} + 36 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9 \cdot 2} \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 3\sqrt{2}}$$

Θέμα 5: Εξαγωγή χαρακτηριστικών και Bayes Classification.

Αποτέλεσμα τρεξίματος του κώδικα του ερωτήματος από 2 τυχαία δείγματα :




```
minAspectRatio =

    0.1000

maxAspectRatio =

    2.2222

PC1 =

    0.5309

PC2 =

    0.4691

Error =

    0.1094
```

γ)Σφάλμα ταξινόμησης ως το ποσοστό των λανθασμένων αποφάσεων του ταξινομητή στο σύνολο των δειγμάτων ελέγχου

```
Error =

    0.1094
```

Θέμα 6: Minimum risk

Θέμα 6 : Minimum Risk

Classes w_1, w_2, a priori $P(w_1)=P(w_2)$ Rayleigh pdf $P(x|w_i) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma_i^2} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\sigma_i^2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$ $L = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\ell_1 = \lambda_{11} P(w_1) \cdot P(x|w_1) + \lambda_{21} P(w_2) \cdot P(x|w_2)$ Αν $\ell_1 < \ell_2 \Rightarrow x \in w_1$

$\ell_2 = \lambda_{12} P(w_1) P(x|w_1) + \lambda_{22} P(w_2) P(x|w_2)$ $\ell_2 < \ell_1 \Rightarrow x \in w_2$

Το όριο απόφασης είναι $\ell_1 = \ell_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{\lambda_{11} P(w_1) P(x|w_1)} + \lambda_{21} P(w_2) P(x|w_2) = \lambda_{12} P(w_1) P(x|w_1) + \cancel{\lambda_{22} P(w_2) P(x|w_2)}$

$\Leftrightarrow \cancel{P(w_2)} P(x|w_2) = \frac{1}{2} \cancel{P(w_1)} P(x|w_1) \Leftrightarrow P(x|w_1) = 2 P(x|w_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{\sigma_1^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_1^2}} = 2 \frac{x}{\sigma_2^2} e^{\frac{-x^2}{2\sigma_2^2}} \Leftrightarrow \cancel{x} e^{-x^2/2} = \cancel{2} \frac{\cancel{x}}{\cancel{4}\,2} e^{-x^2/8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot e^{-x^2/2} = e^{-x^2/8} \overset{\ln()}{\Rightarrow} \ln(2) + \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{8} \Leftrightarrow -\frac{4x^2}{8} + \frac{x^2}{8} = -\ln(2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2}{8} = \ln(2) \Leftrightarrow x^2 = \frac{8\ln(2)}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{8\ln(2)}{3}} = 2\sqrt{\frac{2\ln(2)}{3}}$

Θέμα 7: Singular Value Decoposition (SVD)

Θέμα 7: Singular Value Decomposition (SVD)

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1) $$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$$

$\forall$ ιδιοδιάνυσμα v έχουμε ιδιοτιμή λ : $Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = (A - \lambda I) v = 0$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 20\lambda + 35 = 0 \ : \ \lambda_{1,2} = \frac{-(-20) \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 35}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 10 \pm \sqrt{65}$ ιδιοτιμές

Για ιδιοδιανύσματα $\lambda_1 = 10 - \sqrt{65}$: $A - \lambda_1 I = \begin{vmatrix} \sqrt{65} - 4 & 7 \\ 7 & \sqrt{65} + 4 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow v = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{65} - 4}{7} v_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$ Για $v_2 = 1$: $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{65} - 4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$

Για $\lambda_2 = 10 + \sqrt{65}$: ομοίως ... $v = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{65} - 4}{7} \\ 1 \end{bmatrix}$

2) Τα singular values ταυτίζονται με $\lambda_{1,2}$ αφού δεν έχουμε μηδενικά

3) $$X X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \Sigma$$

χαρακτηριστικό πολυώνυμο Σ $P_\Sigma(x) = -x^3 \, Tr(\Sigma) x^2 + \frac{1}{2}(Tr^2(\Sigma) - Tr(\Sigma^2)) x + \frac{1}{6}(Tr^3(\Sigma) + 2Tr(\Sigma^3)$

$- 3Tr(\Sigma) \cdot Tr^2(\Sigma)) \Leftrightarrow P_\Sigma(x) = -x(x^2 - 20x + 35)$

$\lambda_{1,2,3} = 0, 10 \pm \sqrt{65}$

Singular values ίδια με $X^T X$

ιδιοδιανύσματα

ομοίως όπως παραπάνω

Για $\lambda_{1,2,3} = 0, 10 \pm \sqrt{65}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_2 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{65} + 15}{32} \\ -\frac{5\sqrt{65} - 21}{32} \\ 1 \end{bmatrix}, \ v_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{65} + 15}{32} \\ \frac{5\sqrt{65} - 21}{32} \\ 1 \end{bmatrix}$$