



ENSGTI  
ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE EN  
GÉNIE DES TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

---

# MODÉLISATION ET SIMULATION DES SYSTÈMES

VERSION (UN PEU MOINS) PROVISoire

---

Stéphane Gibout



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Équation de conservation et méthode des volumes finis</b>	<b>3</b>
2.1	Introduction . . . . .	3
2.2	Bilan d'une grandeur extensive sur un volume quelconque . . . . .	3
2.3	Méthode des volumes finis . . . . .	5
2.4	Expression des densités de flux (Cas général) . . . . .	7
2.5	Expression des flux — Cas des volumes finis . . . . .	9
2.6	Conclusion . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Mur 1D — régime permanent</b>	<b>11</b>
3.1	Introduction . . . . .	11
3.2	Introduction de la température . . . . .	11
3.3	Mur en régime permanent . . . . .	12
3.3.1	Description et hypothèses . . . . .	12
3.3.2	Discretisation spatiale . . . . .	13
3.3.3	Expression des bilans et des flux . . . . .	15
3.3.4	Résolution . . . . .	18
3.3.5	Analyse . . . . .	19
3.4	Conclusion . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Traitement des problèmes instationnaires</b>	<b>21</b>
4.1	Introduction . . . . .	21
4.2	Mur en régime instationnaire . . . . .	21
4.3	Stabilité numérique . . . . .	25
4.3.1	Schéma (semi-)implicite . . . . .	25
4.3.2	Schéma explicite . . . . .	25
4.4	Conclusion . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Mur instationnaire — semi-implicite</b>	<b>29</b>
5.1	Introduction . . . . .	29

5.2	Rappel des équations . . . . .	29
5.3	Implémentation . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Sphère 1D — Schéma explicite</b>	<b>33</b>
6.1	Introduction . . . . .	33
6.2	Description du problème . . . . .	33
6.3	Discrétisations . . . . .	34
6.3.1	Discrétisation spatiale . . . . .	34
6.3.2	Discrétisation temporelle . . . . .	35
6.4	Bilans, flux et schéma temporel . . . . .	36
6.5	Implémentation . . . . .	38
<b>7</b>	<b>Cartésien 2D — Schéma implicite</b>	<b>41</b>
7.1	Introduction . . . . .	41
7.2	Description du problème . . . . .	41
7.3	Discrétisation . . . . .	43
7.4	Bilan, flux et schéma temporel . . . . .	44
7.4.1	Équations algébriques . . . . .	45
7.4.2	Ecriture matricielle . . . . .	47
7.5	Implémentation . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Cartésien 2D — Schéma explicite et non-linéarités</b>	<b>51</b>
8.1	Introduction . . . . .	51
8.2	Complément de description du problème . . . . .	51
8.3	Bilan, flux . . . . .	52
8.4	Implémentation . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Changement de phase</b>	<b>57</b>
9.1	Introduction . . . . .	57
9.2	Méthode . . . . .	57
9.3	Équations d'état . . . . .	59
9.3.1	Corps pur . . . . .	60
9.3.2	Autres expressions . . . . .	61
9.4	Exemple de mise en œuvre . . . . .	61
9.4.1	Traitement des paramètres dépendants de l'état . . . . .	62
9.4.2	Implémentation . . . . .	62
<b>10</b>	<b>Écoulement</b>	<b>65</b>
10.1	Introduction . . . . .	65
10.2	Flux advectif . . . . .	65
10.3	Contrainte sur le pas de temps . . . . .	67





# Chapitre 1

## Introduction

Enfin ! Ça y est, vous avez quelques solides bases en transferts thermiques, en énergétiques, en programmation et en calcul scientifique ! Il est donc temps de nous faire plaisir et d'utiliser ces connaissances pour aborder des problèmes intéressants et surtout plus proches de ceux que l'on peut rencontrer dans la «vraie vie».

Vous pourriez me demander si tout cela est bien utile alors qu'il existe déjà des logiciels capables de faire la même chose en mieux et de vous tirer de toutes les mauvaises situations ?

*J'ai envie de vous répondre ceci : «Vous savez, moi je ne crois pas qu'il y ait de bonne ou de mauvaise situation. Parce que quand on a le goût de la chose, quand on a le goût de la chose bien faite, le beau geste, parfois on ne trouve pas l'interlocuteur en face je dirais, le miroir qui vous aide à avancer. Alors ce n'est pas mon cas, comme je disais là, puisque moi au contraire, j'ai pu : et je dis merci à la vie, je lui dis merci, je chante la vie, je danse la vie... Et finalement, quand beaucoup de gens me disent "Mais comment fais-tu pour avoir cette humanité ?", je leur réponds très simplement, je leur dis que c'est ce goût de l'amour qui m'a poussé aujourd'hui à entreprendre une étude thermique, mais demain qui sait ? Peut-être seulement à me mettre au service de la communauté, à faire le don, le don de soi...»*

Bon d'accord, vous avez tous reconnu une version légèrement adaptée du monologue d'Otis (Edouard Baer) dans le film «Astérix Mission Cléopâtre». Vous en concluez donc que je ne sais absolument pas rédiger d'introduction mais que j'ai un petit faible pour l'humour de «Les Nuls».

Pour revenir à cette excellente matière que nous allons aborder, elle ne repose que sur des connaissances déjà connues. Malheureusement, elle vous pose généralement quelques difficultés car elle vous oblige à mobiliser toutes vos connaissances pour les utiliser ensemble. La seule qualité (je suppose ici que vous n'êtes cependant pas complètement idiots) est le courage car on se retrouve facilement submergé par la somme de petits travaux à fournir.

Je vous encourage donc à travailler régulièrement, ainsi qu'à vous replonger dans vos cours de première année, et en particulier ceux de programmation et de calcul scientifique. A ce sujet, un court test préliminaire (noté!) vous sera proposé avant le début des séances de travaux dirigés pour vous permettre de (re-)découvrir vos lacunes.

Bonne chance !

## A propos des exemples de code

Comme un code peut toujours être corrigé ou amélioré, j'ai choisi de ne pas les inclure dans ce document. Ils sont cependant tous disponibles à l'adresse suivante :

<https://github.com/sgibout/M2S>

J'ai également pris le parti de ne pas les «expliquer», principalement pour vous inciter à les analyser et à les comprendre par vous-même. Vous trouverez cependant quelques commentaires dans le code et vous pouvez me poser toutes les questions que vous souhaitez. Je me réserve cependant le droit de ne répondre qu'à celles que je trouve pertinentes.



# Chapitre 2

## Équation de conservation et méthode des volumes finis

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons établir (encore une fois) les équations de base de toutes la Physique, à savoir les équations de conservation d'une grandeur (extensive) quelconque.

Nous nous limiterons heureusement aux seules grandeurs scalaires que sont l'énergie ou la masse. Nous en profiterons pour revenir sur la définition des densités de flux diffusif et advectif qui nous seront bien utiles par la suite.

Nous pourrons alors présenter une méthode des volumes finis qui nous occupera dans toute la suite de ce cours.

### 2.2 Bilan d'une grandeur extensive sur un volume quelconque

Ce titre constitue en fait un double pléonasme car non seulement il n'est possible de faire un bilan que sur une grandeur extensive mais aussi que sans volume je n'ai pas de système pour exprimer mon bilan...

Bref, nous allons nous intéresser à une grandeur  $U$  scalaire et extensive (j'insiste!). Comme l'espace — et donc le volume  $V$  — existe toujours, il est toujours possible de définir la densité volumique  $u_v$  :

$$u_v = \frac{dU}{dV} \quad (2.1)$$

La masse volumique  $\rho$  n'est autre que la densité volumique de masse. S'il est localement possible de définir  $\rho$  (i.e. on peut associer une masse non nulle à un volume donné) alors, on peut également introduire une densité massique  $u_m$  :

$$u_m = \frac{dU}{dm} = \frac{dU}{dV} \cdot \frac{dV}{dm} = \frac{u_v}{\rho} \quad (2.2)$$

Pour simplifier les notations, je noterai généralement  $u$  la grandeur massique.

Ces deux densités ne sont pas des grandeurs extensives !

Considérons un volume  $V$  quelconque (mais fixe dans l'espace), délimité par une surface  $S$  (cf. figure 2.1).

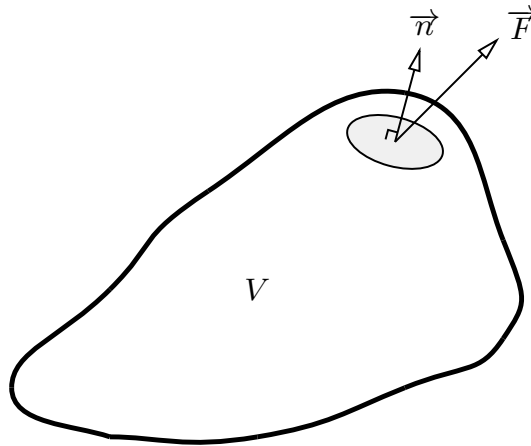


FIGURE 2.1 – Un beau volume de contrôle générique

Symboliquement, on peut dire que la variation de la quantité  $U$  contenue dans le volume  $V$  au cours d'un temps infinitésimal  $dt$  est la somme de la quantité (algébrique) de  $U$  échangée au travers de la frontière  $S$  et de la production/disparition de la quantité de  $U$  au sein du même volume  $V$ . En notant  $\vec{F}$  une densité flux de  $U$  générique,  $\sigma_v$  le terme (scalaire et algébrique) de production interne et  $\vec{\sigma}_s$  le

terme de production surfacique, on a :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} + \int_V \sigma_v \cdot dV + \oint_S \vec{\sigma}_s \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

Pour se faire plaisir, on peut toujours utiliser le théorème de Green-Ostrogradski (flux-divergence) et réorganiser le tout pour obtenir la même équation mais écrite sous sa forme locale. . . . On peut mais on ne le fera pas car le résultat ne nous sera pas utile pour la suite (je vous avais dit que c'était simple!).

Une toute petite expression pour terminer : La quantité  $U$  contenue dans le volume  $V$  peut s'écrire :

$$U = \int_V u_v \cdot dV = \int_V \rho u \cdot dV \quad (2.4)$$

la seconde expression nécessite évidemment que la masse volumique soit localement définie i.e. qu'il y ait de la matière!

Pour simplifier encore, nous allons considérer qu'il n'y a pas de terme source surfacique ( $\vec{\sigma}_s = \vec{0}$ ). Cela revient en particulier à exclure les écoulements visqueux.

## 2.3 Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis<sup>1</sup> se construit sur l'intégration de l'équation bilan (2.3) sur une géométrie simple, plus quelques petites hypothèses.

Nous choisirons donc un volume élémentaire  $V$  géométriquement simple, un polyèdre<sup>2</sup> par exemple (cf. figure 2.2). On notera  $S_i$  une des faces du polyèdre (ce sera également la mesure de sa surface) et  $S = \bigcup_i S_i$ ,  $\vec{n}_i$  sa normale sortante et  $\theta_i$  l'angle entre cette normale et le vecteur densité flux  $\vec{F}_i$ .

Nous prendrons le volume suffisamment petit pour pouvoir considérer que  $u$  et  $\sigma_v$  y sont uniformes. Cela permet de simplifier :

$$\int_V u_v \cdot dV = u_v \cdot V = \rho u \cdot V \quad (2.5)$$

---

1. Il existe plusieurs variantes plus ou moins complexes de la méthode des volumes finis. Je vous propose ici la méthode la plus simple.

2. Par commodité, on représente généralement un polygone mais il faut bien garder à l'esprit que pour écrire un bilan il faut un volume. Nous verrons que même dans les problèmes en une ou deux dimensions, on s'invente les dimensions manquantes pour obtenir un vrai volume.

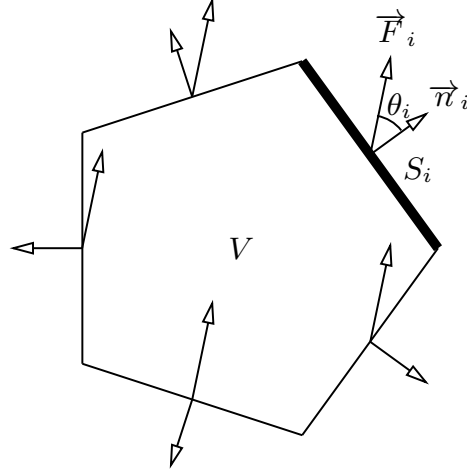


FIGURE 2.2 – Un exemple de volume élémentaire pentagonal

et

$$\int_V \sigma_v \cdot dV = \sigma_v \cdot V \quad (2.6)$$

Dans le même ordre d'idée, nous considérerons que la densité de flux  $\vec{F}$  et le terme source surfacique  $\vec{\sigma}_s$  sont uniformes sur chaque surface  $S_i$ . On peut donc écrire :

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_{S_i} \vec{F}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \cdot S_i \quad (2.7)$$

et la même chose pour le terme source surfacique.

En recollant tous les morceaux, on obtient finalement l'expression suivante :

$$V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = - \sum_i \left[ \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \cdot S_i \right] + \sigma_v \cdot V \quad (2.8)$$

Ce qui est génial (si, si, j'insiste) c'est que l'on est passé d'une équation (2.3) intégral-différentielle (ou aux dérivées partielles si on considère la forme locale non établie ici) à une simple équation différentielle ordinaire (2.8).

Mais ? si je suppose que  $u$  est homogène dans le volume  $V$ , ça ressemble étrangement à un corps mince... Mince alors, comment je fais pour traiter les cas plus complexes avec une variation spatiale de la grandeur ? Et bien c'est là qu'intervient la notion de maillage et de discrétisation spatiale : Le système est découpé

en une multitude de volumes élémentaires comme ceux introduits ci-dessus (cf. figure 2.3). La variation spatiale est introduite par cette multiplicité : pour chaque cellule (ou maille ou volume élémentaire)  $V_i$ , on peut écrire l'équation bilan (2.8) dont l'expression dépendra des cellules voisines (en gris clair sur la figure). C'est aussi simple que cela. Je n'en dis pas plus pour le moment et nous verrons sur des exemples comment s'y prendre en pratique.

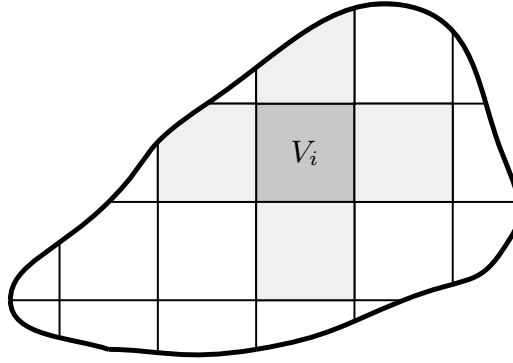


FIGURE 2.3 – Un exemple de maillage quadrangulaire

## 2.4 Expression des densités de flux (Cas général)

La densité de flux générique  $\vec{F}$  que nous avons manipulée jusqu'à maintenant est en fait la combinaison de deux densités de flux totalement différents par nature : diffusif et advectif.

La densité de **flux advectif**  $\vec{F}_{adv}$  suppose que la quantité soit «portée» par la matière et que cette médium soit en mouvement. Il s'agit donc d'un transport lié à un déplacement. Son expression s'obtient facilement en considérant la figure 2.4.

On note  $\vec{v}$  la vitesse locale de l'écoulement (localement uniforme) et on considère que  $u_v$  est également uniforme dans le tube de courant défini sur la figure. La quantité  $q$  qui traverse la surface  $S$  pendant le temps  $dt$  est :

$$q = u_v \cdot (\vec{n} \cdot \vec{v}) \cdot S \cdot dt \quad (2.9)$$

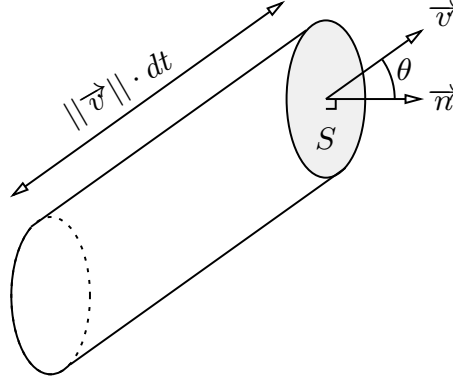


FIGURE 2.4 – Calcul de la densité de flux advectif

On a également

$$q = \vec{F}_{adv} \cdot \vec{n} \cdot S \quad (2.10)$$

En identifiant, on trouve l'expression de la densité de flux advectif :

$$\vec{F}_{adv} = u_v \cdot \vec{v} = (\rho u) \cdot \vec{v} \quad (2.11)$$

La densité de **flux diffusif**  $\vec{F}_{dif}$  est directement liée au second principe et tend à augmenter le désordre et donc à tendre vers un état homogène et isotrope. La diffusion a donc pour «mission» de «casser» les gradients et la densité de flux diffusif suit donc une loi de type Fick. Il faut noter qu'il s'agit d'une loi phénoménologique, linéaire de surcroît<sup>3</sup>. Son expression générale est la suivante :

$$\vec{F}_{dif} = -\chi \vec{\nabla} u_v \quad (2.12)$$

Le paramètre  $\chi$  est appelé diffusivité et s'exprime toujours en  $[m^2 \cdot s]$ . Ce peut être un tenseur ou un scalaire.

---

3. En clair, cela veut dire qu'on ne sait pas très bien comment ça se passe en réalité, ou que l'on sait mais que c'est vraiment trop compliqué. De plus, ça marche très bien avec du linéaire alors pourquoi chercher à faire plus compliqué ?

## 2.5 Expression des flux — Cas des volumes finis

Dans l'équation (2.8), l'expression du terme de flux montre que seule la composante normale est prise en compte et que l'évaluation se fait au niveau de l'interface i.e. la séparation entre deux volumes élémentaires  $V_i$  et  $V_j$  (cf. figure 2.5. Partant de ces constats, il est possible de savoir comment calculer correctement chaque terme de flux comptabilisé dans le bilan.

Dans la pratique de la méthode, on ré-écrit généralement la relation (2.8) en faisant explicitement apparaître les termes de flux<sup>4</sup>  $\Phi$  définis par (avec les notations de la figure 2.5) :

$$\Phi_i = -\vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \cdot S_{ij} \quad (2.13)$$

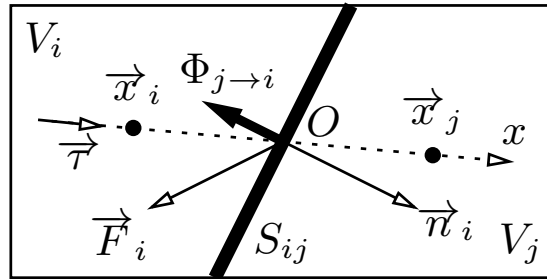


FIGURE 2.5 – Détail du calcul du terme de densité de flux

Que l'on travaille avec la grandeur vectorielle  $\vec{F}$  ou scalaire  $\Phi$ , il est important de garder à l'esprit que toutes les grandeurs sont uniformes sur chaque volume élémentaire (hypothèse de base de la méthode). Toujours sur la figure 2.5, on a une discontinuité au niveau de l'interface ! Et qui dit discontinuité dit non dérivabilité, ce qui risque de nous poser quelques problèmes pour évaluer, par exemple, un gradient (cf. équation (2.12)).

Bien, il va falloir modifier notre description du problème : on va ainsi considérer que toutes la quantité est portée par le barycentre du volume élémentaire. Cet artifice permet de réutiliser les résultats sur la dérivation numérique vus en première année.

C'est parti, calculons le flux diffusif  $\Phi_{j \rightarrow i}^d$  entrant dans le volume  $i$  au travers de l'interface  $S_{ij}$  :

$$\Phi_{j \rightarrow i}^d = - \left( -\chi \cdot \left[ \vec{\nabla} u_v \right]_O \right) \cdot \vec{n}_i \cdot S_{ij} \quad (2.14)$$

---

4. en pas densités de flux

Puisque nous n'avons que des informations aux barycentres, nous pouvons seulement calculer la composante du gradient selon  $\vec{\tau}$ , ce qui donne :

$$\Phi_{j \rightarrow i}^d = \chi \cdot \left[ \left( \frac{du_v}{dx} \right)_o \cdot \vec{\tau} \right] \cdot \vec{n}_i \cdot S_{ij} \quad (2.15)$$

En remplaçant la dérivée par son approximation centrée, on a :

$$\Phi_{j \rightarrow i}^d = \chi \cdot \frac{(u_v)_j - (u_v)_i}{\|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{n}_i \cdot S_{ij} \quad (2.16)$$

$\vec{\tau}$  et  $\vec{n}_i$  étant des vecteurs unitaires, on a  $\vec{\tau} \cdot \vec{n}_i = \cos(\theta)$ . En notant  $d_{ij} = \|\vec{x}_j - \vec{x}_i\|$  la distance entre les deux barycentres, on obtient finalement :

$$\Phi_{j \rightarrow i}^d = \chi \cdot \frac{(u_v)_j - (u_v)_i}{d_{ij}} \cdot \cos(\theta) \cdot S_{ij} \quad (2.17)$$

Pour le flux advectif  $\Phi_{j \rightarrow i}^a$  entrant dans le volume  $i$  au travers de l'interface  $S_{ij}$ , c'est légèrement plus simple puisqu'il n'y a pas de gradient ! On a :

$$\Phi_{j \rightarrow i}^a = -u_v \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}_i \cdot S_{ij} \quad (2.18)$$

où on reconnaît la vitesse (scalaire) normale  $\vec{v} \cdot \vec{n}_i$ , la vitesse étant évidemment celle au niveau de l'interface. La seule question est de savoir quelle est la valeur de  $u_v$  à considérer au niveau de l'interface, sachant qu'on a  $(u_v)_i$  d'un côté,  $(u_v)_j$  de l'autre et qu'en fait  $u_v$  n'est pas définie au niveau de l'interface (i.e. discontinuité) ! Rappelons nous ici qu'il s'agit du terme advectif et donc du transport de la quantité avec l'écoulement. Ainsi, si l'écoulement est physiquement dans le sens  $i$  vers  $j$  alors on prendra  $u_v \equiv (u_v)_i$  et inversement. Simple non ?

## 2.6 Conclusion

Nous avons ici mis en place les bases de la méthode des volumes finis, qui repose sur des concepts physiques simples (bilan). Le découpage spatial (maillage) et quelques hypothèses nous ont permis de remplacer une méchante équation intégrale-différentielle (ou aux dérivées partielles) par un troupeau de gentilles équations différentielles ordinaires. Nous avons également établi les expressions des deux principaux flux que nous rencontrerons : diffusif et advectif.

Dans le prochain chapitre, nous allons mettre toutes ces notions en pratique pour résoudre notre premier problème stationnaire mono-dimensionnel ! Que du bonheur.



# Chapitre 3

## Mur 1D — régime permanent

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons appliquer la méthode des volumes finis dans le cas très simple de l'équilibre thermique d'un mur en régime stationnaire.

Cet exemple a pour objectif de dégager une méthodologie générale qui pourra être mise en oeuvre dans tous les cas. Nous verrons comment quelques raccourcis d'écriture permettent de simplifier le traitement et nous en profiterons pour introduire un premier type de condition à la limite. Tout un programme !

Au fait, comment je passe de ma grandeur  $u_v$  (ou  $u$ ) à la température ?

### 3.2 Introduction de la température

Dans le premier chapitre, nous avons considéré une grandeur extensive  $U$  et écrit son équation de conservation. Nous avons surtout manipulé les densités associées : volumique  $u_v$  et massique  $u$ , qui sont des grandeurs intensives. Voyons maintenant comment introduire notre chère température à partir de là.

Pour faire court, regardons du côté de l'enthalpie<sup>1</sup> — notre grandeur extensive — et de sa densité massique  $h$  que nous substituerons à  $u$  (ne pas confondre avec

---

1. On peut faire le même raisonnement à partir de l'énergie interne

l'énergie interne massique!). Votre cours de thermodynamique de première année vous raconte que dans le cas d'un fluide parfait ou d'un solide,  $h$  n'est fonction que de la température  $T$  et on peut écrire

$$dh = c_p \cdot dT \quad (3.1)$$

Si  $c_p$  est constant, on peut intégrer et on obtient (à une constante additive  $h_0$  près) :

$$h(T) = c_p \cdot T + h_0 \quad (3.2)$$

Notre densité volumique sera (la constante étant arbitraire, je m'arrange pour l'annuler) :

$$u_v = \rho \cdot h(T) = \rho \cdot c_p \cdot T \quad (3.3)$$

Voici donc notre lien entre la densité volumique  $u_v$  et la température. Comme dirait notre amie Dora l'Exploratrice, «c'est gagné!»

Profitons en pour revenir sur notre densité de flux diffusif (2.12) pour la transposer dans le domaine des transferts thermiques. Commençons par l'expression du gradient, en supposant que  $\rho$  et  $c_p$  sont constants :

$$\vec{\nabla} u_v = \vec{\nabla} \rho \cdot c_p \cdot T = \rho \cdot c_p \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.4)$$

Ce qui donne pour la densité de flux :

$$\vec{F}_{dif} = -\chi \cdot \rho \cdot c_p \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.5)$$

Si on compare à l'expression de la loi de Fourier (avec  $\lambda$  la conductivité) :

$$\vec{F}_{fourier} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T \quad (3.6)$$

on trouve que la diffusivité  $\chi$  s'écrit :

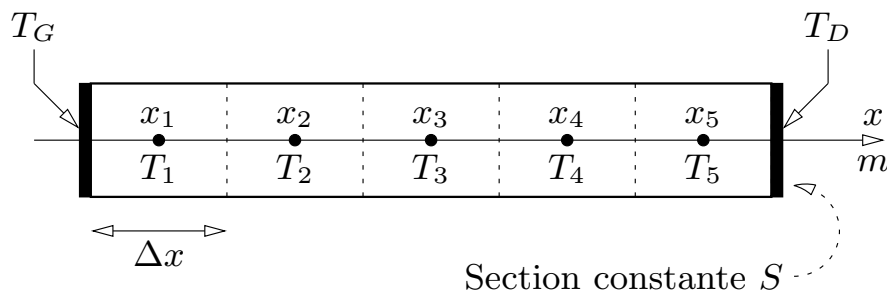
$$\chi = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (3.7)$$

qui n'est autre que la diffusivité thermique bien connue.

## 3.3 Mur en régime permanent

### 3.3.1 Description et hypothèses

Le problème du mur est ultra-classique et est évidemment un problème mono-dimensionnel. La géométrie et les notations sont visibles sur la figure 3.1.

FIGURE 3.1 – Le fameux mur (avec  $M = 5$ )... à ne pas confondre avec une ailette !

Le système modélisé se limite donc à un mur d'épaisseur  $e$ , dont les deux faces sont soumises à des conditions de température imposée :

$$T(x = 0) = T_G$$

et

$$T(x = e) = T_D$$

Puisqu'il nous faut un volume pour écrire nos bilans, nous considérons une section  $S$  du mur. Évidemment, le choix de cette section est arbitraire et le résultat ne devra pas en dépendre.

Nous considérons également qu'il s'agit d'un solide homogène et isotrope pour lequel on peut considérer la relation  $u(T)$  comme linéaire (i.e. le produit  $\rho \cdot c_p$  est constant) nous écrirons donc directement les équations en température. De même, la conductivité thermique  $\lambda$  est supposée constante.

### 3.3.2 Discrétisation spatiale

Une fois la description physique du problème faite, la seconde étape consiste à définir les sous-systèmes (i.e. les volumes de contrôle) sur lesquels nous pourrions exprimer les bilans. Rien de bien sorcier ici sur un problème 1D. Nous allons découper le mur  $M$  tranches d'épaisseur égales, ce qui nous donne une épaisseur

$\delta x$  que l'on appelle aussi pas de discrétisation spatial :

$$\Delta x = \frac{e}{M} \quad (3.8)$$

La surface d'échange entre deux volumes voisins est d'expression triviale dans ce cas.

Enfin, le volume de chaque cellule s'exprime :

$$V = S \cdot \delta x \quad (3.9)$$

Retenez bien ici l'ordre, en commençant par la définition des distances puis des surfaces et enfin des volumes. Cette approche est généralisable à toutes les géométries. De plus, dans la majorité des cas, le gros du travail consiste à définir les distances, les autres grandeurs géométriques en découlant directement.

Maintenant que nous avons découpé notre système en  $M$  sous-systèmes, nous pouvons nous débarrasser des grandeurs continues —  $x$  et  $T(x)$  — pour les remplacer par les grandeurs discrètes correspondantes  $x_m$  et  $T_m$ , qui sont caractéristiques du barycentre de chaque nœud. Sans difficulté ici, on a :

$$x_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x \text{ avec } m = 1, 2 \dots M$$

et

$$T_m = T(x_m)$$

On notera que — avec ce maillage particulier — les interfaces correspondent à des indices demi-entiers : les parois du mur correspondent ainsi aux indices  $1 - \frac{1}{2}$  et  $M - \frac{1}{2}$ .

Notez bien que ce découpage, ainsi que le choix de la numérotation est absolument arbitraire et que selon votre humeur et le type de problème, vous pouvez faire un tout autre choix !

### 3.3.3 Expression des bilans et des flux

Le premier travail à effectuer consiste à identifier tous les flux mis en jeux, ce qui se fait en considérant toutes les surfaces d'échange. Ici, nous avons seulement deux surfaces par nœud avec des transferts conductifs seulement, ce qui nous fait deux flux que nous noterons avec poésie  $\Phi_G$  pour le flux gauche et  $\Phi_D$  pour le flux droit. Sur la figure 3.2, vous remarquerez que je considère toujours des flux entrants i.e. positif s'il entraîne une augmentation effective de la grandeur<sup>2</sup> pour le volume considéré.

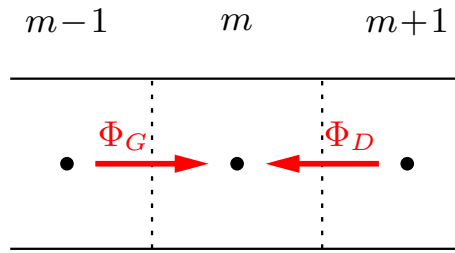


FIGURE 3.2 – Flux conductifs pour les cellules centrales

#### Bilans

Connaissant les paramètres géométriques et le flux, l'écriture des bilans est extrêmement simple, surtout dans le cas d'un problème stationnaire<sup>3</sup> :

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \frac{dT}{dt} = 0 = \Phi_G + \Phi_D \quad \forall m = 1, \dots, M \quad (3.10)$$

#### Flux conductifs

Bien, il ne nous reste plus qu'à exprimer les flux (conductifs)! Pour ne pas que cela vous fasse trop mal la première fois, je vais emprunter le plus long chemin.

2. ici l'énergie, même si on travaille en température par commodité!

3. Pour alléger les notations je ne mets généralement pas d'indice spatial sur les flux, mais vous pouvez les mettre si vous le souhaitez!

Commençons donc par les cellules centrales, i.e. celles qui ne sont pas en bordure de domaine, soit  $m = 2, \dots, (M - 1)$ . Le mur étant homogène et isotrope, les flux auront des expressions similaires pour tous ces nœuds. Considérons donc une cellule centrale  $m$  quelconque et écrivons le flux à l'interface à son interface avec la cellule  $m - 1$  à l'aide de la loi de Fourier (directement en projection sur l'axe  $x$ ) :

$$\Phi_G = -\lambda \cdot S \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_{m-1/2}} \quad (3.11)$$

Malheureusement, nous avons un problème discret donc impossible d'exprimer la dérivée, sauf si on utilise une approximation discrète, comme une dérivée centrée par exemple (ordre 2 pour rappel). Cela donne :

$$\Phi_G = -\lambda \cdot S \cdot \frac{T_m - T_{m-1}}{x_m - x_{m-1}} \quad (3.12)$$

et puisque le pas spatial est constant,  $x_m - x_{m-1} = \Delta x$ , d'où

$$\Phi_G = \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{m-1} - T_m) \quad (3.13)$$

Faisons la même chose pour l'interface à droite (attention au changement de signe dû à l'orientation de mes flux) :

$$\Phi_D = +\lambda \cdot S \cdot \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_{m+1/2}} \quad (3.14)$$

soit, tous calculs faits :

$$\Phi_D = \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{m+1} - T_m) \quad (3.15)$$

Ces deux expressions sont sympathiques car elles présentent :

- un facteur qui ressemble étrangement à l'inverse d'une résistance de conduction ;
- une différence de température qui s'écrit toujours : «voisin moins courant» ce qui en simplifie l'écriture !

### Conditions aux limites

Le raisonnement est dans un premier temps mené sur la cellule  $m = 1$ .

Le premier réflexe consiste à poser simplement  $T_1 = T_G$  mais dans ce cas, puisque chaque cellule est homogène en température, la cellule 2 est en contact avec un thermostat à  $T_G$ , et ainsi de suite... Donc ça ne marche pas !

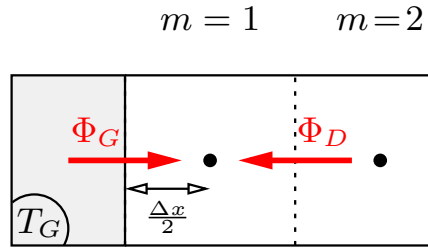


FIGURE 3.3 – Flux associé à la condition de température imposée

Analysons de plus près la figure 3.3 : le flux conductif, proportionnel au gradient, est ici caractérisé par l'écart de température  $T_G - T_1$  avec une distance de  $\Delta x/2$ . On pourrait faire le même calcul que précédemment en calculant une approximation du flux au milieu de l'intervalle paroi—centre du premier nœud, mais compte tenu des remarques précédentes, on peut déduire directement l'expression du flux, soit :

$$\Phi_G = \frac{\lambda \cdot S}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot (T_G - T_1) \quad \text{pour } m = 1 \quad (3.16)$$

le flux «droit»  $\Phi_D$  prenant la même forme que celle de l'équation (3.14).

et selon le même principe :

$$\Phi_D = \frac{\lambda \cdot S}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot (T_D - T_M) \quad \text{pour } m = M \quad (3.17)$$

le flux «gauche»  $\Phi_G$  prenant la même forme que celle de l'équation (3.15).

On voit ici que l'on peut simplifier l'écriture des flux en les découplant selon leur type i.e. conduction, condition de température imposée, etc. Dans cet exemple, le

flux «gauche»  $\Phi_G$  est de type conductif pour  $m = 2, \dots, M$  et de type température imposée en  $m = 1$ , ce que l'on peut synthétiser par :

$$\Phi_G = \begin{cases} \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_G - T_1) & \text{pour } m = 1 \\ \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{m-1} - T_m) & \text{pour } m = 2, \dots, M \end{cases} \quad (3.18)$$

et pour le flux «droit» :

$$\Phi_D = \begin{cases} \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{m+1} - T_m) & \text{pour } m = 1, \dots, (M - 1) \\ \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_D - T_M) & \text{pour } m = M \end{cases} \quad (3.19)$$

Non seulement on peut écrire ces équations sans trop réfléchir (avec un peu d'habitude), mais surtout cette présentation est très bien adaptée à l'écriture de codes informatiques (mais plutôt dans le cas instationnaire!)

### 3.3.4 Résolution

L'étape suivante n'est rien d'autre que la mise en œuvre du bon algorithme avec le langage de votre choix ! Paradoxalement, le fait de considérer un problème stationnaire augmente la quantité de travail à fournir ici... Mais<sup>4</sup> quand on aime on ne compte pas, donc allons-y !

En regroupant nos  $M$  équations bilan et l'expression de nos flux, on peut écrire le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_G - T_1) + \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_2 - T_1) = 0 & \text{pour } m = 1 \\ \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{m-1} - T_m) + \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{m+1} - T_m) = 0 & \text{pour } m = 2, \dots, (M - 1) \\ \frac{\lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_{M-1} - T_M) + \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{\Delta x} \cdot (T_D - T_M) = 0 & \text{pour } m = M \end{cases} \quad (3.20)$$

---

4. Je sais, je n'ai pas les mêmes références que M. Franquet en matière de citation !



soit en simplifiant un peu

$$\begin{cases} 3 \cdot T_1 - T_2 = 2 \cdot T_G & \text{pour } m = 1 \\ T_{m-1} - 2 \cdot T_m + T_{m+1} = 0 & \text{pour } m = 2, \dots, (M-1) \\ T_{M-1} - 3 \cdot T_M = 2 \cdot T_D & \text{pour } m = M \end{cases} \quad (3.21)$$

Vous remarquerez au passage que ces équations sont homogènes (ouf!) et que la somme des coefficients est toujours nulle, ce qui permet une vérification rapide.

Bref, ces équations peuvent s'écrire sous la forme d'un système matricielle  $M \times M$  tridiagonal et à diagonale dominante! Un coup de Choleski et hop! on obtient le résultat en un aller-retour.

### 3.3.5 Analyse

Cette dernière étape est presque la plus importante. Elle consiste à se convaincre que les résultats obtenus sont physiquement acceptables. En effet, sauf erreur grossière, un code va toujours vous fournir un résultat!

Ici par exemple, on peut vérifier que la température est une fonction linéaire de la distance, ou vérifier que le flux calculé à l'aide de la loi de Fourier au milieu du mur est égal à celui que l'on peut calculer à l'aide de l'approche résistance thermique équivalente...

Cela fait donc appel à vos connaissances scientifiques mais demande également un peu de jugeote.

## 3.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre comment mettre en œuvre la méthode des volumes finis dans le cas très simple d'un problème cartésien 1D stationnaire, avec un matériau homogène et isotrope!

Outre l'expression des bilans et des flux, il est important de retenir ici la méthodologie générale en cinq étapes :

1. Description **physique** du problème avec géométrie, conditions aux limites (y compris aux limites «temporelles» quand nous aurons des problèmes instationnaires), hypothèses etc.

2. Découpage (discrétisation) du système et calcul des différentes caractéristiques géométriques<sup>5</sup> : distances, surfaces et volumes.
3. Écriture des bilans et des flux.
4. Choix de la méthode de résolution numérique et implémentation dans le langage de votre choix.
5. Simulation et analyse critique des résultats obtenus pour savoir s'ils sont **physiquement** acceptables.

Comme vous l'avez remarquer, on part de la physique et arrive à la physique, les étapes intermédiaires étant «juste» des étapes intermédiaires (mais nécessaires).

---

5. Pour ne pas alourdir l'écriture, je considère le temps comme une métrique géométrique comme les trois autres. J'aurais dû écrire «spatio-temporel» mais ça faisait un peu trop «Star Trek».

# Chapitre 4

## Traitement des problèmes instationnaires

### 4.1 Introduction

Nous allons reprendre ici le problème du mur traité dans le chapitre précédent mais en le traitant maintenant d'un point de vue instationnaire, la température étant maintenant fonction de la coordonnée d'espace  $x$  et du temps  $t$ , soit  $T(x, t)$ .

Nous verrons qu'il existe trois grandes méthodes qui ont des implications tant sur la résolution numérique que sur la précision des calculs ou leur rapidité.

### 4.2 Mur en régime instationnaire

Nous allons reprendre rapidement les cinq grandes étapes de résolution en introduisant seulement les évolutions par rapport aux cas stationnaire.

#### Description du système

Il faut ici simplement ajouter la condition à la limite temporelle (i.e. la condition initiale) et la durée totale de l'expérience. Nous complétons donc la description du problème physique en considérant que le temps s'écoule de 0 à  $D$  secondes et que

la condition initiale s'écrit simplement  $T(0) = T^0$ .

### Discrétisation

Il n'y a rien de nouveau pour les (vraies) coordonnées d'espace mais il faut maintenant choisir un découpage temporel. Par habitude, j'introduis un indice temporel  $i$  qui varie de 0 à  $I$  et un pas de temps  $\Delta t$  :

$$t^i = i \cdot \Delta t \quad \text{avec } i = 0 \dots I$$

La condition  $t^I = D$  impose

$$\Delta t = \frac{D}{I}$$

La température (réelle i.e. continue) est donc maintenant une fonction de la coordonnée d'espace  $x$  et du temps  $t$ . Sa jumelle maléfique discrète s'écrira

$$T_m^i = T(x_m, t^i) \quad \text{avec } m = 1 \dots M \text{ et } i = 0 \dots I$$

Par choix personnel, je note toujours mes grandeurs discrètes avec le(s) indice(s) spatiaux en indice et l'indice temporel en exposant (d'où la notation de la condition initiale).

### Flux et bilans

En instationnaire, il suffit de ne pas annuler la dérivée temporelle et le tour est joué :

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \Phi_G + \Phi_D \quad \forall (m, i) = (1 \dots M) \times (0 \dots I) \quad (4.1)$$

Cette expression exprime la conservation (locale) de l'énergie en  $x = x_m$  et à l'instant  $t = t^i$ . En particulier, les flux devront être évalués à cet instant précis.

Bien, que faisons nous de la dérivée temporelle ? Et bien toujours la même rengaine, à savoir la remplacer par son approximation discrète... mais nous en connaissons trois : progressive (à droite), régressive (à gauche) et centrée ?

**Dérivée progressive** Commençons par essayer la dérivée progressive : on évalue l'équation au pas de temps  $i$  et on introduit le pas  $i + 1$  pour la dérivée, ce qui donne

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t^i} = \Phi_G(t^i) + \Phi_D(t^i) \quad (4.2)$$

soit

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} = \Phi_G^i + \Phi_D^i \quad (4.3)$$

ou encore en considérant l'expression des flux pour une cellule centrale :

$$T_m^{i+1} = T_m^i + \underbrace{\frac{\Delta t \cdot \lambda \cdot S}{\rho \cdot C \cdot V \cdot \Delta x}}_{\alpha} \cdot (T_{m-1}^i - 2 \cdot T_m^i + T_{m+1}^i) \quad (4.4)$$

Rappelons que le flux (gauche ou droit)  $\Phi^i$  se calcule à partir des températures au même pas de temps  $i$ . Donc, connaissant la condition initiale  $T^0$ , je connais tous les  $T_m^0$ , donc je peux calculer tous les  $\Phi^0$ . Je peux alors calculer tous les  $T_m^1$ , puis tous les  $T_m^2$ , et ainsi de suite.

Cette approche permet de calculer «explicitement» toutes les températures. On vient de construire le schéma explicite, qui est d'ordre 1 puisque les dérivées décentrées sont d'ordre 1...

**Dérivée régressive** Cette fois-ci on évalue l'équation au pas de temps  $i + 1$  et on introduit le pas  $i$  pour la dérivée, ce qui donne

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t^{i+1}} = \Phi_G(t^{i+1}) + \Phi_D(t^{i+1}) \quad (4.5)$$

soit, en notant  $\alpha$  le coefficient introduit dans l'équation (4.4), on obtient :

$$-\alpha \cdot T_{m-1}^{i+1} + (1 + 2 \cdot \alpha) \cdot T_m^{i+1} - \alpha \cdot T_{m+1}^{i+1} = T_m^i \quad (4.6)$$

On a donc trois inconnues et une équation ! Heureusement, on peut écrire cette même équation sur les  $M$  nœuds (avec quelques variantes sur les bords) ce qui permet d'obtenir un système de  $M$  équations à  $M$  inconnues, qui de plus se met sous forme d'une matrice tri-diagonale à diagonale dominante !

Le travail à effectuer est donc un peu plus difficile, avec la nécessité de résoudre un système matriciel à chaque pas de temps. Dans cet exemple, le système est linéaire

donc cela se fait facilement. Les choses se compliquent légèrement lorsqu'une non-linéarité s'insinue dans le problème, mais ça, c'est une autre histoire !

Ce schéma est dit «implicite» car...l'équation (4.6) contient implicitement la solution, il suffit juste d'aller la chercher.

**Dérivée centrée** Les approximations décentrées de la dérivée première sont de premier ordre, alors que l'approximation centrée est du second, donc pourquoi ne pas essayer ?

Nous allons donc évaluer l'équation bilan «au milieu» de l'intervalle <sup>1</sup>, ce qui donne :

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t^{i+1/2}} = \Phi_G(t^{i+1/2}) + \Phi_D(t^{i+1/2}) \quad (4.7)$$

En remplaçant les flux par leur expression, on obtient

$$T_m^{i+1} = T_m^i + \alpha \cdot (T_{m-1}^{i+1/2} - 2 \cdot T_m^{i+1/2} + T_{m+1}^{i+1/2}) \quad (4.8)$$

Malheureusement, on ne connaît (et on ne veut pas connaître) pas l'expression de la température aux demi-pas. On va donc estimer les  $T_m^{i+1/2}$  en interpolant à partir des valeurs  $T_m^{i+1}$  et  $T_m^i$ , soit

$$T_m^{i+1/2} = \frac{T_m^i + T_m^{i+1}}{2} \quad (4.9)$$

Cela permet de réécrire l'équation bilan sous la forme

$$T_m^{i+1} = T_m^i + \frac{\alpha}{2} \cdot (T_{m-1}^i + T_{m-1}^{i+1} - 2 \cdot T_m^i - 2 \cdot T_m^{i+1} + T_{m+1}^i + T_{m+1}^{i+1}) \quad (4.10)$$

soit en réorganisant

$$-\frac{\alpha}{2} \cdot T_{m-1}^{i+1} + (1 + \alpha) \cdot T_m^{i+1} - \frac{\alpha}{2} \cdot T_{m+1}^{i+1} = +\frac{\alpha}{2} \cdot T_{m-1}^i + (1 - \alpha) \cdot T_m^i + \frac{\alpha}{2} \cdot T_{m+1}^i \quad (4.11)$$

---

1. On peut évidemment l'évaluer en n'importe quel point de l'intervalle  $]t^i, t^{i+1}[$ , ce qui permet de construire toutes une série de méthodes semi-implicites.

On obtient une expression à mi-chemin entre celles obtenues pour les schémas implicite et explicite. Il est donc nécessaire de résoudre un système matriciel à chaque itération.

Cette discrétisation temporelle porte le nom de schéma de Crank-Nicholson.

### Résolution et analyse des résultats

Je ne vais pas rentrer dans le détail de ces deux dernières étapes étant donné que nous avons trois schémas différents pour la discrétisation temporelle. Nous aurons l'occasion d'appliquer ces étapes dans les futurs exemples.

## 4.3 Stabilité numérique

Nous avons trois schémas temporels mais pourquoi se compliquer la vie en utilisant un schéma implicite (ou semi-implicite) alors que l'explicite est simple à mettre en œuvre ?

### 4.3.1 Schéma (semi-)implicite

Rappelons d'abord que le schéma semi-implicite possède l'avantage d'être du second ordre puisque la dérivée centrée est elle-même du second ordre.

Les schémas (semi-)implicites sont dit inconditionnellement stables : on peut choisir n'importe quelle valeur du pas de temps et obtenir un résultat qui ne diverge pas ! Cette vision est évidemment celle des mathématiciens et ne pas diverger ne veut pas forcément dire converger vers une solution physiquement acceptable. Il paraît en effet évident que le pas de temps retenu doit être (très) inférieur à la constante de temps du phénomène physique que vous voulez capter.

### 4.3.2 Schéma explicite

Le schéma explicite peut lui diverger si le pas de temps est trop grand, et il est assez simple de comprendre pourquoi. Considérons pour simplifier un nœud à la

température  $T_1$  échangeant avec un seul autre nœud à la température  $T_2 > T_1$ . Le flux de 2 vers 1 étant proportionnel à l'écart de température, son expression à un instant  $t$  est de type  $\Phi = k \cdot (T_2 - T_1)$ ,  $k$  étant une constante quelconque (mais positive). Avec le schéma explicite, ce flux est supposé constant sur l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ . Or, physiquement, cet échange devrait faire diminuer  $T_2$  et augmenter  $T_1$  et donc diminuer progressivement le flux. Le schéma explicite surestime donc les échanges ! La seule façon de corriger le tir est de remettre à jour le plus souvent possible les températures et les flux et donc choisir un pas de temps suffisamment petit.

Une expression du pas de temps optimal peut se déduire de l'équation (4.4) que l'on peut réécrire

$$T_m^{i+1} = T_m^i \cdot \left( 1 - 2 \cdot \frac{\Delta t \cdot \lambda \cdot S}{\rho \cdot C \cdot V \cdot \Delta x} \right) + \underbrace{\frac{\Delta t \cdot \lambda \cdot S}{\rho \cdot C \cdot V \cdot \Delta x} \cdot (T_{m-1}^i + T_{m+1}^i)}_{\text{partie négligée}} \quad (4.12)$$

En ne considérant que le terme d'indice  $m$ , on considère que le schéma ne diverge pas si  $T_m$  ne change pas de signe à chaque itération, soit

$$1 - 2 \cdot \frac{\Delta t \cdot \lambda \cdot S}{\rho \cdot C \cdot V \cdot \Delta x} > 0 \quad (4.13)$$

En remarquant que

$$\frac{S}{V} = \frac{S}{S \cdot \Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \quad (4.14)$$

et en réorganisant un peu l'expression précédente, on obtient finalement l'inégalité qui exprime le critère de convergence :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{\rho \cdot C}{2 \cdot \lambda} \quad (4.15)$$

Cette expression est évidemment à considérer comme une indication et est d'ailleurs ici spécifique au problème du mur utilisé ici comme exemple. Cependant, on peut en déduire des tendances générales.

On notera ainsi la dépendance entre les pas de temps et d'espace, plus le maillage en espace est fin et plus le pas de temps doit être petit.



On notera aussi que plus l'inertie thermique est élevée (produit  $\rho \cdot C$ ) plus le pas de temps peut être pris grand. Inversement, plus le matériau est conducteur, plus  $\Delta t$  doit être petit.

## 4.4 Conclusion

Nous avons maintenant fait le tour des aspects liés à l'obtention des équations discrètes permettant de résoudre numériquement le problème physique :

- la discrétisation spatiale qui consiste à découper le système en sous-systèmes (ou nœuds) sur lesquels toutes les grandeurs sont supposées constantes et sur lesquels les bilans seront écrits ;
- la discrétisation spatiale qui peut être faite selon un schéma explicite, implicite ou semi-implicite (Crank-Nicholson).

Les schémas (semi-)implicites sont inconditionnellement stables et donnent un résultat quelle que soit la valeur de  $\Delta t$ , ce résultat pouvant ne pas avoir de réalité physique ! Le schéma explicite, plus simple à implémenter surtout dans les cas non-linéaires, impose de respecter un critère de convergence qui lie  $\Delta t$  et  $\Delta x^2$ .

Les prochains chapitres seront l'occasion d'appliquer ces schémas sur différentes géométries. Nous en profiterons pour introduire d'autres types de conditions à la limite.



# Chapitre 5

## Mur instationnaire — semi-implicite

### 5.1 Introduction

Ce court chapitre va être l’occasion d’appliquer le schéma de Crank-Nicholson sur le problème du mur largement détaillé dans les deux précédents chapitres. Il servira surtout de prétexte à introduire un peu de code informatique et à vous donner la structure classique de ce type de code.

### 5.2 Rappel des équations

Nous avons déjà établi l’équation algébrique (4.11) pour les nœuds centraux :

$$-\frac{\alpha}{2} \cdot T_{m-1}^{i+1} + (1 + \alpha) \cdot T_m^{i+1} - \frac{\alpha}{2} \cdot T_{m+1}^{i+1} = +\frac{\alpha}{2} \cdot T_{m-1}^i + (1 - \alpha) \cdot T_m^i + \frac{\alpha}{2} \cdot T_{m+1}^i \quad (5.1)$$

avec  $\alpha$  défini dans l’équation (4.4) :

$$\alpha = \frac{\Delta t \cdot \lambda \cdot S}{\rho \cdot C \cdot V \cdot \Delta x} = \frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot C \cdot \Delta x^2} \quad (5.2)$$

En reprenant le même traitement pour les deux nœuds frontières, on obtient :

$$\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \alpha\right) \cdot T_1^{i+1} - \frac{\alpha}{2} \cdot T_2^{i+1} = 2 \cdot \alpha \cdot T_G + \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \alpha\right) \cdot T_1^i + \frac{\alpha}{2} \cdot T_2^i \quad (5.3)$$

et

$$-\frac{\alpha}{2} \cdot T_{M-1}^{i+1} + \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \alpha\right) \cdot T_M^{i+1} = 2 \cdot \alpha \cdot T_D + \frac{\alpha}{2} \cdot T_{M-1}^i + \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \alpha\right) \cdot T_M^i \quad (5.4)$$

Ces équations peuvent se mettre sous la forme d'un système matriciel :

$$[A]\{T\}^{i+1} = [B]\{T\}^i + \{C\} \quad (5.5)$$

avec

$$[A] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{3\alpha}{2}\right) & -\frac{\alpha}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & (1 + \alpha) & -\frac{\alpha}{2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\frac{\alpha}{2} & (1 + \alpha) & -\frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -\frac{\alpha}{2} & (1 + \alpha) & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\frac{\alpha}{2} & \left(1 + \frac{3\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{3\alpha}{2}\right) & \frac{\alpha}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{\alpha}{2} & (1 - \alpha) & \frac{\alpha}{2} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{\alpha}{2} & (1 - \alpha) & \frac{\alpha}{2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{\alpha}{2} & (1 - \alpha) & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{\alpha}{2} & \left(1 - \frac{3\alpha}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

$$\{T\}^i = \begin{pmatrix} T_1^i \\ T_2^i \\ \vdots \\ T_m^i \\ \vdots \\ T_{M-1}^i \\ T_M^i \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

(idem pour  $\{T\}^{i+1}$ ) et

$$\{C\} = \begin{pmatrix} T_G \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ T_D \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Le système (5.5) peut être réécrit sous la forme itérative suivante :

$$\{T\}^{i+1} = \underbrace{[A]^{-1}[B]\{T\}^i}_{[A']} + \underbrace{[A]^{-1}\{C\}}_{\{C'\}} = [A']\{T\}^i + \{C'\} \quad (5.10)$$

De cette écriture, on devine la structure du code informatique qui permet d'obtenir le résultat.

## 5.3 Implémentation

Nous allons utiliser ici le langage Scilab qui va nous éviter d'avoir à exhumier les routines d'inversion de matrices... Le code correspondant se trouve dans le répertoire `mur-ista` du compte `github`.

La première étape consiste à définir toutes les informations décrivant le problème, puis à calculer les matrices  $[A]$  et  $[B]$  et le vecteur  $\{C\}$ . On en déduit ensuite la matrice  $[A']$  et le vecteur  $\{C'\}$ .

La condition initiale permet d'initialiser le vecteur  $\{T\}^0$ , puis on utilise l'équation (5.10) pour calculer les vecteurs  $\{T\}^1$ ,  $\{T\}^2$  jusqu'à  $\{T\}^I$

Une question fondamentale qu'il faut se poser au moment de l'écriture du code concerne la façon dont les résultats vont être stockés et exploités. Ici, je vais utiliser un tableau à deux dimensions, donc deux indices

Je vous laisse donc découvrir le code, l'exécuter et expérimenter. Voici juste un exemple de résultat (fig. 5.1) pour le cas nominal contenu dans le code.

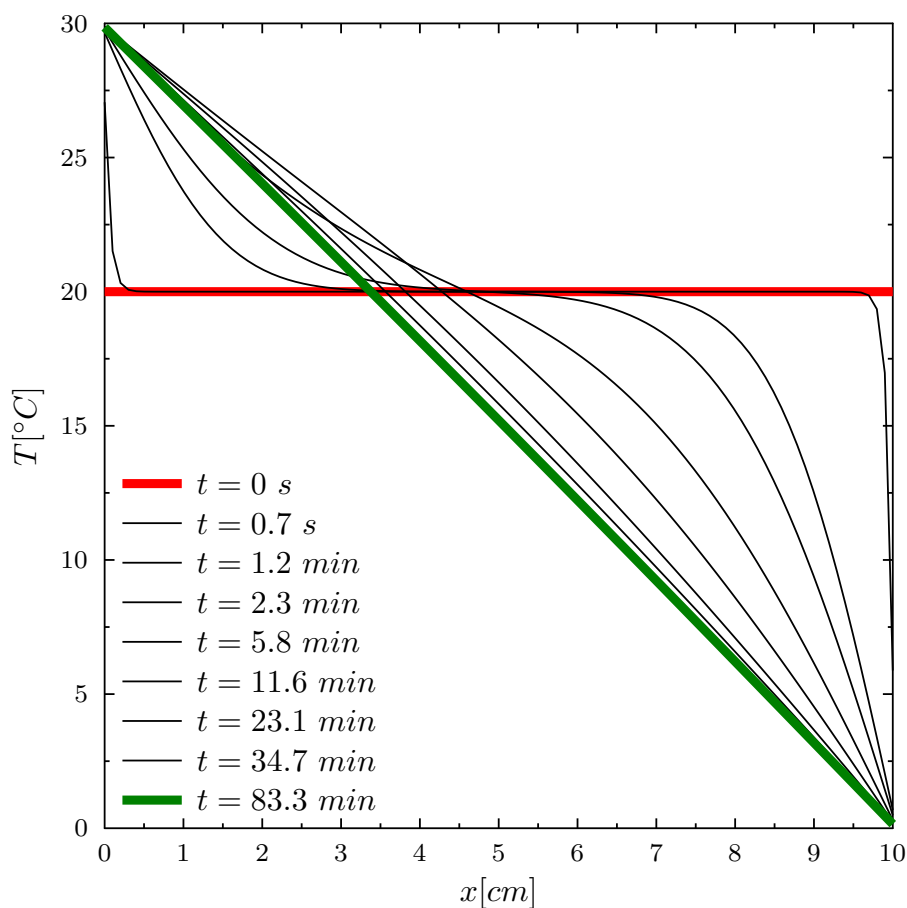


FIGURE 5.1 – Exemple de résultats pour le code `mur-insta`

On a donc bien un mur initialement à 20°C (courbe rouge) auquel on impose à  $t = 0$  une température de 30°C en  $x = 0$  et 0°C en  $x = 10$  cm. La température évolue en conséquence jusqu'à tendre vers la solution stationnaire qui, conformément à la théorie, est une fonction linéaire de la position  $x$ .

# Chapitre 6

## Sphère 1D — Schéma explicite

### 6.1 Introduction

Nous allons ici aborder notre premier projet en géométrie non-cartésienne. Vous constaterez cependant que cela ne complique pas vraiment la résolution du problème (Ouf!).

Nous verrons également comment introduire une condition de symétrie (ou d'adiabaticité) et d'échange convectif.

### 6.2 Description du problème

Nous considérons ici une sphère solide (cf. figure 6.1) de rayon  $R$  caractérisée par le classique trio de propriétés thermophysiques  $\rho$ ,  $C$  et  $\lambda$ .

Initialement à la température  $T^0$ , cette sphère est placée dans un fluide à la température  $T_\infty$  à partir de l'instant  $t = 0$ . L'échange solide-fluide est modélisé par un coefficient d'échange global  $H$ .

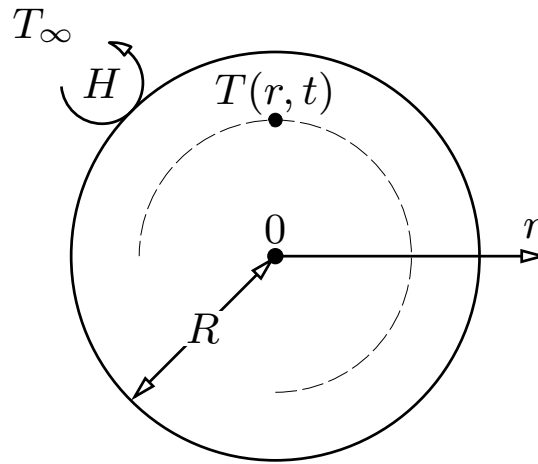


FIGURE 6.1 – Trempe d'une sphère

## 6.3 Discrétisations

Nous avons un problème 1D instationnaire traité en température. On notera  $T_m^i$  la grandeur discrète associée à la grandeur physique et continue  $T(r, t)$ .

### 6.3.1 Discrétisation spatiale

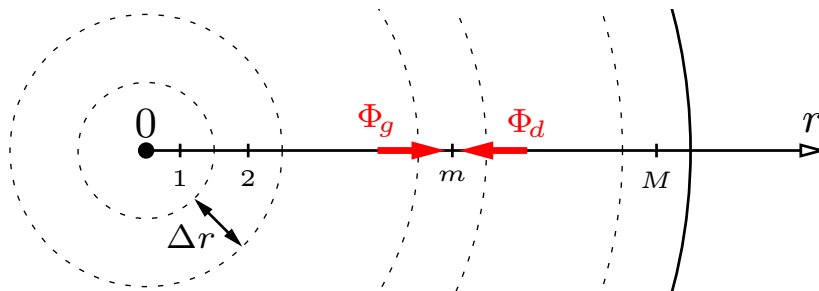


FIGURE 6.2 – Maillage de la sphère 1D

La discrétisation spatiale retenue est représentée sur la figure 6.2. Il s'agit ici encore d'un maillage uniforme, le rayon étant découpé en  $M$  couronnes sphériques



d'épaisseur  $\Delta r$  constante, soit :

$$\Delta r = \frac{R}{M} \quad (6.1)$$

On notera ici le fait que les interfaces entre les différents volumes correspondent à des indices demi-entiers<sup>1</sup>. En particulier, le centre se trouve en  $1 - 1/2$  et la frontière externe en  $M + 1/2$ . On en déduit le lien entre indice et position radiale :

$$r_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta r \quad (6.2)$$

Nous noterons  $S_m$  la surface de la sphère de rayon  $r_m$  :

$$S_m = 4 \cdot \pi \cdot r_m^2 = 4 \cdot \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \Delta r^2 \quad (6.3)$$

Le volume  $V_m$  est celui de la couronne sphérique délimitée par les rayons  $r_{m-1/2}$  et  $r_{m+1/2}$  :

$$V_m = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r_{m+1/2}^3 - r_{m-1/2}^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (3 \cdot m^2 - 3 \cdot m + 1) \cdot \pi \cdot \Delta r^3 \quad (6.4)$$

### 6.3.2 Discrétisation temporelle

On conserve le même choix que pour le cas du mur, avec un pas de temps  $\Delta t$  et des indices allant de  $i = 0$  à  $I$  et une durée totale de  $D$  secondes :

$$t_i = (i - 1) \cdot \Delta t \quad \text{avec} \quad \delta t = \frac{D}{I - 1} \quad (6.5)$$

---

1. Ce n'est malheureusement pas la notation la plus pratique lorsqu'on aborde l'implémentation. Nous y reviendrons dans la partie correspondante.

## 6.4 Bilans, flux et schéma temporel

Il est plus facile et rapide d'avoir en tête le schéma temporel (explicite ou implicite) avant d'écrire les bilans et flux car la forme finale de ces expressions diffère légèrement. Nous allons ici retenir un schéma explicite.

Les bilans s'écrivent aussi simplement que pour le cas précédent. Il faut cependant faire attention que les volumes ne sont pas constants. on obtient, directement sous forme discrète :

$$\rho \cdot C \cdot V_m \cdot \frac{T_m^{i+1} - T_m^i}{\Delta t} = \Phi_g^i + \Phi_d^i \quad \text{avec } m = 1 \dots M \text{ et } i = 0 \dots I \quad (6.6)$$

Les flux  $\Phi_g$  et  $\Phi_d$  sont représentés sur la figure 6.2 et sont orientés vers le nœud courant (comme d'habitude).

**Le flux gauche**  $\Phi_g$  possède deux expressions<sup>2</sup> selon le numéro du nœud. La condition de symétrie au centre (mais également le fait que la surface est nulle...) impose naturellement :

$$\Phi_g^i = 0 \quad \text{pour } m = 1$$

Pour les autres nœuds  $m = 2 \dots M$ , on a une expression de type conductif. Puisque la composante radiale du vecteur gradient en sphérique a la même expression qu'en cartésien, on trouve :

$$\Phi_g^i = \frac{\lambda \cdot S_{m-1/2}}{\Delta r} \cdot (T_{m-1}^i - T_m^i) \quad \text{pour } m = 2 \dots M$$

**Le flux droit**  $\Phi_d$  possède lui aussi deux expressions. Pour les nœuds centraux ( $m = 1 \dots M - 1$ ), on a un flux conductif :

$$\Phi_d^i = \frac{\lambda \cdot S_{m+1/2}}{\Delta r} \cdot (T_{m+1}^i - T_m^i) \quad \text{pour } m = 1 \dots M - 1$$

---

2. Pour simplifier les écritures, je ne mettrais les indices d'espace et de temps que lorsque c'est nécessaire.

Le traitement du nœud extérieur demande un peu plus de travail dans la mesure où nous avons une condition d'échange convectif. Le traitement complet consiste à écrire la continuité du flux en  $r = R$ , avec d'un côté une loi de Newton et de l'autre une loi de Fourier. Cette écriture nécessite d'introduire la température de l'interface.

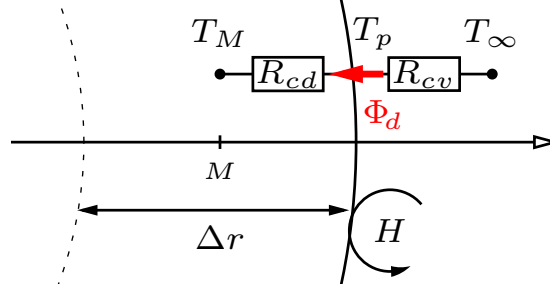


FIGURE 6.3 – Analogie électrique pour une condition d'échange convectif

Une solution approchée mais plus simple consiste à utiliser (encore) une analogie électrique, comme représentée sur la figure 6.3.

On y voit deux résistances :

- $R_{cd} = \frac{\Delta r/2}{\lambda \cdot S_{M+1/2}}$  qui correspond à la partie conductive (sur une demi-épaisseur de maille) ;
- $R_{cv} = \frac{1}{H \cdot S_{M+1/2}}$  qui correspond à la partie convective ;

Cela donne sans trop de calcul :

$$\Phi_d^i = \frac{1}{R_{cd} + R_{cv}} \cdot (T_\infty^i - T_M^i) \quad \text{pour } m = M$$

ou, en développant un peu :

$$\Phi_d^i = \frac{S_{M+1/2}}{\frac{\Delta r}{2 \cdot \lambda} + \frac{1}{H}} \cdot (T_\infty^i - T_M^i) \quad \text{pour } m = M$$

Cette dernière expression montre que si le matériau est bon conducteur thermique ( $\lambda$  «grand») alors le terme «conductif» peut être négligé par rapport au terme convectif (sauf évidemment si le coefficient d'échange est lui aussi très grand).

Dans ce cas, on a une expression simplifiée classique :

$$\Phi_d^i \approx H \cdot S_{M+1/2} \cdot (T_\infty^i - T_M^i)$$

Dans le cas inverse où la conduction est limitante, la forme est celle d'un flux conductif et on a :

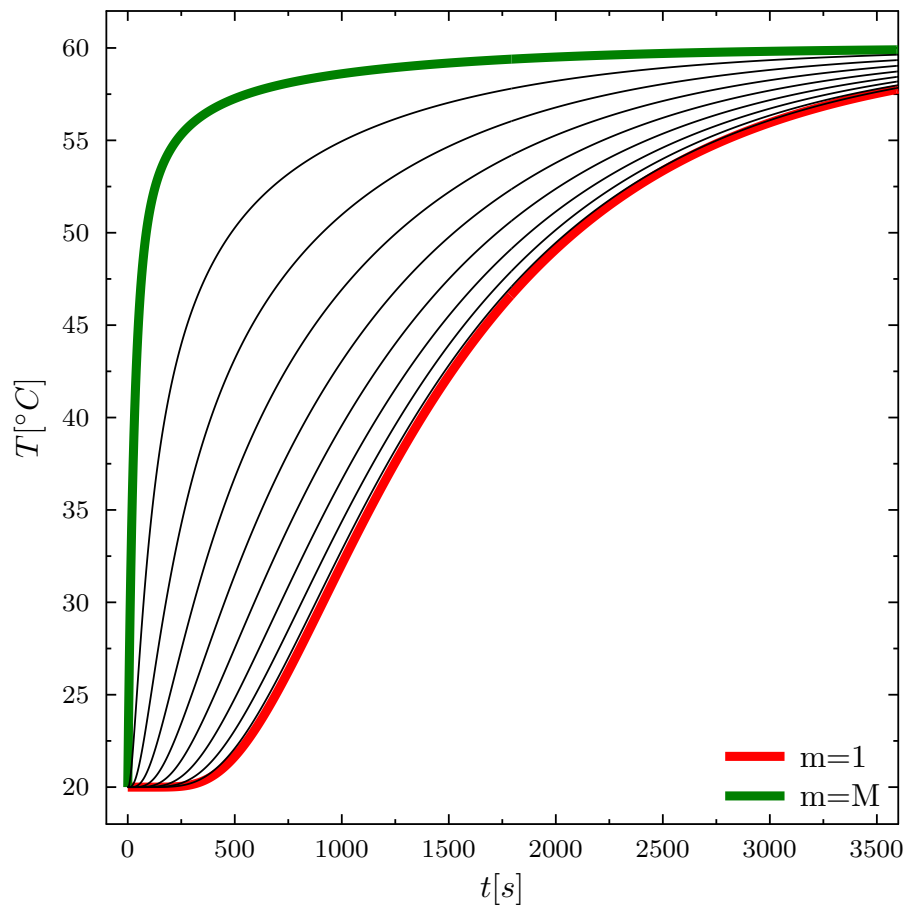
$$\Phi_d^i \approx \frac{2 \cdot \lambda}{\Delta r} \cdot S_{M+1/2} \cdot (T_\infty^i - T_M^i)$$

Quand on ne sait pas ? Et bien on garde l'expression générale !

## 6.5 Implémentation

Ici, pas de matrice à inverser donc on peut ressortir notre bon vieux Fortran... Le code correspondant se trouve dans le répertoire `sphere-1d-expl` du compte `github`.

Je vous laisse encore une fois faire mumuse avec le code. La figure 6.4 montre le résultat obtenu.

FIGURE 6.4 – Exemple de résultats pour le code `sphere-1d`



# Chapitre 7

## Cartésien 2D — Schéma implicite

### 7.1 Introduction

Nous allons ici traiter notre premier problème à plus d'une dimension. La méthodologie reste toujours la même, seules les notations sont un peu plus lourdes avec deux indices spatiaux.

Le choix d'un schéma implicite implique cependant un traitement informatique un peu particulier. Mais encore une fois, quand on connaît l'astuce à mettre en œuvre, cela devient un faux problème...

Allons-y !

### 7.2 Description du problème

Nous avons donc un domaine rectangulaire de dimension  $L_x \times L_y$ . Le matériau, homogène et isotrope, est caractérisé par les constantes  $\rho$ ,  $C$  et  $\lambda$  (cf. figure 7.1).

Nous avons deux parois adiabates ( $x = 0$  et  $y = 0$ ), des échanges convectifs sur les parois  $x = L_x$  et  $y = L_y$  ainsi qu'une densité de flux constante  $\varphi$  sur la surface supérieure (juste pour le plaisir). On considérera cependant que ce sont les transferts convectifs qui sont limitants...

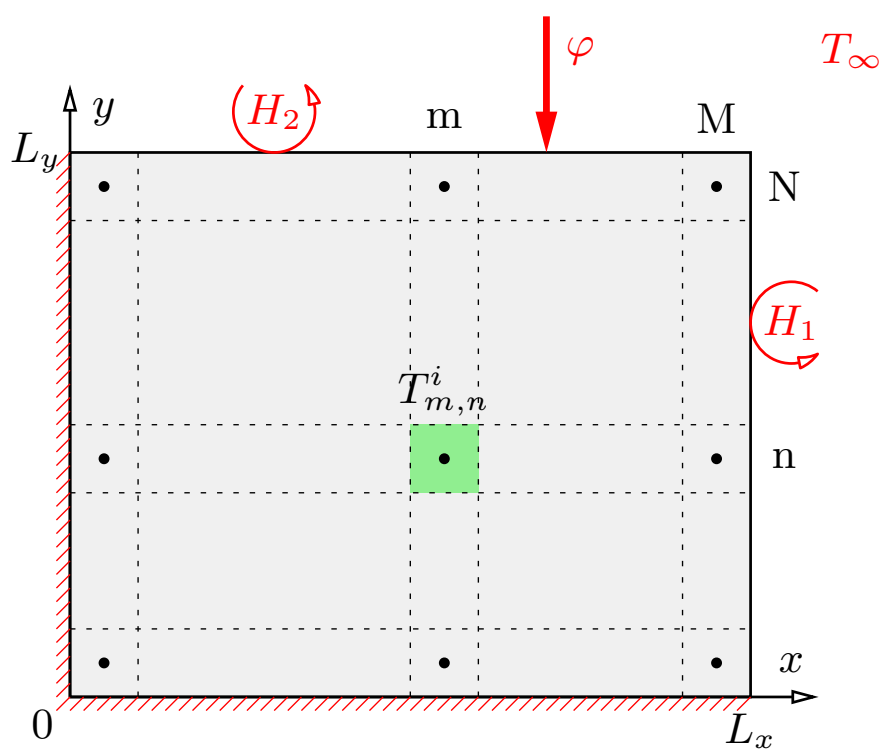


FIGURE 7.1 – Géométrie du problème cartésien 2D



### 7.3 Discrétisation

Comme on peut le voir sur la figure 7.1, le maillage (régulier) est construit en découpant le domaine en  $M$  intervalles selon  $x$  et  $N$  intervalles selon  $y$ . On obtient donc directement les relations reliant les grandeurs réelles et les indices :

$$x_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta x \quad \text{avec} \quad \Delta x = \frac{L_x}{M} \quad \text{et} \quad m = 1 \dots M$$

et

$$y_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \Delta y \quad \text{avec} \quad \Delta y = \frac{L_y}{N} \quad \text{et} \quad n = 1 \dots N$$

La discrétisation en temps sera identique à celle du problème précédent. La température discrétisée sera donc finalement notée  $T_{m,n}^i \equiv T(x_m, y_n, t^i)$

La figure 7.2 permet de préciser l'environnement du nœud courant  $(m, n)$ .

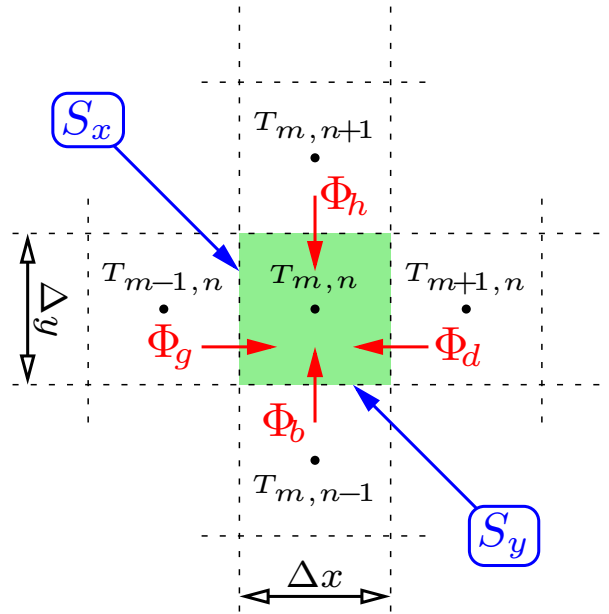


FIGURE 7.2 – Détail du nœud courant

En notant  $\varepsilon$  l'épaisseur (arbitraire) du domaine, on obtient pour les surfaces :

$$S_x = \varepsilon \cdot \Delta y$$

et

$$S_y = \varepsilon \cdot \Delta x$$

et pour le volume :

$$V = \varepsilon \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

## 7.4 Bilan, flux et schéma temporel

Nous avons donc choisi d'utiliser un schéma implicite. Cela donne :

$$\rho \cdot C \cdot V \cdot \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t} = \Phi_g^{i+1} + \Phi_d^{i+1} + \Phi_h^{i+1} + \Phi_b^{i+1}$$

Comme nous en avons maintenant l'habitude, les flux s'écrivent (sans les indices temporels  $i + 1$ ) :

$$\Phi_g = \begin{cases} 0 & \forall n \text{ et } m = 1 \\ \frac{\lambda \cdot S_x}{\Delta x} \cdot (T_{m-1,n} - T_{m,n}) & \forall n \text{ et } m = 2 \dots M \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\Phi_d = \begin{cases} H_1 \cdot S_x \cdot (T_\infty - T_{m,n}) & \forall n \text{ et } m = M \\ \frac{\lambda \cdot S_x}{\Delta x} \cdot (T_{m+1,n} - T_{m,n}) & \forall n \text{ et } m = 1 \dots M - 1 \end{cases} \quad (7.2)$$

On utilise ici la simplification venant du fait que le transfert convectif à la paroi est limitant.

$$\Phi_b = \begin{cases} 0 & \forall m \text{ et } n = 1 \\ \frac{\lambda \cdot S_y}{\Delta y} \cdot (T_{m,n-1} - T_{m,n}) & \forall m \text{ et } n = 2 \dots N \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\Phi_h = \begin{cases} H_2 \cdot S_x \cdot (T_\infty - T_{m,n}) + \varphi \cdot S_x & \forall m \text{ et } n = N \\ \frac{\lambda \cdot S_y}{\Delta y} \cdot (T_{m,n+1} - T_{m,n}) & \forall m \text{ et } n = 1 \dots N - 1 \end{cases} \quad (7.4)$$

Notez ici la prise en compte (très simple) d'une condition de (densité de) flux imposée !

### 7.4.1 Équations algébriques

Bien, la suite est nettement moins marrante, surtout lorsqu'on doit saisir toutes les équations pour rédiger un polycopié ! En effet, nous avons ici neufs équations différentes à écrire ! Quand faut y aller, faut y aller...

Je vais ici vous donner les expressions finales et je vous laisse refaire les calculs pour vérifier que je ne me suis pas trompé.

J'aurai besoin de quelques constantes :

$$\beta_x = \frac{\lambda \cdot \Delta t}{\rho \cdot C \cdot \Delta x^2}$$

$$\beta_y = \frac{\lambda \cdot \Delta t}{\rho \cdot C \cdot \Delta y^2}$$

$$\gamma_x = \frac{\Delta t}{\rho \cdot C \cdot \Delta x}$$

et

$$\gamma_y = \frac{\Delta t}{\rho \cdot C \cdot \Delta y}$$

**Centre :**  $m = 2 \dots M - 1$  et  $n = 2 \dots N - 1$

$$\begin{aligned} -\beta_y \cdot T_{m,n-1}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{m-1,n}^{i+1} + (1 + 2 \cdot \beta_x + 2 \cdot \beta_y) \cdot T_{m,n}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{m+1,n}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{m,n+1}^{i+1} \\ = T_{m,n}^i \end{aligned}$$

**Côté «gauche» :**  $m = 1$  et  $n = 2 \dots N - 1$

$$-\beta_y \cdot T_{1,n-1}^{i+1} + (1 + \beta_x + 2 \cdot \beta_y) \cdot T_{1,n}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{2,n}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{1,n+1}^{i+1} = T_{1,n}^i$$

**Côté «droit» :**  $m = M$  et  $n = 2 \dots N - 1$

$$\begin{aligned} -\beta_y \cdot T_{M,n-1}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{M-1,n}^{i+1} + (1 + \gamma_x \cdot H_1 + \beta_x + 2 \cdot \beta_y) \cdot T_{M,n}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{M,n+1}^{i+1} \\ = T_{M,n}^i + \gamma_x \cdot H_1 \cdot T_\infty \end{aligned}$$

**Côté «bas» :**  $m = 2 \dots M - 1$  et  $n = 1$

$$-\beta_x \cdot T_{m-1,1}^{i+1} + (1 + 2 \cdot \beta_x + \beta_y) \cdot T_{m,1}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{m+1,1}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{m,2}^{i+1} = T_{m,1}^i$$

**Côté «haut» :**  $m = 2 \dots M - 1$  et  $n = N$

$$\begin{aligned} -\beta_x \cdot T_{m-1,N}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{m,N-1}^{i+1} + (1 + 2 \cdot \beta_x + \beta_y + \gamma_y \cdot H_2) \cdot T_{m,N}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{m+1,N}^{i+1} \\ = T_{m,N}^i + \gamma_y \cdot H_2 \cdot T_\infty + \gamma_y \cdot \varphi \end{aligned}$$

**Angle «bas-gauche» :**  $m = 1$  et  $n = 1$

$$(1 + \beta_x + \beta_y) \cdot T_{1,1}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{2,1}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{1,2}^{i+1} = T_{1,1}^i$$

**Angle «bas-droite» :**  $m = M$  et  $n = 1$

$$-\beta_x \cdot T_{M-1,1}^{i+1} + (1 + \beta_x + \beta_y + \gamma_x \cdot H_1) \cdot T_{M,1}^{i+1} - \beta_y \cdot T_{M,2}^{i+1} = T_{M,1}^i + \gamma_x \cdot H_1 \cdot T_\infty$$

**Angle «haut-gauche» :**  $m = 1$  et  $n = N$

$$\begin{aligned} & -\beta_y \cdot T_{1,N-1}^{i+1} + (1 + \beta_x + \beta_y + \gamma_y \cdot H_2) \cdot T_{1,N}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{2,N}^{i+1} \\ & = T_{1,N}^i + \gamma_y \cdot H_2 \cdot T_\infty + \gamma_y \cdot \varphi \end{aligned}$$

**Angle «haut-droite» :**  $m = M$  et  $n = N$

$$\begin{aligned} & -\beta_y \cdot T_{M,N-1}^{i+1} - \beta_x \cdot T_{M-1,N}^{i+1} + (1 + \beta_x + \beta_y + \gamma_x \cdot H_1 + \gamma_y \cdot H_2) \cdot T_{M,N}^{i+1} \\ & = T_{M,N}^i + \gamma_x \cdot H_1 \cdot T_\infty + \gamma_y \cdot H_2 \cdot T_\infty + \gamma_y \cdot \varphi \end{aligned}$$

Remarque : *La rédaction décline toute responsabilité en cas d'erreur de frappe !*

## 7.4.2 Ecriture matricielle

Nous avons nos équations algébriques et il suffit maintenant de les écrire sous forme matricielle comme pour le problème du mur... Nous avons cependant une petite difficulté ici : Dans le problème 1D, les températures à une itération donnée s'arrangeaient naturellement dans un vecteur car nous avons qu'un seul indice spatial.

Ici, nous avons deux indices spatiaux, ce qui fait penser naturellement à l'écriture sous la forme d'une matrice. Mais dans ce cas, impossible d'écrire le système d'équation sous la forme matricielle !

En fait, la solution consiste tout simplement à remplacer la numérotation des nœuds à deux indices ( $m$  et  $n$ ) par une numérotation à indice unique  $k$  variant de 1 à  $M \times N$ . Vous pouvez inventer la numérotation qui vous arrange, mais pour ma part, je numérote généralement les nœuds  $k$  en commençant à 1 pour le nœud  $m = 1, n = 1$  puis  $k = 2$  pour  $m = 2, n = 1$  etc. Le nœud  $m = 1, n = 2$  correspond ainsi à  $k = M + 1$  et l'indice  $k = M \times N$  correspond à  $m = M, n = N$ .

L'avantage de ce système est qu'il existe une relation simple (et bijective) entre un couple  $(m, n)$  et l'indice  $k$  :

$$k = m + (n - 1) \cdot M$$

Avec ce choix, notre vecteur-température a la structure suivante :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ \vdots \\ T_{M,1} \\ T_{1,2} \\ \vdots \\ T_{M,M} \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Il «suffit» alors de changer tous les indices dans les équations précédentes pour pouvoir écrire un système matriciel de la forme :

$$[A]\{T\}^{i+1} = \{T\}^i + \{C\} \quad (7.6)$$

Malheureusement c'est assez fastidieux. Heureusement on peut faire beaucoup plus simple au moment de l'implémentation.

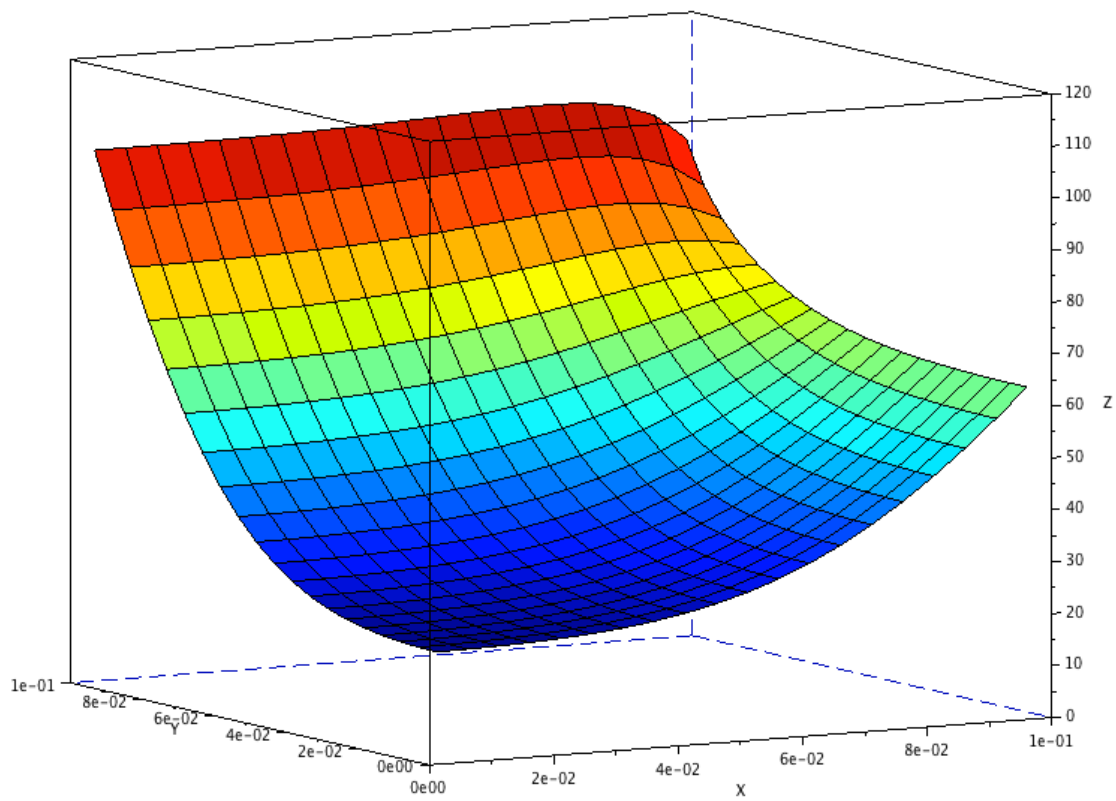
## 7.5 Implémentation

Nous utiliserons ici le langage Scilab qui nous facilitera encore le calcul matriciel.

Le code se trouve dans le répertoire `cart-2d-implicit` sur la page [github](#).

La figure 7.3 représente le champ de températures pendant la phase transitoire...

La validation d'un tel code passe par la vérification de son comportement pour des cas dont on peut prévoir le comportement et la solution stationnaire. Nous verrons ça en TD.

FIGURE 7.3 – Champ de températures pour le code `cart-2d-implicit`





# Chapitre 8

## Cartésien 2D — Schéma explicite et non-linéarités

### 8.1 Introduction

Nous allons reprendre ici le problème du chapitre précédent en intégrant différentes petites variantes :

- Conductivité  $\lambda$  et capacité thermique  $C$  dépendant de la température ;
- Température ambiante  $T_\infty$  variable dans le temps ;
- Source interne ;
- Pas de flux imposé sur la face supérieure ;

Nous verrons donc que le numérique permet de faire très simplement des choses en apparence complexes... à condition de choisir un schéma explicite !

### 8.2 Complément de description du problème

Le système modélisé est celui décrit dans le chapitre précédent.

Nous considérerons que la conductivité est maintenant une fonction linéaire (par exemple) de la température :

$$\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot (T - T_0)$$

Nous utiliserons une même expression pour la dépendance de  $C$  :

$$C(T) = C_0 + C_1 \cdot (T - T_0)$$

La température ambiante sera une fonction du temps, par exemple harmonique :

$$T_\infty(t) = T_0 + \Delta T_\infty \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{P}\right)$$

où  $P$  est la période. Pour simplifier, on suppose ici que la température initiale correspond à la température moyenne de  $T_\infty$ .

### 8.3 Bilan, flux

Nous conservons ici la discrétisation décrite au chapitre précédent.

Avec un schéma explicite, les bilans discrétisés s'écrivent :

$$\rho \cdot C(T_m^i) \cdot V \cdot \frac{T_{m,n}^{i+1} - T_{m,n}^i}{\Delta t} = \Phi_g^i + \Phi_d^i + \Phi_h^i + \Phi_b^i + \sigma \cdot V$$

On remarque que le terme gauche est maintenant évalué au pas de temps  $i$ , que  $C$  est maintenant dépendant de la température toujours au pas de temps  $i$  et que le terme source fait son apparition.

La densité volumique de source  $\sigma$  sera variable en fonction de la position (i.e. du nœud).

*On trouve pas mal de bêtises sur la prise en compte d'une capacité calorifique fonction de la température. La plus classique est la suivante :*

*Au départ on a une expression du style (sous forme locale)*

$$\rho \cdot C \cdot \frac{dT}{dt}$$

*Au moment d'introduire la dépendance en température, on se rappelle vaguement que le  $C$  provient en fait du bilan d'énergie... on s'empresse donc de remettre  $C$  dans la dérivé :*

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} [C(T) \cdot T]$$

*et ensuite, c'est le drame puisque on écrit :*

$$\frac{d}{dt} [C(T) \cdot T] = \frac{dC(T)}{dT} \cdot T(t) + \frac{dT(t)}{dt} \cdot C(T)$$

*et donc logiquement*

$$\frac{dC(T)}{dT} \cdot \frac{dT(t)}{dt} \cdot T(t) + \frac{dT(t)}{dt} \cdot C(T)$$

*Ce qui est faux (et compliqué d'ailleurs) !*

*La faille de ce raisonnement provient du fait qu'il n'y a aucune raison de vouloir réintégrer  $C$  dans la dérivée puisque l'expression à la base de tout est*

$$du = C \cdot dT$$

*est directement écrite sous forme différentielle !*

*Donc, inutile de se compliquer la vie !*

Les deux dernières modifications s'intègrent dans l'expression des flux.

La prise en compte de la température ambiante variable avec le temps se fait très simplement en remplaçant la constante  $T_\infty$  par  $T_\infty(t)$  dans la représentation continue ou par

$$T_\infty^i = T_\infty(t^i) = T_0 + \Delta T_\infty \cdot \sin \left( 2\pi \cdot \frac{i \cdot \Delta t}{P} \right)$$

en représentation discrète.

La dépendance en température de la conductivité nécessite de se poser la question : «où évalue-t'on les flux?» La bonne réponse est évidemment l'interface et il faut donc utiliser la valeur de la conductivité à la température de l'interface.

Comme on ne connaît pas cette température, on va faire une interpolation entre les températures des nœuds de part et d'autre de cette interface. Simple non ?

Le calcul de cette température se fait là encore avec une approche «résistances équivalentes». Dans le cas présent de maillage uniforme, la température à l'interface est simplement la moyenne des deux températures connues.

Nous pouvons donc réécrire les flux (sans les indices non nécessaires et toujours au pas de temps  $i$ ) en intégrant la  $\lambda(T)$  :

$$\Phi_g = \begin{cases} 0 & \forall n \text{ et } m = 1 \\ \frac{\lambda_{m-1/2,n} \cdot S_x}{\Delta x} \cdot (T_{m-1,n} - T_{m,n}) & \forall n \text{ et } m = 2 \dots M \end{cases} \quad (8.1)$$

Je garde ici la notation générale  $\lambda_{m-1/2,n}$  qui signifie «conductivité évaluée à l'interface entre les cellules  $(m, n)$  et  $(m-1, n)$ », soit

$$\lambda_{m-1/2,n} = \lambda(T_{m-1/2,n})$$

ce qui donne pour notre maillage

$$\lambda_{m-1/2,n} = \lambda\left(\frac{T_{m-1/2,n} + T_{m,n}}{2}\right)$$

Cette même notation est utilisée ci-dessous.

$$\Phi_d = \begin{cases} H_1 \cdot S_x \cdot (T_\infty^i - T_{m,n}) & \forall n \text{ et } m = M \\ \frac{\lambda_{m+1/2,n} \cdot S_x}{\Delta x} \cdot (T_{m+1,n} - T_{m,n}) & \forall n \text{ et } m = 1 \dots M-1 \end{cases} \quad (8.2)$$

On utilise ici la simplification venant du fait que le transfert convectif à la paroi est limitant.

$$\Phi_b = \begin{cases} 0 & \forall m \text{ et } n = 1 \\ \frac{\lambda_{m,n-1/2} \cdot S_y}{\Delta y} \cdot (T_{m,n-1} - T_{m,n}) & \forall m \text{ et } n = 2 \dots N \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\Phi_h = \begin{cases} H_2 \cdot S_x \cdot (T_\infty^i - T_{m,n}) & \forall m \text{ et } n = N \\ \frac{\lambda_{m,n+1/2} \cdot S_y}{\Delta y} \cdot (T_{m,n+1} - T_{m,n}) & \forall m \text{ et } n = 1 \dots N-1 \end{cases} \quad (8.4)$$

## 8.4 Implémentation

Nous utilisons ici le langage Fortran (pas d'inversion de matrice!). Le code est disponible, toujours sur le même site, dans le répertoire `cart-2d-explicit`.

Vous remarquerez que sa structure est très similaire au code du problème de la sphère. Prenez le temps de bien vous imprégner de cette structure qui va nous suivre dans presque tous les exemples qui vont suivre.

En effet, bien que le schéma explicite peut poser des problèmes de convergences et donc obliger à utiliser des pas de temps faibles i.e. des temps de calculs longs, il permet de gérer beaucoup plus facilement les problèmes sympathiques. Il possède aussi l'énorme avantage de pouvoir découpler l'écriture des bilans et de tous les flux, ce qui pour un Physicien est un avantage énorme.

Justement, respecter le critère de convergence impose généralement de résoudre avec un pas de temps (beaucoup) plus faible que celui dont on a besoin. Il est donc inutile (et même certaines fois impossible) de stocker toutes ces valeurs. On est donc amené à découpler les pas de temps de résolution  $\Delta t$  et le pas de temps «de sauvegarde». Le code de cette exemple implémente cette technique.

Bonne lecture !

La figure 8.1 montre quelques résultats. On voit bien l'influence de la condition de température  $T_\infty$  périodique (période de 600 s que l'on peut observer) et des sources internes.

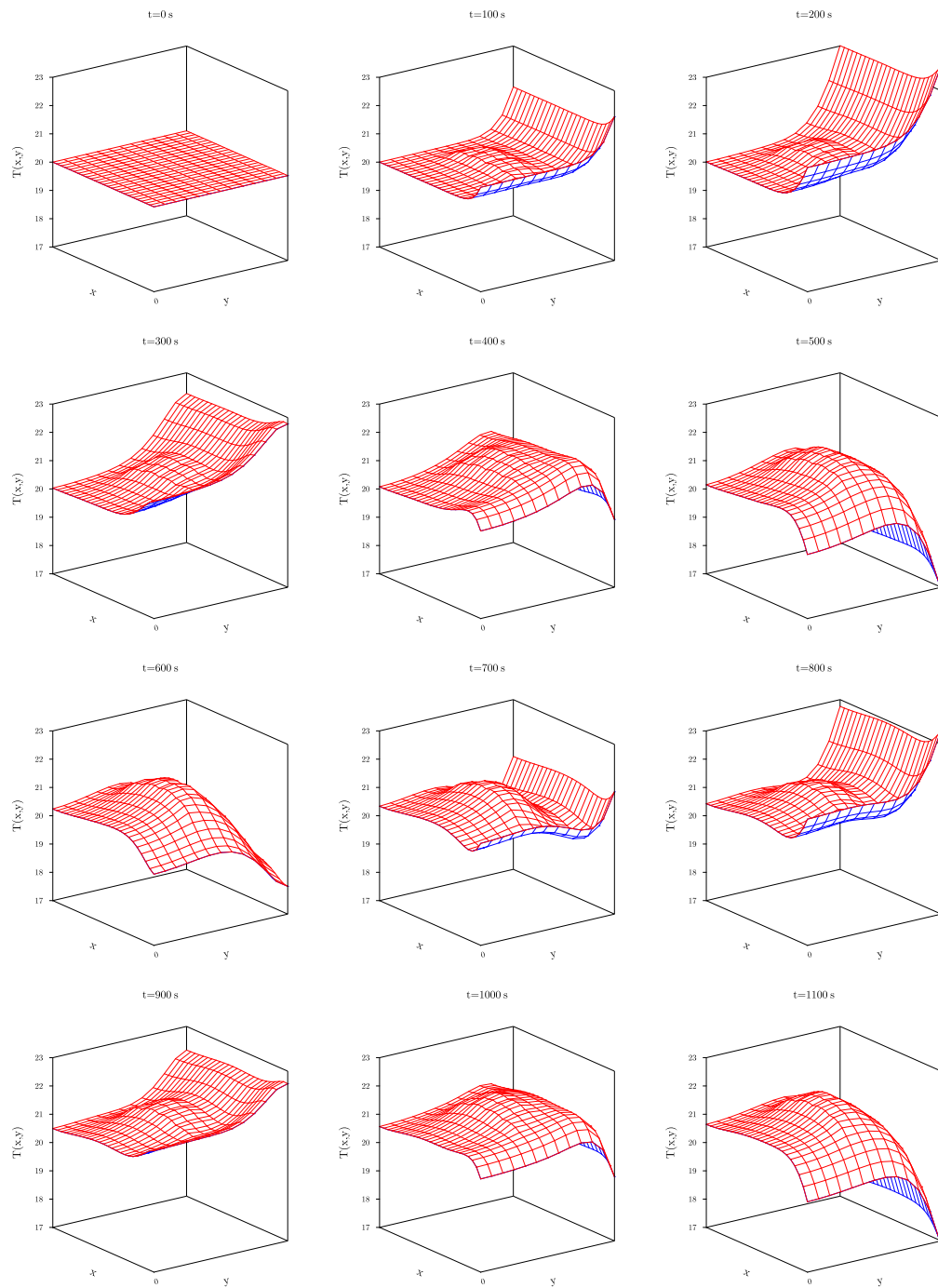


FIGURE 8.1 – Champs de température pour le code `cart-2d-explicit`

# Chapitre 9

## Changement de phase

### 9.1 Introduction

Nous allons ici aborder la modélisation des transferts avec changement de phases. Nous verrons que la formulation enthalpique permet de traiter ce type de problème très facilement. Et nous ne serons même pas limités au cas du corps pur !

Une autre bonne nouvelle est que le travail à faire pour passer d'un problème sans changement de phases (résolu en température) à un problème avec changement de phases ne nécessite que quelques aménagements simples et rapides.

Bref, que du bonheur !

### 9.2 Méthode

Raisonnons pour le moment sur le cas le plus «contraignant» du changement de phase du corps pur et considérons un volume élémentaire solide qui reçoit de l'énergie. Sa température va d'abord augmenter, puis se stabiliser à la température de fusion le temps de «consommer» la chaleur latente, puis repartir à la hausse dès la fin de la fusion. Classique !

Si on imagine l'équation qui se cache derrière ce comportement, on est très gêné par le fait que la température doit rester constante pendant que l'énergie du volume élémentaire augmente, ce qui met en défaut l'équation  $\rho dh = \rho c_p dT$  (page

12). On ne peut donc pas remplacer l'enthalpie par son expression en température dans l'équation bilan. On est donc contraint de résoudre le problème en enthalpie directement.

*Certains auteurs s'obstinent à résoudre en température puis à «bidouiller» l'algorithme de résolution avec des raisonnements du style :*

*« Oops, j'ai chauffé et la température de mon volume élémentaire vient de dépasser la température de fusion alors qu'il était solide ! Il faut donc que je «récupère» l'énergie qui j'ai utilisé pour réchauffer au-delà de la température de fusion et la réaffecter à la «consommation» de la chaleur latente.*

*Mais attention que si je fonds «trop», cela veut dire que j'ai affecté de l'énergie à la fusion alors que celle-ci est finie et qu'il aurait fallu que je l'affecte à la partie sensible. . . »*

*Et il faut également traiter le cas d'un flux «sortant» !*

*Je vous laisse deviner que cette méthode ne fait pas partie de mes préférées, tout simplement parce qu'elle est très compliquée et surtout parce que cette complication n'est absolument pas nécessaire.*

*Cette méthode porte malheureusement le nom de méthode enthalpique, alors qu'elle ne s'écrit pas en enthalpie !*

En pratique, cela veut simplement dire que l'on doit exprimer les bilans en énergie/enthalpie, sans vouloir absolument la rassurante température. Cela donne un truc du style (cf. (2.8) page 6) :

$$\rho \cdot \frac{dh}{dt} = \sum \Phi \quad (9.1)$$

que l'on peut discrétiser avec un schéma temporel quelconque. Cependant, comme nous avons un problème forcément non-linéaire, nous utiliserons un schéma explicite, soit (sans les indices spatiaux) :

$$\rho \cdot \frac{h^{i+1} - h^i}{\Delta t} = \sum \Phi^i \quad \Leftrightarrow \quad h^{i+1} = h^i + \Delta t \cdot \sum \Phi^i \quad (9.2)$$

Cela pose deux problèmes :

- Pour résoudre, il faut connaître  $h^0$  alors que généralement les gens normaux parlent en température donc fournissent  $T^0$  ;
- Les flux s'expriment généralement en fonction des températures et donc il est nécessaire de pouvoir déduire  $T^{i+1}$  à partir de  $h^{i+1}$  pour préparer



l'itération suivante.

Ces deux problèmes se résolvent en introduisant l'équation d'état du matériau considéré qui prend la forme d'une expression de la forme  $h(T)$ . Cette expression permet de faire le lien entre  $T$  et  $h$  et le tour est joué.

Pour synthétiser, la résolution itérative se déroule comme suit :

1. de la condition initiale  $T^0$ , on calcule  $h^0$
2. calcul des flux connaissant les températures
3. calcul de l'enthalpie  $h^1$
4. mise à jour de la température  $T^1$  à partir de  $h^1$

et ainsi de suite...

Si vous analysez ce pseudo-algorithme, vous remarquez que les modifications par rapport au cas sans changement de phase sont très faibles et ponctuelles.

## 9.3 Équations d'état

Rappelons d'abord qu'une fonction  $h(T)$  est nécessairement une fonction strictement croissante.

Commençons par le plus simple : l'équation d'état pour un fluide/solide parfait est simplement :

$$h(T) = c \cdot T + h_0 \quad (9.3)$$

avec  $h_0$  une constante arbitraire.

Et oui, on peut très bien traiter un problème sans changement de phases avec une approche pouvant le prendre en compte !

### 9.3.1 Corps pur

La relation  $h(T)$  pour un corps pur peut être représentée par la relation suivante (avec une référence arbitraire  $h(T_F) = 0$ ) :

$$h(T) = \begin{cases} c_s \cdot (T - T_F) & \text{pour } T < T_F \\ L_F + c_l \cdot (T - T_F) & \text{pour } T \geq T_F \end{cases} \quad (9.4)$$

avec  $T_F$  la température de fusion,  $L_F$  la chaleur latente de fusion,  $c_s$  et  $c_l$  les capacités calorifiques solide et liquide.

La figure 9.1 représente cette équation d'état du corps pur. Mathématiquement,  $h(T)$  est une application mais pas une bijection : cela veut dire dans le cas particulier du corps pur que  $T = T_F$  peut correspondre à plusieurs enthalpies. Puisque la conversion température vers enthalpie ne se fait qu'au moment du traitement de la condition initiale, il est impossible d'initialiser le champs de températures à  $T_F$  (sauf à donner une autre indication qui est la fraction liquide).

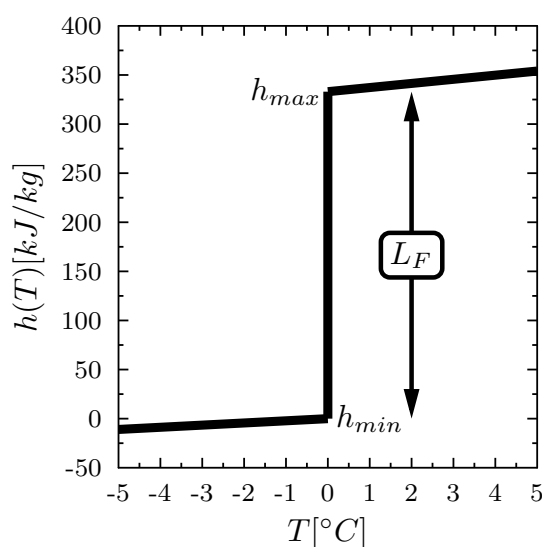


FIGURE 9.1 – Equation d'état pour un corps pur

La conversion enthalpie vers température ne pose ici pas de problème car la fonction  $h(T)$  est strictement monotone. Ouf ! Les expressions permettant de trouver  $T$  en fonction de  $h$  sont simples dans le cas présent. En introduisant les deux constantes  $h_{min}$  et  $h_{max}$  définies sur la figure 9.1 (et dont les expressions sont

évidentes), on peut écrire :

$$T(h) = \begin{cases} T_F + \frac{h}{c_s} & \text{si } h < h_{min} = 0 \\ T_F + \frac{h - L_F}{c_l} & \text{si } h > h_{max} = L_F \\ T_F & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.5)$$

Il est également possible d'obtenir la fraction liquide  $Y$  qui est une grandeur variant de 0 pour un solide à 1 pour un liquide pur, les valeurs intermédiaires indiquant un matériau en équilibre liquide-solide :

$$Y(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < h_{min} = 0 \\ 1 & \text{si } h > h_{max} = L_F \\ \frac{h - h_{min}}{L_F} = \frac{h}{L_F} & \text{sinon} \end{cases} \quad (9.6)$$

### 9.3.2 Autres expressions

Dans le cas général, soit on ne possède pas d'expression de  $h(T)$  mais un tableau regroupant des couples  $\{T, h(T)\}$  que l'on peut traiter en interpolant/approximant, soit on a une expression  $h(T)$  que l'on ne peut pas (facilement) inverse pour obtenir l'expression  $T = T(h)$  !

Dans ce dernier cas, il faut exhumer de vos mémoires les méthodes permettant de résoudre les équations non linéaires, telles que la dichotomie, Newton ou autres.

Dans tous les cas, il faudra impérativement vérifier que la fonction  $h(T)$  est une fonction monotone croissante !!

## 9.4 Exemple de mise en œuvre

Nous allons ici adapter le problème de la sphère 1D que nous avons traité avec un schéma explicite dans le chapitre 6, en considérant ici un corps pur susceptible de changer de phase.

Nous sommes dans le cas où aussi bien  $h(T)$  que  $T(h)$  ont des expressions analytiques.

La principale modification se trouve au niveau de l'équation bilan (6.6) qui doit maintenant être écrite en enthalpie :

$$\rho \cdot V_m \cdot \frac{h_m^{i+1} - h_m^i}{\Delta t} = \Phi_g^i + \Phi_d^i \quad \text{avec } m = 1 \dots M \text{ et } i = 0 \dots I \quad (9.7)$$

puis complétée par la mise à jour de la température, soit

$$T_m^{i+1} = T(h_m^{i+1}) \quad (9.8)$$

Voilà, nous avons notre code qui gère un matériau à changement de phase. Il est assez difficile de faire plus simple !

### 9.4.1 Traitement des paramètres dépendants de l'état

Certains paramètres du modèle peuvent dépendre de l'état liquide/solide du matériau, quantifié par la fraction liquide  $Y$ . C'est notamment le cas de la conductivité thermique ou, dans une moindre mesure, des coefficients d'échange.

En général, quand on n'a pas d'information précise, on utilise un modèle linéaire. Pour une grandeur  $g$  quelconque prenant des valeurs  $g_l$  et  $g_s$  à l'état liquide et solide, on écrit généralement :

$$g = g_s \cdot (1 - Y) + g_l \cdot Y = g_s + Y \cdot (g_l - g_s) \quad (9.9)$$

### 9.4.2 Implémentation

Le code est disponible, toujours sur le même site, dans le répertoire `sphere-1d-chgphase`. Je vous laisse le découvrir.

Pour simplifier, le code (et pour vous laisser quelques petites choses à faire par vous même), je considère ici que la conductivité thermique est indépendante de l'état du matériau.

La figure 9.2 montre l'évolution temporelle de la température  $T$  et de la fraction liquide  $Y$  pour différentes positions au sein de la sphère. Sans rentrer dans le détail

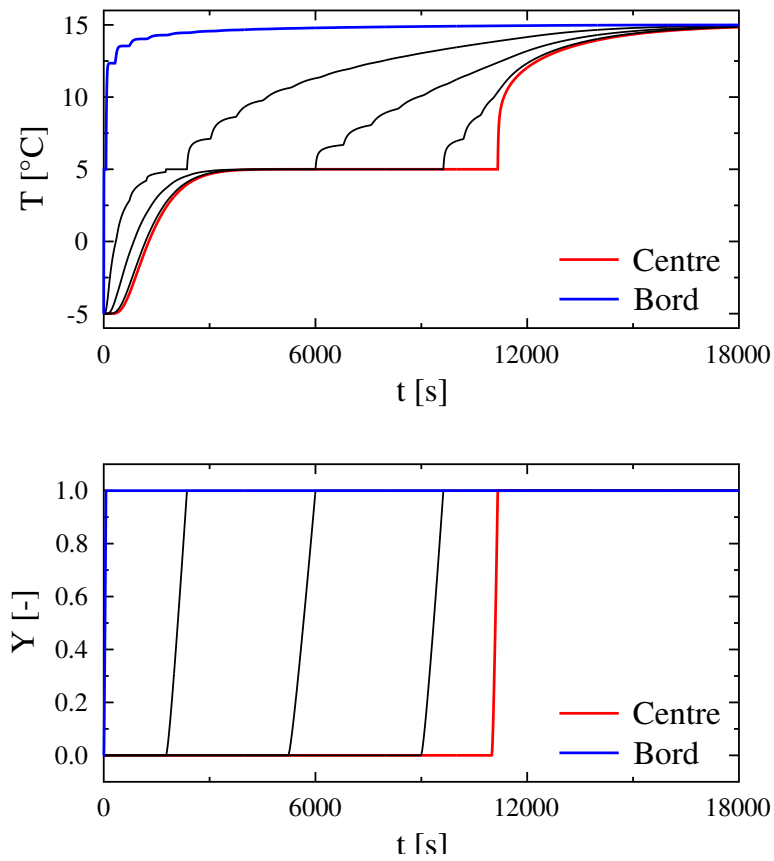


FIGURE 9.2 – Exemple de résultat pour le problème de la sphère 1D avec changement de phase

de l'analyse de ce résultat, on observe un palier de température à la température de fusion (ici  $T_F = 5^\circ\text{C}$ ) d'autant plus long que l'on s'approche du centre de la sphère. On observe également que la fin du palier correspond systématiquement à une augmentation rapide de la fraction liquide qui passe de 0 à 1. Ceci peut être surprenant puisqu'on s'attendrait à ce que la température soit stable pendant la transition de phase i.e. pendant que  $Y$  passe de 0 à 1. Il faut cependant comprendre ici que la fusion est concentrique et ne peut intéresser qu'un seul volume de contrôle à la fois. Je m'explique : Initialement, tous les nœuds sont à la température de  $-5^\circ\text{C}$  donc à l'état solide. Lorsqu'on applique la condition à la limite, la température du nœud frontière  $m = M$  augmente rapidement et se stabilise à la température de fusion. Le nœud  $m = M - 1$  «voit» alors une condition à la limite de type température imposée à  $T_F$  et le sous-système  $m = M - 1 \dots 1$  évolue donc vers une température très légèrement inférieure à  $T_F$ , ce que l'on observe bien sur le graphique.

Lorsque le nœud  $M$  a terminé de fondre, la contrainte de température imposée est brusquement libérée et on observe une rapide remontée en température. Cette remontée de la température du nœud  $M$  entraîne la fusion du nœud  $M - 1$ , etc.

Les sauts que l'on observe sur toutes les températures correspondent à ces brusques libérations des contraintes. Ce n'est pas très joli mais on peut les atténuer en augmentant le nombre de mailles en espace. En fait, il est très rare de devoir modéliser le comportement avec un corps parfaitement pur (donc avec une belle discontinuité sur  $h(T)$ ). Dans la pratique, la présence d'impuretés, même en quantité infime, modifie légèrement la forme de  $h(T)$ , rendant la fonction continue.

Nous verrons peut-être, si vous êtes sages, comment modéliser un corps non parfaitement pur !

# Chapitre 10

## Écoulement

### 10.1 Introduction

Ce dernier et court chapitre va nous permettre d'introduire des écoulements dans nos modèles.

Nous ne rentrerons cependant pas dans les détails fins de la structure des écoulements, ce que je réserve aux autres intervenants de cette seconde année. Nous nous limiterons ici à des écoulements pistons c'est-à-dire juste ce qu'il faut pour se faire plaisir avec certains modèles tels que les échangeurs, capteurs solaires et autres éléments stockeurs !

### 10.2 Flux advectif

Pour introduire la méthode de prise en compte des écoulements, nous nous appuyerons sur la géométrie définie sur la figure 10.1.

Considérons le nœud fluide  $m$  (en bleu). Pour recenser les flux, il suffit de regarder ces différentes surfaces d'échanges :

Il est en contact avec la paroi du tube (en gris) et l'échange peut ici être modélisé via une loi de type Newton en introduisant un coefficient d'échange (qui peut éventuellement dépendre du régime d'écoulement !). Nous savons faire, donc je n'en reparle pas ici.

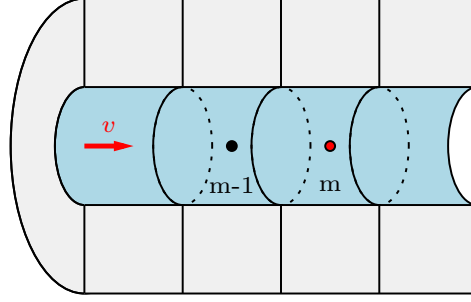


FIGURE 10.1 – Géométrie pour la prise en compte de l'écoulement

Il est également en contact avec les nœuds fluides précédent et suivant. Imaginons pour le moment que le fluide est au repos. Nous avons donc dans ce cas de classiques échanges conductifs. Nous savons faire, donc je n'en reparle pas ici.

Mettons maintenant le fluide en mouvement avec une vitesse  $v$  positive, ce qui veut dire que le fluide s'écoule réellement dans le sens de la petite flèche rouge sur le joli dessin.

En adaptant la relation du flux advectif (2.11) à la frontière gauche, on obtient :

$$\Phi_G^{\text{adv}} = h_{m-1} \cdot v \cdot S = h(T_{m-1}) \cdot v \cdot S \quad (10.1)$$

Le point important ici est la dissymétrie de cette expression puisque seul le volume dont provient réellement l'écoulement intervient dans l'expression.

Si on applique le même raisonnement à la frontière droite (i.e. sortante), on obtient une expression similaire et également dissymétrique :

$$\Phi_D^{\text{adv}} = -h_m \cdot v \cdot S = h(T_m) \cdot v \cdot S \quad (10.2)$$

avec un signe négatif car c'est un flux sortant.

Il faut donc être très attentif au sens réel de l'écoulement puisque rien n'empêche un enseignant vicieux<sup>1</sup> d'imposer une vitesse négative ou changeant de signe au cours du temps !

---

1. Non, je n'ai pas rajouté chauve !



## 10.3 Contrainte sur le pas de temps

Il est important de bien garder à l'esprit comment nous les intégrons ces flux dans les équations bilans et surtout les hypothèses de base de la méthode explicite que nous employons souvent. En effet, la méthode explicite considère que les flux restent inchangés sur toute la durée du pas de temps. Regardons ce que cela implique lorsque nous avons un écoulement.

Imaginons le cas où la température  $T_{m-1}$  est supérieure à  $T_m$ . Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$ , le volume  $m$  reçoit donc un fluide qui devrait augmenter légèrement sa température. Il devrait donc céder au nœud  $m + 1$  un fluide dont la température augmente pendant  $\Delta t$ . Or la méthode de résolution impose cette température comme constante. Le volume  $m$  cède donc moins d'énergie qu'il n'aurait dû et là, c'est le drame !

On observe classiquement dans ce cas une augmentation trop importante de la température du nœud (qui peut devenir supérieure à toutes les autres température mises en jeu. . .). La situation s'inverse évidemment si  $T_{m-1} < T_m$ .

La solution pour tenter d'éviter ce genre de problème est tout simplement de s'arranger pour que la température  $T_m$  ne puisse pas varier «trop» pendant  $\Delta t$  du fait des échanges advectifs. En première approximation, on peut exprimer cette condition en exprimant que la quantité de fluide entrant dans un nœud doit rester négligeable par rapport au volume de celui-ci, soit pour généraliser :

$$v \cdot \max(S) \cdot \Delta t \ll \min(V) \quad (10.3)$$

pour tous les nœuds impliquants un fluide en écoulement évidemment !

Voilà, comme dirait Forrest, «c'est tout ce que j'ai à dire à ce propos de ça !»



# Chapitre 11

## Conclusion

Nous sommes arrivés au terme de cette merveilleuse découverte de la modélisation et de la simulation des systèmes énergétiques !

J'espère que vous ~~avez pris autant de plaisir à lire ce document que moi à le rédiger~~ ~~sur mes vacances~~ avez passé au moins autant de temps à le lire et le comprendre que moi à le rédiger.

Je vous rappelle une dernière fois que l'objectif de ce cours est de vous permettre de modéliser les systèmes que vous aurez à étudier ou concevoir, dans l'optique de l'utiliser pour comprendre et appréhender leurs comportements, de les optimiser, et même de les utiliser dans une démarche de contrôle-commande.

Je pense notamment ici à la régulation dans le domaine du bâtiment, qui permettrait (permettra ?) non seulement de réduire la consommation d'énergie mais également d'utiliser de la façon la plus rationnelle possible les différentes ressources disponibles (extensions vers les «smart-grids» avec l'épineux problème de l'intermittence des ressources renouvelables), tout en assurant le confort des usagers.

Mais ça, c'est une autre histoire !