8.2 化实二次型为标准形

- 标准二次型（标准形）及规范二次型

- 定义 标准二次型: $f = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$

实二次型的规范形:

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 \cdots - y_m^2$$

注：(1) 标准形不唯一 (2) 规范二次型是唯一的

(3) f 的秩 = 标准形中非零平方项的个数

- 化实二次型为标准形的应用: 辨别二次曲面

化实二次型为标准形的方法

$$f(X) = X'AX.$$

?

找可逆线性变换(可逆变量代换、可逆坐标变换)

$$X = CY$$

使得

$$X'AX = Y'(C'AC)Y = Y'\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix}Y$$

$$= k_1y_1^2 + k_2y_2^2 + \cdots + k_ny_n^2$$

若变换不可逆会改变曲面的类型

化实二次型为标准形 $\Leftrightarrow$ 找到可逆阵 C 使得 $C'AC$ 为对角阵

若 C 为正交阵，称 $X = CY$ 为正交线性变换.

正交变换不改变曲面的大小和形状.

8.2.1 用正交变换化二次型为标准形(重点)

(定理6.6) A: n 阶实对称阵. 存在 n 阶正交矩阵 P,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad P'AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

- 定理 8.1

$f = X'AX$. 存在正交线性变换 $X = PY$,

使得 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值.

例 1

$$f = -2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4$$

求一个正交线性变换 $X = PY$, 将 f 化为标准形.

解 (1) 写出 f 的矩阵 A $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) 求 A 的特征值

$$|\lambda E - A| = (\lambda+1)^3(\lambda-3) \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3.$$

(3) 求 A 的特征向量且规范正交化

$$\lambda = -1 \quad (p_1,\ p_2,\ p_3) \qquad\qquad \lambda = 3 \quad (p_4)$$

$$P = \begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \left(\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) & \left(\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{matrix}\right) & \left(\begin{matrix} \frac{-1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{3}{\sqrt{12}} \end{matrix}\right) & \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix}\right) \end{array}$$

不唯一

(4) 写出正交变换和标准型

正交变换 $X = PY$,

$$f = X'AX = Y'P'APY$$

$$= Y'DY$$

$$= Y'\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix} Y$$

$$= -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 + 3y_4^2$$

8.2.2 拉格朗日配方法化二次型为标准形

例: 用配方法化二次型 f 为标准形.

$$f = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 = 2(x_1+3x_2)^2 - 15x_2^2$$

例 2 用配方法化二次型 f 为标准形, 并求所用的变换矩阵及 f 的秩.

$$f = 4x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_1x_4$$
$$+ 4x_2x_3 - 4x_2x_4 - 8x_3x_4$$

$$= (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + x_2^2 - 3x_4^2 + 2x_2x_3 - 2x_2x_4$$
$$- 6x_3x_4$$

$$= (2x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2 + (x_2 + x_3 - x_4)^2 - (x_3 + 2x_4)^2$$

$$f=(2x_1+x_2+x_3-x_4)^2+(x_2+x_3-x_4)^2-(x_3+2x_4)^2$$

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 - x_4 \\ y_3 = x_3 + 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 + 3y_4 \\ x_3 = y_3 - 2y_4 \\ x_4 = y_4 \end{cases}$$

注: 没有 y_4 就不是可逆变换

由 $X=CY$ 得 $C=\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$f=y_1^2+y_2^2-y_3^2$

f 的秩为 3.

例 3 化二次型 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 为标准形，并求所用的变换矩阵.

解 f 不含平方项，含 x_1x_2 项，令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} f = {} & 2(y_1+y_2)(y_1-y_2) \\ & + 2(y_1+y_2)y_3 - 6(y_1-y_2)y_3 \end{aligned}$$

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

配方得 $f = 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad X = C_1 Y \quad C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \quad Y = C_2 Z \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C_1 C_2 Z \qquad C = C_1 C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |C| = -2 \neq 0$$

变换 $X = CZ$ 可逆. $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$.

注 1 由标准形化规范形.

例：$f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2 = 2z_1^2 + 6z_3^2 - 2z_2^2$

令 $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} w_1,\ z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} w_3,\ z_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{6} w_2.$

f 的规范形 $f = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$

注 2 拉格朗日配方法的一般步骤

(1) 若 f 不含平方项，用可逆变换把 f 化为有平方项的二次型;

(2) 若 f 含 x_i^2, 对所有含有 x_i 的项进行配方;

(3) 对剩下的二次型重复上述步骤.

3. 用初等变换法化实二次型为标准形

化实二次型为标准形	$\Leftrightarrow$	找可逆阵 C 使得 $C'AC$ 为对角阵

可逆阵 $C = P_1P_2\cdots P_t$ $\quad$ P_i 为初等阵

$$C'AC = P_t'\cdots P_2'P_1'AP_1P_2\cdots P_t$$

考虑对 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$ 作"成对"的初等变换

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} C'AC \\ C \end{bmatrix}$$

例 4

用初等变换法将 $f = X'\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}X$ 化为标准形.

例 4

用初等变换法将 $f = X'\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}X$ 化为标准形.

解 $$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[c_1+c_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用初等变换使主对角元非零

对矩阵做相同的列变换

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & \boxed{-2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_3+c_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用主对角线上元消去其它非零元

做相应行变换

$$
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[c_2+c_3]{r_2+r_3}
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\xrightarrow[c_2-(1/2)c_1]{r_2-(1/2)r_1}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[2c_2]{2r_2}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

不必须

$$f = 2y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$$

$$X = CY, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$