

## 1 Diskrete Quellen

Alphabet  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$   
Verteilung  $(p(x_i)) = (p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_N))$  mit  $0 \leq p(x_i) \leq 1$ .  
Vereinbarung

$$\sum_i := \sum_{i=1}^N, \sum_j := \sum_{j=1}^M$$

Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit  $\sum_i p(x_i) = 1$ .  
Unbestimmtheit/Entropie/Informationsgehalt

$$H_i = \text{ld} \frac{1}{p(x_i)} = -\text{ld} p(x_i)$$

Mittlerer Informationsgehalt

$$H_m = \sum_i p(x_i) \frac{1}{\text{ld} p(x_i)}$$

Bei Gleichverteilung gilt:  
 $p(x_i) = \frac{1}{N}$   $H_Q = H_0 = \text{ld} N$

### 1.1 Markow-Quellen

Entropie  $H_Q = H_M =$

$$\sum_{i,j} \overline{p(x_i)p(x_j|x_i)} \text{ld} \frac{1}{p(x_j|x_i)}$$

Stationärer Fall  $p(x_i) = \overline{p(x_i)}$ :  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (p(x_j|x_i))^n = \overline{p(x_i)}$

### 1.2 Verbundquellen

Zwei diskrete Quellen  $X$  und  $Y$  mit Verbundwahrscheinlichkeiten  $(p(x_i, y_j))$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$  bilden eine Verbundquelle  $(X, Y)$ .  
Verbundwahrscheinlichkeiten

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j|x_i) = p(y_j) \cdot p(x_i|y_j)$$

Verbundentropie

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y)$$

$$H(X, Y) =$$

$$\sum_{i,j} p(x_i, x_j) \text{ld} \frac{1}{p(x_i, x_j)}$$

$$H(X) = \sum_i p(x_i) \text{ld} \frac{1}{p(x_i)}$$
$$H(Y) = \sum_j p(y_j) \text{ld} \frac{1}{p(y_j)}$$

$$H(Y|X) =$$

$$\sum_{i,j} p(x_i)p(y_j|x_i) \text{ld} \frac{1}{p(y_j|x_i)}$$

$$H(Y|X) =$$

$$\sum_{j,i} p(y_j)p(x_i|y_j) \text{ld} \frac{1}{p(x_i|y_j)}$$

In den Matrix-Darstellungen  $(p(x_i, y_j))$ ,  $(p(x_i|y_j))$  und  $(p(y_j|x_i))$  läuft  $i$  zeilenweise und  $j$  spaltenweise.

## 2 Quellkodierung

Mittlere Kodewortlänge

$$l_m = \sum_i p(x_i) l_i$$

Gleichmäßiger Kode  $l = \lceil \text{ld} N \rceil$

**dekodierbar**  $l_m \geq H_m$  oder auch  $\sum_i 2^{-l_i} \leq 1$

**annäherend redundanzfrei**  $H_m \leq l_m < H_m + 1$

$$2^{-l_i} \leq p(x_i) < 2^{-l_i+1}$$

**redundanzfrei**  $l_m = H_m \Leftrightarrow p(x_i) = 2^{-l_i}$

**Koderedundanz**

$$R_K = l_m \cdot [H_K] - H_Q \geq 0$$

## 3 Kanäle

### 3.1 Diskrete Kanäle

Quelle  $X$ , Senke  $Y$

Transinformation

$$H_T = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

$$= H(X) - H(X|Y)$$

$$= H(Y) - H(Y|X)$$

Quelleninformationsfluß

$$I_Q = f_Q H_Q$$

Quellenkodeinformationsfluß

$$I_{KQ} = f_Q l H_K$$

**Kanalkodeinformationsfluß**

$$I_{KK} = f_Q (l + \Delta l) H_K = f_Q n H_K$$

Kanalsymbolfrequenz  $f_K$

Schrittgeschwindigkeit  $v_s$

$$f_K = v_s$$

Übertragungsgeschwindigkeit

$$v_{\ddot{u}} = I_K = v_s H_K$$

Transinformationsfluß

$$I_T = v_s H_T$$

Kanalkapazität

$$C = \max \{I_T\} = 2B \max H_T$$

**Ungesicherte Übertragung**

$$I_K = I_{KQ}, \quad v_s = \frac{I_{KQ}}{H_K} = f_Q l$$

**Gesicherte Übertragung**

$$I_K = I_{KK} = f_Q n H_K \text{ bzw.}$$

$$I_T = I_{KQ}$$

$$v_s = \frac{I_{KQ}}{H_T} = f_Q l \frac{H_K}{H_T} = f_Q n$$

$$I_{KK} = f_Q \left( l \frac{H_K}{H_T} \right) H_K = f_Q n H_K$$

### 3.2 Analoge Kanäle

$$H(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \text{ld} \frac{1}{f(x)} dx - \text{ld} \Delta x$$

#### 3.2.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi P}} \exp -\frac{x^2}{2P}$$

$P_x \dots$  mittlere Nutzsignalleistung

$P_z \dots$  mittlere Störsignalleistung

$$H(X) = \frac{1}{2} \text{ld}(2\pi e P_x)$$

$$H(Y|X) = \frac{1}{2} \text{ld}(2\pi e P_z)$$

$$H(Y) = \frac{1}{2} \text{ld}(2\pi e (P_x + P_z))$$

$$H_T = \frac{1}{2} \text{ld} \left( 1 + \frac{P_x}{P_z} \right)$$

$$\text{Rauschabstand } r = 10 \log \frac{P_x}{P_z}$$

$$C = 2B \frac{1}{2} \text{ld} \left( 1 + \frac{P_x}{P_z} \right)$$

Für  $\frac{P_x}{P_z} \gg 1$  gilt:

$$H_T \approx 0,166r$$

$$C \approx 0,332Br$$

#### 3.2.2 Zeitquantisierung

$$\text{Abtastfrequenz } f_A \geq 2f_g$$

Abstand der Abtastwerte

$$t_A \leq \frac{1}{2f_g} = \frac{1}{f_A}$$

$$\text{Umsetzzeit } t_u \leq \frac{1}{2f_g}$$

$$l = [0,166r] \rightarrow m = 2^l$$

$$C \geq I_{KQ} = 2f_g l H_K = f_A l H_K$$

## 4 Kanalkodierung

Die Anzahl an Stellen an der sich zwei Kodewörter

$a_i = (u_{i1} u_{i2} \dots u_{in})$  und

$a_j = (u_{j1} u_{j2} \dots u_{jn})$  unterscheiden heißt HAMMING-Distanz

$$d(a_i, a_j) = \sum_{g=1}^n (u_{ig} \oplus u_{jg})$$

$$\text{HAMMING-Gewicht } w(a_i) = \sum_{g=1}^n u_{ig} = d(\mathbf{0}, a_i)$$

**HAMMING-Schranke**

$$2^k \geq \sum_{i=0}^{f_k} \binom{l+k}{i}$$

Relative Redundanz  $r_k = \frac{k}{n}$

$$\text{Koderate } R = \frac{l}{n}$$

### 4.1 Eigenschaften

$(n, l, d_{\min})$

allgemein  $d_{\min} = f_e + f_k + 1$

Fehlererkennungskode

$$f_e = d_{\min} - 1$$

Fehlerkorrekturkode

$$f_k = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$$

### 4.2 Lineare Gruppenkodes

#### 4.2.1 Eigenschaften

Erfüllen Gruppenaxiome:

1. Neutrales Element
2. Inverses Element
3. Abgeschlossenheit

#### 4.2.2 Erzeugung

Können eindeutig durch eine Generatormatrix  $G_{l \times n}$  beschrieben werden.

Bildung Kanalkodewort

$$(a_i) = (a_i^*) \cdot G_{l \times n}$$

Kanonische/reduzierte Form der Generatormatrix  $G_{l \times n} = (I_l C)$ , mit  $I_l$  als  $l \times l$ -Einheitsmatrix

#### 4.2.3 Fehlererkennung

**Systematischer Kode** Quellkodewort kann durch Streichen redundanter Stellen aus dem Kanalkodewort entnommen werden.

Kontrollmatrix

$$H_{k \times n} = (C^T I_k)$$

Fehlersyndrom von Kanalwort  $b$

$$s = H \cdot b^T$$

$s = \mathbf{0} \Rightarrow$  kein Fehler.

#### 4.2.4 Hamming-Kodes

Spezieller dichtgepackter, einfach-fehlerkorrigierender Gruppenkode mit  $d_{\min} = 3$  und Kode-wort-länge  $n = 2^k - 1$ . Redundante Stelle  $k_i$  steht an Position  $2^i$  im Kodewort  $\Rightarrow$

Syndrom  $s$  liefert die Position des fehlerhaften Elements.

In Kontrollmatrix  $H_{k \times n}$  steht in der  $i$ -ten Spalte der Wert  $n - i + 1$  binär kodiert.

### Verkürzter Hamming-Kode

Bestimmen der minimal notwendigen Anzahl an Kontrollstellen  $k$  und Streichen der überflüssigen Informationsstellen  $l$ .

### Erweiterter Hamming-Kode

Ein weiteres Kontrollelement  $k_0$  (Paritätsbit) wird hinzugefügt.  $d_{\min} = 4$ ,  $n \leq 2^k$ . Kontrollmatrix  $H$  erhält eine zusätzliche mit Einsen besetzte Zeile und eine zusätzliche Spalte.

### 4.3 Zyklische Codes

- Ein Kode heißt *zyklisch*, wenn für jedes Kanalkodewort durch zyklische Verschiebung der Elemente wieder ein Kanalkodewort entsteht. Ein zyklischer Kode ist ein spezieller Linearkode, der die Gruppen- und Körperaxiome erfüllt.
- Ein zyklischer Kode wird vollständig durch ein Produkt von *irreduziblen* Minimalpolynomen, *Generatorpolynom*  $g(x)$  genannt, beschrieben.
- Ein Polynom ist *irreduzibel*, wenn es nicht in ein Produkt von Polynomen zerlegbar ist.
- Das Modularpolynom  $M(x)$  vom Grad  $k_1 = \text{grad } M(x)$  bestimmt den Kodeparameter  $n \leq 2^{k_1} - 1$ .
- Der tatsächliche Wert von  $n$  berechnet sich aus dem *Zyklus der Polynomreste* über  $GF(2)$  mit  $x_i \text{ mod } M(x)$  ( $i \in \{0, 1, \dots, p\}$ ) und bestimmt  $n = p | 2^{k_1} - 1$
- Ist  $n = p = 2^{k_1} - 1$  dann ist  $M(x)$  *primitiv*.
- BCH-Kodes können zusätzlich Bündelfehler  $f_b \leq k$  erkennen.

#### 4.3.1 Kodeparameter

$$n = 2^{k_1} - 1$$

$$k_1 = \text{grad } M(x)$$

$$k = \text{grad } g(x)$$

$$l = n - k$$

$d_{\min} = z + 1$ , mit  $z$  Anzahl aufeinander folgender Nullstellen

#### 4.3.2 Bildungsverfahren

**Multiplikationsverfahren**

$$a(x) = a^*(x)g(x)$$

**Divisionsverfahren**

$$a(x) = a^*(x)x^k + r(x) \text{ mit}$$

$$r(x) = a^*(x)x^k \text{ mod } g(x)$$

(Rest bei Division). Erzeugt immer *systematischen*

Kode

**Generatormatrix**

#### 4.3.3 Fehlererkennung

$a(x) \text{ mod } g(x) = 0 \Rightarrow$  kein Fehler.

#### 4.3.4 Kode-Konstruktion

Entwurfsabstand  $d_E$

$$g(x) = \text{kgV}\{m_\mu(x), m_{\mu+1}(x), \dots, m_{\mu+d_E-2}(x)\}$$

Typischerweise  $\mu \in \{0, 1\}$

$$d_{\min} \geq d_E$$

**Verkürzter Kode**  $(n, l, d_{\min}) \rightarrow (n - u, l - u, d_{\min})$ ,  $k$  konstant.

**Erweiterter Kode**  $g(x)$  mit  $(x + 1) = m_0(x)$  multiplizieren.  $(n, l, d_{\min}) \rightarrow (n + 1, l, d_{\min} + 1)$

**Zyklischer Hamming-Kode**

$$g(x) = M(x) = m_1(x) \rightarrow d_{\min} = 3$$

**Abramson-Kode**  $g(x) = m_0(x)m_1(x) = (x + 1)M(x) \rightarrow d_{\min} = 4$