第三十讲

- 8.4 空间中的曲面与曲线
- 8.5 二次曲面

复习

- 实二次型的惯性定律

  实二次型 $f = X'AX$ 的标准形中，正(负)系数的个数不变.

- 惯性指数

  正(负)惯性指数 = 标准形中正(负)系数的个数

- 正定二次型 $f = X'AX > 0, \ \forall X \neq 0$

  正定矩阵：正定二次型的矩阵

  正定矩阵一定是实对称阵.

- 正定二次型的判定

n 元实二次型 $f = X'AX$ 是正定二次型

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数为 n.

$\Leftrightarrow$ A 的特征值都大于零.

$\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 Q, 使得 $A = Q'Q$.

$\Leftrightarrow$ A 与单位阵合同.

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式都大于零.

- 负定二次型

$$f = X'AX < 0, \forall X \neq 0$$

A 负定

$\Leftrightarrow$ -A 正定

$\Leftrightarrow$ A 的奇数阶顺序主子式小于零,

而偶数阶顺序主子式大于零.

- 等价、相似与合同的充要条件

A 与 B 等价 ⇔ A 与 B 的秩相同,
且 A 与 B 的形状相同,

A, B 可相似对角化,

A 与 B 相似 ⇔ A 与 B 的特征值相同

A, B 是实对称阵,

A 与 B 合同 ⇔ A 与 B 的正特征值的个数相同, 且负特征值的个数相同。

A, B 是实对称阵，

A 与 B 合同 $\Leftrightarrow$ A 与 B 的正特征值的个数相同，且负特征值的个数相同。

$\Leftrightarrow$ $f = X'AX$ 与 $g = Y'BY$ 有相同的规范形.

$\Leftrightarrow$ $f = X'AX$ 与 $g = Y'BY$ 有相同的正惯性指数和负惯性指数.

A 是实对称阵，与 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 合同且相似，

其中，$\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 是 A 的特征值.

A 与 B 相似 $\Rightarrow$ A 与 B 的特征值相同

$\Rightarrow tr(A) = tr(B);\ |A| = |B|$

A 与 B 的特征值相同 $\nRightarrow$ A 与 B 相似

对称阵只与对称阵合同.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 相似但不合同

第八章 作业9 $A_{m\times n}$ 实矩阵, $A'A$ 为正定 $\Leftrightarrow R(A) = n$

$A_{m\times n}$ 实矩阵, AA' 为正定 $\Leftrightarrow R(A) = m$

8.4 空间中的曲面与曲线

8.4.1 球面 球心: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 r.

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}$$ 球面方程

$$x^2+y^2+z^2-2xx_0-2yy_0-2zz_0+x_0^2+y_0^2+z_0^2-r^2=0$$

注 1：球面方程的特点

(1) 三元二次方程;

(2) x^2, y^2, z^2 的系数相同;

(3) 没有 xy, yz, xz 项.

球面的图形

满足上述三个条件的方程可用配方法化为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=k$$

$k>0$: 球心 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为$\sqrt{k}$.

$k=0$: 点球面

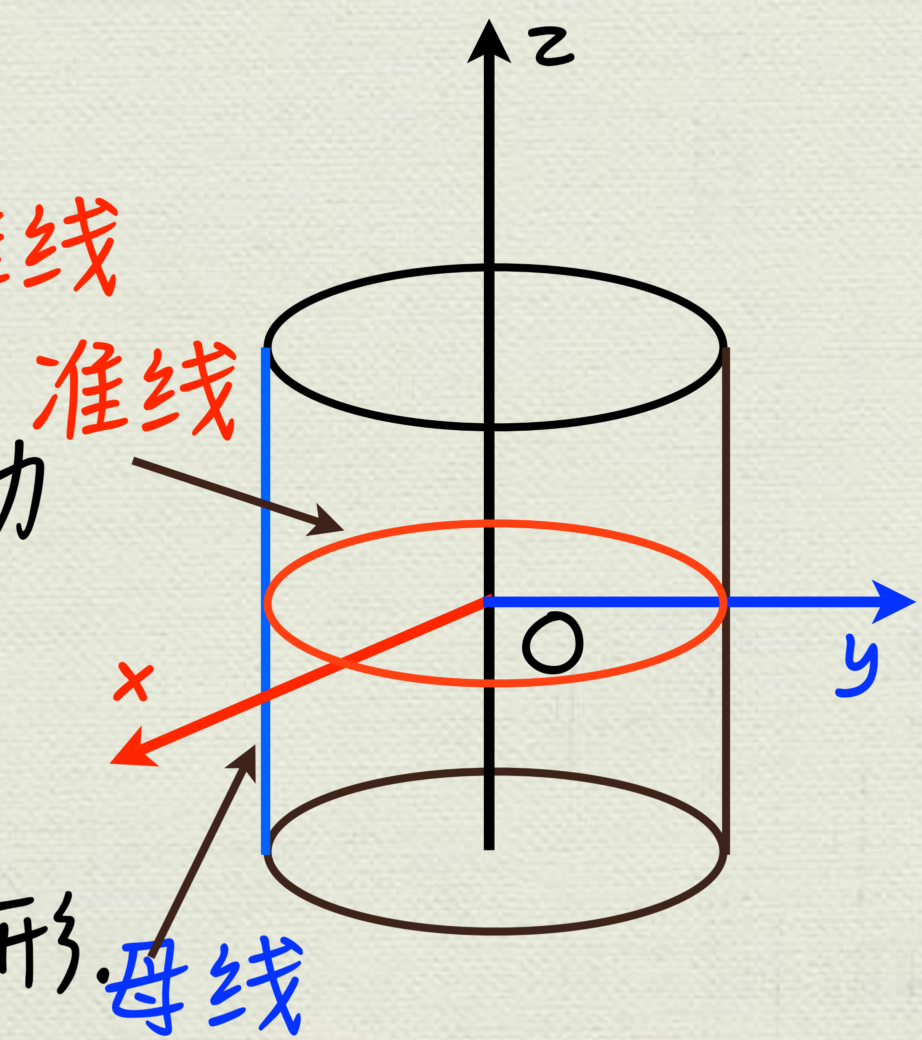
$k<0$: 虚球面

8.4.2 柱面

(1) 柱面的几何定义　　柱面的准线

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面.

柱面的母线



例 8 讨论方程 $x^2+y^2=r^2$ 的图形.

(2) 柱面的方程

可以适当选取坐标系，使其母线平行于某坐标轴.

若柱面的母线平行于 z 轴，且准线为 xOy 平面上的曲线

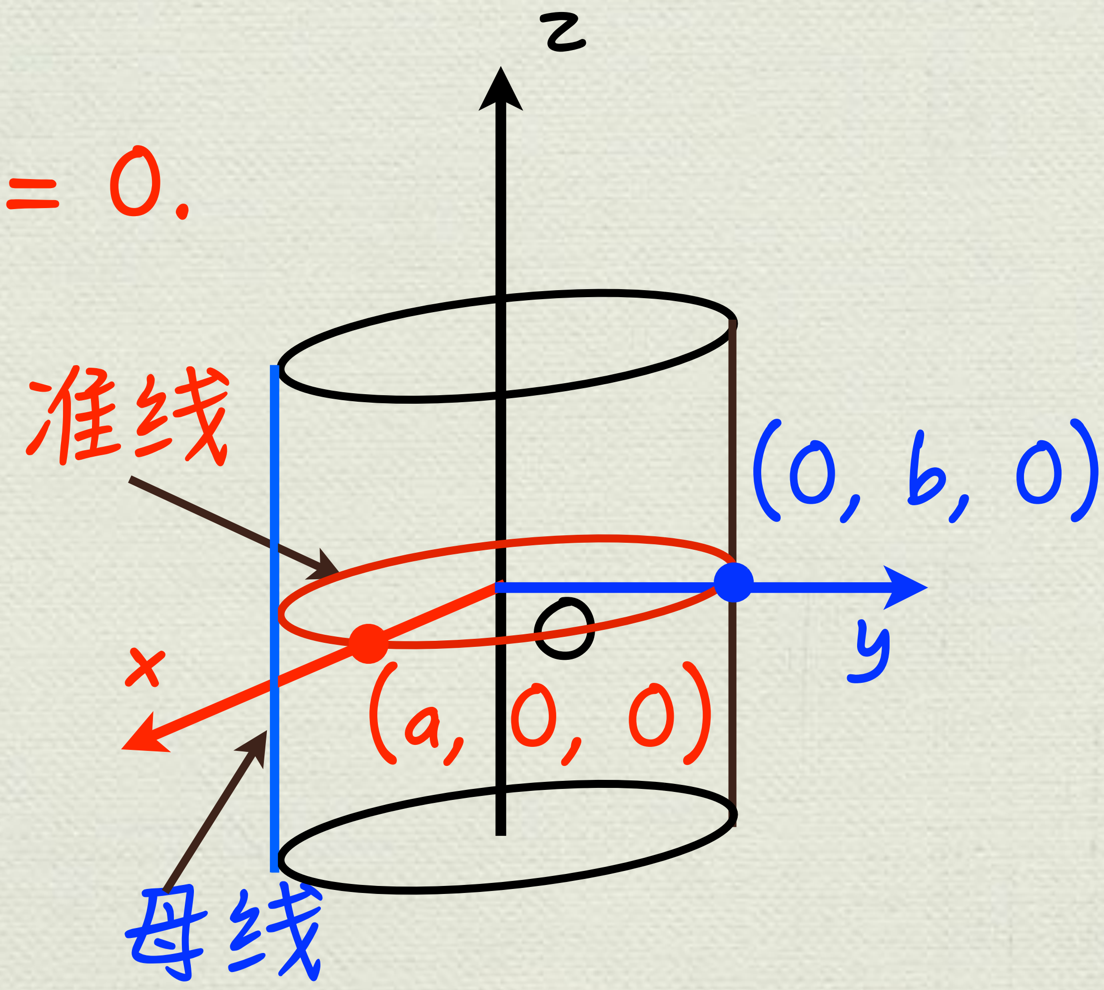
$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

则有柱面的方程为 $f(x, y) = 0.$

(3) 柱面的例子

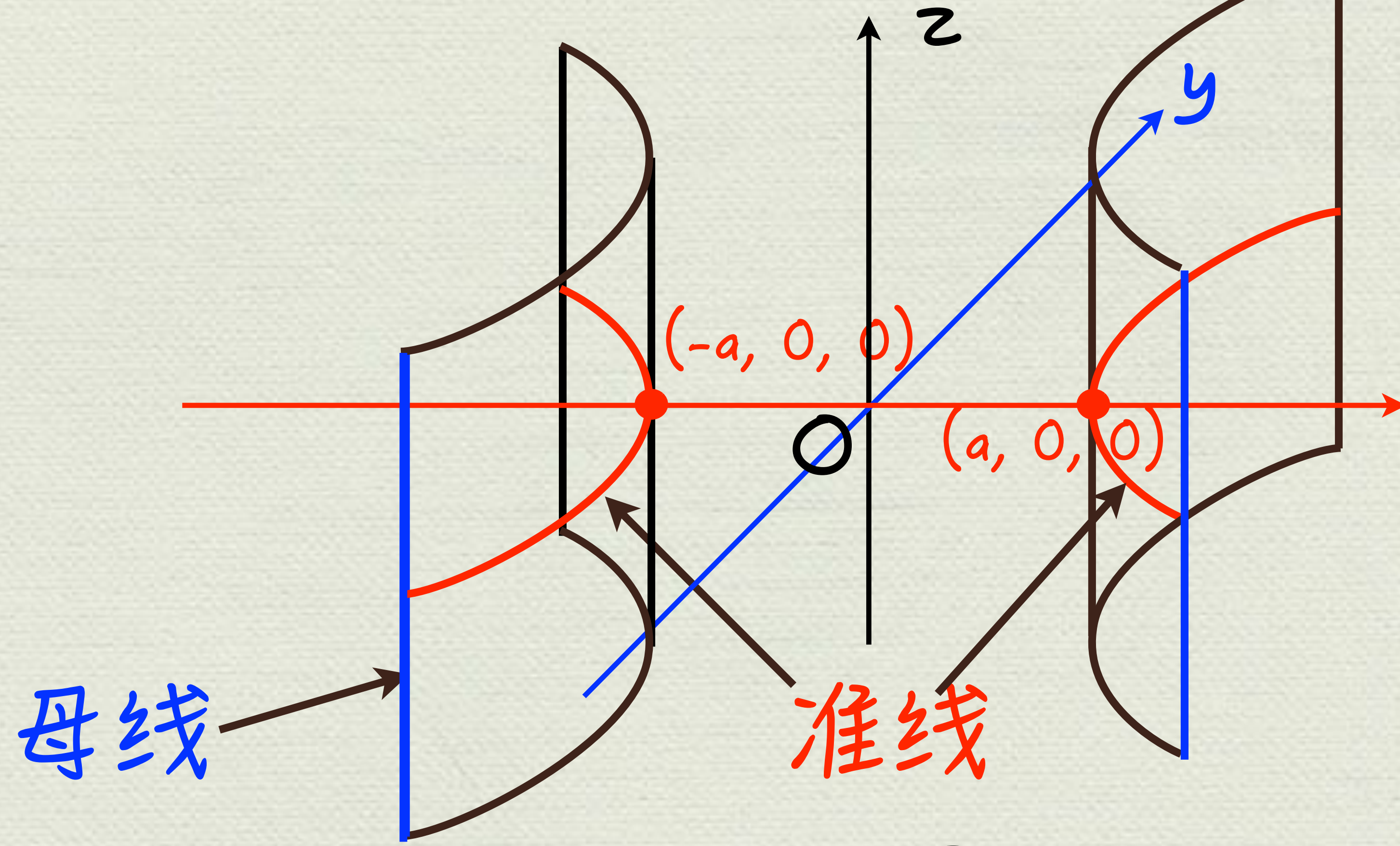
1° 椭圆柱面

方程: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



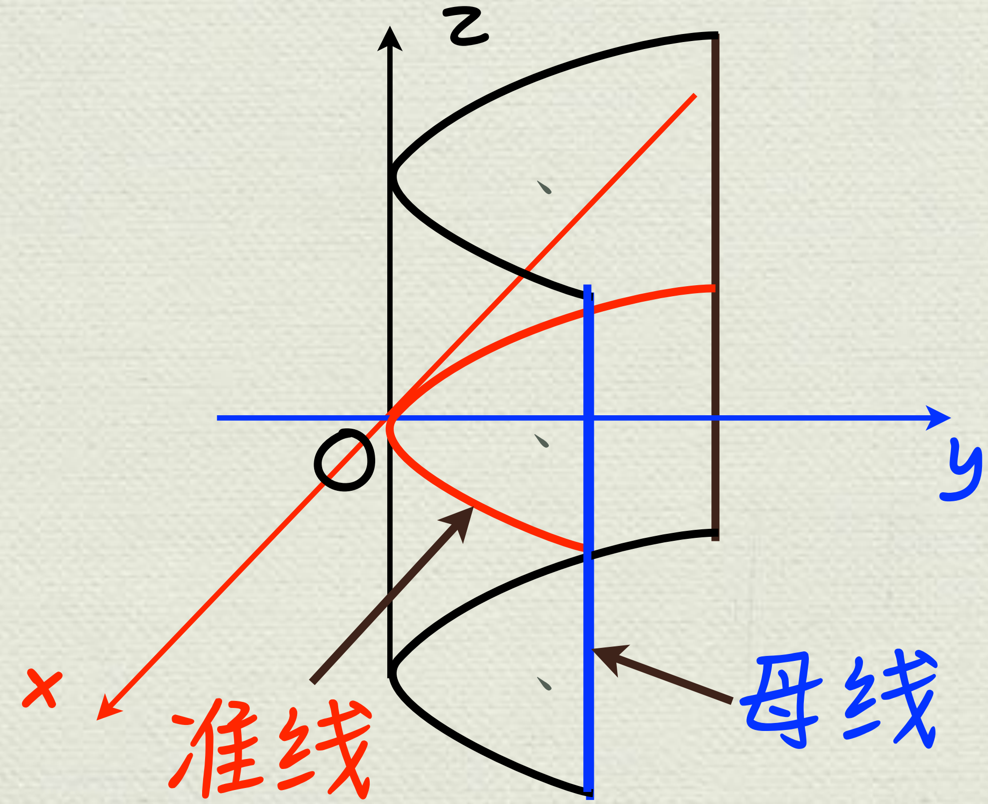
2° 双曲柱面

方程: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



3° 抛物柱面

方程: $x^2 = 2py \ (p > 0)$



> 柱面方程的特点: 只有两个变量. 没出现的变量是与母线平行的轴。

8.4.3 旋转曲面

(1) 几何定义

由一条平面曲线 C 绕该平面上的一条定直线 L 旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面.

(2) 旋转曲面的方程

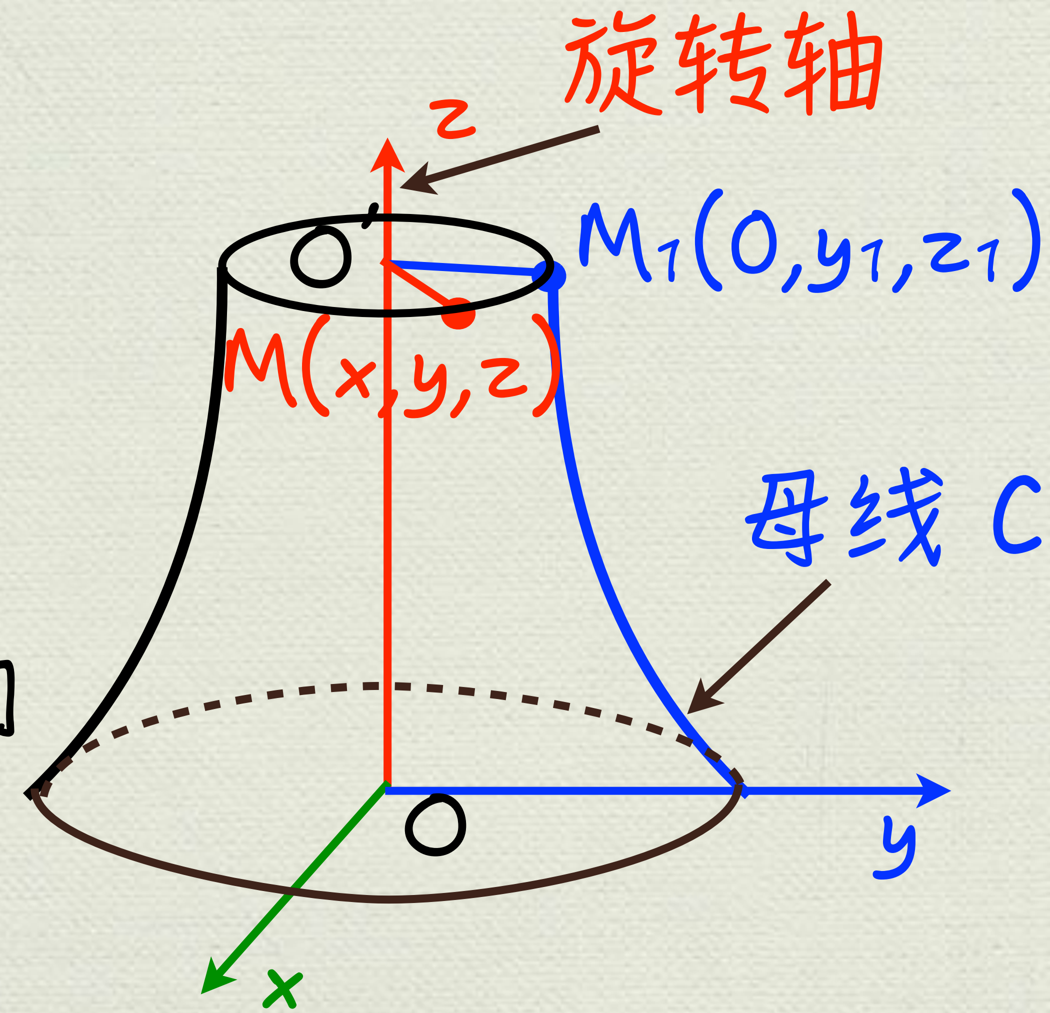
在 yOz 面上，给定曲线

$$C: \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

C 绕 z 轴一周得到旋转曲面

旋转曲面的方程为:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$$



注：求旋转曲面方程的方法

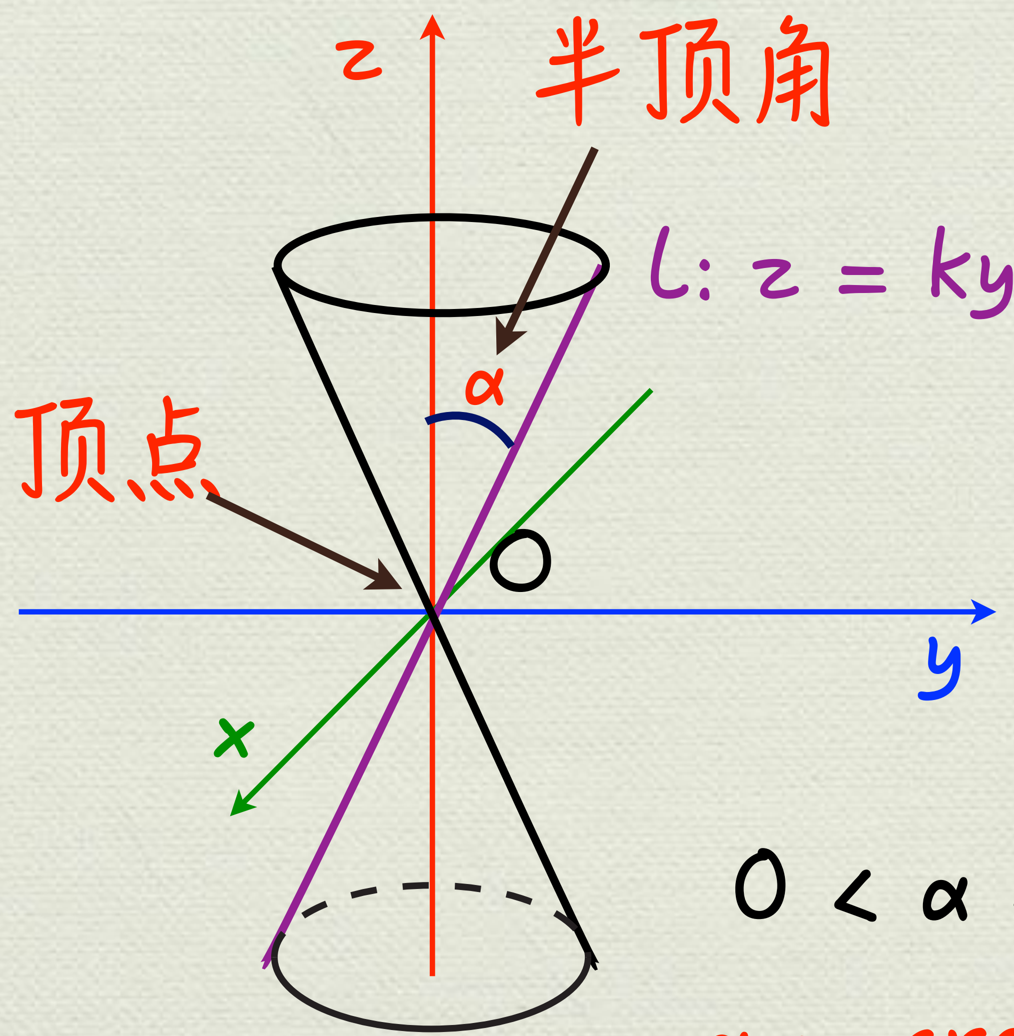
曲线方程中**旋转轴对应变量不变**，另一变量由除旋转轴外两个变量的平方根(加正、负号)代替.

例 9

求直线 $\begin{cases} z = ky, \\ x = 0, \end{cases}$ 绕 z 轴一周得到旋转曲面的方程.

$$z^2 = k^2(x^2 + y^2)$$

圆锥面



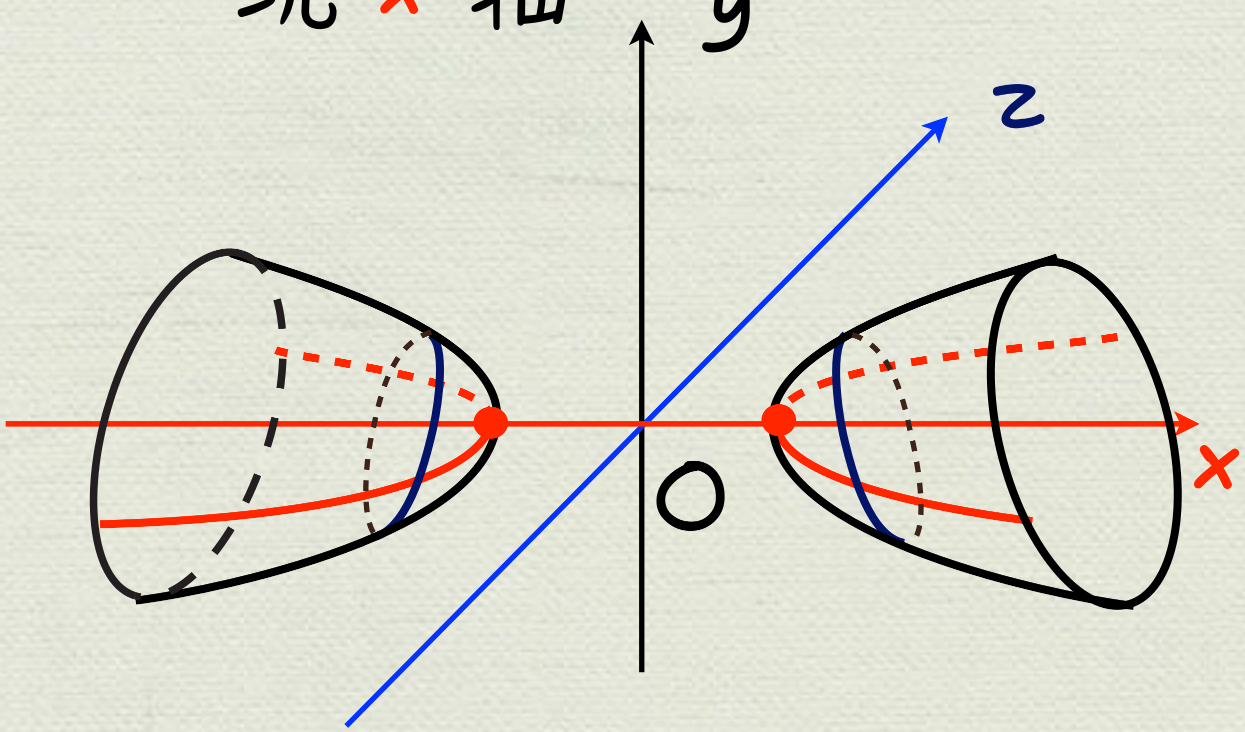
$0 < \alpha < \pi/2$

$\alpha = \operatorname{arccot} |k|$

例 10 求双曲线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$ 分别绕 x 轴，z 轴

一周得到旋转曲面的方程.

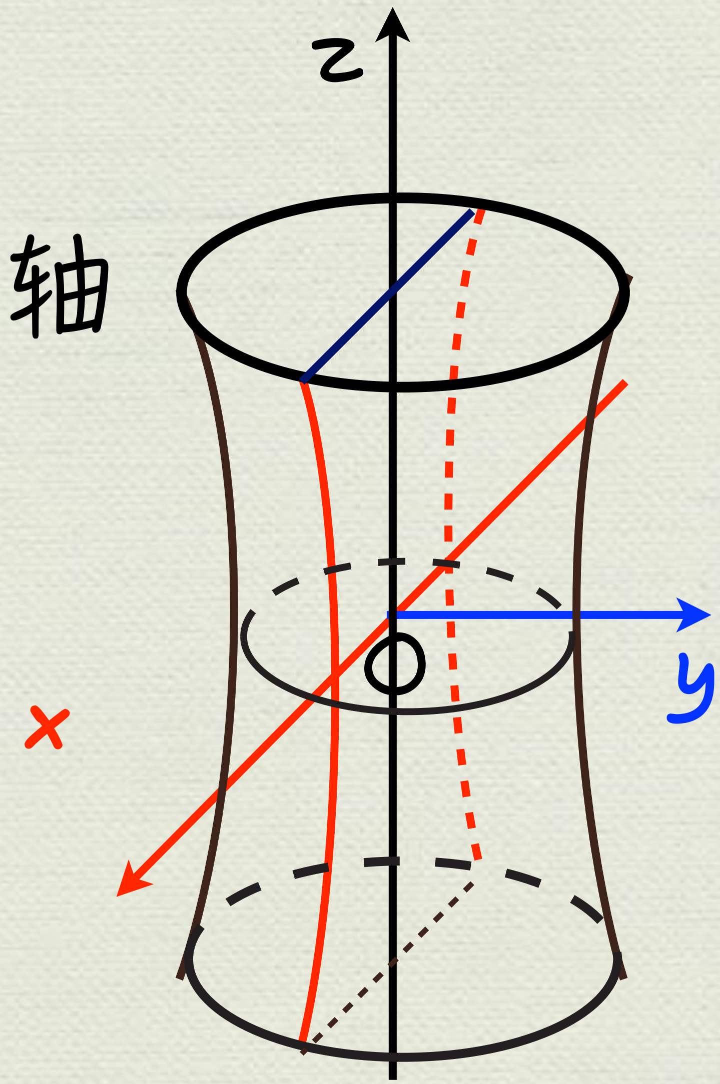
绕 x 轴



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

旋转双叶双曲面方程

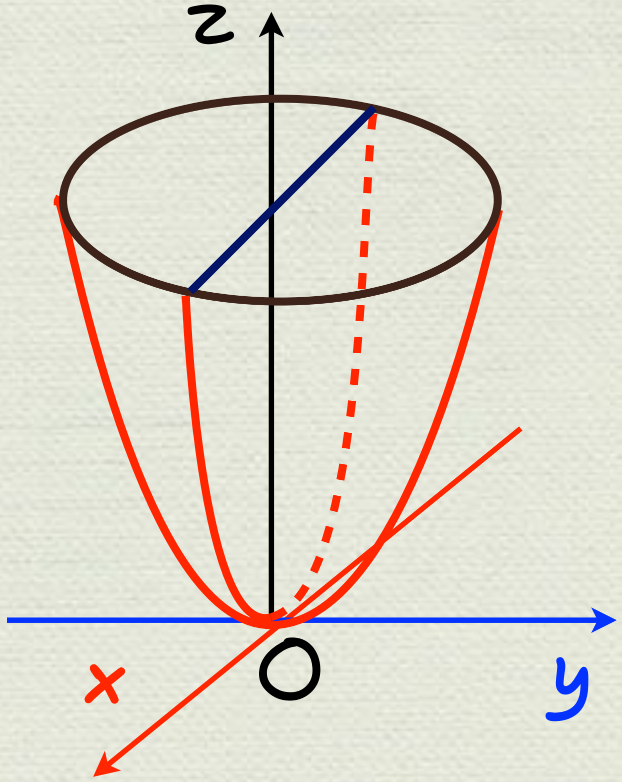
绕 z 轴



$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$$

旋转单叶双曲面方程

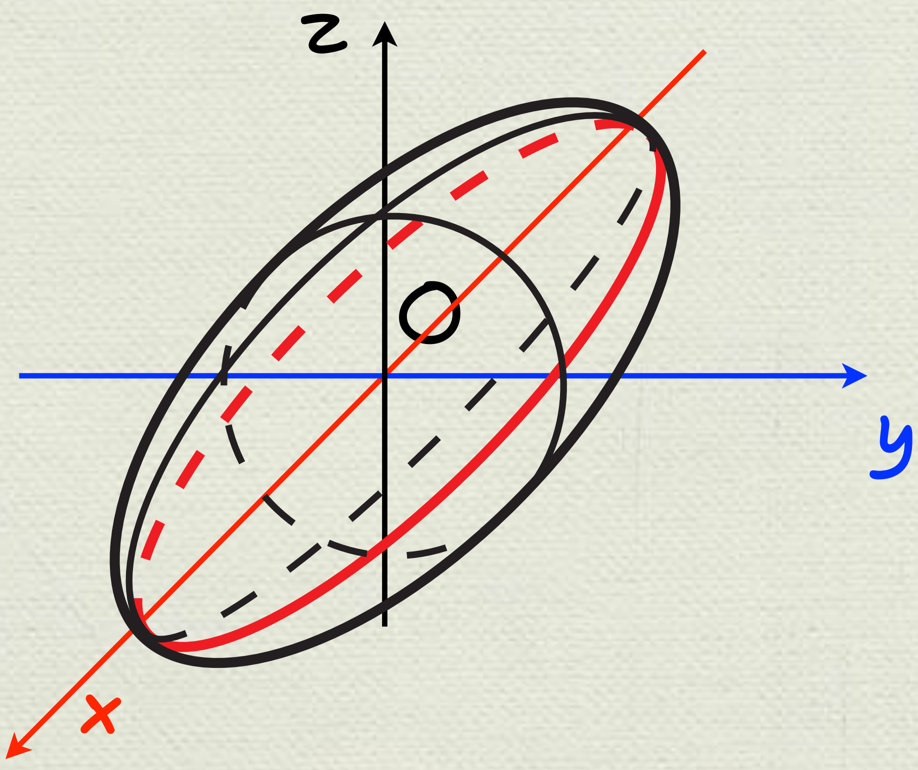
抛物线 $\begin{cases} x = 0, \\ y^2 = 2pz \end{cases}$



绕 z 轴一周得到旋转抛物面.

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

椭圆 $\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$



绕 x 轴一周得到旋转椭球面.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$$

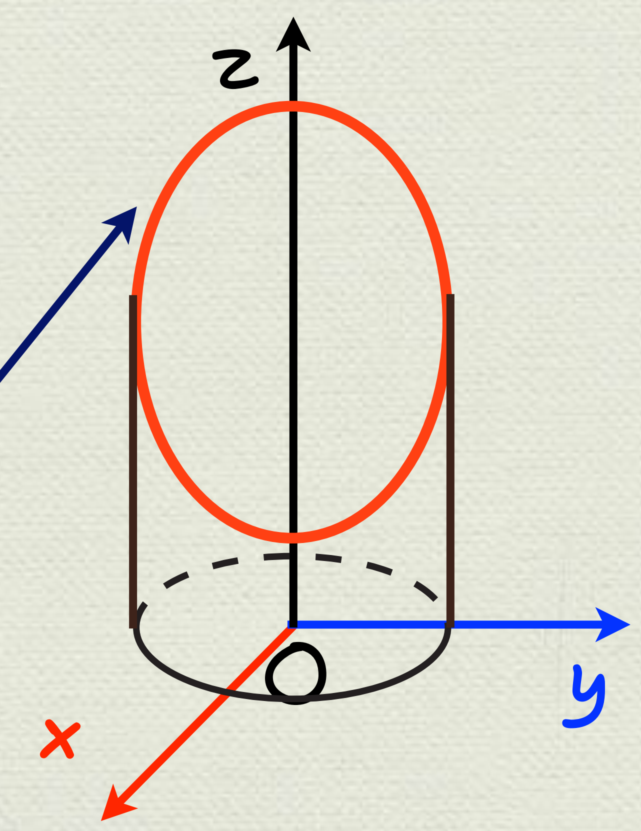
8.4.3 空间曲线

1. 空间曲线 C 的一般方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

空间中的两个曲面的方程.

例 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$



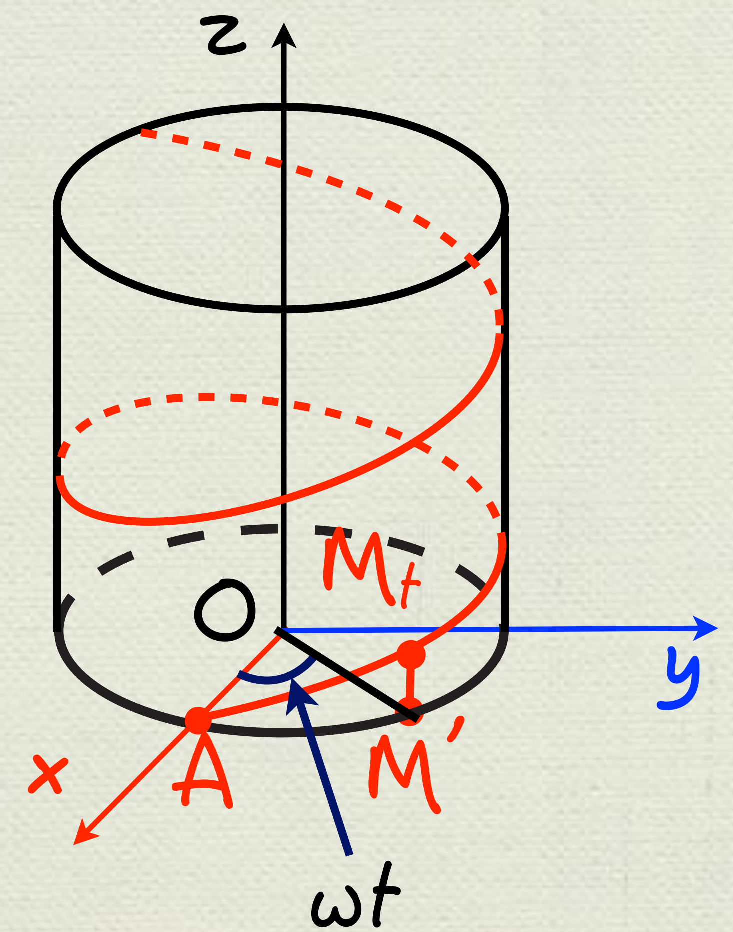
是空间中平面与柱面的交线.

2. 空间曲线 C 的参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases}$

例 11 在半径为 a 的圆柱面上，有一动点 M 以角速度 ω 绕旋转轴转动，同时又以匀速 v 沿母线上升，求点 M 的运动轨迹方程.

曲线方程为 $\begin{cases} x = a\cos(\omega t), \\ y = a\sin(\omega t), \\ z = vt. \end{cases}$

螺旋线

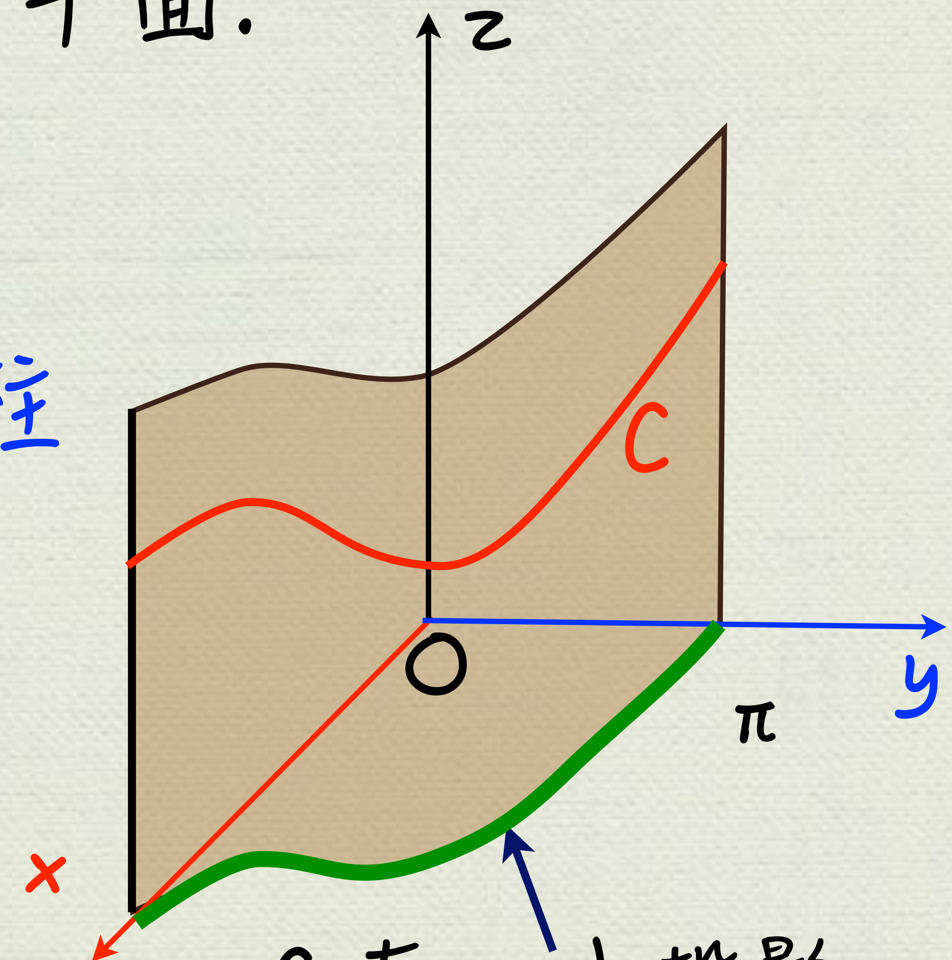


3. 投影曲线（曲线的投影）

(1) 定义 C: 空间曲线. π: 一个平面.

C 在 π 上的投影曲线(投影) 是

以 C 为准线, 母线垂直于 π 的柱面与 π 的交线



(2) 求投影曲线

求 C 在 xOy 面的投影.

$$C: \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

投影 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

方程消去 z 得到柱面方程 $F(x, y) = 0$

例 12 求曲线

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 & (z\geq 0) \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases}$$

在 xOy, zOx 坐标面上的投影.

由参数方程求曲线投影

C 的参数方程为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t). \end{cases}$

则 C 在 xOy 平面上的投影曲线为 $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=0. \end{cases}$