8.5 二次曲面

一般的三元二次方程可以表示为

$$X'AX + v'X + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

$$A = (a_{ij})_{3\times 3},\ a_{ij} = a_{ji},\ i, j = 1, 2, 3,$$

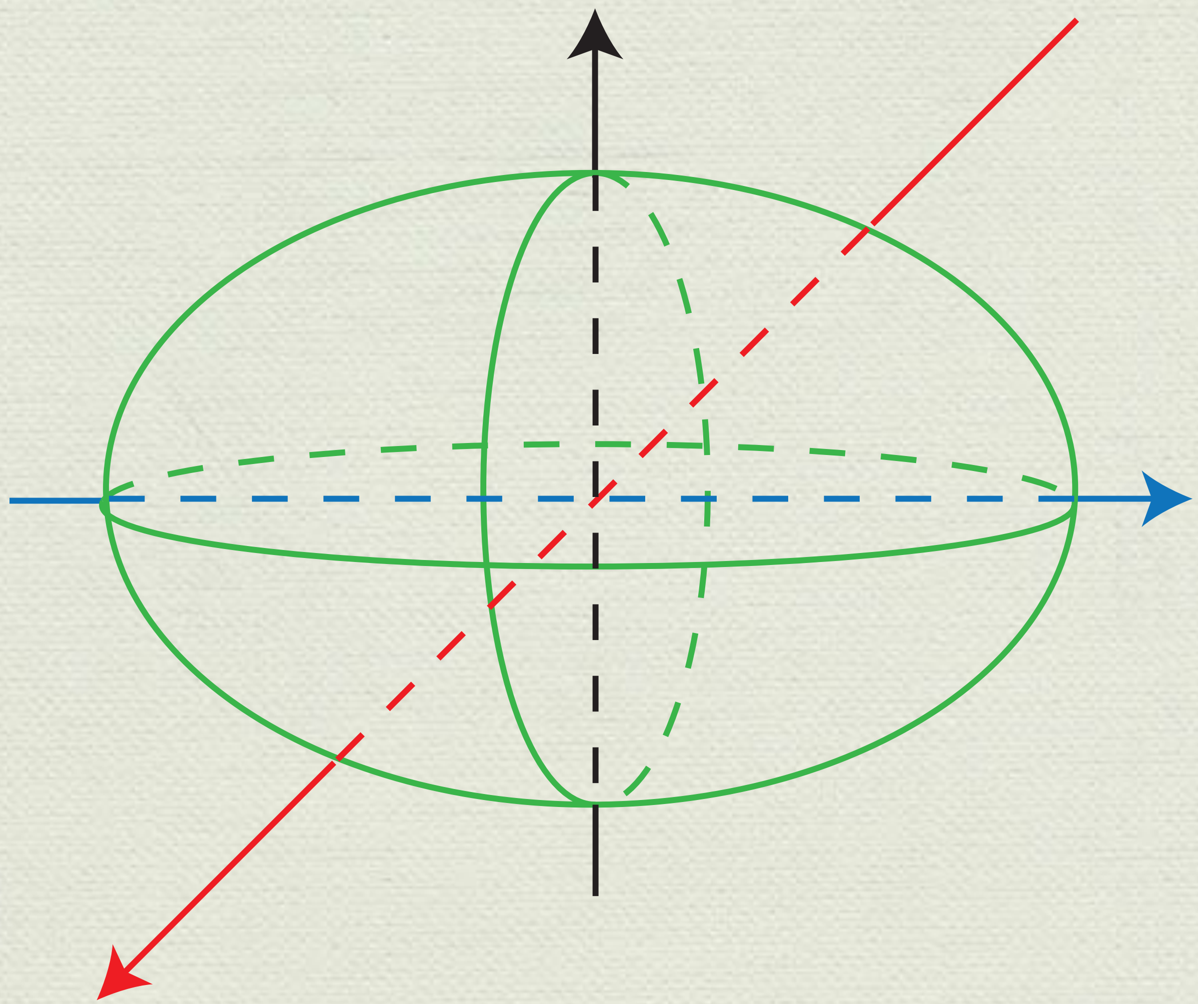
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix}.$$

存在正交变换 $X = PY$，使得 (1) 化为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + a'_{14}x' + a'_{24}y' + a'_{34}z' + a'_{44} = 0$$

8.5.1 椭球面

1. 方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,\ b>0,\ c>0)$



2. 特例

$a=b=c$ 时为 球面;

a, b, c 中有两个相同时为 旋转椭球面.

3. 椭球面的特点

(1) 对称性:

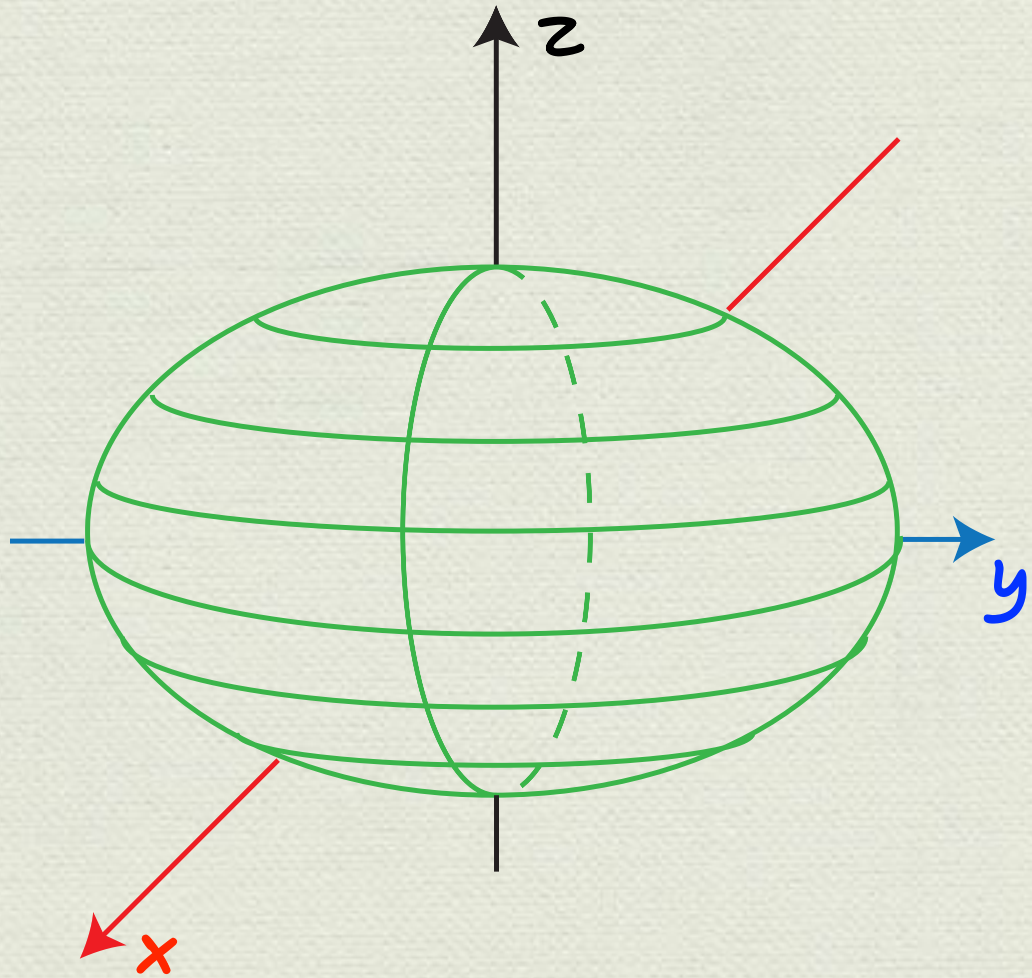
关于三个坐标面，三个坐标轴及原点都对称.

图形的范围: $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c.$

(2) 图形与平面 $z=h$ 的交线为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

$|h|<c$: 椭圆



随着 $|h|$ 的增大，椭圆的长短半轴都减小.

$|h|=0$ 时， $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

$|h|=c$ 时，椭圆缩小为一个点.

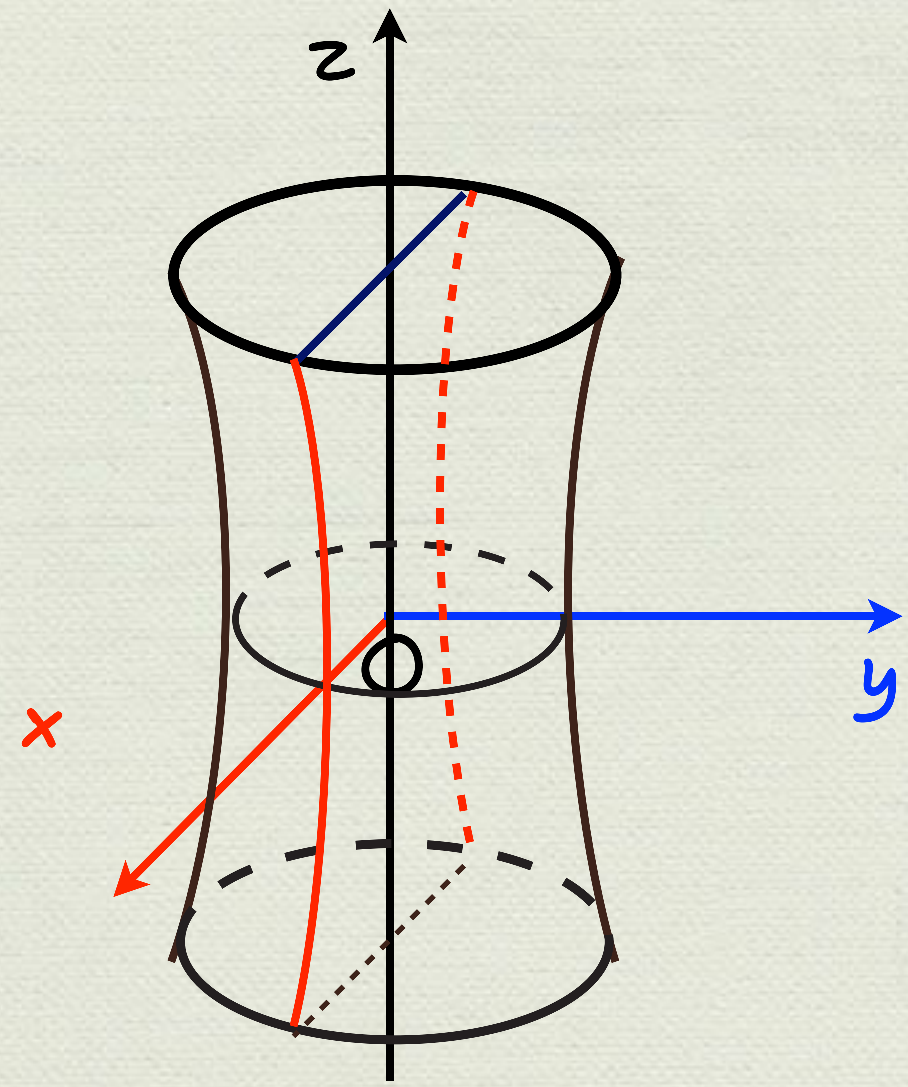
与 $y=h\ (|h|<b)$, $x=h\ (|h|<a)$ 的交线也有类似特点.

8.5.2 单叶双曲面

1. 方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$



2. 方程的特点：平方项两正一负，没有一次项.

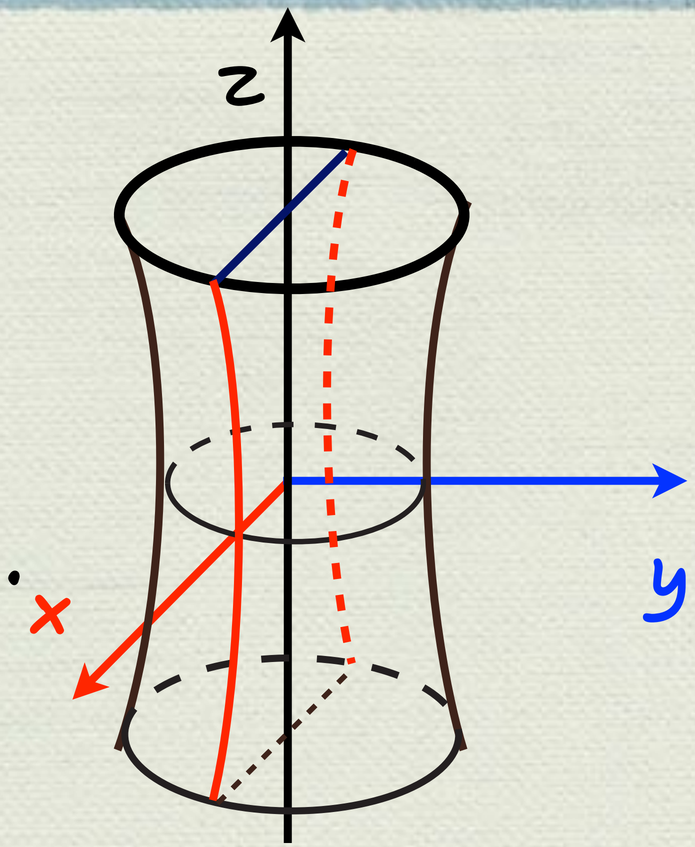
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad 或 \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形也是单叶双曲面.

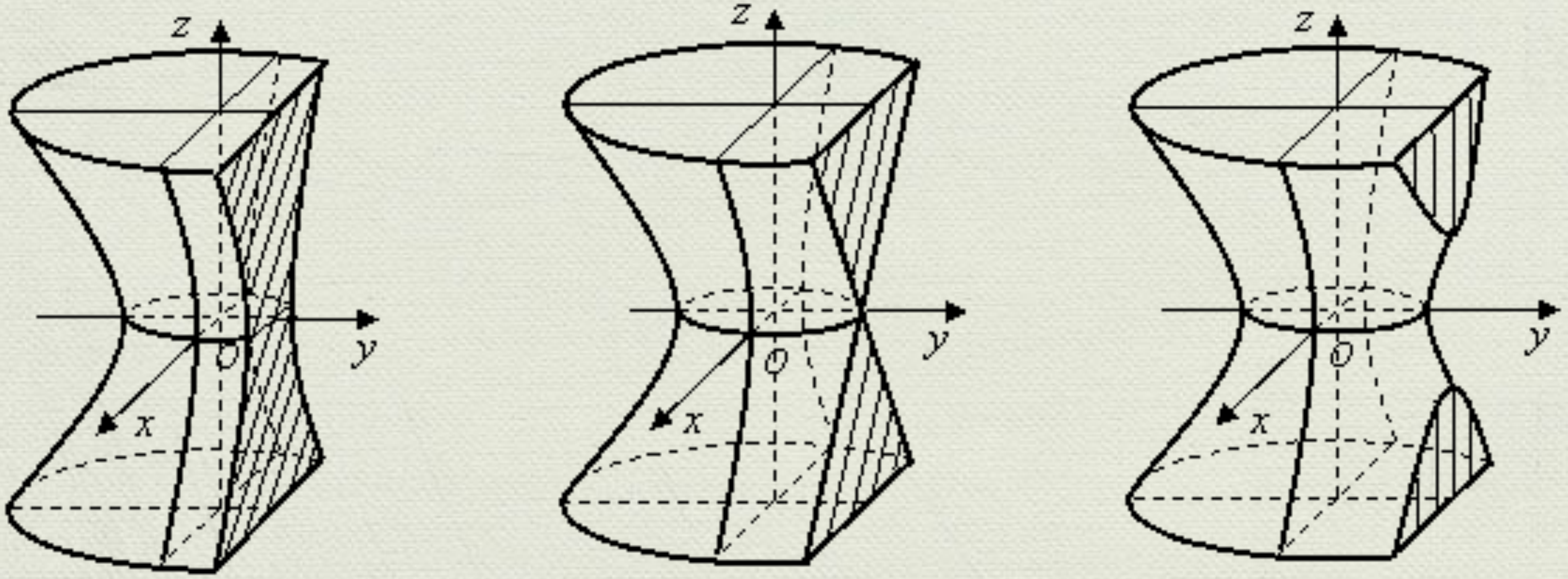
3. 单叶双曲面的特点

(1) 平面 $z=h$ 的交线为椭圆.

随着 $|h|$ 的增大, 其长、短半轴增大.



(2) 图形与平面 $y=k$ 的交线.



$|k|<b$ $|k|=b$ $|k|>b$

8.5.3 双叶双曲面

1. 方程 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\quad(a>0,\ b>0,\ c>0)$

2. 方程的特点：平方项两负一正，没有一次项.

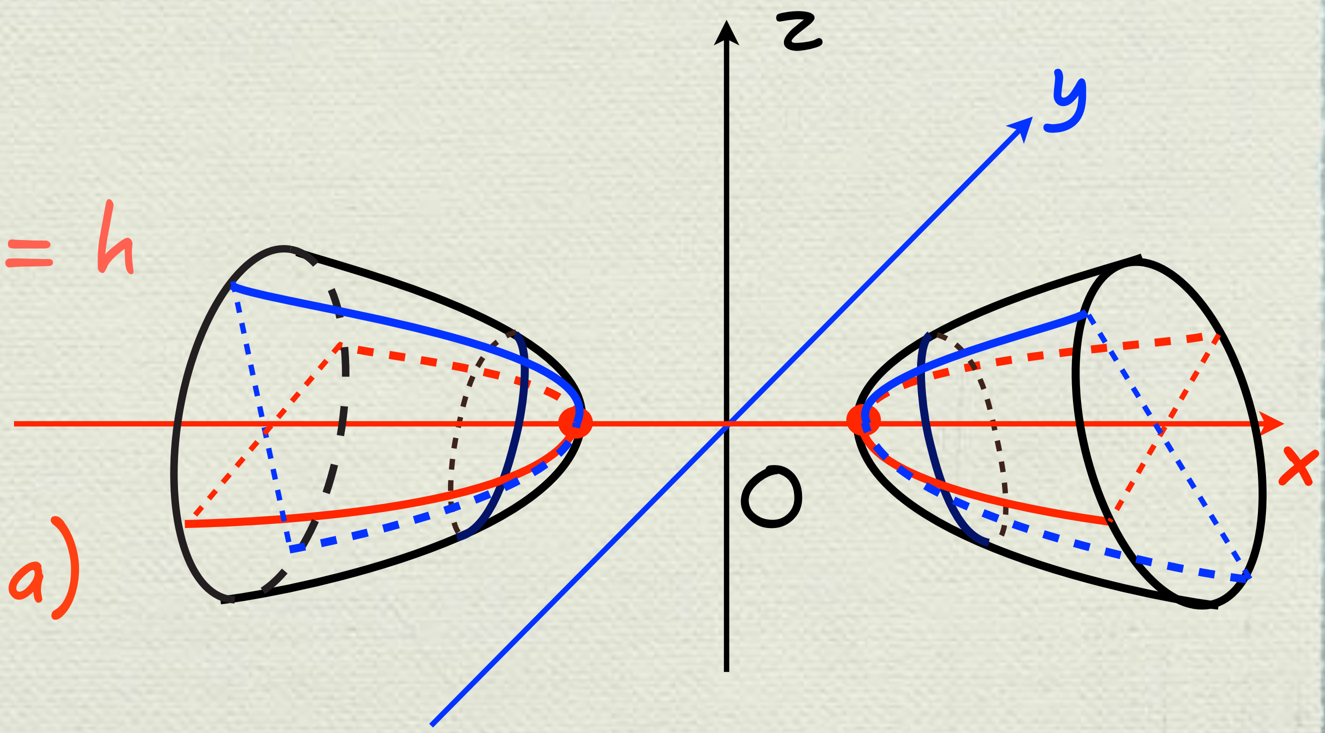
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{或} \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的图形也是双叶双曲面.

3. 双叶双曲面的特点

(1) 图形与平面 $z=h$ 或 $y=h$ 的交线都为双曲线.

(2) 图形与平面 $x=h\ (|h|\geq a)$ 的交线为椭圆.



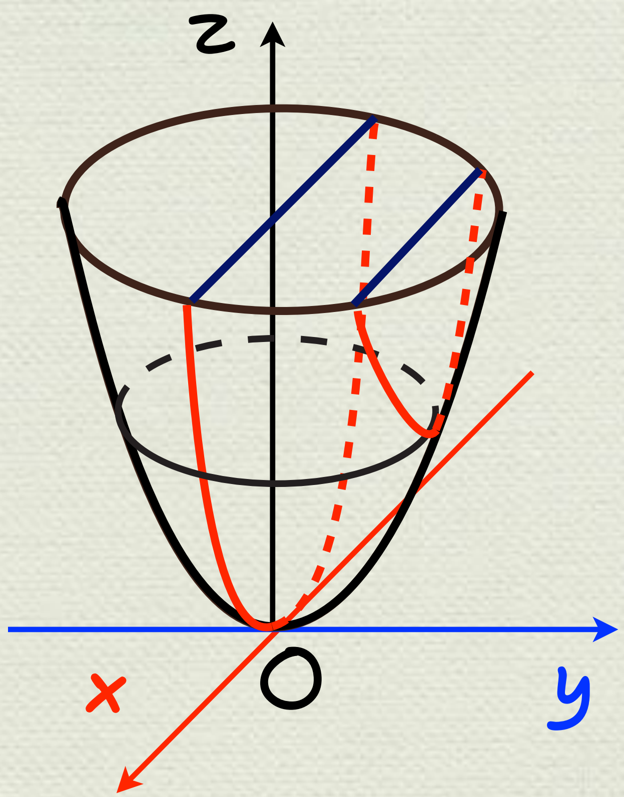
8.5.4 椭圆抛物面

1. 方程 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ (p,q同号)(两平方项同号)

2. 椭圆抛物面的特点

(1) 图形与平面 $z=h$ (h 与 p,q 同号) 的交线为 椭圆.

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2ph}+\dfrac{y^2}{2qh}=1,\\ z=h.\end{cases}$$



(2) 图形与平面 $x=h$, 或 $y=h$ 的交线为 抛物线.

$$\begin{cases}y^2=2q\left(z-\dfrac{h^2}{2p}\right),\\ x=h.\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x^2=2p\left(z-\dfrac{h^2}{2q}\right),\\ y=h.\end{cases}$$

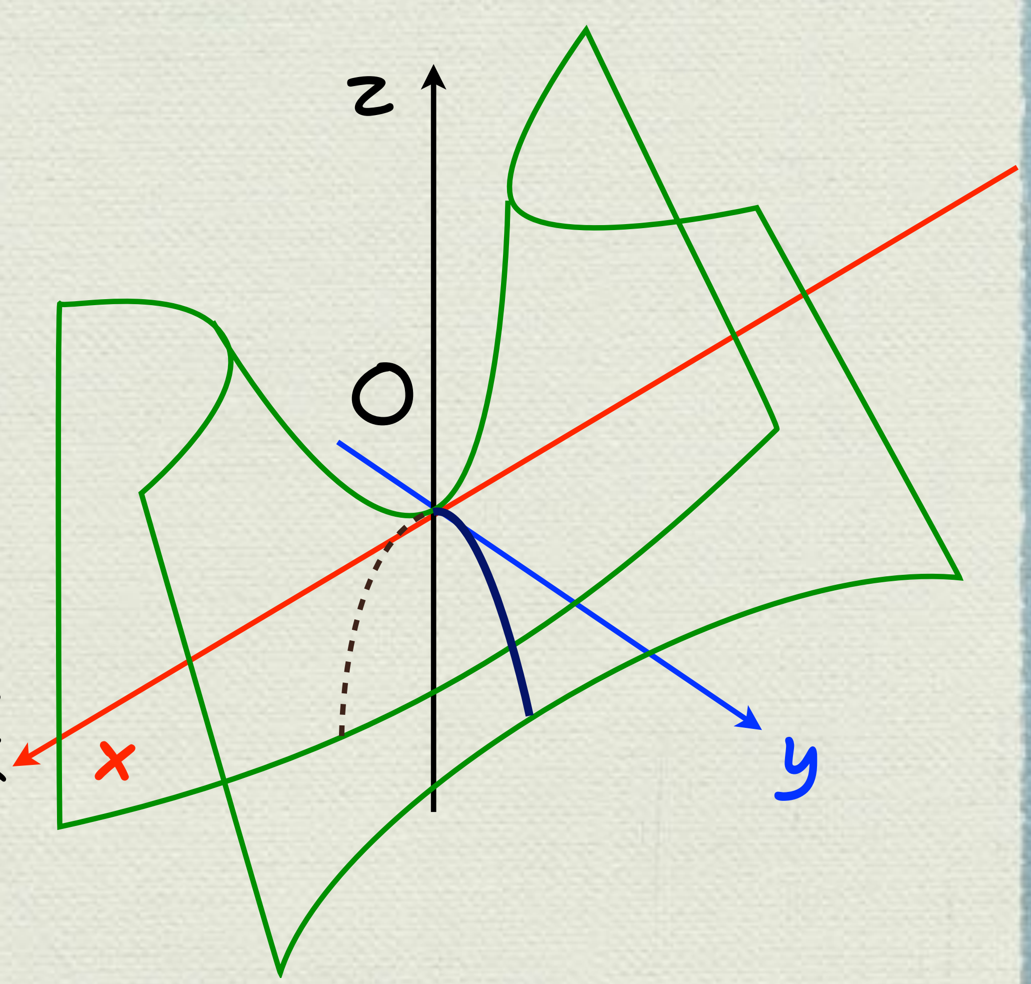
8.5.5 双曲抛物面(马鞍面)

1. 方程 $\dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y^2}{2q} = z$ (p,q同号) (两平方项异号)

2. 双曲抛物面的特点

(1) 图形与平面 $z = h\ (h \neq 0)$ 的交线为双曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$



h 与 p,q 同号时，双曲线的实轴与 x 轴平行；h 与 p,q 异号时，实轴与 y 轴平行.

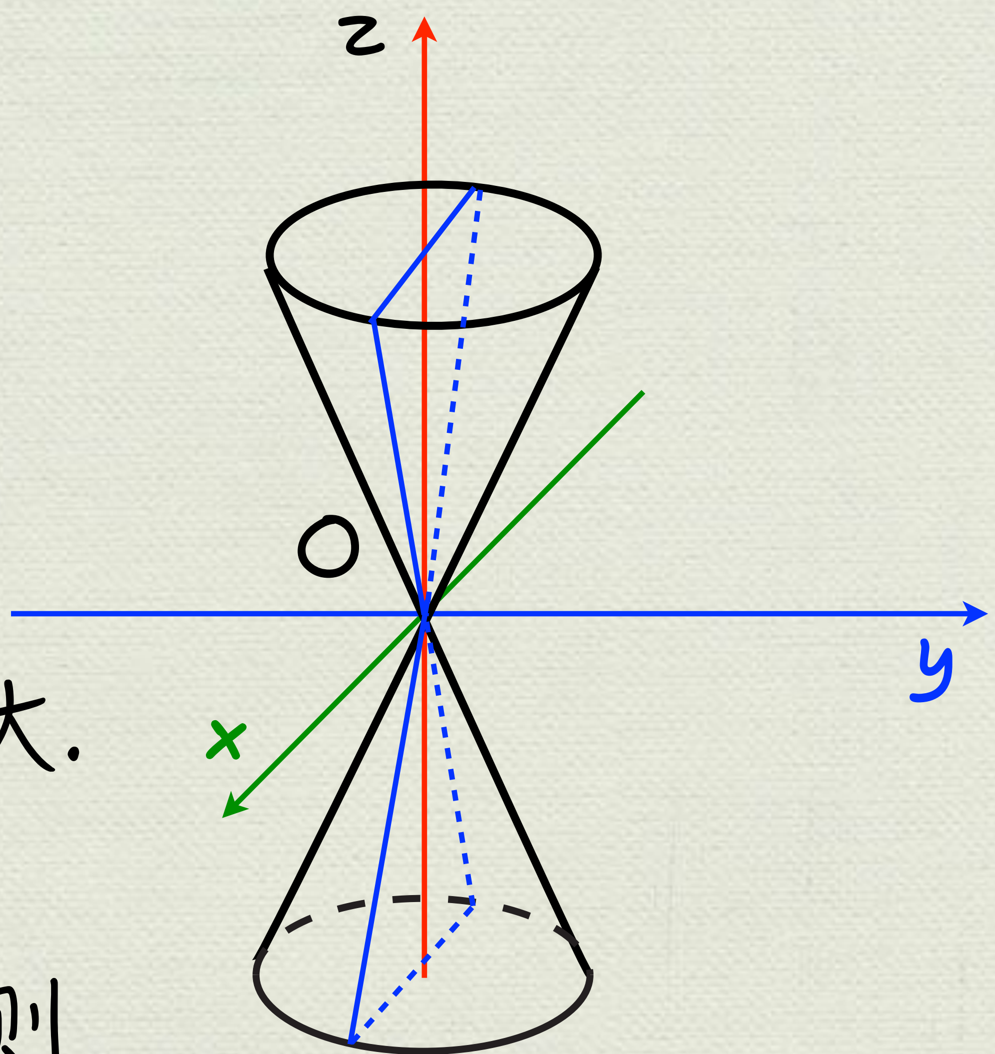
(2) 图形与平面 $x = h,\ y = h$ 的交线为 抛物线.

8.5.6 二次锥面

1. 方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \quad (a, b, c>0)$

2. 方程的特点：平方项两正一负(两负一正), 没有常数项.

3. 二次锥面的特点



(1) 图形与平面 $z=h\ (h\neq 0)$ 的交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases}$$

随 $|h|$ 的增大，椭圆的长短轴增大.

(2) $a=b$ 时为 圆锥面

(3) 若 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在锥面上，则过点 O, M_0 的直线也在锥面上.

椭球面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

单叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 平方项两正一负

双叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ 平方项两负一正

椭圆抛物面 $$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$$ (p, q同号)

双曲抛物面(马鞍面) $$\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$$ (p, q同号)

二次锥面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$ 平方项两正一负(两负一正), 没有常数项