第八章 二次型与二次曲面 前言

- 问题的引入
- 主要内容和特点
- 二次型的起源
- 二次型的应用

问题的引入

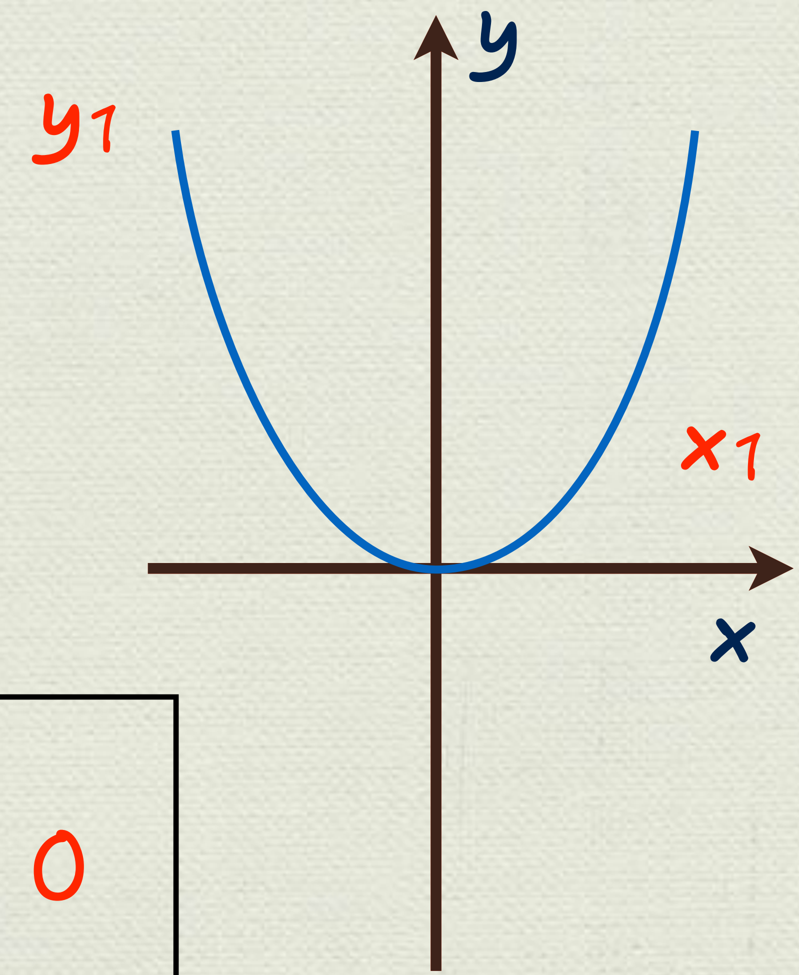
$$\boxed{y - x^2 = 0}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1)$$

正交阵

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$



$$\boxed{y_1^2 - 2x_1y_1 + x_1^2 - \sqrt{2}\,x_1 - \sqrt{2}y_1 = 0}$$

- 问题的引入

二次曲面的方程 $\xrightarrow{\text{化简}}$ 判定二次曲面的类型

二次曲面的方程

用二次型理论化简

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2$$
$$+ \underline{2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz}$$
$$+ \underline{a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}}$$

用平移化简

主要内容和特点

主要内容

- 二次型理论
  - 实二次型定义
  - 化实二次型为标准形
  - 正定实二次型
- 二次曲面
  - 空间曲面与曲线
  - 二次曲面的类型

(8.2.2，8.2.3，8.5.7不要求)

特点

- 代数与几何相结合
- 研究对象由线性转到非线性

二次型的起源

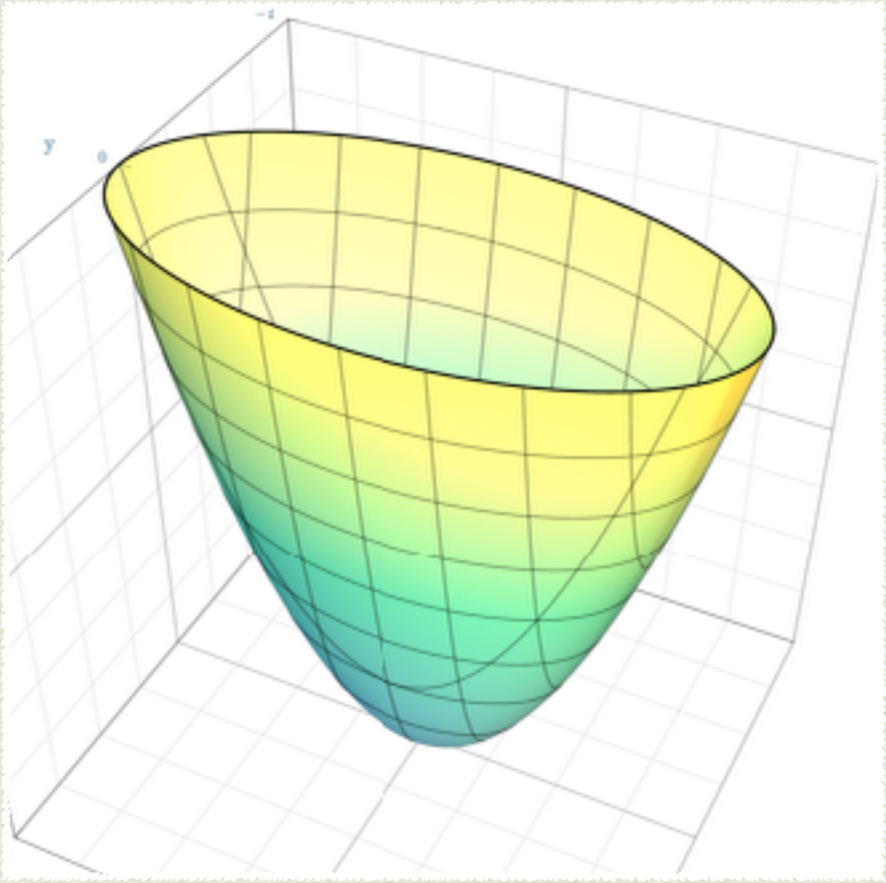
18世纪中期，化简二次曲线及二次曲面方程

1748年，瑞士数学家欧拉(Euler)

二次型的应用

最优化问题

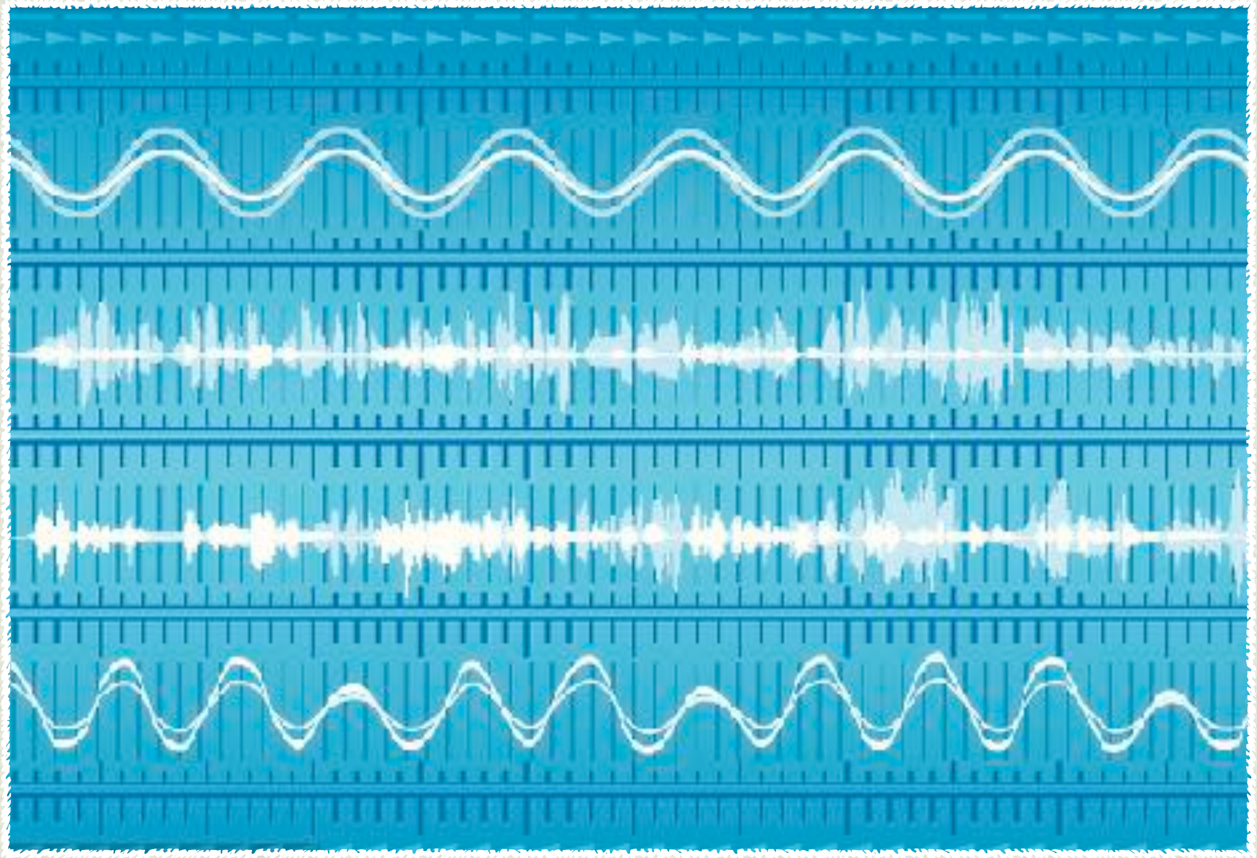
极大、极小值



二次型的应用

信号处理

输出噪音控制



二次型的应用

物理

动能和势能

8.1 实二次型

- 8.1.1 二次型的定义及其矩阵
  - 二次型的定义 (n 元二次齐次函数)

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

系数为实数的二次型称为实二次型.

二次型的矩阵

$$f = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{二次型的矩阵 } A}\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X}$$

a_{ii} 是 x_i^2 的系数，$a_{ij} = a_{ji} = 1/2(x_ix_j$ 的系数)

$$\boxed{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X'AX}$$

例: 求二次型的矩阵.

$f_1 = x_1^2+3x_1x_2+x_2^2$ $f_2 = x_1^2+x_2^2+3x_3^2$

注 1: 实二次型的矩阵为实对称阵.

注 2: 对角阵对应的二次型只有平方项. (标准形)

注 3: 二次型与它的矩阵是互相唯一确定的.

- 二次型的秩 = 对应的矩阵的秩

8.1.2 合同矩阵

合同矩阵的引入

R^n 的两组基: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$\alpha \begin{cases} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ 下坐标 } X \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \text{ 下坐标 } Y \end{cases}$$

C 为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

$X = CY \Rightarrow f(X) = X'AX = Y'(C'AC)Y$ 注: C 可逆

则 $\boxed{B = C'AC}$, 是以 Y 为变量的二次型的矩阵.

合同矩阵的定义

$\boxed{C'AC = B}$ C 可逆，则称 A 与 B 合同.

注 1: 合同关系满足自反性、对称性和传递性.

注 2: 合同 $\Rightarrow$ 等价; 反之不成立

注 3: 实对称阵与对角阵相似且实对称阵与对角阵合同.

例: 与$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 既相似又合同的对角阵.

实对称阵

$|\lambda E - A| = \lambda(\lambda + 3)(\lambda - 4)$

A 与 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 既相似又合同