RRiR 2022/23 projekt — równanie transportu ciepła. Wyprowadzenie sformułowania wariacyjnego

Jakub Pisarek

14 stycznia 2023

Sformułowanie klasyczne problemu prezentuje się następująco:

$$-k(x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 0 \ , \tag{1}$$

$$u(2) = 0 \ , \tag{2}$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20 \ , \tag{3}$$

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 2, & x \in (1,2] \ , \end{cases} \tag{4}$$

gdzie u to poszukiwana funkcja

$$\Omega = [0,2] \ni x \to u(x) \in \mathbb{R} \ .$$

W lewym brzegu mamy warunek Cauchy'ego, w prawym – Dirichleta.

Równanie (1) spełnione jest wtw, gdy $-k = 0 \vee u'' = 0$. Z definicji (4) widać, że $\forall x \in \Omega \ k \neq 0$, skąd uzyskujemy równanie

$$u'' = 0 \ . \tag{5}$$

Mnożąc je przez arbitralną funkcję testową $v \in V$ taką, że $v(2) = 0$, a następnie całkując na Ω, otrzymujemy

$$\int_\Omega u'' v dx = 0 \ , \tag{6}$$

skąd, całkując przez części, dostajemy

$$u'(2)v(2) - u'(0)v(0) - \int_\Omega u'v'dx = 0 \ . \tag{7}$$

Z racji na dobór funkcji testowej, otrzymany tu pierwszy składnik będzie równy zeru. Drugi składnik rozpisujemy z warunku (3),

$$-v(0)(20 - u(0)) - \int_\Omega u'v'dx = 0 \ , \tag{8}$$

co, po przekształceniach, prowadzi do finalnej postaci sformułowania wariacyjnego,

$$\begin{cases} B(u,v) = L(v) \\ u(2) = 0 \end{cases} \ , \tag{9}$$

gdzie

$$\begin{cases} B(u,v) = \int_0^2 u'(x)v'(x)dx - u(0)v(0) \\ L(v) = -20v(0) \end{cases} \ . \tag{10}$$