Caso de estudio #1: Tiempo de falla

Sergio Andres Niño Marin, Sergio Andres Gerena Gomez

26/sept/2022

Contents

Caso de estudio 1
Pregunta 1 1
Pregunta 2 2
Punto 3 2
Punto 4 3
Punto 5 4
Punto 6 5
Punto 7 7
Punto 8 8
Punto 9 9
Punto 10 10
References 12

Caso de estudio

Un investigador del Departamento de Ingeniería Electrónica y Eléctrica de una universidad necesita analizar unos datos sobre los tiempos de falla de un determinado tipo de alambre (Tipo 1). En este problema, el tiempo de falla se define como el número de veces que una máquina podría tensionar el alambre antes de romperse. Los siguientes datos corresponden a $ n= 14$ tiempos de falla de una parte del experimento:

495 541 1461 1555 1603 2201 2750 3468 3516 4319 6622 7728 13159 21194

A partir de este contexto, Su incertidumbre acerca de estos datos antes de que fueran observados es intercambiable. Por lo tanto, resulta apropiado modelar los datos como condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos. El modelo más simple para los datos del tiempo de falla involucra la distribución Exponencial:

$$y_i \mid \lambda \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Exp}(\lambda), \quad \text{i.e.,} \quad p(y_i \mid \lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{y_i}{\lambda}\right) \quad \text{para } y_i > 0 \text{ y } \lambda > 0, \text{ con } i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Pregunta 1

Muestre que $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$ es un estadístico suficiente para λ.

Solución:

Aplicando el criterio de factorización de Fisher-Neyman se observa que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda|y_1,...,y_n) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y_i}{\lambda}}I_{(0,\infty)}(y_i)\\
&= \underbrace{\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{\lambda}}}_{g(T(y),\lambda)}\overbrace{\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\infty)}(y_i)}^{h(y)}
\end{aligned}$$

Con esto, vemos que un estadístico suficiente es $s=\sum_{i=1}^{n}y_i$ dado que este estadístico cumple al poderse factorizar de la expresión de verosimilitud en una función g que solo depende del estadístico suficiente y el parámetro.

Pregunta 2

Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución Gamma-Inversa con parámetros $\alpha>0$ y $\beta>0$, si la función de densidad de X está dada por:

$$X\sim\mathsf{GI}(\alpha,\beta),\quad \text{i.e.,}\quad p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)\quad \text{para } x>0.$$

Muestre que si $X\sim\mathsf{Gamma}(\alpha,\beta)$, entonces $\frac{1}{X}\sim\mathsf{GI}(\alpha,\beta)$.

solución:

Siendo X una V.a absolutamente continua, se usa el teorema de la transformación para determinar la distribución de $Y=\frac{1}{X}\ con\ X>0$ a partir de la distribución conocida X

$$P\left(\frac{1}{X}\right)=f_X\left(\frac{1}{Y}\right)\left|\frac{\delta X}{\delta Y}\right|=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha-1}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\left|-\frac{1}{Y^2}\right|$$

Resolviendo como se indica a continuación

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{X}\right)&=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha-1}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\left(\frac{1}{Y^2}\right)\\
&=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha+1}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\\
P\left(\frac{1}{X}\right)=P\left(Y\right)&=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}Y^{-(\alpha+1)}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\sim GI(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

Dado que lo obtenido al aplicar el teorema de transformación fue la distribución descrita como Gamma inversa (GI) con los respectivos parámetros, podemos asegurar que la afirmación propuesta en el punto resulta verdadera.

Punto 3

Considere la distribución previa $\lambda\sim\mathsf{GI}(\alpha,\beta)$ junto con la distribución muestral (1). Halle la distribución posterior de λ.

solución:

Para esto se emplea el teorema de bayes para encontrar la distribución posterior de λ a partir de la distribución muestral y la distribución previa.

$$\begin{aligned} p(\lambda|\vec{y}) &\propto p(\vec{y}|\lambda)p(\lambda) \\ &\propto \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} exp\left(\frac{-y_i}{\lambda}\right)\right] \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{-(\alpha+1)} exp\left(-\frac{\beta}{\lambda}\right) \\ &\propto \lambda^{-n} exp\left(\frac{-1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \lambda^{-(\alpha+1)} exp\left(\frac{-\beta}{\lambda}\right) \\ p(\lambda|\vec{y}) &\propto \lambda^{-(\alpha+n+1)} exp\left(\frac{-(\beta+s)}{\lambda}\right) \sim GI(\alpha+n, \beta+s) \end{aligned}$$

Punto 4

Se tiene información externa de otro experimento de acuerdo con el cual la distribución previa de λ debería tener una media $\mu_0 = 4500$ y una desviación estándar $\sigma_0 = 1800$. Haga un gráfico de las distribuciones previa y posterior en el mismo gráfico.

solución:

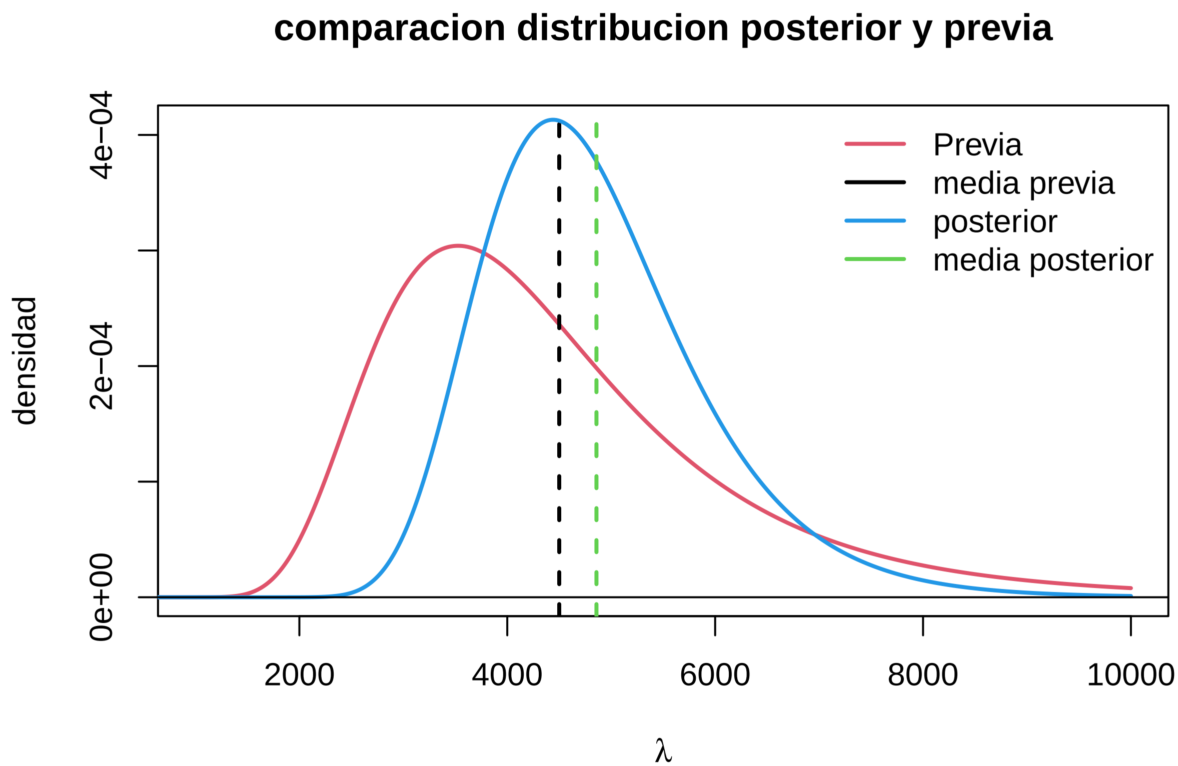
Lo primero es, encontrar los hiperparametros de la distribución previa tal que satisfaga la media $\mu_0 = 4500$ y la desviación estándar $\sigma_0 = 1800$, dando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4500 &= \frac{\beta_0}{\alpha_0 - 1} \qquad para\ \alpha_0 > 1 \\ 1800 &= \sqrt{\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0-1)^2(\alpha_0-2)}} \qquad para\ \alpha_0 > 2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $\alpha_0 = 8.25$ y $\beta_0 = 32625$. con esto ya se puede construir la distribución previa.

Ahora, en base al punto anterior donde se calculó la distribución posterior para este modelo sigue la forma $GI(\alpha + n, \beta + s)$ donde n es el tamaño de la muestra y s es la suma de todos los y_i. Empleando una suma sobre los 14 términos que se tiene en los datos, resulta que $n = 14$ y $s = 70612$.

Ahora sigue construir y graficar ambas distribuciones, tanto la previa como la posterior, usando código en R para realizar dicha acción, el resultado es el observado a continuación



Punto 5

Halle el estimador de máxima verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés) de λ.

solución:

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud, lo primero es calcular la función de verosimilitud del parámetro dada la muestra y a dicha función se le encuentra el máximo global, pero antes, se usa la parametrización de la exponencial donde $\theta = \frac{1}{\lambda}$, luego de encontrar el MLE para dicho parámetro, se emplea la invarianza funcional del estimador MLE para encontrar el estimador MLE de λ.

Se empieza encontrando la función de verosimilitud del parámetro θ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\theta|\vec{y}) &= \prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta y_i} \\ &= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} y_i}\end{aligned}$$

Para simplificar la notación y también las matemáticas en los siguientes pasos, se usa como convención que $s = \sum_{i=1}^{n}$ además de que en el proceso de maximización se emplea la función log-verosimilitud $\updownarrow(\theta|\vec{y})$ la cual es el logaritmo natural de la anteriormente encontrada.

Siguiendo con la maximización de la función, primero se encuentran los puntos críticos empleando la primera derivada

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\theta} l(\theta|\vec{y}) &= \frac{\delta}{\delta\theta}\left(n * ln(\theta) - \theta s\right) \\ &= \frac{n}{\theta} - s \\ 0 &= \frac{n}{\hat{\theta}} - s \\ \hat{\theta} &= \frac{n}{s} \end{aligned}$$

para evaluar el punto crítico encontrado se aplica el criterio de la segunda derivada, en el tenemos como criterio especial que si la función es siempre negativa en todo el soporte, el punto encontrado es un máximo global.

$$\frac{\delta}{\delta\theta}(\frac{n}{\theta} - s) = -\frac{n}{\theta^2}$$

Se tiene que la función obtenida es siempre negativa ya que $n > 0$ al igual que $\theta^2 > 0$, por lo que el punto crítico encontrado no solo es un máximo local sino también, un máximo global, al ser así se tiene entonces que $\hat{\theta}_{MLE} = \frac{n}{s}$.

Ahora trabajamos con la invarianza funcional del estimador MLE para encontrar el estimador de máxima verosimilitud de $\lambda = \frac{1}{\theta}$, tenemos entonces que.

$$\begin{aligned} \hat{g(\theta)}_{MLE} &= g(\hat{\theta}_{MLE}) \\ \hat{\lambda}_{MLE} &= \frac{1}{\hat{\theta}_{MLE}} = \frac{1}{\frac{n}{s}} \\ \hat{\lambda}_{MLE} &= \frac{s}{n} \end{aligned}$$

Punto 6

Complete la siguiente tabla:

Método	Estimación	CV (%)	Intervalo al 95%
Bayesiano			
Frec. Asintótico			
Frec. Bootstrap			

Table 1: Inferencia Bayesiana y Frecuentista sobre λ.

Para completar la Tabla 1 tenga en cuenta que:

- Bayesiano: Inferencia Bayesiana basada en la distribución posterior.
- Frec. Asintótico: Inferencia frecuentista basada en que $\hat{\lambda}_{\text{MLE}} \approx \mathsf{N}(\lambda, \hat{I}^{-1})$ siempre que $n \to \infty$, donde $\hat{\lambda}_{\text{MLE}}$ es el MLE de λ y $\hat{I}$ es la información observada de Fisher.
- Frec. Boostrap: Inferencia frecuentista basada en Boostrap no paramétrico.

solución:

Enfoque Bayesiano Para completar la fila mediante el método bayesiano, se parte de la distribución posterior encontrada anteriormente $GI(22.25, 104237)$, Donde para crear una estimación puntual del parámetro se hace uso de la media de la distribución posterior $\mu_p = \frac{\beta}{\alpha - 1}$. Para el coeficiente de variación se tiene que $CV\% = \frac{\sigma}{\mu} * 100$ donde σ es la desviación estándar de la distribución posterior y μ la media de la misma.

Para el intervalo, que en el panorama estadístico se denomina región de confianza, se plantea un (l, u) tal que $p(l < \lambda < u|\vec{y}) = 0.95$, así para encontrar los límites del intervalo se emplean los cuantiles de la distribución posterior tal que $l = \lambda_{0.025}$ y $u = \lambda_{0.975}$ de forma tal que se encierre la probabilidad pedida.

Realizando estos cálculos empleando R se llega a los siguientes resultados:

- $\mu_p = 4638.865$
- $CV\% = 23.27\%$
- $IC_{95\%} = (3186, 7382)$

Enfoque frecuentista asintótico Para la parte frecuentista asintótico, se parte de la base que $\hat{\lambda}_{\text{MLE}} \approx \mathsf{N}(\lambda, \hat{I}^{-1})$. Para la estimación puntual esto no afecta ya que se emplea el estimador encontrado en el punto 5, que es igual a la media muestral.

Para el CV se plantea primero, gracias a la librería mle.tools, encontrar la información de Fisher para el parámetro lambda, una vez realizado esto, se tiene que $CV\% = \frac{\sqrt{\frac{1}{I_n}}}{\hat{\lambda}_{MLE}} * 100$.

Por último, en el intervalo de confianza, ya que se tiene la distribución asintótica, se plantea la variable pivote de forma tal que $Q(\vec{y}, \lambda) = \sqrt{I_n}(\hat{\lambda}_{MLE} - \lambda) \approx N(0, 1)$, de la ecuación presentada se despeja λ y se acotan los intervalos de la siguiente manera

$$p\left(z_{0.025} < \sqrt{I_n}(\hat{\lambda}_{MLE} - \lambda) < z_{0.975}\right) = 0.95$$
$$p\left(-\frac{z_{0.975}}{\sqrt{I_n}} + \hat{\lambda}_{MLE} < \lambda < -\frac{z_{0.025}}{\sqrt{I_n}} + \hat{\lambda}_{MLE}\right) = 0.95$$

Ya con este intervalo y el código en r, se calculan las fronteras de este, llegando al resultado.

A continuación, se muestra la lista de los datos pedidos

- $\hat{\lambda}_{MLE} = 5043.71$
- $CV\% = 26.73\%$
- $IC_{95\%} = (2402, 7686)$

0.0.0.1 Enfoque frecuentista boostrap En este, se generan varios samples con remplazo del mismo tamaño de los datos, esto con el fin de generar un vector de tamaño 10000 con 10000 muestras creadas a partir de samples random de los datos.

Lo que se hace con este vector es sacarle la media a cada conjunto de datos creado, esto debido a que en el paradigma frecuentista, el estimador MLE para el parámetro era la media muestral, de esta manera se obtiene un vector de medias de tamaño 10000, uno por cada muestra generada mediante boostrap.

Para los datos pedidos en la tabla, se hace inferencia respecto a ese vector de medias, la estimación puntual del parámetro seria la media del vector de medias, para el CV, se toma la varianza del vector de media así como su media, con la varianza empírica del vector obtenemos la desviación estándar empírica y siguiendo la formula $CV\% = \frac{\sigma_{empirica}}{\mu_{empirico}} * 100$ se calcula el CV.

Para el intervalo de confianza, se manejan los cuantiles del vector de medias, esto debido a que estamos usando este mismo como una distribución del verdadero parámetro, los cuantiles tomados tal que satisfagan los requerimientos de confianza pedidos son el 0.025 y 0.975.

A continuación, se presenta los valores calculados por este método:

- $puntual = 5053.89$
- $CV\% = 29.5\%$
- $IC_{95\%} = (2558.7, 8283.9)$

La tabla completa se puede ver a continuación

Método	Estimación	CV (%)	Intervalo al 95%
Bayesiano	4638.865	23.27%	(3186,7382)
Frec. Asintótico	5043.71	26.73%	(2402,7686)
Frec. Bootstrap	5053.89	29.5%	(2558.7,8283.9)

Table 2: Inferencia Bayesiana y Frecuentista sobre λ Completa.

Punto 7

Calcule e interprete $\mathsf{Pr}(\lambda < 4000 \mid \boldsymbol{y})$ y $\mathsf{Pr}(y^* < 4000 \mid \boldsymbol{y})$, donde y^* es un tiempo de falla futuro.

solución:

El primero resulta ser la probabilidad de que lambda sea menor a 4000 una vez se observaron los datos, se sabe que esto se cuantifica con la distribución posterior. Para el cálculo de esta cantidad se emplea la librería invgamma, donde se encuentra pinvgamma para calcular la probabilidad acumulada hasta cierto valor, la función que se envía es la que ya se encontró para la distribución posterior.

La segunda probabilidad pedida es la de predicción, esta quiere decir cuál es la probabilidad de que un dato no observado (que no es parte de la muestra) sea menor a 4000, como se observa, ambas son cantidades distintas ya que hacen inferencia sobre cantidades distintas, la distribución posterior hace inferencia sobre el parámetro en cambio, la función predictiva posterior hace referencia a el valor que puede tomar una unidad no observada, es decir, la probabilidad de que el tiempo de falla de un nuevo alambre sea menor a 4000.

Para calcular la probabilidad acumulada de la distribución predictiva primero hay que encontrar la misma, para eso se usa la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
p(y^*|\vec{y}) &= \int_\Theta p(y^*|\lambda)p(\lambda|\vec{y})d\lambda \\
&= \int_\Theta \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y^*}{\lambda}} \frac{(\beta+s)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\lambda^{-(\alpha+n+1)}exp\left(\frac{-(\beta+s)}{\lambda}\right)d\lambda \\
&= \frac{(\beta+s)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\int_\Theta \lambda^{-(\alpha+n+1+1)}e^{\left(\frac{-(\beta+s+y^*)}{\lambda}\right)}d\lambda \\
&= \frac{(\beta+s)^{\alpha+n}}{\Gamma(\alpha+n)}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(\beta+s+y^*)^{(\alpha+n+1)}} \\
&= \frac{(\beta+s)^{(\alpha+n)}(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n)(\beta+s+y^*)^{(\alpha+n)}(\beta+s+y^*)} \\
p(y^*|\vec{y}) &= \left(\frac{\beta+s}{\beta+s+y^*}\right)^{\alpha+n}\frac{\alpha+n}{\beta+s+y^*}
\end{aligned}
$$

Ya con la función de densidad de la predictiva posterior, se calcula $\mathsf{Pr}(y^* < 4000 \mid \boldsymbol{y})$ aplicando la integral sobre esta desde 0 hasta 4000, ya que los valores que puede tomar la variable son los positivos dada la definición de la misma, esta integral se observa a continuación.

$$\begin{aligned}
\mathsf{Pr}(y^* < 4000 \mid \boldsymbol{y}) &= \int_0^{4000} \left(\frac{\beta+s}{\beta+s+y^*}\right)^{\alpha+n} \frac{\alpha+n}{\beta+s+y^*} dy^* \\
&= (\beta+s)^{\alpha+n}(\alpha+n) \int_0^{4000} \frac{1}{(\beta+s+y^*)^{\alpha+n+1}} dy^* \\
&= 103237^{22.25} 22.25 \int_0^{4000} \frac{1}{(103237+y^*)^{23.25}} dy^* \\
&= 103237^{22.25} 22.25 \int_{103237}^{107237} u^{-23.25} du \\
&= 103237^{22.25} 22.25 \left(\frac{-1}{22.25(107237)^{22.25}} + \frac{1}{22.25(103237)^{22.25}}\right) \\
&= -\left(\frac{103237}{107237}\right)^{22.25} + 1 \\
\mathsf{Pr}(y^* < 4000 \mid \boldsymbol{y}) &= 0.5708
\end{aligned}$$

Empleando el código de r se obtuvo que $\mathsf{Pr}(\lambda < 4000 \mid \boldsymbol{y}) = 0.2155$, como se mencionaba anteriormente, ambas cantidades no son iguales por lo que son inferencia sobre cosas distintas como se explicaba anteriormente, estos resultados dan soporte de la afirmación mencionada anteriormente.

Punto 8

Pruebe el sistema de hipótesis $H_0 : \lambda = \lambda_0$ frente a $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$, con $\lambda_0 = 4000$. Para ello tenga en cuenta que

$$p(\boldsymbol{y} \mid H_0) = \int_0^\infty \lambda_0^{-n} \exp\left(-\tfrac{1}{\lambda_0}\textstyle\sum_{i=1}^n y_i\right) \delta_{\lambda_0}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$$

y

$$p(\boldsymbol{y} \mid H_1) = \int_0^\infty \lambda^{-n} \exp\left(-\tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{i=1}^n y_i\right) \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda$$

donde $\delta_a(x)$ es la función delta de Dirac. Reporte el factor de Bayes B_{10} e interprete los resultados.

solución:

El factor de bayes es una cantidad empleada para evaluar un sistema de hipótesis, en este caso, el sistema que se planea evaluar es $H_0 : \lambda = 4000$ y $H_1 : \lambda \neq 4000$, para esto se calcula el factor de bayes de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
B_{10} = \frac{Pr(\vec{y}|H_1)}{Pr(\vec{y}|H_0)} &= \frac{\int_0^\infty \lambda^{-n} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n y_i\right) \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda}{\int_0^\infty \lambda_0^{-n} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^n y_i\right) \delta_{\lambda_0}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \int_0^\infty \lambda^{-(\alpha+n+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0 + \sum_{i=1}^n y_i}{\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda}{\lambda_0^{-n} \exp\left(-\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^n y_i\right) \int_0^\infty \delta_{\lambda_0}(\lambda) \mathrm{d}\lambda} \\
&= \frac{\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{\Gamma(\alpha_0+n)}{(\beta_0+s)^{\alpha_0+n}}}{\lambda_0^{-n} \exp\left(-\frac{s}{\lambda_0}\right)}
\end{aligned}$$

Remplazando por $\beta_0 = 32625$, $\alpha_0 = 8.25$, $s = 70612$, $n = 14$ y $\lambda_0 = 4000$ se tiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
B_{10} &= \frac{\left(\frac{32625}{103237}\right)^{8.25} \frac{\Gamma(22.25)}{\Gamma(8.25)(103237)^{14}}}{4000^{-14}e^{-17.653}} \\
&= \left(\frac{32625}{103237}\right)^{8.25} \left(\frac{4000}{103237}\right)^{14} \frac{\Gamma(22.25)e^{17.653}}{\Gamma(8.25)} \\
&= 0.782391
\end{aligned}$$

Como se puede apreciar, el factor de Bayes da menor a 1. Un valor $B_{10} < 1$ indica que nos inclinamos por H_0 debido a que es más probable dado los datos observados. Haciendo una comparativa a la visión frecuentista, esta tampoco la hubiera rechazado con una significancia del 5% ya que este valor cae dentro del intervalo de confianza calculado al 95% de confianza.

Punto 9

Experimentación adicional bajo las mismas condiciones con otro tipo de alambre (Tipo 2) produjo los siguientes resultados:

294 569 766 1576 1602 2015 2166 3885 8141 10285

Considerando modelos independientes de la forma $y_{i,k} \mid \lambda_k \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Exp}(\lambda_k)$ con $\lambda_k \sim \mathsf{GI}(\alpha_0, \beta_0)$, para $i = 1, \ldots, n_k$ y $k = 1, 2$, donde $y_{i,k}$ es el tiempo de falla del alambre i de tipo k, y n_k es el número de alambres de tipo k sometidos a experimentación (la distribución previa es la misma para ambos tipos de alambre). Pruebe el sistema de hipótesis $H_0 : \lambda_1 = \lambda_2$ frente a $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_2$. Reporte el factor de Bayes B_{10} e interprete los resultados.

solución:

Primero se plantea la consecuencia de la hipótesis nula, en esta se tiene que ambos lambda son iguales (el tiempo promedio de falla) por consiguiente, ambos manejan un mismo λ.

Para evaluar el sistema de hipótesis se plantea el siguiente factor de Bayes

$$B_{10} = \frac{P(\vec{y_1}, \vec{y_2}|H_0)}{P(\vec{y_1}, \vec{y_2}|H_1)}$$

Donde

$$\begin{aligned}
P(\vec{y_1}, \vec{y_2}|H_0) &= \int_\lambda \underbrace{P(\lambda|H_0)}_{distribucion\ previa\ dado\ H_0} \overbrace{P(\vec{y_1}, \vec{y_2}|\lambda, H_0)}^{distribucion\ muestral\ conjunta\ dado\ H_0} d\lambda \\
&= \int_\lambda \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \lambda^{-(\alpha_0+1)} \exp\left(-\frac{\beta_0}{\lambda}\right) \lambda^{-(n_1+n_2)} \exp\left(-\frac{s_1+s_2}{\lambda}\right) d\lambda \\
&= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \int_\lambda \lambda^{-(\alpha_0+n_1+n_2)} \exp\left(\frac{-(\beta_0+s_1+s_2)}{\lambda}\right) d\lambda \\
&= \frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)} \frac{\Gamma(\alpha_0+n_1+n_2)}{(\beta_0+s_1+s_2)^{(\alpha_0+n_1+n_2)}}
\end{aligned}$$

Donde β_0 es el beta previo, α_0 es el alpha de la distribución previa, n_1 es el tamaño de la muestra del alambre tipo 1, n_2 es el tamaño de la muestra del alambre tipo 2, s_1 es la suma de los tiempos de fallo de la muestra de alambres tipo 1 y s_2 es la suma de los tiempos de fallo de la muestra de alambres tipo 2.

Por otro lado se tiene según H_1 que ambos lambdas son distintos, es decir que tendremos dos parámetros (λ_1 y λ_2) además de que cada distribución muestral y previa serán distintas, eso se traduce a la hora de encontrar la verosimilitud marginal como encontrar la integral por cada parámetro y, que la distribución conjunta de la previa y la muestral es la multiplicación de dos idénticas distribuciones con lambdas distintos, a continuación se aprecia ese cálculo.

$$
\begin{aligned}
P(\vec{y_1},\vec{y_2}|H_1) &= \int_{\lambda_1}\int_{\lambda_2} p(\lambda_1)p(\lambda_2)p(\vec{y_1}|\lambda_1)p(\vec{y_2}|\lambda_2)d\lambda_2 d\lambda_1 \\
&= \int_{\lambda_1} p(\lambda_1)p(\vec{y_1}|\lambda_1)d\lambda_1 \int_{\lambda_2} p(\lambda_2)p(\vec{y_2}|\lambda_2)d\lambda_2 \\
&= \left(\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\right)^2 \int_{\lambda_1} \lambda_1^{-(\alpha_0+n_1+1)} \exp\left(-\frac{(\beta_0+s_1)}{\lambda_1}\right)d\lambda_1 \int_{\lambda_2} \lambda_2^{-(\alpha_0+n_2+1)} \exp\left(-\frac{(\beta_0+s_2)}{\lambda_2}\right)d\lambda_2 \\
P(\vec{y_1},\vec{y_2}|H_1) &= \left(\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\right)^2 \frac{\Gamma(\alpha_0+n_2)}{(\beta_0+s_2)^{(\alpha_0+n_2)}} \frac{\Gamma(\alpha_0+n_1)}{(\beta_0+s_1)^{(\alpha_0+n_1)}}
\end{aligned}
$$

Ya teniendo esas cantidades, ahora se calcula el factor de Bayes para este sistema de hipótesis

$$
B_{10} = \frac{\left(\frac{\beta_0^{\alpha_0}}{\Gamma(\alpha_0)}\right)\Gamma(\alpha_0+n_2)\Gamma(\alpha_0+n_1)(\beta_0+s_1+s_2)^{(\alpha_0+n_1+n_2)}}{\Gamma(\alpha_0+n_1+n_2)(\beta_0+s_2)^{(\alpha_0+n_2)}(\beta_0+s_1)^{(\alpha_0+n_1)}}
$$

Desarrollando esto a través de código en r y remplazando cada uno de los valores de la ecuación por los del caso. Se tiene que $B_{10} = 1.18$, este resultado siguiendo a Kass (1995). Aunque existe una mayor probabilidad para H_1, no es muy decisiva por sobre la de H_0.

Aterrizando este resultado al contexto del problema, se dice que hay evidencia en los datos para decir que el tipo de alambre si afecta el tiempo de falla del mismo (los lambda son distintos), aunque la evidencia no sea muy decantada a este hecho.

Punto 10

Verifique la idoneidad del modelo para ambos tipos de alambre empleando como estadística de prueba la media del tiempo de falla. Presente sus resultados gráficamente comparando la distribución predictiva posterior con el valor observado correspondiente. Así mismo, reporte el valor p predictivo posterior en cada caso.

solución:

Mediante métodos de Montecarlo es posible aproximar la distribución del estadístico de prueba, teniendo en cuenta el modelo jerárquico bajo el cual suponemos que se generan los datos. simulando por etapas, primero de la distribución posterior del parámetro y luego, con cada simulación del parámetro, tantas simulaciones de la distribución muestral como hemos observado. De esta manera, se obtienen muestras de las cuales calcular el estadístico de prueba, la media en este caso, y por lo tanto una aproximación de las características de su distribución.

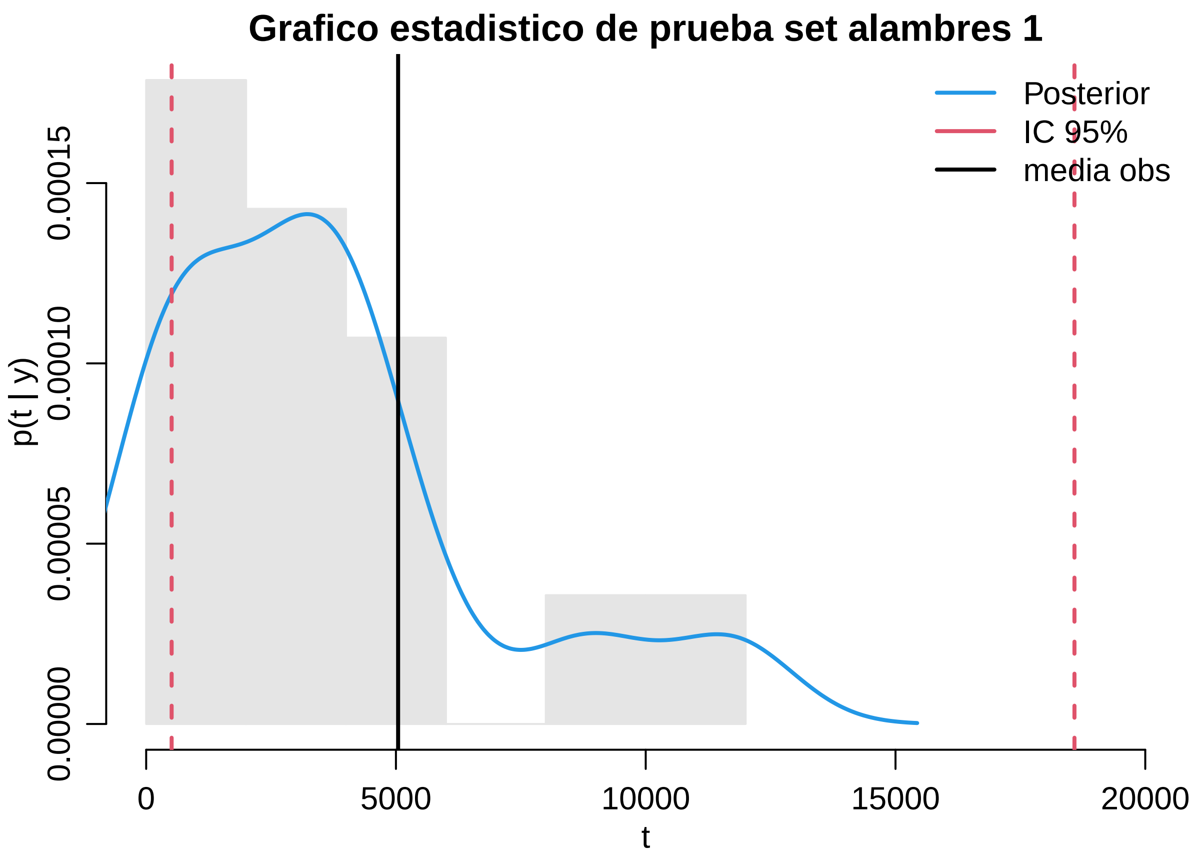
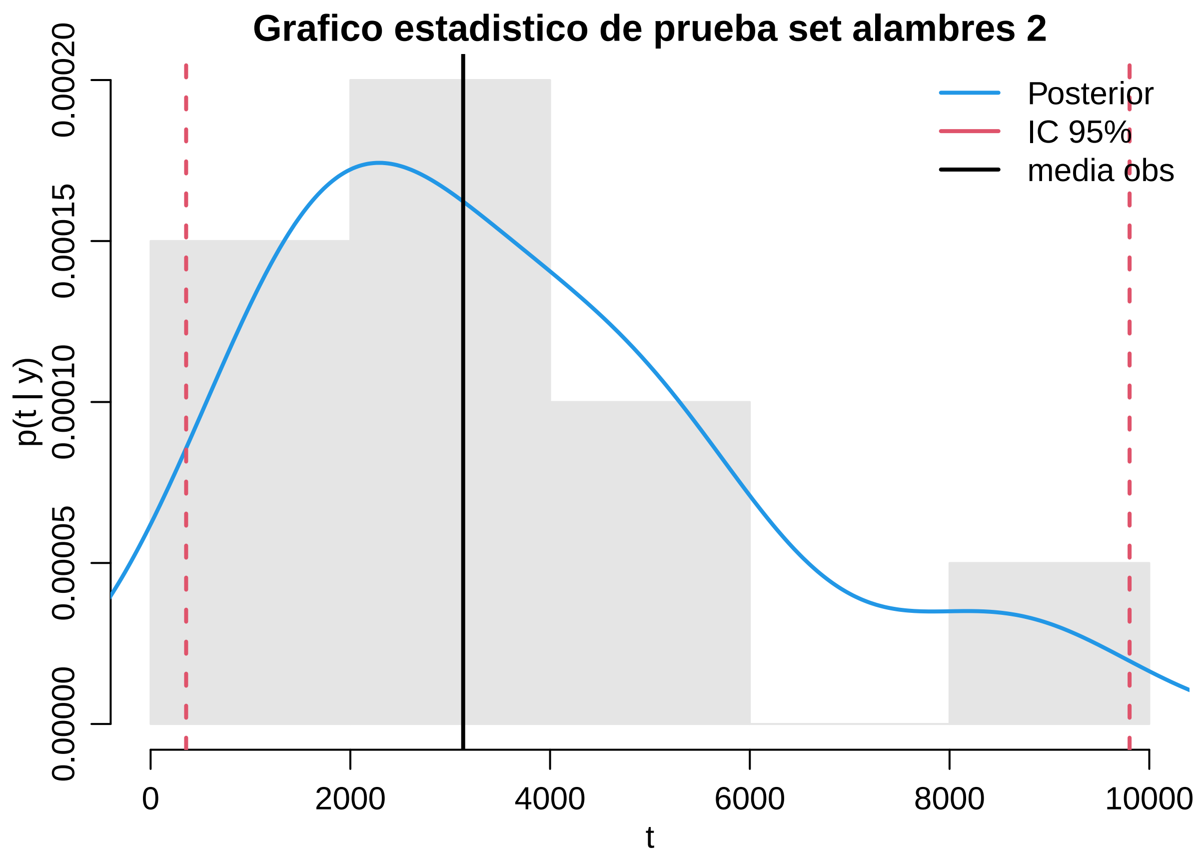


Grafico estadistico de prueba set alambres 1
Posterior
IC 95%
media obs
p(t | y)
0.00000
0.00005
0.00010
0.00015
0
5000
10000
15000
20000
t



References

Kass, R. E., & Raftery, A. E. (1995). Bayes factors. Journal of the american statistical association, 90(430), 773-795.

Mazucheli, J.(2017).Package 'mle.tools'.Recuperado de: https://cran.r-project.org/web/packages/mle.tools/mle.tools.pdf

Kahle,D. Stamey, J.(2017).Package 'invgamma'.Recuperado de:https://cran.r-project.org/web/packages/invgamma/invgamma.pdf