Caso de estudio #1: Tiempo de falla

Sergio Andres Niño Marin, Sergio Andres Gerena Gomez

26/sept/2022

Contents

Caso de estudio

Un investigador del Departamento de Ingeniería Electrónica y Eléctrica de una universidad necesita analizar unos datos sobre los tiempos de falla de un determinado tipo de alambre (Tipo 1). En este problema, el tiempo de falla se define como el número de veces que una máquina podría tensionar el alambre antes de romperse. Los siguientes datos corresponden a $ n= 14$ tiempos de falla de una parte del experimento:

495 541 1461 1555 1603 2201 2750 3468 3516 4319 6622 7728 13159 21194

A partir de este contexto, Su incertidumbre acerca de estos datos antes de que fueran observados es intercambiable. Por lo tanto, resulta apropiado modelar los datos como condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos. El modelo más simple para los datos del tiempo de falla involucra la distribución Exponencial:

$$y_i \mid \lambda \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Exp}(\lambda), \quad \text{i.e.,} \quad p(y_i \mid \lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{y_i}{\lambda}\right) \quad \text{para } y_i > 0 \text{ y } \lambda > 0, \text{ con } i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Pregunta 1

Muestre que $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$ es un estadístico suficiente para λ.

Solucion:

Aplicando el criterio de factorizacion de Fisher-Neyman se observa que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\lambda|y_1,...,y_n) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y_i}{\lambda}}I_{(0,\infty)}(y_i)\\ &= \underbrace{\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{\lambda}}}_{g(T(y),\lambda)}\overbrace{\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\infty)}(y_i)}^{h(y)}\end{aligned}$$

Con esto, vemos que un estadistico suficiente es $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$ dado que este estadistico cumple al poderse factorizar de la expresion de verosimilitud en una funcion g que solo depende del estadistico suficiente y el parametro.

Pregunta 2

Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución Gamma-Inversa con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, si la función de densidad de X está dada por:

$$X \sim \mathsf{GI}(\alpha,\beta), \quad \text{i.e.,} \quad p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) \quad \text{para } x > 0.$$

Muestre que si $X \sim \mathsf{Gamma}(\alpha,\beta)$, entonces $\frac{1}{X} \sim \mathsf{GI}(\alpha,\beta)$.

Solucion:

Siendo X una V.a absolutamente continua, se usa el teorema de la transformacion para determinar la distribucion de $Y = \frac{1}{X}$ *con* $X > 0$ a partir de la distribucion conocida X

$$P\left(\frac{1}{X}\right) = f_X\left(\frac{1}{Y}\right)\left|\frac{\delta X}{\delta Y}\right| = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\left|-\frac{1}{Y^2}\right|$$

Resolviendo como se indica a continuacion

$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\left(\frac{1}{Y^2}\right)\\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha+1} exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\\ P\left(\frac{1}{X}\right) = P\left(Y\right) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}Y^{-(\alpha+1)} exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right) \sim GI(\alpha,\beta)\end{aligned}$$

Dado que lo obtenido al aplicar el teorema de transformacion fue la distribucion descrita como Gamma inversa (GI) con los respectivos parametros, podemos asegurar que la afirmacion propuesta en el punto resulta verdadera.

Punto 3

Considere la distribución previa $\lambda \sim \mathsf{GI}(\alpha,\beta)$ junto con la distribución muestral (1). Halle la distribución posterior de λ.

Solucion:

Para esto se emplea el teorema de bayes para encontrar la distribucion posterior de λ a partir de la distribucion muestral y la distribucion previa.

$$
\begin{aligned}
p(\lambda|\vec{y}) &\propto p(\vec{y}|\lambda)p(\lambda) \\
&\propto \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} exp\left(\frac{-y_i}{\lambda}\right)\right] \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{-(\alpha+1)} exp\left(-\frac{\beta}{\lambda}\right) \\
&\propto \lambda^{-n} exp\left(\frac{-1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \lambda^{-(\alpha+1)} exp\left(\frac{-\beta}{\lambda}\right) \\
p(\lambda|\vec{y}) &\propto \lambda^{-(\alpha+n+1)} exp\left(\frac{-(\beta+s)}{\lambda}\right) \sim GI(\alpha+n, \beta+s)
\end{aligned}
$$

Punto 4

Se tiene información externa de otro experimento de acuerdo con el cual la distribución previa de λ debería tener una media $\mu_0 = 4500$ y una desviación estándar $\sigma_0 = 1800$. Haga un gráfico de las distribuciones previa y posterior en el mismo gráfico.

Solucion:

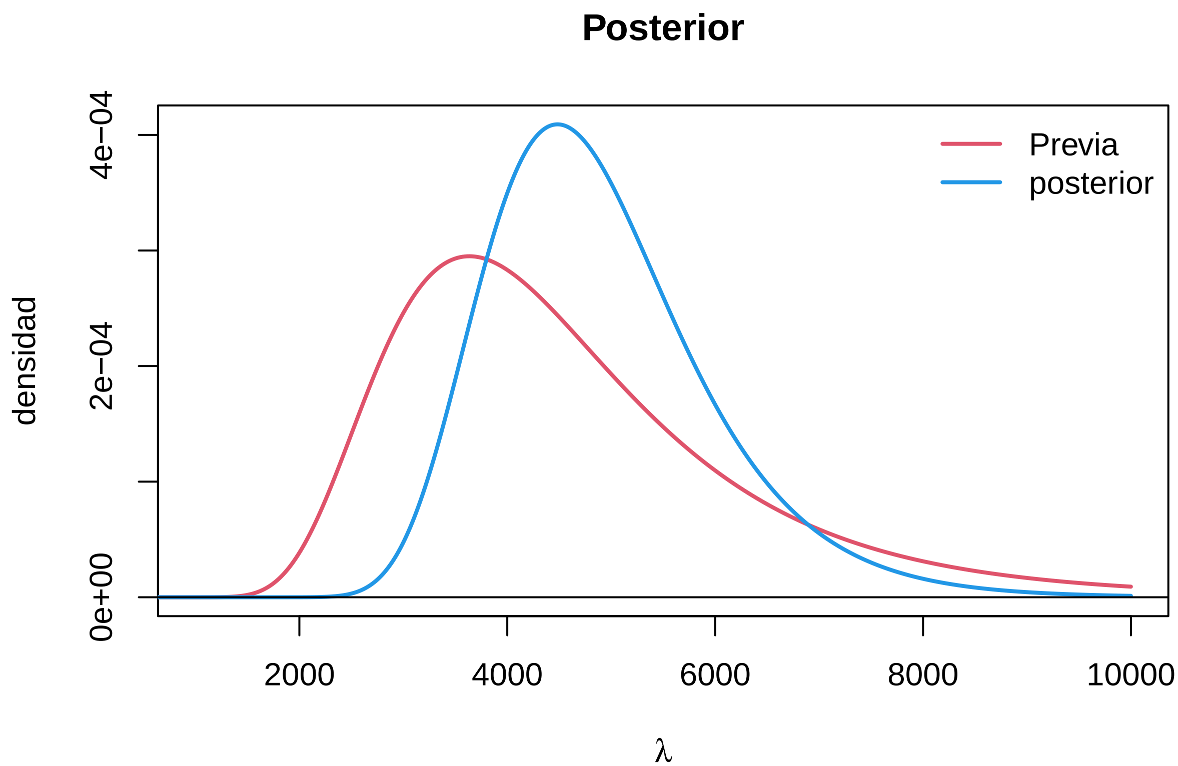
Lo primero es, encontrar los hiperparametros de la distribucion previa tal que satisfaga la media $\mu_0 = 4500$ y la desviacion estandar $\sigma_0 = 1800$, dando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
4500 &= \frac{\beta_0}{\alpha_0 - 1} \qquad para\ \alpha_0 > 1 \\
1800 &= \sqrt{\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0-1)^2(\alpha_0-2)}} \qquad para\ \alpha_0 > 2
\end{aligned}
$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $\alpha_0 = 8.25$ y $\beta_0 = 32625$. con esto ya se puede construir la distribucion previa.

Ahora, en base al punto anterior donde se calculo la distribucion posterior para este modelo sigue la forma $GI(\alpha+n, \beta+s)$ donde n es el tamaño de la muestra y s es la suma de todos los y_i. Empleando una suma sobre los 14 terminos que se tiene en los datos, resulta que $n = 14$ y $s = 70612$.

Ahora sigue construir y graficar ambas distribuciones, tanto la previa como la posterior, usando codigo en R para realizar dicha accion, el resultado es el observado a continuacion



Punto 5

Halle el estimador de máxima verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés) de λ.

Solucion:

Para encontrar el estimador de maxima verosimilitud, lo primero es calcular la funcion de verosimilitud del parametro dada la muestra y a dicha funcion se le encuentra el maximo global, pero antes, se usa la parametrizacion de la exponencial donde $\theta = \frac{1}{\lambda}$, luego de encontrar el MLE para dicho parametro, se emplea la invarianza funcional del estimador MLE para encontrar el estimador MLE de λ.

Se empieza encontrando la funcion de verosimilitud del parametro θ de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta|\vec{y}) &= \prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta y_i} \\
&= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} y_i}
\end{aligned}
$$

Para simplificar la notacion y tambien las matematicas en los siguientes pasos , se usa como convencion que $s = \sum_{i=1}^{n}$ ademas de que en el proceso de maximizacion se emplea la funcion log-verosimilitud $\updownarrow(\theta|\vec{y})$ la cual es el logaritmo natural de la anteriormente encontrada.

Siguiendo con la maximisacion de la funcion, primero se encuentran los puntos criticos empleando la primera derivada

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\theta} l(\theta|\vec{y}) &= \frac{\delta}{\delta\theta}\left(n * ln(\theta) - \theta s\right) \\
&= \frac{n}{\theta} - s \\
0 &= \frac{n}{\hat{\theta}} - s \\
\hat{\theta} &= \frac{n}{s}
\end{aligned}$$

para evaluar el punto critico encontrado se aplica el criterio de la segunda derivada, en el tenemos como criterio especial que si la funcion es siempre negativa en todo el soporte, el punto encontrado es un maximo global.

$$\frac{\delta}{\delta\theta}\left(\frac{n}{\theta} - s\right) = -\frac{n}{\theta^2}$$

Se tiene que la funcion obtenida es siempre negativa ya que $n > 0$ al igual que $\theta^2 > 0$, por lo que el punto critico encontrado no solo es un maximo local sino tambien, un maximo global, al ser asi se tiene entonces que $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{n}{s}$.

Ahora trabajamos con la invarianza funcional del estimador MLE para encontrar el estimador de maxima verosimillitud de $\lambda = \frac{1}{\theta}$, tenemos entonces que.

$$\begin{aligned}
\widehat{g(\theta)}_{MLE} &= g(\hat{\theta}_{MLE}) \\
\hat{\lambda}_{MLE} &= \frac{1}{\hat{\theta}_{MLE}} = \frac{1}{\frac{n}{s}} \\
\hat{\lambda}_{MLE} &= \frac{s}{n}
\end{aligned}$$

Punto 6

Complete la siguiente tabla:

Método	Estimación	CV (%)	Intervalo al 95%
Bayesiano			
Frec. Asintótico			
Frec. Bootstrap			

Table 1: Inferencia Bayesiana y Frecuentista sobre λ.

Para completar la Tabla 1 tenga en cuenta que:

- Bayesiano: Inferencia Bayesiana basada en la distribución posterior.
- Frec. Asintótico: Inferencia frecuentista basada en que $\hat{\lambda}_{\text{MLE}} \approx \mathsf{N}(\lambda, \hat{I}^{-1})$ siempre que $n \to \infty$, donde $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}$ es el MLE de λ y $\hat{I}$ es la información observada de Fisher.
- Frec. Boostrap: Inferencia frecuentista basada en Boostrap no paramétrico.

Solucion:

Enfoque Bayesiano Para completar la fila mediante el metodo bayesiano, se parte de la distribucion posterior encontrada anteriormente $GI(22.25, 104237)$, Donde para crear una estimacion puntual del parametro se hace uso de la media de la distribucion posterior $\mu_p = \frac{\beta}{\alpha-1}$. Para el coeficiente de variacion se tiene que $CV\% = \frac{\sigma}{\mu} * 100$ donde σ es la desviacion estandar de la distribucion posterior y μ la media de la misma.

Para el intervalo, que en el panorama estadistico se denomina region de confianza, se plantea un (l, u) tal que $p(l < \lambda < u|\vec{y}) = 0.95$, asi para encontrar los limites del intervalo se emplean los cuantiles de la distribucion posterior tal que $l = \lambda_{0.025}$ y $u = \lambda_{0.975}$ de forma tal que se encierre la probabilidad pedida.

Realizando estos calculos empleando R se llega a los siguientes resultados:

- $\mu_p = 4638.865$
- $CV\% = 23.27\%$
- $IC_{95\%} = (3186, 7382)$

Enfoque frecuentista asintotico Para la parte frecuentista asintotico, se parte de la base que $\hat{\lambda}_{\text{MLE}} \approx \mathsf{N}(\lambda, \hat{I}^{-1})$. Para la estimacion puntual esto no afecta ya que se emplea el estimador encontrado en el punto 5, que es igual a la media muestral.

0.1 Github Markdown

To get github friendly Markdown document for cleanly tracking changes to document in Github, put the following output first:

```
output:
  md_document:
    variant: "markdown_github"
```

NOTE: You need to run this **LAST** though, since knitting other formats wipes out the `test_files` directory. To return to the Knit button having other options (HTML, PDF, Word), move this output type below the first option.

References

<!– placeholder for References in toc –!>