Caso de estudio #1: Tiempo de falla

Sergio Andres Niño Marin, Sergio Andres Gerena Gomez

26/sept/2022

Contents

Caso de estudio

Un investigador del Departamento de Ingeniería Electrónica y Eléctrica de una universidad necesita analizar unos datos sobre los tiempos de falla de un determinado tipo de alambre (Tipo 1). En este problema, el tiempo de falla se define como el número de veces que una máquina podría tensionar el alambre antes de romperse. Los siguientes datos corresponden a $ n= 14$ tiempos de falla de una parte del experimento:

495 541 1461 1555 1603 2201 2750 3468 3516 4319 6622 7728 13159 21194

A partir de este contexto, Su incertidumbre acerca de estos datos antes de que fueran observados es intercambiable. Por lo tanto, resulta apropiado modelar los datos como condicionalmente independientes e idénticamente distribuidos. El modelo más simple para los datos del tiempo de falla involucra la distribución Exponencial:

$$y_i \mid \lambda \overset{\text{iid}}{\sim} \mathsf{Exp}(\lambda), \quad \text{i.e.,} \quad p(y_i \mid \lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{y_i}{\lambda}\right) \quad \text{para } y_i > 0 \text{ y } \lambda > 0, \text{ con } i = 1, \ldots, n. \qquad (1)$$

Pregunta 1

Muestre que $s = \sum_{i=1}^{n} y_i$ es un estadístico suficiente para λ.

Solucion:

Aplicando el criterio de factorizacion de Fisher-Neyman tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda|y_1,...,y_n) &= \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{y_i}{\lambda}}I_{(0,\infty)}(y_i) \\
&= \underbrace{\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{\lambda}}}_{g(T(y),\lambda)}\overbrace{\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\infty)}(y_i)}^{h(y)}
\end{aligned}$$

Con esto, vemos que un estadistico suficiente es $s=\sum_{i=1}^{n}y_i$ dado que este estadistico cumple al poder factorizar de la expresion de verosimilitud en una funcion g que solo depende del estadistico suficiente y el parametro.

Pregunta 2

Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución Gamma-Inversa con parámetros $\alpha>0$ y $\beta>0$, si la función de densidad de X está dada por:

$$X\sim \mathsf{GI}(\alpha,\beta),\quad \text{i.e.,}\quad p(x)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\frac{\beta}{x}\right)\quad \text{para } x>0.$$

Muestre que si $X\sim\mathsf{Gamma}(\alpha,\beta)$, entonces $\frac{1}{X}\sim\mathsf{GI}(\alpha,\beta)$.

Solucion:

Siendo X una V.a absolutamente continua, empleamos el teorema de la transformacion para determinar la distribucion de $Y=\frac{1}{X}\ con\ X>0$ a partir de la distribucion conocida X asi

$$P\left(\frac{1}{X}\right)=f_X\left(\frac{1}{Y}\right)\left|\frac{\delta X}{\delta Y}\right|=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha-1}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\left|-\frac{1}{Y^2}\right|$$

Resolvemos esa expresion como se indica a continuacion

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{X}\right) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha-1}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\left(\frac{1}{Y^2}\right) \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{Y}\right)^{\alpha+1}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right) \\
P\left(\frac{1}{X}\right)=P\left(Y\right) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}Y^{-(\alpha+1)}exp\left(-\frac{\beta}{Y}\right)\sim GI(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

Dado que lo optenido al aplicar el teorema de transformacion fue la distribucion descrita como Gamma inversa (GI) con los respectivos parametros, podemos asegurar que la afirmacion propuesta en el punto resulta verdadera.

Punto 3

Considere la distribución previa $\lambda\sim\mathsf{GI}(\alpha,\beta)$ junto con la distribución muestral (1). Halle la distribución posterior de λ.

Solucion:

Para esto aplicamos el teorema de bayes para encontrar la distribucion posterior de λ a partir de la distribucion muestral y la distribucion previa, de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
p(\lambda|\vec{y}) &\propto p(\vec{y}|\lambda)p(\lambda) \\
&\propto \left[\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} exp\left(\frac{-y_i}{\lambda}\right)\right] \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{-(\alpha+1)} exp\left(-\frac{\beta}{\lambda}\right) \\
&\propto \lambda^{-n} exp\left(\frac{-1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \lambda^{-(\alpha+1)} exp\left(\frac{-\beta}{\lambda}\right) \\
p(\lambda|\vec{y}) &\propto \lambda^{-(\alpha+n+1)} exp\left(\frac{-(\beta+s)}{\lambda}\right) \sim GI(\alpha+n, \beta+s)
\end{aligned}$$

Asi obtenemos la distribucion posterior (que resulto ser un modelo conjugado ya que la previa y posterior terminaron teniendo la misma distribucion pero con parametros distintos).

Punto 4

Se tiene información externa de otro experimento de acuerdo con el cual la distribución previa de λ debería tener una media $\mu_0 = 4500$ y una desviación estándar $\sigma_0 = 1800$. Haga un gráfico de las distribuciones previa y posterior en el mismo gráfico.

Solucion:

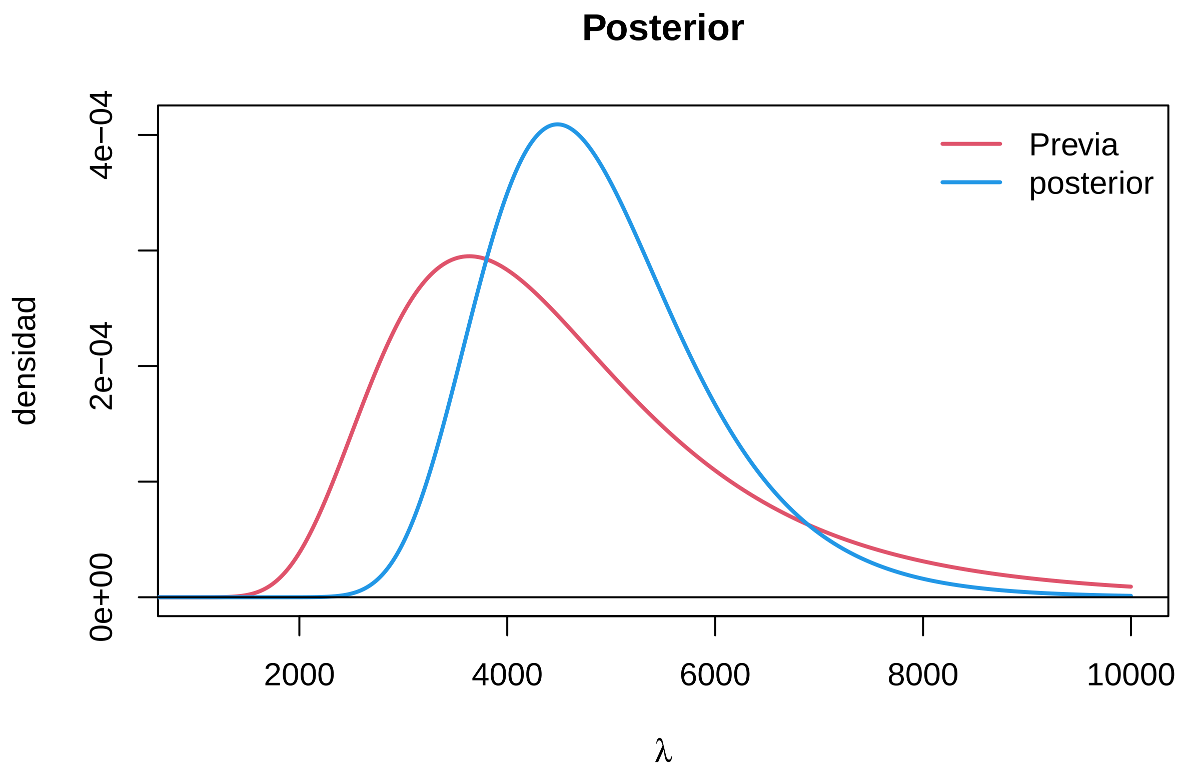
Lo primero es, encontrar los hiperparametros de la distribucion previa tal que satisfaga la media $\mu_0 = 4500$ y la desviacion estandar $\sigma_0 = 1800$, dando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
4500 &= \frac{\beta_0}{\alpha_0 - 1} \qquad para\ \alpha_0 > 1 \\
1800 &= \sqrt{\frac{\beta_0^2}{(\alpha_0-1)^2(\alpha_0-2)}} \qquad para\ \alpha_0 > 2
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que $\alpha_0 = 8.25$ y $\beta_0 = 32625$. con esto ya se puede construir la distribucion previa.

Ahora, en base al punto anterior donde encontramos la distribucion posterior para este modelo presentado sigue la forma $GI(\alpha+n, \beta+s)$ donde n es el tamaño de la muestra y s es la suma de todos los y_i. Empleando una suma sobre los 14 terminos que tenemos en los datos, resulta que $n = 14$ y $s = 70612$.

Ahora sigue construir y plotear ambas distribuciones, tanto la previa como la posterior, empleamos codigo en R para realizar dicha accion y el resultado es el observado a continuacion



Punto 5

Halle el estimador de máxima verosimilitud (MLE, por sus siglas en inglés) de λ.

Solucion:

Para encontrar el estimador de maxima verosimilitud, lo primero es calcular la funcion de verosimilitud del parametro dada la muestra y a dicha funcion le encontramos el maximo global, pero antes, usaremos la parametrizacion de la exponencial donde $\theta = \frac{1}{\lambda}$, luego de encontrar el MLE para dicho parametro, aplicamos la invarianza funcional del estimador MLE para encontrar el estimador MLE de λ.

Como lo dijimos anteriormente, empezamos encontrando la funcion de verosimilitud del parametro θ de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\theta|\vec{y}) &= \prod_{i=1}^{n} p(y_i|\theta) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta y_i} \\
&= \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} y_i}
\end{aligned}
$$

Para simplificar la notacion en los siguientes pasos y tambien las matematicas, usaremos como convencion que $s = \sum_{i=1}^{n}$ ademas de que usaremos para el proceso de maximisacion la funcion log-verosimilitud $\updownarrow$ ## Github Markdown

To get github friendly Markdown document for cleanly tracking changes to document in Github, put the following output first:

```
output:
  md_document:
    variant: "markdown_github"
```

NOTE: You need to run this **LAST** though, since knitting other formats wipes out the `test_files` directory. To return to the Knit button having other options (HTML, PDF, Word), move this output type below the first option.

References

<!– placeholder for References in toc –!>