第二十九讲

- 8.3 正定实二次型
  - 8.3.1 实二次型的惯性定律
  - 8.3.2 正定二次型

复习

- 合同矩阵方阵 A 与 B 合同 $\Leftrightarrow \exists$ 可逆阵 C $C'AC = B$
- 标准二次型 (标准形)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k_1x_1^2 + k_2x_2^2 + \cdots + k_nx_n^2$$

- 规范二次型 (规范形)

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

- 定理 8.1

实二次型 $f = X'AX$ 存在正交线性变换 $X = PY$, 使得 $f = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$

- 化实二次型为标准形的方法

1. 用正交变换化实二次型 $f = X'AX$ 为标准形.

(1) 找 A 的特征值： $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

(2) 找 A 的特征向量，且规范正交化, 组成正交阵 P.

(3) 用正交线性变换 $X = PY$, 把 f 化为标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \, ,$$

2. 用**拉格朗日配方法**化 $f = X'AX$ 为标准形.

(1) 若 f 不含平方项，用可逆变换把 f 化为有平方项的二次型;

(2) 若 f 含 x_i^2, 对所有含有 x_i 的项进行配方;

(3) 对剩下的二次型重复上述步骤.

3. 用**初等变换法**化实二次型为标准形

对 $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$ 进行"**成对**"的初等变换,

把 A 化为对角阵 $C'AC$.

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} C'AC \\ C \end{bmatrix}$$

8.3 正定实二次型

- 8.3.1 实二次型的惯性定律

- 定理 8.2 实二次型 $f = X'AX$ 经可逆线性变换化为

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_n y_n^2,$$

$$f = l_1 z_1^2 + l_2 z_2^2 + \cdots + l_n z_n^2,$$

则 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ 中正数 (负数) 的个数

$=$ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ 中正数 (负数) 的个数,

称其为 f 的正(负)惯性指数.

($k_1, k_2, \ldots, k_n$ 中零的个数 $=$ $l_1, l_2, \ldots, l_n$ 中零的个数)

- 注 1: f 的秩为 r. 正惯性指数 + 负惯性指数 = r.
- 注 2: 实二次型 f 的规范形是唯一的.
- 注 3: 实对称阵 A 与 B 合同

$\Leftrightarrow$ $X'AX$ 与 $Y'BY$ 有相同的规范形

8.3.2 正定二次型

- 定义 f 为正定二次型, $f = X'AX > 0,\ \forall X \neq 0,$

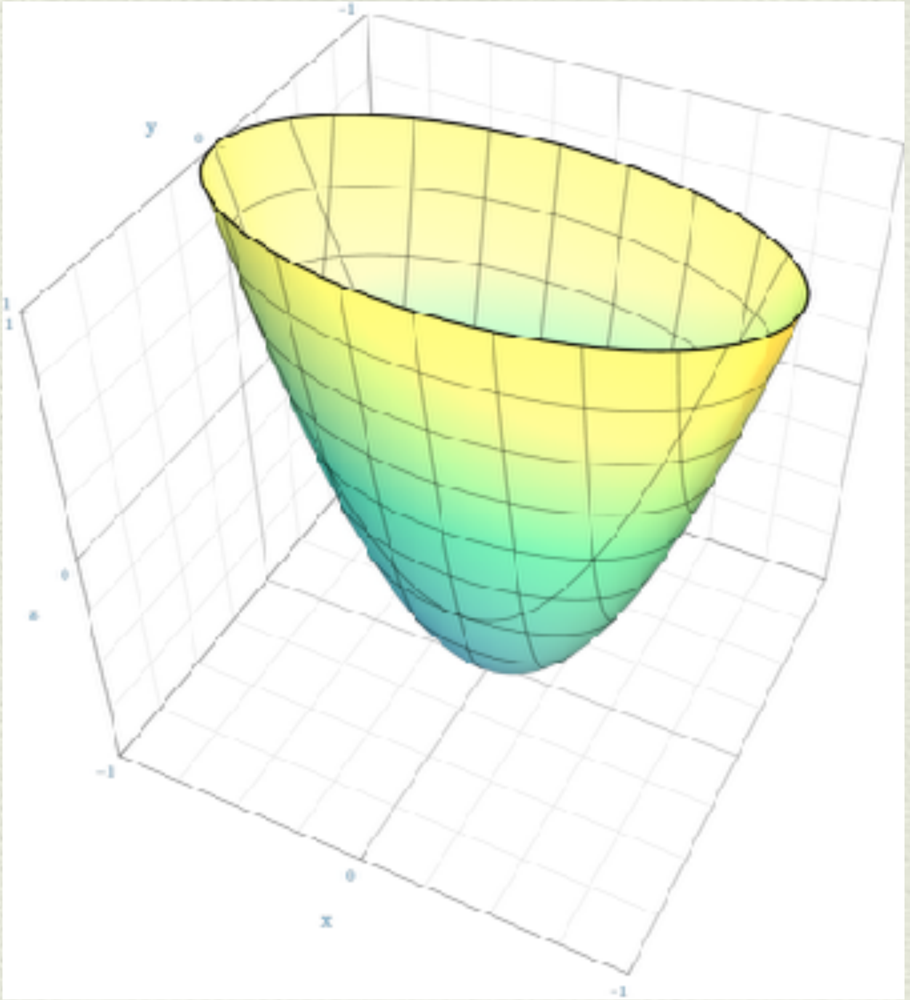
  正定二次型的矩阵为正定矩阵.

- 注 1. 正定矩阵一定是实对称阵. 反之未必.
- 注 2. 存在 A, $X'AX > 0,\ \forall X \neq 0$. 但 A 不是正定阵.

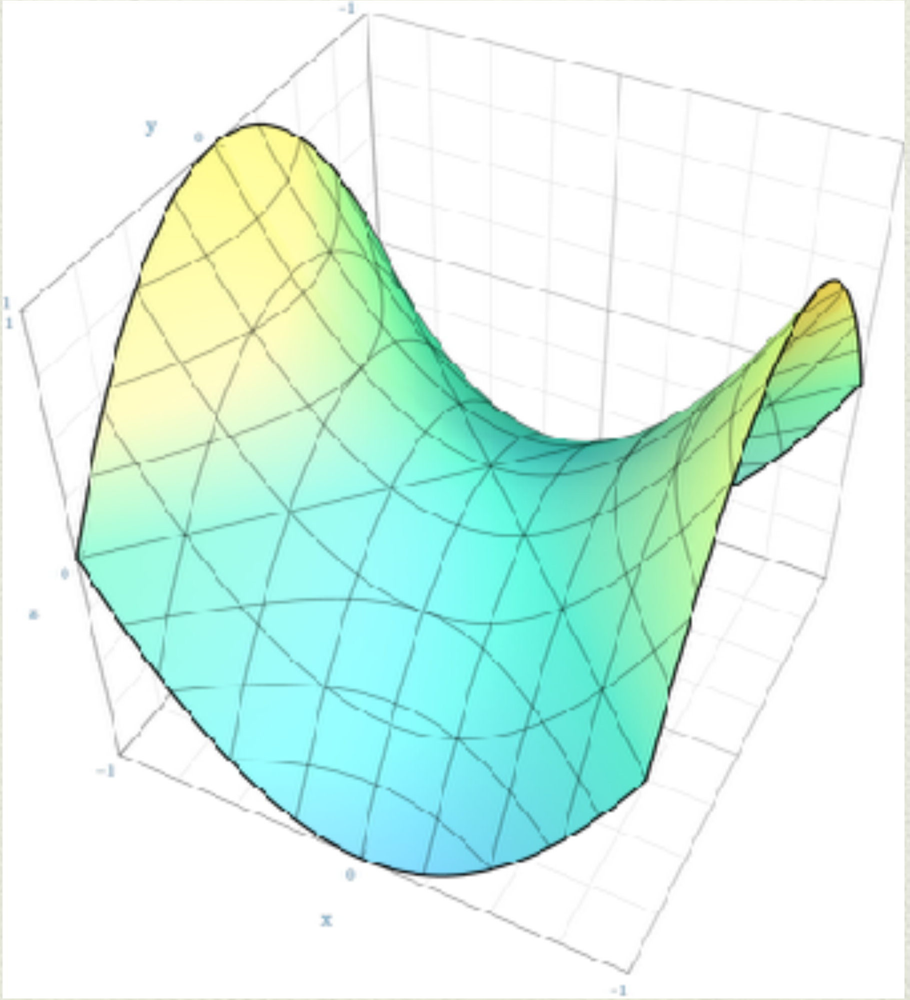
例 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $X'AX > 0,\ \forall X \neq 0$, 但 A 不是正定阵.

证明矩阵是正定矩阵, 要先验证它是实对称阵.

正定二次型的应用



正定二次曲面



马鞍面

- 正定二次型的判定 n 元实二次型 $f = X'AX$
  - 定理 8.3 f 正定 $\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数为 n.
    - 注: f 正定 $\Leftrightarrow$ A 与 E 合同
  - 推论 8.1 f 正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值都大于零.
  - 推论 8.2

    f 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆阵 Q, 使得 $A = Q'Q$.
  - 例 5 A 为正定矩阵 $\Rightarrow$ A^* 是正定矩阵.

    $\Rightarrow kA(k>0)$, A^{-1}, A^n, $A+E$ 是正定矩阵
  - 例 6 A, B 为正定矩阵 $\Rightarrow$ $A+B$ 是正定矩阵.

- 定理 8.4 (最好用)

实对称阵 A 正定

$\Leftrightarrow$ A 的各阶顺序主子式都大于零, 即

$$\text{若 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$\cdots, |A| > 0.$

第八章作业 6(1)

- 例 7　判定下面二次型是否正定.

$$f(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 4xz + 2yz$$

- 负定二次型
  - 定义　实二次型 $f = X'AX < 0, \forall X \neq 0,$
    负定二次型.
    负定矩阵: 负定二次型的矩阵
  - 注: $f = X'AX$ 负定 $\Leftrightarrow -f = X'(-A)X$ 正定
  - 推论 8.3　实对称阵 A 为负定
    $\Leftrightarrow$ A 的奇数阶顺序主子式小于零, 而偶数阶顺序主子式大于零.

第八章 作业选择 (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A 与 B (B)　(A) 合同且相似　(B) 合同但不相似

(C) 不合同但相似　(D) 不合同且不相似

A 是实对称阵, 与 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 合同且相似

A 的特征值: 4, 0, 0, 0　A 与 B 特征值不同, 不相似.

A 与 B 对应的二次型有相同的规范形, 则 A 与 B 合同.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ (A) 合同且相似

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 合同但不相似

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 不合同也不相似

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$ 相似但不合同

第八章 作业9 $A_{m\times n}$ 实矩阵, $A'A$ 为正定 $\Leftrightarrow R(A) = n$

$A_{m\times n}$ 实矩阵, AA' 为正定 $\Leftrightarrow R(A) = m$