Mathe 1 Cheatsheet

Für Modulklausur (Ganter, Noack)

Lineare Algebra

- Lineare Abbildung ist injektiv, wenn Kern nur den Nullvektor enthält, $A\vec{x} = \vec{0}$ hat nur triviale Lösung), jede Spalte von A ist Pivotspalte
- Lineare Abbildung ist surjektiv, wenn Abbildungsmatrix vollen Zeilenrang hat (Jede Zeile von A enthält eine Pivotposition), $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für jedes x lösbar. Anzahl an Zeilen, die nicht 0 sind, ist Zeilenrang.
- Ähnliche Matrizen: A und B über K sind ähnlich, wenn es eine Matrix P gibt mit $B = P^{-1}AP$, äquivalent wenn es eine Matrix gibt mit $PB = AP$
- Lineare Abbildung ist bijektiv, wenn invertierbar /
- Isomorphimus: Bijektiv und linear
- Homomorphismus: Linear
- Dimension: Anzahl linear unabhängiger Spalten
- Spaltenrang / Rang = Dimension des Spaltenraums, d. h. Anzahl Pivotspalten. Errechnen mit Gauss.
- Kern einer Abbildung: Alle Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden
- Defekt: Dimension des Kerns einer Matrix
- Rangsatz / Dimensionssatz für eine Abbildung $V \to W$: $\dim V = rang(f) + def(f)$,
- Charakteristische Polynom: Determinante der (Matrix - λ mal Eigenwert) (auf der Diagonalen), Nullstellen sind Eigenwerte der Matrix. Algebraische Vielfachheit der Eigenwerte gibt an, wie oft der gleiche Eigenwert vorkommt (Für alle Eigenwerte aufstellen). Geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist größer oder gleich 1 und stets kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit.
- Eigenvektor: Matrix * Vektor ergibt den Vektor mal Faktor (Linear abhängig)
- Nachweis von Linearität: f ist homogen: $f(ax) = af(x)$, f ist additiv: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- Bestimmung von Eigenvektoren (Für jeden Eigenwert): (Matrix - $\lambda * E = 0$) lösen (Kern berechnen), dann parametrische Vektorform, Spannraum daraus ist Eigenraum $E_A(\lambda)$. Die Dimension davon ist die geometrische Vielfachheit von λ.
- Matrix ist diagonalisierbar, wenn alle Eigenräume aufstellbar sind und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte die Spaltenanzahl sind (algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit für jeden Eigenwert) und alle Eigenwerte reell sind
- Diagonalisierung einer Matrix A: n Eigenwerte berechnen, alle Eigenräume aufstellen (Basen). Wenn die Anzahl der Vektoren in den Basen n entsprechen, bilden alle als Spalten die Matrix P. Ansonsten nicht diagonalisierbar. Ist A diagonalisierbar, so ist $A = P * D * P^{-1}$. In D sitzen die die Eigenwerte auf der Diagonalen, ansonsten ist sie leer.
- Abbildungsmatrix aufstellen (beispielhaft für Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$):

$$\begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x - 2y + z \end{pmatrix})$$

  Wird zu:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Abbildungsmatrix aufstellen, wenn zwei Werte bekannt sind: Abbildungsmatrix multipliziert mit Urbild ergibt Bild, d. h.

Basiswechsel

Basiswechsel / Transformation von einer Basis A nach Basis B W_B^A: Vektoren der Basis A werden als Linearkombination der Vektoren der Basis B dargestellt. Die Faktoren in einer Zeile sind dann je die Spalten der Basiswechselmatrix.

Um Vektor von einer Basis in eine andere zu überführen, diesen in Koordinatenform der ersten Basis ausdrücken, mit der Basiswechselmatrix multiplizieren und mit der neuen Basis multiplizieren.

Transformationen

- Rotation: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Scherung: $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- Skalierung: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

Determinante

Determinante bei 4x4-Matrizen mit Matrixentwicklungssatz berechnen (nach einer Spalte / Zeile), bei 2x2 Matrizen mit der Formel

$$det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Bei 3x3-Matrizen Satz von Sarruz.

- Determinante nicht 0: Quadratische Matrix invertierbar
- Determinante ist Produkt aller Eigenwerte.

Gram Schmidt-Verfahren

- Dient der Bildung einer Orthogonalbasis (*nicht* orthonormal) aus einer anderen Basis
- Bildung aus Basis $w_1, ..., w_2$: $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2 - \frac{<v_1,w_2>}{<v_1,v_1>} * v_1$, $v_3 = w_3 - \frac{<v_1,w_3>}{<v_1,v_1>} * v_1 - \frac{<v_2,w_3>}{<v_2,v_2>} * v_2$; d. h. $v_n = w_n - \frac{<v_1,w_n>}{<v_1,v_1>} * v_1 - \frac{<v_2,w_2>}{<v_2,v_2>} - \frac{<v_{n-1},w_{n-1}>}{<v_{n-1},v_{n-1}>} * v_{n-1}$
- Vektor u als Projektion von y zur Basis c_1, c_2: $\frac{<c_1,y>}{<c_1,c_1>} * c_1 + \frac{<c_2,y>}{<c_2,c_2>} * c_2$

Diskrete Strukturen

Square and Multiply

Zum Ausrechnen von a^b in $\mathbb{Z}_c$, Square and Multiply anwenden: b binär ausdrücken (durch 2 dividieren, Rest). Für jede 1 dann Square+Multiply ausführen, für 0 Multiply - $(1^2) * a$ [...]

RSA PublicKey-Krypto

Ablauf: Alice überlegt sich Primzahlen p, q, $n = pq$ und $m = (p-1)(q-1)$, bspw. $n = 77$, $m = 60$ (Privat: $p = 7$, $q = 11$). Dann eine zu m teilerfremde Zahl a, bspw. $a = 23$. n und a ist öffentlicher Schlüssel.
Alice überlegt sich $b = a^{-1} mod m$ als privaten Schlüssel (bspw. $b = 47$). Bob verschlüsselt $x < n$ mit $y = x^a mod n$ (bspw. $y = 44$). Alice entschlüsselt mit $x = y^b mod n = 11$.

Komplexe Zahlen

$\mathbb{C}$ ist Menge der komplexen Zahlen, die aus einem realen und einem imaginären Teil bestehen $(a + bi)$. Es gilt $i = (-1)^2$ (imaginäre Einheit), $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1$. Die Grundrechenarten sind definiert als:

1. Addition / Subtraktion: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
2. Multiplikation: $(a_1 + b_1 i) * (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
3. Betrag: $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
4. Komplexe Konjugation: $\overline{z} := a - bi$
5. Division: $\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i * \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ oder $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 * \overline{z_2}}{z_2 * \overline{z_2}} = \frac{z_1 * \overline{z_2}}{|z_2|^2}$
6. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} * e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$, k von 0 bis $n-1$ für $z = re^{i\theta}$
7. Quadratische Gleichungen: $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p}{2}^2 - q}$, Mitternachtsformel: $-b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Polarkoordinaten:

- Komplexe Zahl $z = a + bi$ mit Betrag $r = |z|$, Winkel θ an der reellen positiven Achse
- $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, d. h. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
- Bei der komplexen Multiplikation multiplizieren sich die Beträge und addieren sich die Winkel
- Exponentialschreibweise $e^{ix} = \cos x + i * \sin y$, da die Potenzreihen von e^{ix} gegen die von $\cos x + i * \sin x$ konvergiert
- Die schönste Formel der Welt: $e^{ix} + 1 = 0$
- $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ als Darstellung für komplexe Zahlen möglich (2x2-Matrizen in $\mathbb{R}$), da Multiplikation einer reellen Zahl mit $re^{i\theta}$ eine Drehsteckung darstellt

Relationen

- Reflexiv: Jedes Element steht mit sich selbst in Relation
- Irreflexiv: Kein Element steht mit sich selbst in Relation
- Symmetrisch: Wenn (a, b) in Relation sind, immer auch (b, a)
- Antisymmetrisch: Wenn (a, b) in Relation sind, sind (b, a) **nie** in Relation
- Konnex: Wenn (a, b) nicht in R sind und a nicht b ist, dann ist immer (b, a) drin
- Transitiv: Wenn (a, b) in Relation sind, sind (b, c) auch in Relation
- Äquivalenzrelation: Reflexive, Transitive und Symetrisch
- Relationenprodukt $R; S$ aus R und S: Wenn (a, b) in R und (b, c) in S, dann (a, c) in $R; S$
- Kern *ker* einer Abbildung f: Setzt alle Elemente (a, b) von f in Relation, für die $f(a) = f(b)$, immer Äquivalenzrelation
- Äquivalenzklasse eines Elements a über einer Relation R: Alle Elemente, mit denen a in Relation steht (a, b)
- Faktormenge: Menge aller Äquivalenzklassen

Ferner:

- Eine **partition** ist eine Menge P nicht leerer Teilmengen von A, die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung A ist. Die Elemente von P sind die Klassen von P.
- Eine Äquivalenzrelation ist feiner oder gleich wie eine andere Äquivalenzrelation auf derselben Menge, wenn sie eine Teilmenge davon ist (gröber entsprechend anders herum).
- Ein Split ist eine Partition einer Menge A in zwei Klassen (Anzahl Splits: $2^{|A|-1} - 1$, Menge aller Splits: Splits). Split ist verträglich mit Äquivalenzrelation, wenn er sie vergröbert.
- Binomialkoeffizient: Wie viele verschiedene Arten kann man k Objekte aus einer Menge von n verschiedenen Objekten auswählen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

- Wieviele Partitionen einer n-elementigen Menge in k Klassen: Stirling-Zahlen zweiter Art:
  1. $S(n, k) = 0$, wenn n ¡ k
  2. $S(n, n) = 1 = S(n, 1)$
  3. $S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$ für alle n und k
  4. $S(n, 2)$: Anzahl Splits einer n-elementigen Menge
- Anzahl Partitionen einer n-elementigen Menge: Bell-Zahlen für $n >= 1$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

- Anzahl Abbildungen von A nach B: $|B^A| = |B|^{|A|}$
- Anzahl bijektiver Abbildungen von A nach B: 0, wenn $|A| \neq |B|$, $n!$, wenn $|A| = |B| = n$
- Anzahl injektiver Abbildungen von A nach B: 0, falls $|B| > |A|$, sonst $n! * \binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

- Anzahl surjektiver Abbildungen von A nach B: 0, wenn $|A| < |B|$, sonst gleich $m! * S(n,m) = \sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{m}{i} i^n$

Ordnungsrelationen

- Tupel (A, B): A muss vor B fertig sein
- In Diagrammen ist unten der Beginn. Ordnungsrelationen sind reflexiv, azyklisch, transitiv, antisymmetrisch.
- Transitive Hülle einer Relation ist die Vereinigung aller Relationenprodukte der Relation mit sich selbst (kleinste transitive Relation, die R enthält).
- Eine Relation ist genau dann azyklisch, wenn ihre transitive Hülle irreflexiv ist.
- Ist R azyklisch auf J, dann ist die reflexiv transitive Hülle $trans(R)$ verbunden mit id_j eine Ordnungsrelation.
- Lineare Ordnungsrelationen sind konnex.
- Ordnungserweiterung: R_1 Teilmenge von R_2. Ist R_2 konnex, bezeichnet man die Erweiterung als linear.
- Lemma von Szpilrajn: Relation hat genau dann eine Ordnungserweiterung, wenn $R\ \Delta_j$ azyklisch ist.
- Algorithmus von Lawler: Lege zunächst fest, welcher Job als letztes ausgeführt wird. Wähle dazu unter allen Jobs, die bezüglich ¡= keine Nachfolger haben, eine dessen Verzugskosten für den betreffenden Zeitpunkt minimal sind. Für die verbleibenden Jobs verfahre entsprechend -¿ minimiert die maximalen Verzugskosten.

Graphen

- In Bäumen: $|E| = |V| - 1$
- Eulersche Polyederformel: $V + F = E + 2$ (Knoten + Flächen = Kanten + 2) in Diagrammen
- Graph ist planar, wenn $|E| <= 3*|V|-6$; besser: Graph ist nicht planar, wenn er $K_{3,3}$ oder K_5 enthält
- Anzahl der Bäume mit n Knoten: n^{n-2}
- Kruskal-Algorithmus: Kante mit kleinstem Gewicht wählen, solange gewählte Kanten kein Gerüst ergeben; Es dürfen nur Kanten so hinzugefügt werden, dass diese keinen Zyklus ergeben
- Summe der Knotengerade eines Graphen ist genau doppelt so groß wie die Anzahl seiner Kanten
- Dijkstra-Algorithmus: Zwei Tabellen; erste mit links gewählter Kante, rechts mit neu gefundenen Kanten - zweite Tabelle mit Knoten, Weg und Distanz
- Graphengerüstsatz: In einem Graphen mit der Ajdazenzmatrix A und der diagonalen Gradmatrix D gibt es $|det(D - A)|$ Gerüste

Eulersche Linien

- Offene eulersche Linie: Entlang von verschiedenen Kanten alle Knoten eines ablaufen (Haus vom Nikolaus); Geht, wenn alle Knotengrade gerade und genau zwei ungerade sind
- Geschlossene eulersche Linie: Von einem Knoten über den Graphen zu selben zurücklaufen; Geht, wenn alle Knotengerade gerade sind
- Halmitonscher Kreis: Geschlossener Kantenzug, der alle Knoten genau einmal durchläuft. Graph mit halmitonschem Kreis ist hamiltonsch.
- Halmitonscher Weg: Offener Kantenzug, der alle Knoten genau einmal durchläuft
- Sei (V, E) ein Graph mit $n >= 3$ Knoten, von denen jeder Knotengrad $>= \frac{n}{2}$ hat. Dann ist (V, E) hamiltonsch

Rechnen mit 0 und 1

- $p \Rightarrow q = \neg p \vee q$
- de Morgan: $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$, $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$
- $x \wedge y$ = NAND(NAND(x,y), NAND(x, y))
- $\neg x$ = x NAND x
- $x \vee y$ = (x NAND x) NAND (y NAND y)
- Konjunktive Normalform: Wo 0 rauskommt: Terme mit UND verknüpfen, negierte einzelne Werte mit ODER verknüpfen
- Disjunktive Normalform: Wo 1 rauskommt: Terme mit ODER verknüpfen, einzelne Werte mit UND verknüpfen
- ODER mathematisch: $(x_1 * x_2) + x_1 + x_2$

Transportnetze

- Satz von König: In jedem endlichen bipartiten Graphen ist die größtmögliche Mächtigkeit eines Matchings gleich der kleinsten Anzahl von Knoten, deren Wegnahme die Senke unerreichbar macht (Schnitt)
- Maximales Matching mit Markierungsalgorithmus bestimmen: Kanten von der Quelle und zur Senke haben Kapazität 1, Kanten in der Mitte haben als Kapazität Knotenanzahl
- Maximaler Fluss = Minimaler Schnitt (Schnitt: So viele Kanten entfernen, dass Senke nicht mehr erreichbar ist), d. h. die errechnete Kapazität der wegstrichenen Kanten ist der maximale Schnitt

Angabe: (Kapazität|Durchlauf)
Minimale Knotenüberdeckung: Die Knoten, die entfernt werden müssen, sodass alle Wege von der Quelle zur Senke entfernt werden.

Gebaut mit LaTeX