

NALOGA IZ MATEMATIČNE FIZIKA 2

SIMON GODEC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

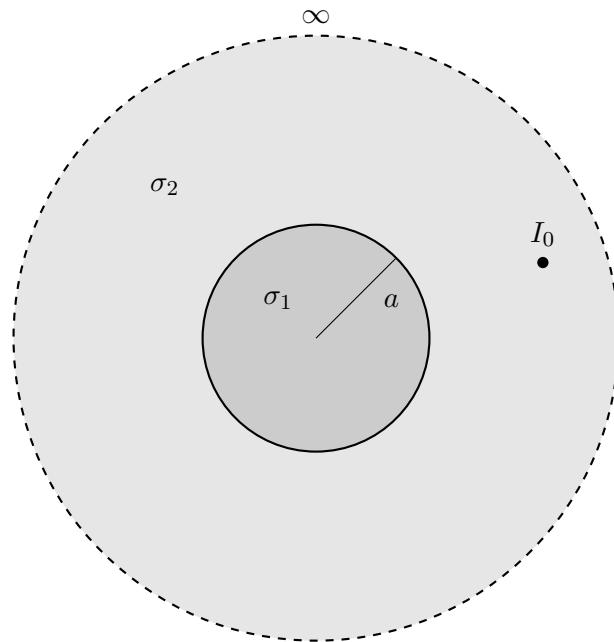
Rešitev in razprava o nalogi iz matematične fizike 2. Dodatna razširitev in numerični pristop v primeru, da je prevodnost plošče funkcija razdalje

NESKONČNA PREVODNA PLOŠČA

Solution and discussion of a task in Mathematical Physics 2. Further extension and numerical approach in the case where the conductivity of the plate is a function of distance.

1. Navodilo naloge

V neskončni plošči, ki ima prevodnost σ_2 , je okrogli del (“luknja”) polmera a z drugačno prevodnostjo σ'_1 . Nekje na plošči (izven “luknje”) pritisnemo žico, po kateri v ploščo teče tok I_0 . Izračunaj potencial in tok v plošči. Za kolikšen faktor se spremeni potencialna razlika med dvema točkama na obodu “luknje” v primerjavi s ploščo brez “luknje” ($\sigma_1 = \sigma_2$)? Kakšen je naboj na robu “luknje”?



Slika 1. Skica neskončne provodne plošče s prevodnostjo σ_2 in luknjo polmera a v katero vstavimo material s prevodnostjo σ_1 . Nekje na ploščo postavimo žico po kateri teče tok I_0 .

2. Matematična formulacija naloge

2.1 Prevedba v Laplacevo enačbo v brezizvornem in izvornem polju

Iz elektrostatike vemo, da je gostota električnega toka \mathbf{j} z električnim poljem povezana preko zveze

$$\mathbf{j} = \frac{dI}{dS} \hat{\mathbf{n}}_S = \sigma \mathbf{E}, \quad (1)$$

kjer je σ električna prevodnost. Električno polje izrazimo preko gradienta skalarnega polja ϕ ,

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi. \quad (2)$$

V dveh dimenzijah lahko pretok vektorskega polja \mathbf{F} čez sklenjeno zanko C povežemo z divergenco istega polja, $\nabla \cdot \mathbf{F}$, čez zaprto površino D , ki jo omejuje zanka C (tj. $\partial D = C$). To zvezno nam poda Greenov izrek, ki ga lahko zapišemo kot:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dl = \iint_D (\nabla \cdot \mathbf{F}) dA \quad (3)$$

Pri obravnavi tanke plošče debelino upoštevamo samo, ko nas zanima količina toka, ki teče skozi ploščo. Tok, ki izteka izven zanke D , je podan z enačbo

$$I_0 = h \oint_{\partial D} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl, \quad (4)$$

kjer h predstavlja dejansko debelino plošče. Na domeni $\mathbf{D} \subset \mathbb{R}^2$ debeline h , kjer imamo stacionarne razmere in ni izvirov toka, velja

$$h \oint_{\partial D} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = h \iint_D (\nabla \cdot \mathbf{j}) dA = 0. \quad (5)$$

Pri tem smo upoštevali Greenov izrek in dejstvo, da je na območju brez tokovnega izvira divergenca gostote toka enaka nič. To velja tudi za vsako poddomeno znotraj \mathbf{D} , kar pomeni, da na celotni domeni \mathbf{D} velja

$$h \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (6)$$

Iz tega sledi, da moramo na območju brez tokovnih izvirov v stacionarnih pogojih izpolniti

$$h \nabla \cdot \mathbf{j} = h \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -h \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = 0. \quad (7)$$

V primeru, da je prevodnost σ konstantna, se izraz (7) poenostavi v Laplacovo enačbo

$$-h\sigma \nabla^2 \phi = 0. \quad (8)$$

V nalogi je na ploščo staknjena žica po kateri teče tok I_0 . Žico obravnavamo kot točkovni izvir toka z velikostjo I_0 . Izvir se nahaja v točki \mathbf{r}_0 na domeni $\mathbf{D}' \subset \mathbb{R}^2$. Podobno kot prej izpeljemo

$$h \oint_{\partial D'} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = h \iint_{D'} (\nabla \cdot \mathbf{j}) dA = I_0 = \iint_{D'} I_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dA. \quad (9)$$

Enačba (9) velja za vsako podomeno domene \mathbf{D}' , ki vsebuje točko \mathbf{r}_0 , iz česar sledi

$$h \nabla \cdot \mathbf{j} = h \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -h \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = I_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (10)$$

Zopet, ko je prevodnost σ na domeni \mathbf{D}' konstantna, velja

$$-h\sigma \nabla^2 \phi = I_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (11)$$

2.2 Laplacove enačbe z robnimi pogoji

Obravnavane naloge se lotimo tako, da neskončno ploščo razdelimo na dve območji. Prvo območje predstavlja disk, z velikostjo polmera a in s prevodnostjo σ_1 . Drugo območje je zunanjost diska s prevodnostjo σ_2 . Prvo območje ozančimo z Ω drugo območje označimo s Π . Območje Π vsebuje točkovni izvir toka z velikostjo I_0 , ki se nahaja v točki \mathbf{r}_0 . Iz pogojev (8) in (11) sledi

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_1(\mathbf{r}) &= 0 \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \nabla^2\phi_2(\mathbf{r}) &= -\frac{I_0}{\sigma_2 h} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \Pi.\end{aligned}\tag{12}$$

Zaradi cilindrične simetrije območij Ω in Π je smiselno, da nalog rešujemo v polarnem koordinatnem sistemu. V polarnih koordinatah se Laplaceov operator ∇^2 zapise

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}.\tag{13}$$

Diracova delta funkcija se transformira kot

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)}{r}.\tag{14}$$

Enačbi (12) zapišemo v novem koordinatnem sistemu,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \theta^2} = 0 \quad r \leq a,\tag{15}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial \theta^2} = -\frac{I_0 \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)}{r \sigma_2 h} \quad r, r_0 > a.\tag{16}$$

Rešujemo sistem dveh parcialnih diferencialnih enačb, ki sta povezani preko robnih pogojev.

2.3 Robni pogoji

Za potenciala ϕ_1 in ϕ_2 veljajo Maxwellove enačbe v stacionarnih pogojih. Ena izmed teh je Faradajev zakon za elektrostatiko, ki v stacionarnih pogojih vodi do izničenja rotorja električnega polja, torej $\nabla \times \mathbf{E} = 0$. To pomeni, da morajo tangencialne komponente električnega polja na meji območij biti neprekinjene

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=a}\tag{17}$$

Drugi robni pogoj izhaja iz kontinuitete gostote električnega toka na meji med območjema z različnima prevodnostma σ_1 in σ_2 . Za normalno komponento gostote toka na stiku območij velja

$$\sigma_1 \frac{d\phi_1}{dr} \Big|_{r=a} = \sigma_2 \frac{d\phi_2}{dr} \Big|_{r=a}\tag{18}$$

Normalna komponenta gostote električnega toka $\mathbf{J}_r = \sigma \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{\mathbf{r}}$ mora biti neprekinjena na meji zaradi zakona o ohranitvi naboja. Kontinuiteta \mathbf{J}_r zagotavlja, da je hitrost prehoda naboja skozi površino enak nič. Diskontinuiteta v normalni komponenti bi pomenila kopiranje ali pomanjkanje naboja na meji, kar ni v skladu z zahtevanimi stacionarnimi pogoji.

Za reševanje naloge nam bo ponagalo, da si ogledamo, količino toka, ki izteka iz območja D definirega kot vsa povezana območja, ki vsebujejo \mathbf{r}_0 .

$$h \oint_{\partial D} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl = \iint_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{j}) \, dA + \iint_{D \setminus \Omega} (\nabla \cdot \mathbf{j}) \, dA = 0 + \iint_{D \setminus \Omega} \frac{I_0 \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)}{r} r \, dr \, d\theta = I_0.\tag{19}$$

Iz (19) sledi, da iz vsakega območja D , ki vsebuje točko \mathbf{r}_0 izteka tok I_0 . Za območja ki ne vsebujejo točke \mathbf{r}_0 , je skupna količina toka, ki vstopa enaka količini toka, ki izstopa.

3. Reševanje sistema enačb z robnimi pogoji

3.1 Invariantnost rešitve

Poskušajmo poiskati kakšno invariantno znotraj dane geometrije problema. Zaradi rotacijsko simetričnih območij Ω in Π se zdi roatcijska simetrija prava izbira, vendar s tem kršimo to simetrijo, saj se točkovni izvir v točki $(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ pri poljubni rotaciji ne preslika sam vase. Primerna izbira transformacije, ki ohranja Laplaceove enačbe je zrcaljenje čez premico $\theta = \theta_0$. Zapišemo jo kot

$$Z_{\theta_0}(r, \theta) = (r, 2\theta_0 - \theta). \quad (20)$$

Operacijo zrcaljenja prikazuje slika 2. Če s transformacijo (20) delujemo na Laplacov operator, se ta ohrani, saj operator zrcaljenja na radialni del deluje kot identiteta za kotni del pa velja $Z_{\theta_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \bullet = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Z_{\theta_0} \bullet$, saj $Z_{\theta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta}$. Iz tega sledi

$$Z_{\theta_0} (\nabla^2 \bullet) = \nabla^2 (Z_{\theta_0} \bullet). \quad (21)$$

Dodatno velja, da je

$$Z_{\theta_0} \left(\frac{\delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)}{r} \right) = \frac{\delta(r - r_0) \delta(2\theta_0 - \theta - \theta_0)}{r} = \frac{\delta(r - r_0) \delta(-(\theta - \theta_0))}{r} \quad (22)$$

Upoštevajmo simetričnost delta funkcije $\delta(-x) = \delta(x)$, iz česar vidimo, da je delta funkcija invariantna na transformacijo (20). Uporabimo lastnost (21) in (22) v primeru enačb (15) in (16):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (Z_{\theta_0} \phi_1)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (Z_{\theta_0} \phi_1)}{\partial \theta^2} = 0 \quad r \leq a, \quad (23)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (Z_{\theta_0} \phi_2)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (Z_{\theta_0} \phi_2)}{\partial \theta^2} = -\frac{I_0}{r \sigma_2 h} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \quad r, r_0 > a, \quad (24)$$

Podobno kot prej bi dokazali, da se enako transformirata tudi robna pogoja (17) in (18):

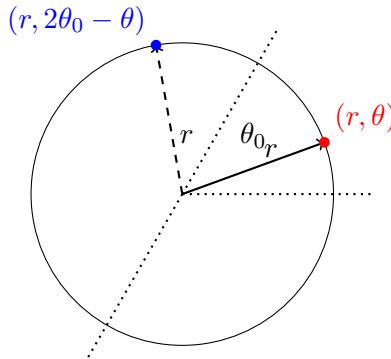
$$\frac{\partial (Z_{\theta_0} \phi_1)}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{\partial (Z_{\theta_0} \phi_2)}{\partial \theta} \Big|_{r=a}, \quad (25)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial (Z_{\theta_0} \phi_1)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \sigma_2 \frac{\partial (Z_{\theta_0} \phi_2)}{\partial r} \Big|_{r=a}. \quad (26)$$

Zaradi izreka o enoličnosti obstoja Greenove funkcije je transformirana rešitev enaka prvotni rešitvi.

$$Z_{\theta_0} \phi_1(r, \theta) = \phi_1(r, \theta) \quad (27)$$

$$Z_{\theta_0} \phi_2(r, \theta) = \phi_2(r, \theta). \quad (28)$$



Slika 2. Prikaz transformacije zrcaljenja Z_{θ_0} čez premico θ_0 .

3.2 Reševanje Laplacove enačbe na območju Ω s produktnim nastavkom

V enačbo (15) vstavimo produktni nastavek $R_1(r)\Theta_1(\theta)$ in delimo z $R_1(r)\Theta_1(\theta)$ pri tem dobimo

$$\frac{1}{rR_1}(r)\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_1(r)}{dr}\right) + \frac{1}{r^2\Theta_1(\theta)}\frac{d^2\Theta_1(\theta)}{d\theta^2} = 0.$$

Ker sta člena vsote neodvisna, ju enačimo s k^2 , dobimo dve ločeni navadni diferencialni enačbi

$$\frac{d^2R_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_1(r)}{dr} + k^2\frac{R_1(r)}{r^2} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d^2\Theta_1(\theta)}{d\theta^2} - k^2\Theta_1(\theta) = 0. \quad (30)$$

Zahtevamo, da ima rešitev Θ_1 za periodo 2π , iz česar sledi, da je $k \in \mathbb{Z}$. Splošno rešitev zapišemo lahko zapišemo kot vsoto

$$\phi_1(r, \theta) = A_0 \ln(r) + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos(n\theta) + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin(n\theta)] \quad (31)$$

Upoštevamo pogoj invariantnosti na zrcaljenje (27) in zapišemo nov ϕ_1

$$\phi_1(r, \theta) = A_0 \ln(r) + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos(n(\theta - \theta_0))]. \quad (32)$$

To je res, saj ϕ_1 izpolni pogoj (27),

$$Z_{\theta_0} \cos(n(\theta - \theta_0)) = \cos(n(2\theta_0 - \theta - \theta_0)) = \cos(-n(\theta - \theta_0)) = \cos(n(\theta - \theta_0)). \quad (33)$$

Rešitev ϕ_1 je dvakrat zvezno odvedljiva, iz česar sledi da mora biti funkcija $\phi_1(0, \theta)$ zvezna v izhodišču kar pa je mogoče le v primeru da je

$$B_n = 0, \quad \forall n > 0. \quad (34)$$

3.3 Reševanje Laplacove enačbe na območju Π z razvojem v Fourierovo vrsto

Enačbo (16) rešujemo z razvojem rešitve v Fourierovo vrsto. Zaradi invariantnosti rešitve (28) razvijemo ϕ_2 po invariantnih členih na zrcaljenje

$$\phi_2(r, \theta) = R_{0,2}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_{n,2}(r) \cos(n(\theta - \theta_0)). \quad (35)$$

Uporabimo nastavek (35) in vstavimo v enačbo (16) iz česar sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR_{n,2}}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} R_{n,2} \right] \cos(n(\theta - \theta_0)) = -\frac{I_0 \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0)}{r \sigma_2 h}. \quad (36)$$

Obe strani enačbe (36) integriramo $\int_0^{2\pi} \cdot \cos(n(\theta - \theta_0)) d\theta$. Zaradi ortogonalnosti dobimo sistem enačb

$$\frac{d^2R_{n,2}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{n,2}(r)}{dr} = -\frac{\delta(r - r_0)}{2\pi r \sigma_2 h}, \quad n = 0, \quad (37)$$

$$\frac{d^2R_{n,2}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{n,2}(r)}{dr} + \frac{n^2}{r^2} R_{n,2}(r) = -\frac{\delta(r - r_0)}{\pi r \sigma_2 h}, \quad n > 0. \quad (38)$$

V primeru reševanja sistema enačb se bomo skušali izogniti delta funkciji tako, da bomo območje Π razdelili na dva dela. Območje Π' je $\{a < r < r_0\}$, območje Π'' pa je območje $r > r_0$. Novo razdelitev prikazuje skica 3. Zaradi te razdelitve delta funkcija pade na rob območij med Π' in Π'' . Ker nobeno izmed območij sedaj ne vsebuje izvora se enačbi (76) in (77) poenostavita v

$$\frac{d^2 R'_{n,2}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR'_{n,2}(r)}{dr} = 0 \quad n = 0, r \theta \in \Pi', \quad (39)$$

$$\frac{d^2 R'_{n,2}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR'_{n,2}(r)}{dr} + \frac{n^2}{r^2} R'_{n,2}(r) = 0 \quad n > 0, r \theta \in \Pi'. \quad (40)$$

$$\frac{d^2 R''_{n,2}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR''_{n,2}(r)}{dr} = 0 \quad n = 0, r \theta \in \Pi'', \quad (41)$$

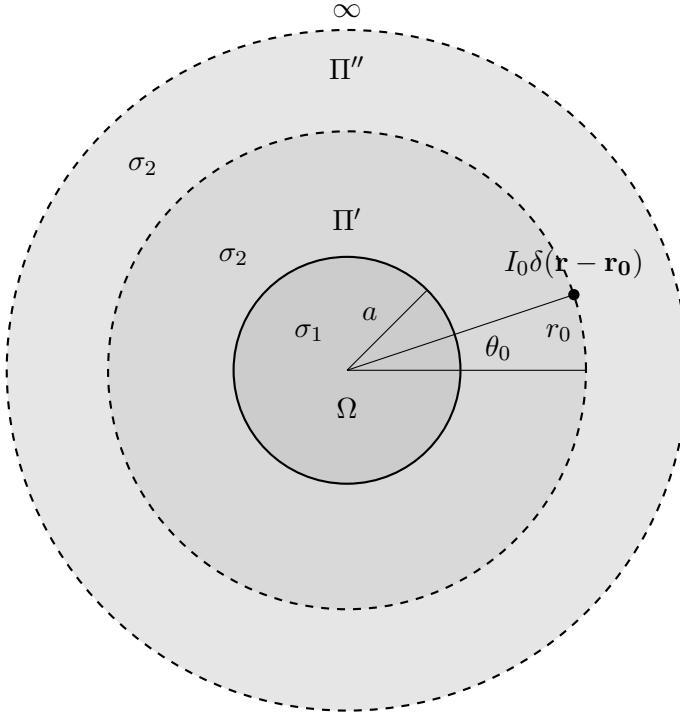
$$\frac{d^2 R''_{n,2}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR''_{n,2}(r)}{dr} + \frac{n^2}{r^2} R''_{n,2}(r) = 0 \quad n > 0, r \theta \in \Pi''. \quad (42)$$

Enačbe imajo enako obliko kot za območje Ω . Iz tega sledi, da lahko splošno rešitev zapišemo kot (31), zvezoo med $R'_{n,2}$ in $R''_{n,2}$ dobimo iz zveznosti $R_{n,2}$ v r_0 drugi pogoj pa dobimo tako, da enačbi (76) in (77) intergriramo preko intervala $r \in [r_0^-, r_0^+]$. Dobimo zvezze med $R'_{n,2}, R''_{n,2}$,

$$R'_{n,2}(r_0) = R''_{n,2}(r_0), \quad (43)$$

$$r_0 \frac{dR''_{n,2}}{dr} \Big|_{r=r_0^+} - r_0 \frac{dR'_{n,2}}{dr} \Big|_{r=r_0^-} = -\frac{1}{2\pi\sigma_2 h}, \quad n = 0, \quad (44)$$

$$r_0 \frac{dR''_{n,2}}{dr} \Big|_{r=r_0^+} - r_0 \frac{dR''_{n,2}}{dr} \Big|_{r=r_0^-} = -\frac{1}{\pi\sigma_2 h}, \quad n > 0. \quad (45)$$



Slika 3. Skica neskončne provodne plošče s prevodnostjo σ_2 in luknjo polmera a v katero vstavimo material s prevodnostjo σ_1 . V točki $(r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0)$ je delta gostota toka $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)I_0$.

Sestavimo splošno rešitev za območji Π' in Π'' . Velja

$$\phi_2(r, \theta) = A'_0 \ln(r) + B'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A'_n r^n + B'_n r^{-n}) \cos(n(\theta - \theta_0))], \quad a < r < r_0, \quad (46)$$

$$\phi_2(r, \theta) = A''_0 \ln(r) + B''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A''_n r^n + B''_n r^{-n}) \cos(n(\theta - \theta_0))], \quad r > r_0. \quad (47)$$

Za rešitev Laplacove enačbe z robnimi pogoji (43), (44) in (45) na območju Π pričakujemo zvezno rešitev, ki je povsod odvedljiva, njen odvod pa ni zvezen v točki $(r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta)$. V nalog imamo opravka z neskončno ploščo zato je območje Π'' razširjen v smislu, da dovolimo, da je polarni radij $r_\infty = \{\infty\}$. Zahtevamo, da je tudi pri tej razširitvi ϕ_2 zvezna in odvedljiva na Π'' kar pa je mogoče le v primeru, da v $\phi_2(\infty, \theta)$ funkcija nima odvisnosti od θ . To izpolnimo tako, da je

$$A''_n = 0, \quad \forall n > 0. \quad (48)$$

Upoštvajmo (19) na robu diska $D(0, \tilde{r})^\circ$, kjer $\tilde{r} > r_0$. Velja

$$I_0 = h \oint_{\partial D(0, \tilde{r})^\circ} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}}_r \, dl = h \int_0^{2\pi} \sigma_2 \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial r}(\tilde{r}, \theta) \right) \tilde{r} \, d\theta, \quad (49)$$

iz česar sledi

$$h \int_0^{2\pi} \sigma_2 \left(-\frac{\partial \phi_2}{\partial r}(\tilde{r}, \theta) \right) \tilde{r} \, d\theta = -h \sigma_2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{A''_0}{\tilde{r}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-n B''_n \tilde{r}^{-(n+1)}) \cos(n(\theta - \theta_0)) \right) \tilde{r} \, d\theta, \quad (50)$$

pri tem upoštevamo, da velja,

$$\int_0^{2\pi} \cos(n(\theta - \theta_0)) \, d\theta = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (51)$$

S tem dobimo pogoj za koeficient A''_0 :

$$A''_0 = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h}. \quad (52)$$

Isti razmislek nam v primeru $\tilde{r} < r_0$ poda pogoj za koeficiente A_0, A'_0 :

$$A'_0 = 0, \quad (53)$$

$$A_0 = 0. \quad (54)$$

3.4 Določenost rešitve

Za določitev ϕ_1 in ϕ_2 rešimo nasledji sistem:

$$\phi_1(r, \theta) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n r^n \cos(n(\theta - \theta_0))], \quad r < a, \quad (55)$$

$$\phi_2(r, \theta) = B'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A'_n r^n + B'_n r^{-n}) \cos(n(\theta - \theta_0))], \quad a < r < r_0, \quad (56)$$

$$\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \ln(r) + B''_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [B''_n r^{-n} \cos(n(\theta - \theta_0))], \quad r > r_0, \quad (57)$$

pri pogojih (17), (18), (43), (44) in (45). Zdi se, da je sistem predoločen, vendar smo s pogoji o kontinuiteti že zadostili pogoju o skoku odvoda v točki $r = r_0$, (44). Z ostalimi štirimi pogoji

enolično določimo koeficiente A_n , A'_n , B'_n , B''_n , $\forall n > 0$. Dva izmed koeficientov B_0 , B'_0 in B''_0 pri tem ostaneta nedoločena. Iz fizikalnega stališča je to smiselno, saj so vse opazovane spremenljivke povezane z odvodom potenciala. Nedoločena koeficiente lahko dobimo tako, da si izberemo umeritev v ničli in zahtevamo zvesnost na robu med prehodom iz ϕ_1 v ϕ_2 . Umeritev izberemo tako, da je $\phi_1(0, \theta) = -\frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln r_0$, dodatno upoštevamo zveznost na robu $r = a$ in zveznostni robni pogoj (17) iz česar sledi

$$B_0 = -\frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln(r_0), \quad (58)$$

$$B'_0 = -\frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln(r_0), \quad (59)$$

$$B''_0 = \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \ln(r_0) - \frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln(r_0). \quad (60)$$

Iz robnih pogojev (17), (18), (43) in (44) sledi sistem enačb

$$A_n a^n - A'_n a^n - B'_n a^{-n} = 0, \quad \forall n > 0, \quad (61)$$

$$\sigma_1 n A_n a^{n-1} - \sigma_2 n \left(A'_n a^{n-1} - B'_n a^{-(n+1)} \right) = 0, \quad \forall n > 0, \quad (62)$$

$$B''_n r_0^{-n} - A'_n r_0^n - B'_n r_0^{-n} = 0, \quad \forall n > 0, \quad (63)$$

$$-n B''_n r_0^{-(n+1)} - n A'_n r_0^{n-1} + n B'_n r_0^{-(n+1)} = -\frac{I_0}{\pi\sigma_2 h r_0}, \quad \forall n > 0. \quad (64)$$

Sistem enačb zapišemo v vektorski obliki

$$\begin{bmatrix} A_n \\ A'_n \\ B'_n \\ B''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -a^{-2n} & 0 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_2 a^{-2n} & 0 \\ 0 & -1 & -r_0^{-2n} & r_0^{-2n} \\ 0 & -1 & r_0^{-2n} & -r_0^{-2n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{I_0}{nr_0^n \pi \sigma_2 h} \end{bmatrix}, \quad \forall n > 0. \quad (65)$$

Rešimo sistem, tako, da poiščemo inverz matrike, iz česar sledi rešitev

$$A_n = \frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)h} \frac{1}{nr_0^n}, \quad \forall n > 0, \quad (66)$$

$$A'_n = \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \frac{1}{nr_0^n}, \quad \forall n > 0, \quad (67)$$

$$B'_n = \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{a^{2n}}{n} r_0^n, \quad \forall n > 0, \quad (68)$$

$$B''_n = \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{a^{2n}}{nr_0^n} + \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \frac{r_0^n}{n}, \quad \forall n > 0. \quad (69)$$

S tem smo določili rešitev ϕ_1 in ϕ_2 ,

$$\phi_1(r, \theta) = -\frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln(r_0) + \frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)h} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^n \right] \frac{\cos(n(\theta - \theta_0))}{n} \quad (70)$$

$$\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln(r_0) + \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^n + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \left(\frac{a^2}{r_0 r} \right)^n \right] \frac{\cos(n(\theta - \theta_0))}{n} \right), \quad (71)$$

$$\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \left(\ln \left(\frac{r}{r_0} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \left(\frac{a^2}{r_0 r} \right)^n + \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right] \frac{\cos(n(\theta - \theta_0))}{n} \right) - \frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \ln(r_0) \quad (72)$$

Izraze poenostavimo, tako da upoštevamo zvezo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2x \cos(\theta) + x^2), \quad \|x\| < 1. \quad (73)$$

Zapišemo končna izraza ϕ_1 in ϕ_2

$$\boxed{\phi_1(r, \theta) = -\frac{I_0}{2\pi(\sigma_2 + \sigma_1)h} \ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)), \quad (74)}$$

$$\boxed{\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{4\pi\sigma_2 h} \left(\ln(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \ln(r_0^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2\frac{a^2 r_0}{r} \cos(\theta - \theta_0)) \right)}. \quad (75)$$

Izračunamo električno polje tako, da nad skalarnim poljem delujemo z gradientom, $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, iz česar sledi

$$\boxed{\mathbf{E}_r = \frac{I_0}{2\pi(\sigma_2 + \sigma_1)h} \left(\frac{2r - 2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad r \leq a, \quad (76)}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_\theta = \frac{I_0}{2\pi(\sigma_2 + \sigma_1)h} \left(\frac{2rr_0 \sin(\theta - \theta_0)}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r}, \quad r \leq a, \quad (77)}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_r = \frac{I_0}{4\pi\sigma_2 h} \left(\frac{2r - 2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} - \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{\frac{2a^4}{r^3} - \frac{2a^2 r_0}{r^2} \cos(\theta - \theta_0)}{r_0^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2\frac{a^2 r_0}{r} \cos(\theta - \theta_0)} \right) \hat{\mathbf{e}}_r, \quad r > a, \quad (78)}$$

$$\boxed{\mathbf{E}_\theta = \frac{I_0}{4\pi\sigma_2 h} \left(\frac{2rr_0 \sin(\theta - \theta_0)}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \theta_0)} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{\frac{2a^2 r_0}{r} \sin(\theta - \theta_0)}{r_0^2 + \frac{a^4}{r^2} - 2\frac{a^2 r_0}{r} \cos(\theta - \theta_0)} \right) \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r}, \quad r > a. \quad (79)}$$

4. Analiza rešitve

Zapišemo rešitev v vektorski obliki

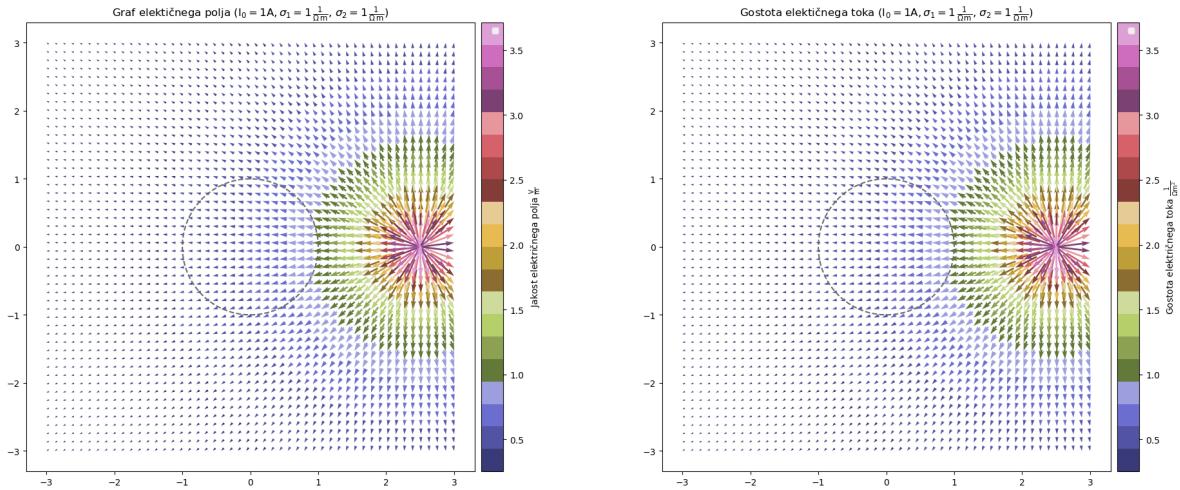
$$\phi_1(r, \theta) = -\frac{I_0}{\pi(\sigma_2 + \sigma_1)h} \ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|), \quad (80)$$

$$\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \left(\ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \ln\left(\left\|\frac{a^2 \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \mathbf{r}_0\right\|\right) \right). \quad (81)$$

potencial ϕ_1 je rešitev Laplacove enačbe na območju Ω potencial ϕ_2 je Greenova funkcija Laplacovega operatorja za območje Π pri danih robnih pogojih. Izraz $\ln\left(\left\|\frac{a^2 \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \mathbf{r}_0\right\|\right)$ nas spomne na inverzijo. Tukaj je pomembno, opomniti, da je izbira konstante poljubna zato se ni izšlo, da bi za Greenovo funkcijo veljalo $G(r, r_0) = G(r_0, r)$. Če izraz $\ln\left(\left\|\frac{a^2 \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \mathbf{r}_0\right\|\right)$ preuredimo v $\ln\left(\frac{a^2}{\|\mathbf{r}_0\|} \left\|\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \frac{\mathbf{r}_0}{a^2}\right\|\right)$, tem izpolnimo simetričnost. To lahko storimo, saj je rešitev ϕ določena do konstante natačno.

Analizirajmo rešitev, v nekaj limitnih primerih. V primeru, ko sta prevodnosti enaki, $\sigma_1 = \sigma_2$, dobimo za rešitev Greenovo funkcijo za neskončno ploščo v dveh dimenijah. Električno polje in gostota električnega toka v tem primeru prikazuje slika 4.

$$\phi_2(r, \theta) = \phi_1(r, \theta) = G_\infty = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) \quad (82)$$



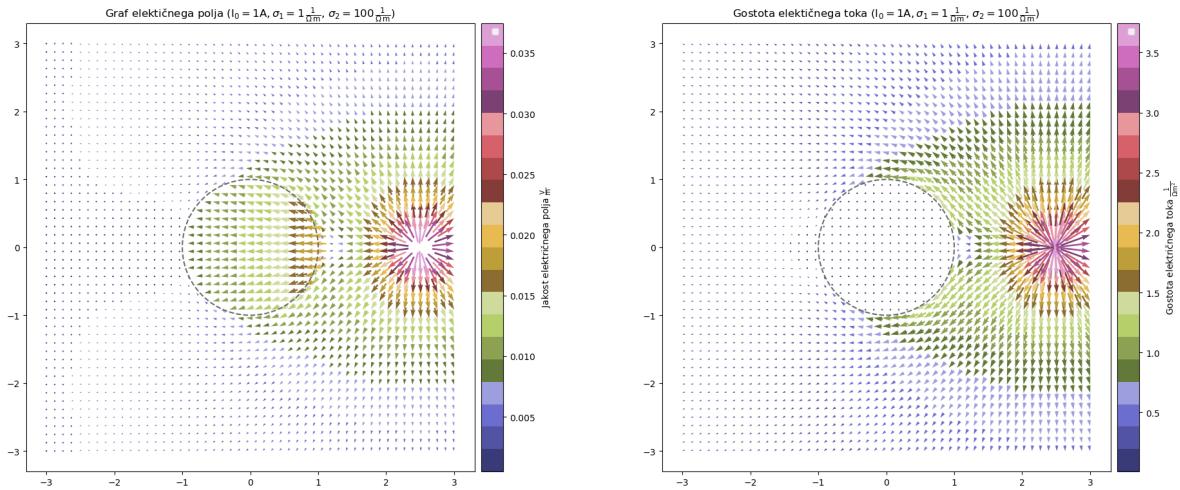
Slika 4. Slika prikazuje električno polje na levi in gostote električnega toka na desni pri enakih prevodnostih.

V primeru, da gre prevodnost σ_1 proti nič, dobimo potencial

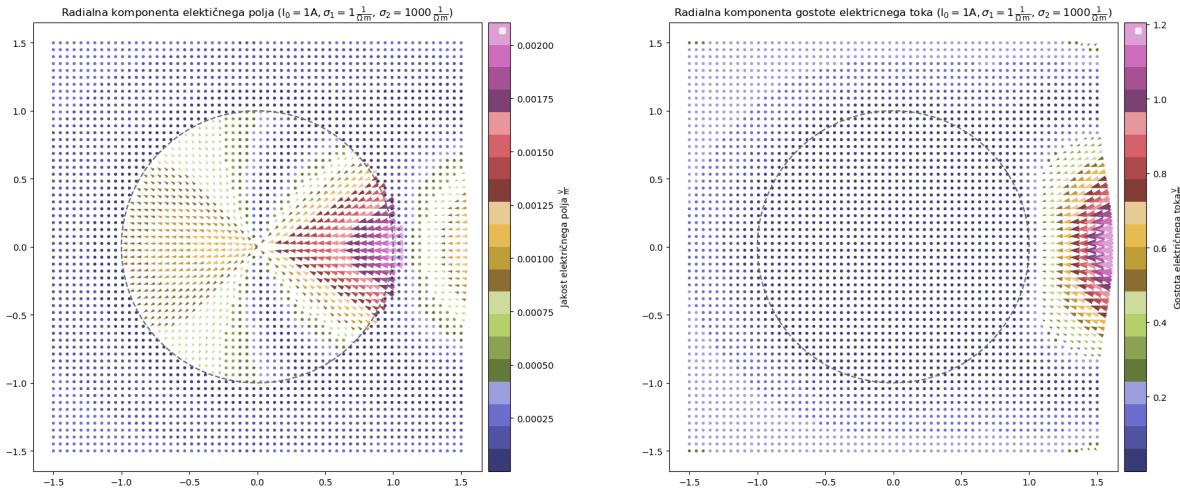
$$\phi_1(r, \theta) = -\frac{I_0}{\pi\sigma_2 h} \ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|), \quad r \leq a \quad (83)$$

$$\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \left(\ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) + \ln\left(\frac{a^2 \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \mathbf{r}_0\right) \right), \quad r > a. \quad (84)$$

Radialna komponenta električnega polja ima na robu $r = a$ nezvezen skok. Radialna komponenta zunanjega območja diska se na robu približuje ničli na notranji strani roba pa je sorazmerna $\frac{1}{\sigma_2}$. Radialna komponenta gostote toka je na robu območij enaka in se približuje vrednosti nič. To prikazuje slika 5 in dodatno le radialna komponenta na sliki 6.



Slika 5. Slika prikazuje električno polje na levi in gostote električnega toka na desni pri prevodnosti $\sigma_2 \gg \sigma_1$.



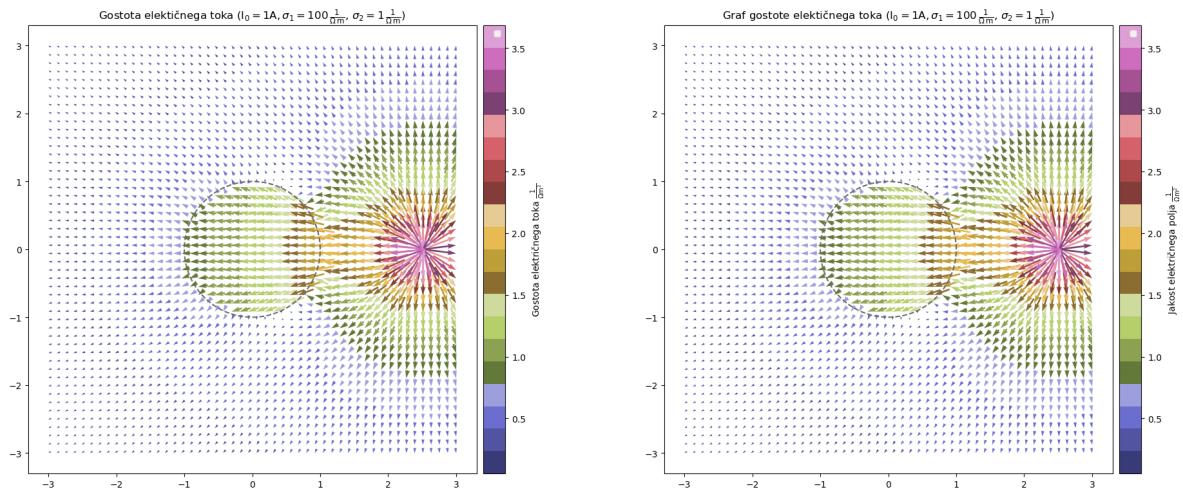
Slika 6. Slika prikazuje radialno komponento električnega polja na levi in radialno komponento gostote električnega toka na desni pri prevodnosti $\sigma_2 \gg \sigma_1$.

V limitnem primeru ko gre σ_1 proti neskončno, velja

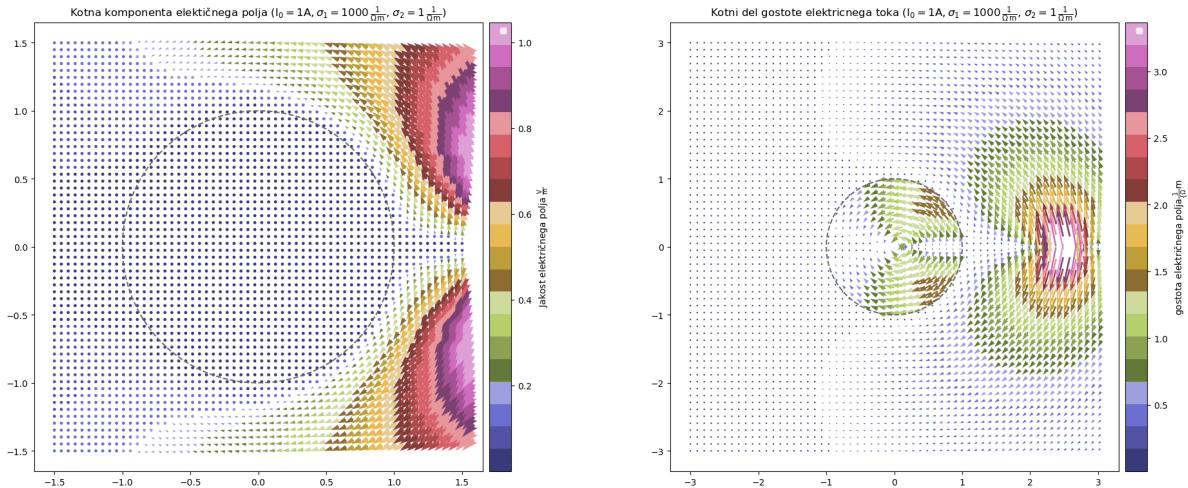
$$\phi_1(r, \theta) = 0, \quad r < a, \quad (85)$$

$$\phi_2(r, \theta) = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \left(\ln(\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|) - \ln\left(\left\|\frac{a^2 \mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^2} - \mathbf{r}_0\right\|\right) \right), \quad r > a. \quad (86)$$

Iz zveze (79) sledi, da kotna komponenta zunanjega območja električnega polja na robu $r = a$, gre proti nič. Kotna komponenta električnega toka ima na robu skok. To prikazuje slika 7 dodatno slika (8) prikazuje kotno komponento polj.

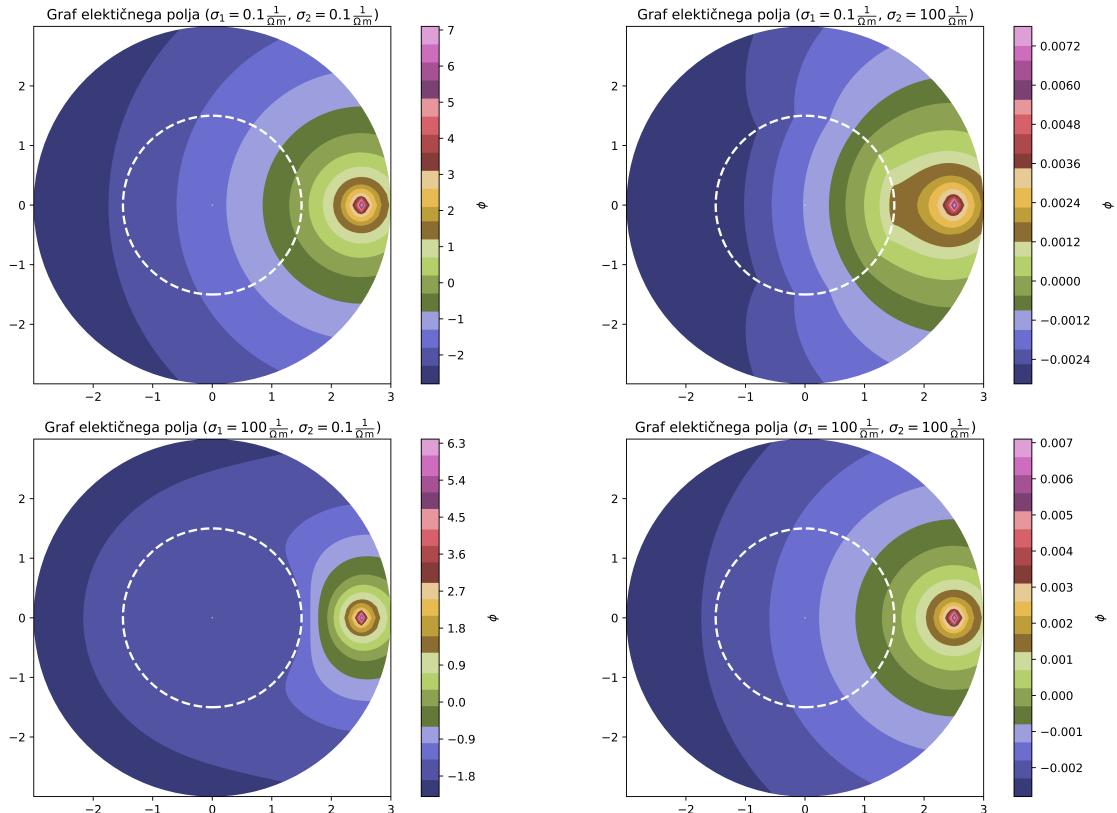


Slika 7. Slika prikazuje električno polje na levi in gostote električnega toka na desni pri prevodnosti $\sigma_1 \gg \sigma_2$.



Slika 8. Slika prikazuje kotno komponento električnega polja na levi in kotno komponento gostote električnega toka na desni pri prevodnosti $\sigma_2 \gg \sigma_1$.

Potencial v različnih režimih σ_1 in σ_2 prikazuje slika 9.



Slika 9. Slika prikazuje električni potencial v različnih režimih

Odgovorimo še na vprašanje, kakšen naboj se nabere na stiku plošč. Gostoto nabranega naboja nam podaja poissonova enačba

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (87)$$

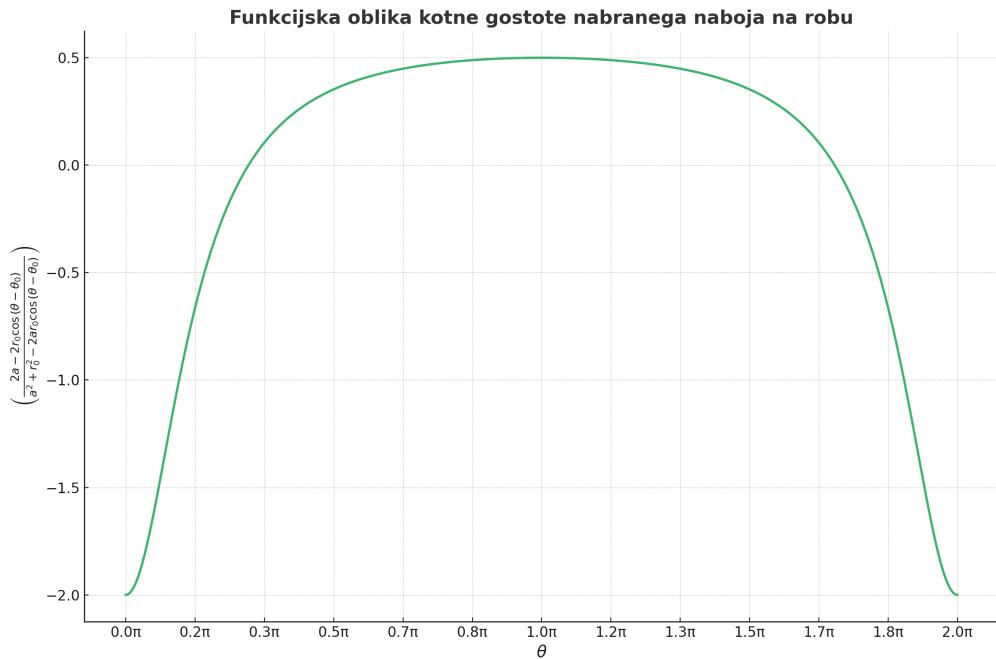
Zaradi nezveznosti odvoda na robu stika, (18), bo gostota naboja na robu neničelna. Dobimo jo tako, da gostoto enačbo integriramo preko roba.

$$\int_{a^-}^{a^+} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) dr \, rd\theta = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{a^-}^{a^+} \frac{de}{dr} dr \, rd\theta, \quad (88)$$

iz česar sledi izraz za kotno gostoto naboja

$$a \frac{\phi}{\partial r}(a^+) - a \frac{\phi}{\partial r}(a^-) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{de}{d\theta}. \quad (89)$$

$$\frac{de}{d\theta} = \frac{I_0 a \epsilon_0}{2\pi \sigma_2 h} \left(\frac{2a - 2r_0 \cos(\theta - \theta_0)}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\theta - \theta_0)} \right) \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (90)$$



Slika 10. Funkcijska odvisnost kotne gostote nabranega naboja pri $\theta_0 = 0$.

Celoten naboje, ki se nabere neodvisno od θ_0 , znaša

$$e = \int_0^{2\pi} \frac{de}{d\theta} d\theta = 0. \quad (91)$$

To je smiselno, saj v ploščo vstopa tok I_0 hkrati pa velja, da iz vsakega območja, ki vsebuje \mathbf{r}_0 izteka tok I_0 .

Razlika potenciala v dveh točkah na robu ploče, $r = a$, je enaka

$$U_{\sigma_1, \sigma_2} = \phi(a, \theta_0) - \phi(a, \pi + \theta_0) = \frac{2I_0}{2\pi(\sigma_1 + \sigma_2)h}. \quad (92)$$

Faktor sprembe razlike potenciala v primeru, da imamo enaki prevodnosti proti potencialu z različnima prevodnostima je enak

$$\frac{U_{\sigma_1, \sigma_2}}{U_{\sigma_2, \sigma_2}} = \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1}. \quad (93)$$

Rešili smo sistem enačb

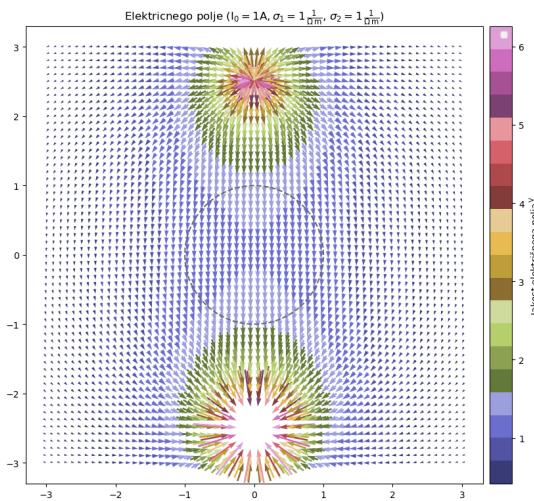
$$\sigma_1 h \nabla^2 \phi = 0, \quad r < a \quad (94)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{I_0}{2\pi \sigma_2 h} \delta(r - r_0), \quad r > a.$$

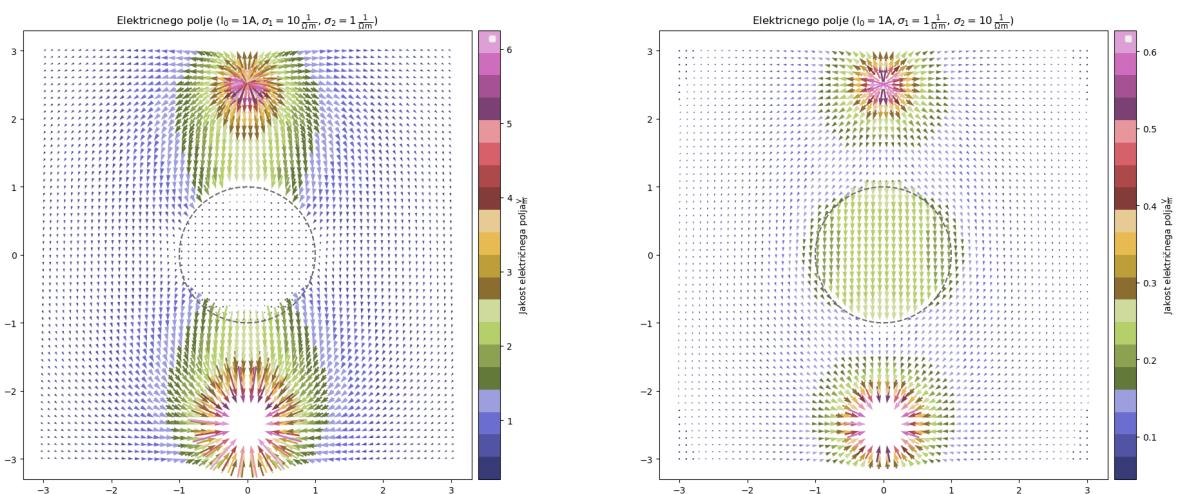
V primeru, da bi poleg žice, po kateri teče tok I_0 v ploščo imeli v točki $-\mathbf{r}_0$ žico po kateri teče tok I_0 iz plošče, bi reševali sistem enačb

$$\begin{aligned}\sigma_1 h \nabla^2 \phi &= 0, \quad r < a \\ \nabla^2 \phi &= -\frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \frac{I_0}{2\pi\sigma_2 h} \delta(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0), \quad r > a.\end{aligned}\tag{95}$$

To rešimo tako, da rešitvi sistema (94) dodamo isto rešitev kjer preslikamo $\mathbf{r}_0 \rightarrow -\mathbf{r}_0$ in $I_0 \rightarrow -I_0$. Električno polje sistema (95) v različnih režimih σ_1 in σ_2 prikazuje slika 12 in 11.



Slika 11. Slika prikazuje električno polje kjer imamo izvor in ponor v točkah \mathbf{r}_0 in $-\mathbf{r}_0$ pri prevodnosti $\sigma_2 = \sigma_1$.



Slika 12. Slika prikazuje električno polje na levi pri $\sigma_1 \gg \sigma_2$ ter na desni pri prevodnosti $\sigma_2 \gg \sigma_1$.

5. Realističen približek naloge

Zanimivo se mi je bilo vprašati, kakšen je realističen približek dane naloge. Smiselno je predpostaviti, da neskončna plošča ne obstaja zato prevzamimo, da ima plošča polmer R_0 . V tem primeru rešujemo podobno nalogu, vendar sedaj ne moramo postaviti koeficientov $B_n'' = 0, \forall n > 0$, saj so težave z zveznostjo v $r = \infty$ odpravljene. Za spremembo, sedaj potrebujemo robni pogoj na $r = R$. Smiselno je predpostaviti, da je rob plošče v stiku z elektrodo pri čemer lahko vrednost potenciala na robu postavimo na nič, $\phi_2(R, \theta) = 0$. Po zelo podobnem postopku kot prej dobimo rešitev:

$$\begin{bmatrix} A_n \\ A'_n \\ B'_n \\ A''_n \\ B''_n \end{bmatrix} = -\frac{I_0}{nr_0^n \pi \sigma_2 h} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2(r_0^{2n} - R_0^{2n})}{(-\sigma_1 + \sigma_2)a_0^{2n} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_0^{2n}} \\ \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)(r_0^{2n} - R_0^{2n})}{2((-\sigma_1 + \sigma_2)a_0^{2n} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_0^{2n})} \\ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)a_0^{2n}(r_0^{2n} - R_0^{2n})}{2(\sigma_1 - \sigma_2)a_0^{2n} - 2(\sigma_1 + \sigma_2)R_0^{2n}} \\ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)a_0^{2n} - (\sigma_1 + \sigma_2)r_0^{2n}}{2(\sigma_1 - \sigma_2)a_0^{2n} - 2(\sigma_1 + \sigma_2)R_0^{2n}} \\ \frac{((\sigma_1 - \sigma_2)a_0^{2n} - (\sigma_1 + \sigma_2)r_0^{2n})R_0^{2n}}{2((-\sigma_1 + \sigma_2)a_0^{2n} + (\sigma_1 + \sigma_2)R_0^{2n})} \end{bmatrix}, \quad \forall n > 0. \quad (96)$$

V limiti, ko gre R_0 proti neskončno dobimo nazaj rešitev prvotne naloge za neskončno ploščo.

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} A_n \\ A'_n \\ B'_n \\ A''_n \\ B''_n \end{bmatrix} = \frac{I_0}{\pi \sigma_2 h} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{1}{nr_0^n} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{nr_0^n} \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{a^{2n}}{nr_0^n} \\ 0 \\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2(\sigma_1 + \sigma_2)} \frac{a^{2n}}{nr_0^n} + \frac{r^n}{n} \end{bmatrix}, \quad \forall n > 0. \quad (97)$$

Premislimo situacijo, ko nimamo opravka le z dvema prevodnostima ampak mnogo več. V tem primeru, se robni pogoji ne spremenijo le matrični sistem postane bolj zahteven za rešit. Denimo, da imamo nabor $\{\sigma_i\}_{i=1,2,\dots,M}$ in robove izsekov plošče $\{r_i\}_{i=1,2,\dots,M+1}$. δ izvor na izseku j z izvorom toka I_0 se nahaja na poziciji $r = r_{j-1}$ in $\theta = \theta_0$. Sedaj velja, da so koeficienti

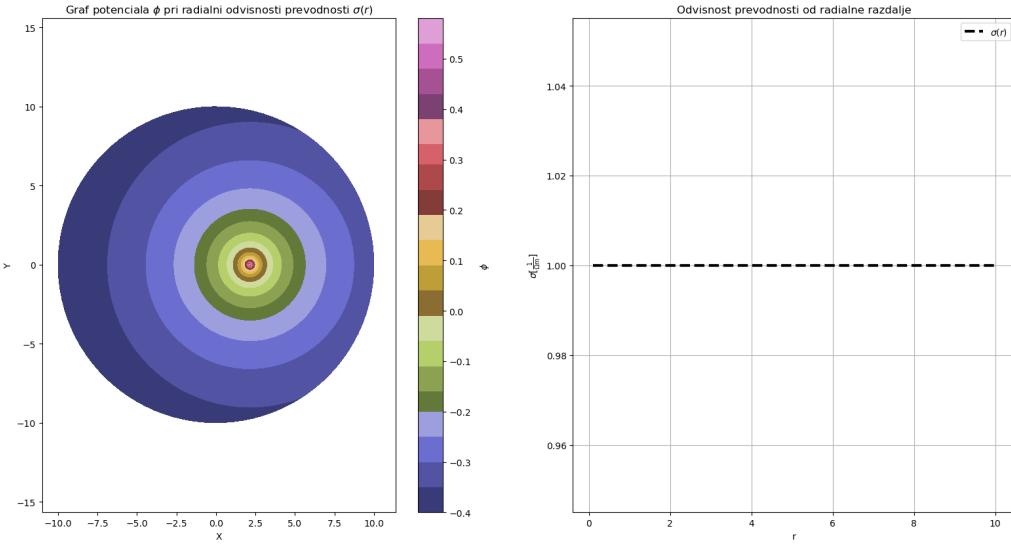
$$B_{0,i} = 0, \forall i, i < j - 1, \quad (98)$$

$$B_{0,i} = -\frac{I_0}{2\pi\sigma_i h}, \forall i, j \leq i < M. \quad (99)$$

Preostale koeficiente dobimo iz zveznosti na robu in reševanjem matrične enačbe:

$$\begin{bmatrix} A_{n,1} \\ A_{n,2} \\ B_{n,2} \\ A_{n,3} \\ \vdots \\ A_{n,j} \\ B_{n,j} \\ \vdots \\ B_{n,M+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -r_1^{-2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_2 r_1^{-2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & r_2^{-2n} & -1 & -r_2^{-2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & -\sigma_2 r_2^{-2n} & -\sigma_3 & \sigma_3 r_2^{-2n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{j-1}^{-2n} & -1 & -r_{j-1}^{-2n} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -r_{j-1}^{-2n} & -1 & r_{j-1}^{-2n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{M+1}^{-2n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{I_0}{nr_{j-1}^n \pi \sigma_j h} \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Zadnja vrstica je prilagodljiva glede na to ali zahtevamo, da je potencial na robu konstanten ali da je odvod potenciala konstanten ($r_{M+1}^{-2n} \rightarrow -r_{M+1}^{-2n}$). To nam daje zanimivo metoda za numerično reševanje podobnega problema, kjer je prevodnost funkcija razdalje $\sigma = \sigma(r)$. V tem primeru razdelimo območje na M kroničnic in na vsakem odseku izberemo porvrečno vrednost $\sigma_i = \frac{1}{2}(\sigma(r_i) + \sigma(r_{i+1}))$. Implementirali smo postopek s pomočjo pythonove knjižnice *Numpy*. Primer izračuna potenciala, ko je $\sigma(r) = C$ prikazuje slika 13. Primeri drugih radialno odvisnih prevodnosti in izračunov potencila so navedeni v Dodatku.



Slika 13. Slika numerično izračunanega potenciala, kjer je $\sigma(r) = C$.

6. Zaključek

Rešili smo nalogu neskončna plošče na katero priključimo žico po kateri teče tok I_0 . S pomočjo vrst in lepljenj smo skonstruirali Greenovo funkcijo in izpeljali obliko električnega polja in gostote električnega toka za različne prevodnosti σ_1 in σ_2 . V nadaljevalnju smo skušali postopek posplošiti na prevodnosti z radialno odvisnotjo.

Numerični pristop bi se dalo dodatno razširiti v primeru, da imamo poljubno funkcijo izvora toka $q(\mathbf{r})$ in robni pogoj normalnega odvoda potenciala na robu območja. Rešujemo problem

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) &= -\frac{q(\mathbf{r})}{\sigma h}, \quad \mathbf{r} \in \Omega \\ \frac{\partial \phi}{\partial r}(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}), \quad , \mathbf{r} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (101)$$

Da je problem rešljiv mora normalni odvod potenciala na robu diska zadostiti pogoju

$$\oint_{\partial\Omega} f(\mathbf{r}) dl = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial r} dl = \oint_{\partial\Omega} \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} dl = \iint_{\Omega} \nabla^2 \phi dS = - \iint_{\Omega} \frac{q(\mathbf{r})}{\sigma h} dS. \quad (102)$$

Če znamo poiskati funkcijo $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, da velja

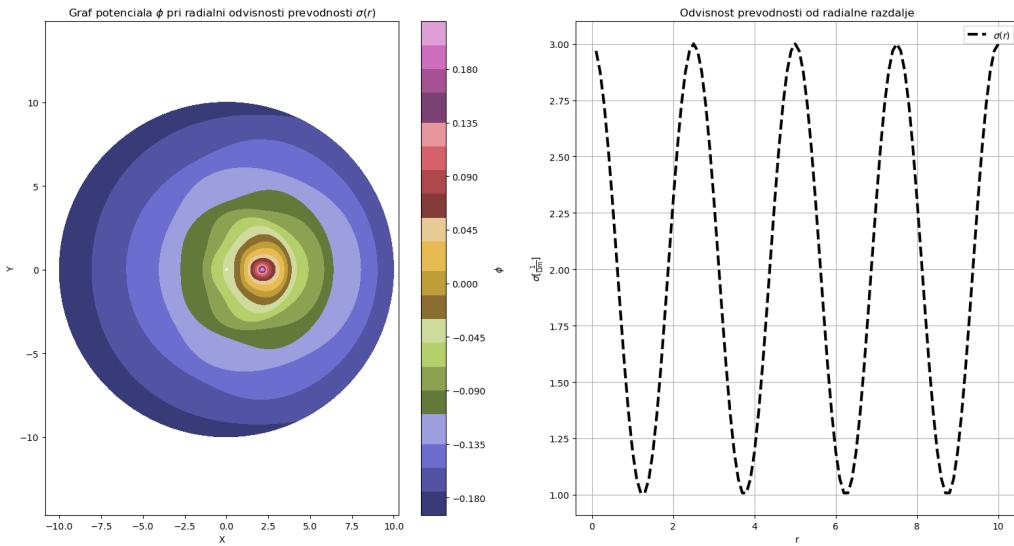
$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \\ \frac{\partial G}{\partial r}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= 1/s_{\partial\Omega}, \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (103)$$

kjer $s_{\partial\Omega}$ označuje obseg roba območja. V našem primeru ta znaša $s_{\partial\Omega} = 2\pi R_0$. Sedaj lahko s pomočjo Greenove 2. identitete izpeljemo

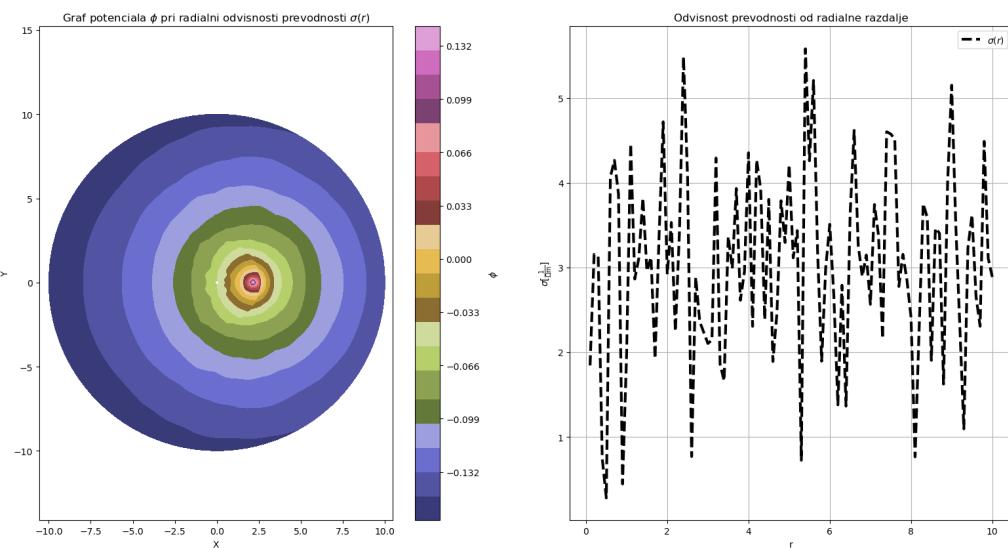
$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\sigma h} \left(\iint_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) q(\mathbf{r}_0) dS - \oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) f(\mathbf{r}_0) dl \right) + C \quad (104)$$

V primeru, da imamo radialno odvisno prevodnost $\sigma = \sigma(r)$ bi ponovno razdelili območje na kronžnice in jih zlepili z istimi robnimi pogoji kot prej. Tukaj seveda primankuje nekaj manjših detajlov in numerična implementacija. Vendar sem vseeno za konec žezel pokazati, kako bi lahko bili rezultati prejšnjih delov uporabni za bolj zahtevne probleme.

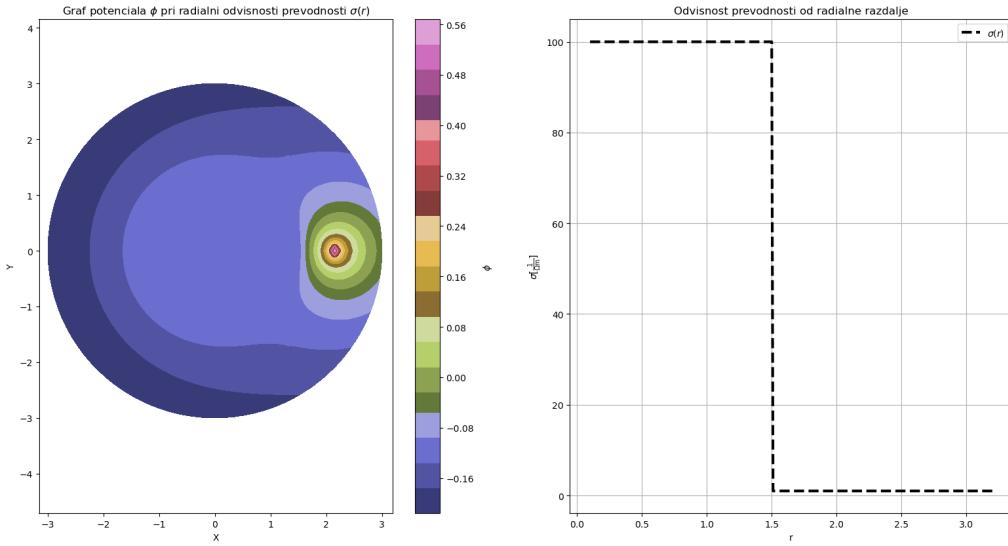
Dodatek



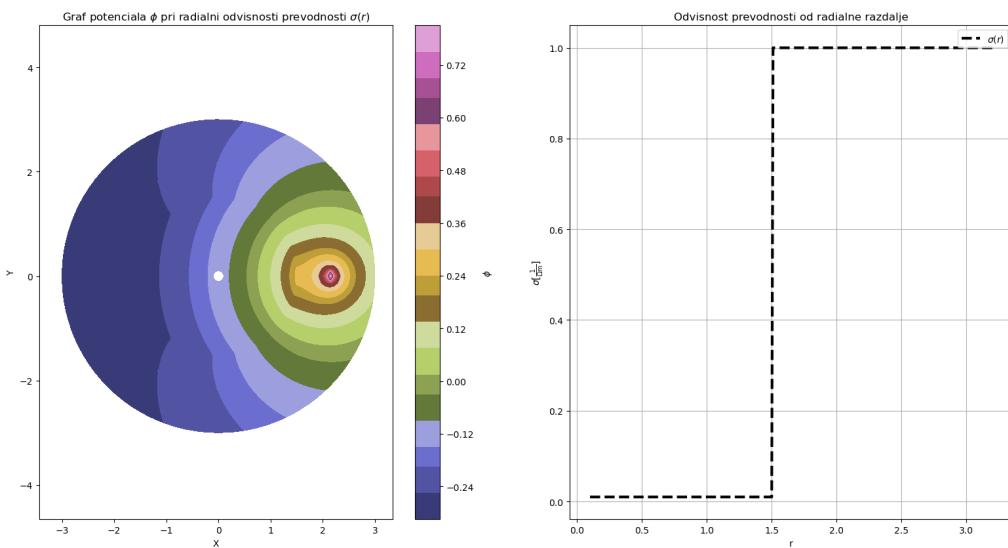
Slika 14. Slika prikazuje elektrčni potencial v primeru radialne odvisnosti prevodnosti $\sigma(r) = \sigma_0 \cos(\frac{r}{2\pi\lambda_0})$



Slika 15. Slika prikazuje elektrčni potencial v primeru naključne radialne odvisnosti prevodnosti



Slika 16. Slika prikazuje elektrčni potencial v primeru radialne odvisnosti prevodnosti $\sigma(r) = \sigma_1 + H(r - r_0)(\sigma_2 - \sigma_1)$, $\sigma_1 \gg \sigma_2$



Slika 17. Slika prikazuje elektrčni potencial v primeru radialne odvisnosti prevodnosti $\sigma(r) = \sigma_1 + H(r - r_0)(\sigma_2 - \sigma_1)$, $\sigma_2 \gg \sigma_1$