

# Modelska analiza I 2024/25

## 2. naloga – Linearno programiranje

**Student:** Simon Godec 28242020, [sg74586@student.uni-lj.si](mailto:sg74586@student.uni-lj.si)

### 1 Linearno programiranje

Linearno programiranje je optimizacijski problem, kjer skušamo poiskati ekstremalno točko linearne funkcije ob linearnih omejitvah.

#### 1 Linearna naloga

lasičen linearen problem in njegov dual zapišemo kot:

##### Primal Problem

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

Pri pogojih:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

##### Dual Problem

$$\min \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Primalni in dualni problem sta dve različni formulaciji istega optimizacijskega problema. V primalnem problemu iščemo vektor  $x$ , ki maksimizira ciljno funkcijo ob danih omejitvah. V dualnem problemu pa iščemo vektor  $y$ , ki minimizira skupno vrednost omejitev, tako da zagotovimo, da je vrednost ciljne funkcije vsaj enaka ali večja od tiste, ki jo določa primalni problem.

Dualni problem nas zanima, ker lahko z znanjem dualnih spremenljivk  $y_i$  določimo občutljivost sprememb omejitev na končno vrednost ciljne funkcije.

#### 2 Izrek

aj bo  $\Pi$  prvotni linearni program z neizrojeno bazno optimalno rešitvijo in  $\Pi'$  njegov dual. Potem obstaja  $\epsilon > 0$ , da velja

$$|\Delta b| < \epsilon \Rightarrow \Delta z^* = \sum_{i=1}^m y_{n+i}^* \Delta b_i,$$

To pomeni, da nam dualne spremenljivke omogočajo analizo, kako spremembe v omejitvah vplivajo na optimalno rešitev.

## 2 Zastavljen problem

Z danim seznamom živil in podatki o njihovi prehranski sestavi z uporabo linearnega programiranja sestaviti optimalni jedilnik, pri katerem upoštevamo priporočene dnevne vnose hrani.

## 3 Zastavljene diete

Zastavili smo si 3 različne zahteve o hranilnih vrednostih, ki jih obrok mora sestavljati. V prevzet seznam živil smo dodali podatke o količini aminokislin, količino sladkorja, nasičenih maščob in vlaknin, ki jih živilo vsebuje. Podatke smo našli <https://tools.myfooddata.com>. Količino hrane  $i$  v tabeli označimo z  $x_i$

### Dieta 1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \text{maščobe}_i x_i &\geq 70 && (\text{Maščobe, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{ogljikovi\_hidrati}_i x_i &\geq 310 && (\text{Ogljikovi hidrati, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{proteini}_i x_i &\geq 50 && (\text{Proteini, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Ca}_i x_i &\geq 1000 && (\text{Kalcij, mg}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Fe}_i x_i &\geq 18 && (\text{Železo, mg}) \\ \sum_{i=1}^n x_i &\leq 2000 && (\text{Skupna teža hrane, g})\end{aligned}$$

### Dieta 2

zahtevamo dodatno minimalne vitamine

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \text{Vitamin\_C}_i x_i &\geq 60 && (\text{Vitamin C, mg}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Kalij}_i x_i &\geq 3500 && (\text{Kalij, mg}) \\ 500 \leq \sum_{i=1}^n \text{Natrij}_i x_i &\leq 2400 && (\text{Natrij, mg})\end{aligned}$$

### Dieta 3

Tukaj dodamo še omejitve glede sladkorja, vlaknin, nasičenih maščob in esencialnih aminokislin.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{sladkor}_i x_i &\leq 25 && (\text{Sladkor, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{vlaknine}_i x_i &\geq 30 && (\text{Vlaknine, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{nasicene\_mascobe}_i x_i &\leq 15 && (\text{Nasičene maščobe, g}) \end{aligned}$$

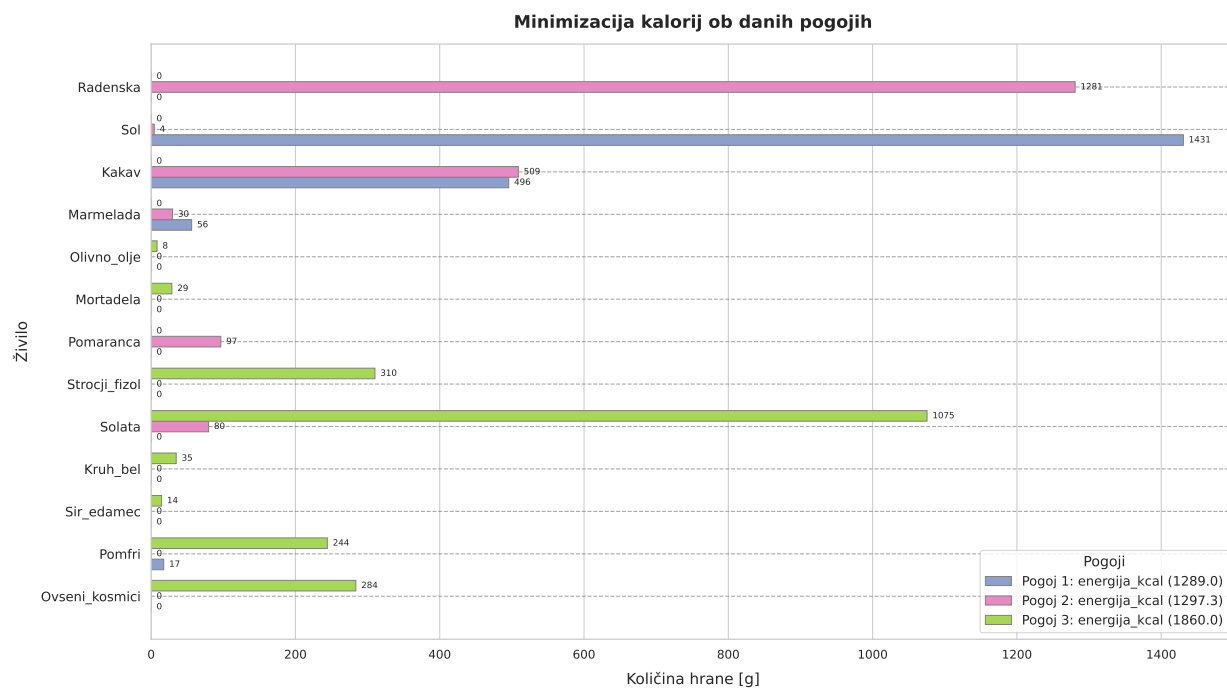
**Minimalni vnosi esencialnih aminokislin (telesna teža  $m = 70$  kg):**

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{Histidine}_i x_i &\geq 0,01 \times 70 = 0,7 && (\text{Histidin, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Isoleucine}_i x_i &\geq 0,02 \times 70 = 1,4 && (\text{Izolevcin, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Leucine}_i x_i &\geq 0,039 \times 70 = 2,73 && (\text{Levcin, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Lysine}_i x_i &\geq 0,03 \times 70 = 2,1 && (\text{Lizin, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Methionine}_i x_i &\geq 0,015 \times 70 = 1,05 && (\text{Metionin, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Phenylalanine}_i x_i &\geq 0,025 \times 70 = 1,75 && (\text{Fenilalanin, g}) \\ \sum_{i=1}^n \text{Tryptophan}_i x_i &\geq 0,004 \times 70 = 0,28 && (\text{Triptofan, g}) \end{aligned}$$

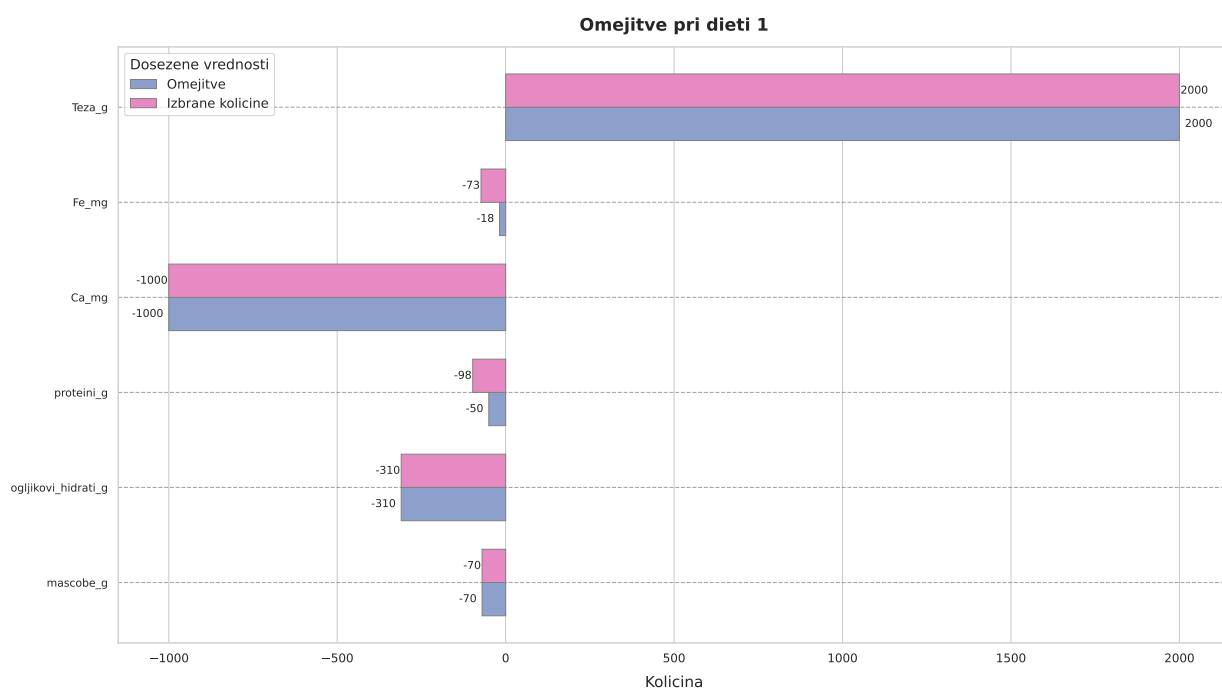
## 4 Rezultati modela

Minimizirali bomo različne količini in primerjali rezultate v odvisnosti katerih pogojev se držimo. Poleg rezultatov končnih količin prehrane bomo pokazali še katere omejitve so bile izpolnjene in katere omejitve so najbolj vplivale na končen izid.

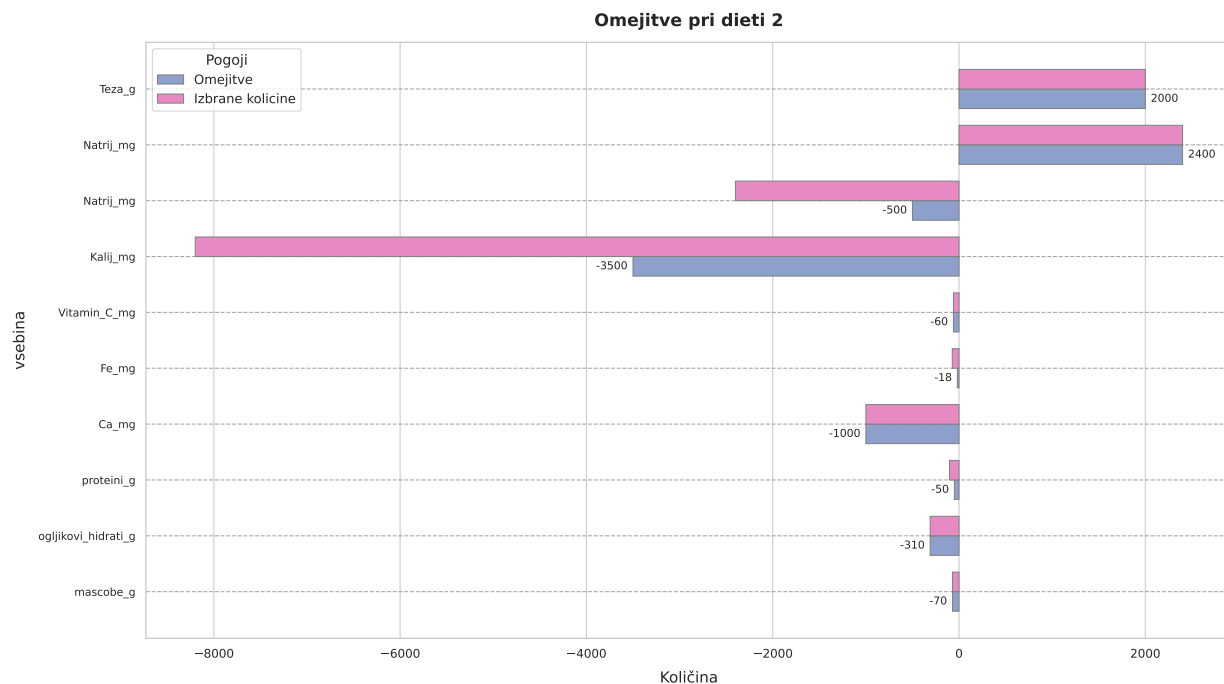
## 4.1 Minimizacija energijskih vrednosti



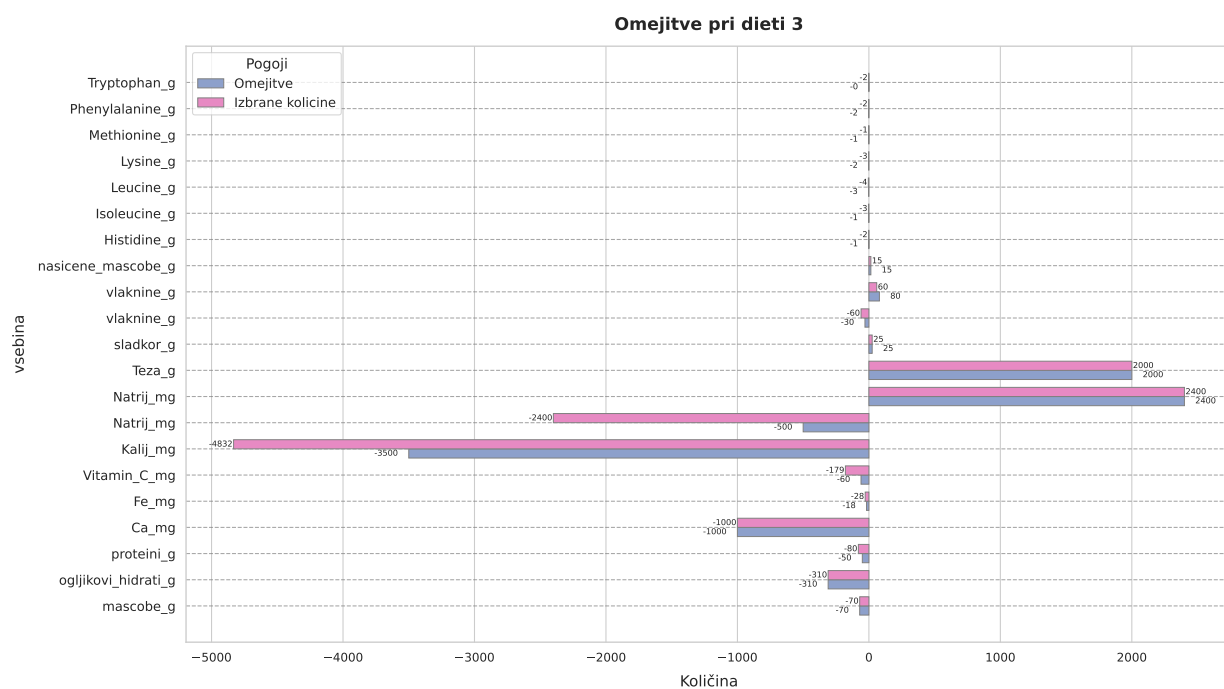
**Figure 1:** Nabor živi, ki minimizira kalorije za izbrane pogoje.



**Figure 2:** Dosežene omejitve pri dieti 1



**Figure 3:** Dosežene omejitve pri dieti 2

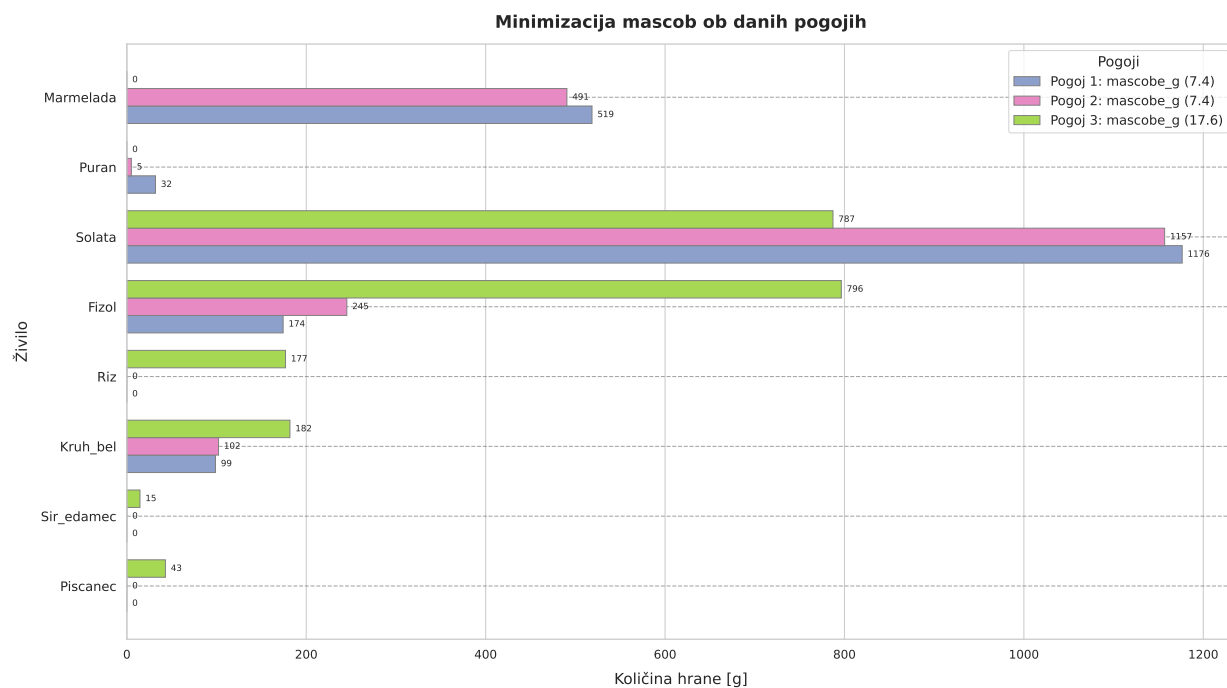


**Figure 4:** Dosežene omejitve pri dieti 3

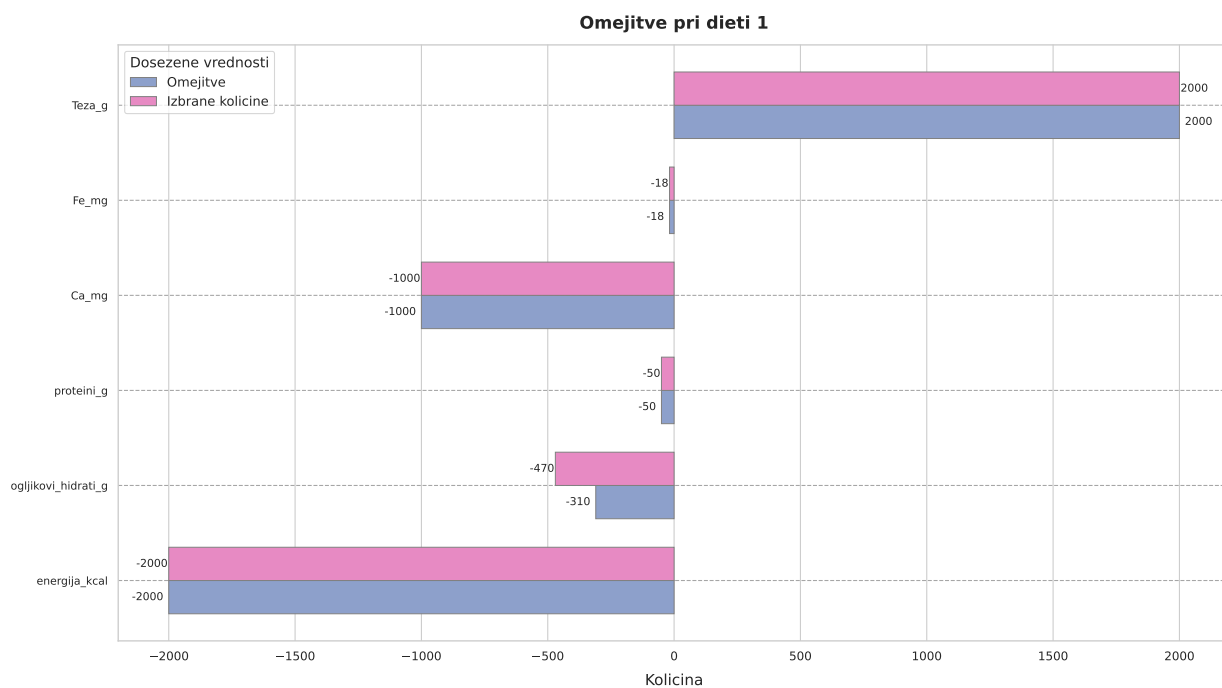
Omejitev	Type	Dual 1 $y_i \cdot \delta b_i$	Dual 2 $y_i \cdot \delta b_i$	Dual 3 $y_i \cdot \delta b_i$
mascobe_g	$\geq$	-5.51	-6.56	-67.45
ogljikovi_hidrati_g	$\geq$	-114.02	-113.90	-133.45
proteini_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Ca_mg	$\geq$	-16.05	-13.44	-72.75
Fe_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Vitamin_C_mg	$\geq$	0.00	-0.11	0.00
Kalij_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Natrij_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Natrij_mg	$\leq$	0.00	-0.00	0.00
Teza_g	$\leq$	-7.71	-5.38	-75.46
sladkor_g	$\leq$	0.00	0.00	-11.80
vlaknine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
vlaknine_g	$\leq$	0.00	0.00	0.00
nasicene_mascobe_g	$\leq$	0.00	0.00	-57.71
Histidine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Isoleucine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Leucine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Lysine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Methionine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Phenylalanine_g	$\geq$	0.00	0.00	-43.31
Tryptophan_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
height				

Iz rezultatov vidimo, da so ogljikovi hidrati najbolj omejevali minimizacijo. V primeru, da bi zmanjšali spodnjo mejo za 10 % bi lahko dieto zamenjali za  $\approx 100$  kcal. Vidimo tudi, da je dieta 3 za okvirnih 50 % bolj kalorična. To je smiselno, saj z večanjem zahtev o hranilih pričakujemo, da bomo zaužili več kalorij. Živilo, ki ne vsebuje veliko energijske vrednosti a zadovolji ostale potrebe po zdravi prehrani (dieta 3) je solata. Dieta dva ponuja radensko in kakav kar mi osebno ne zveni najljubša kombinacija, vendar izpolni hranilne zahteve. O dieti 1 sploh ne bom govoril - morda celo preseže LD 50. Tabel nam tudi pove katere omejitve bi lahko povišali oziroma zamenjali. Lahko bi dodatno zahtevali več železa več kalija in več vlaknin in ostale.

## 4.2 Minimizacija maščob



**Figure 5:** Nabor živi, ki minimizira maščobe za izbrane pogoje.



**Figure 6:** Dosežene omejitve pri dieti 1

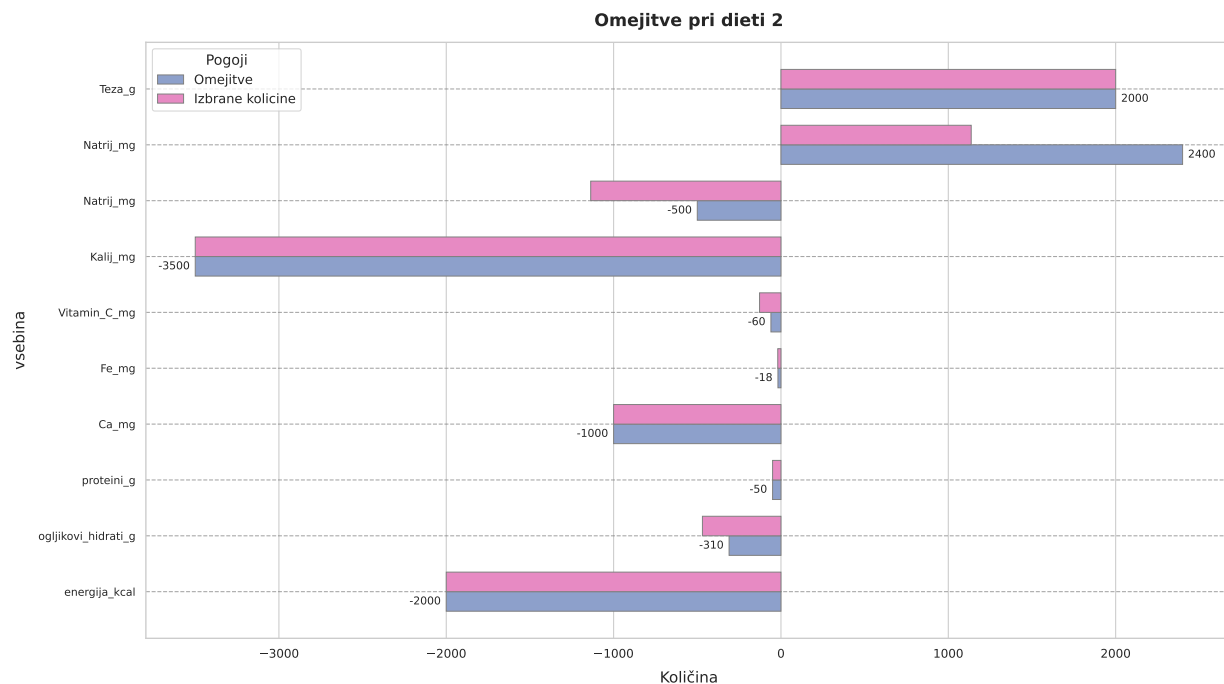


Figure 7: Dosežene omejitve pri dieti 2

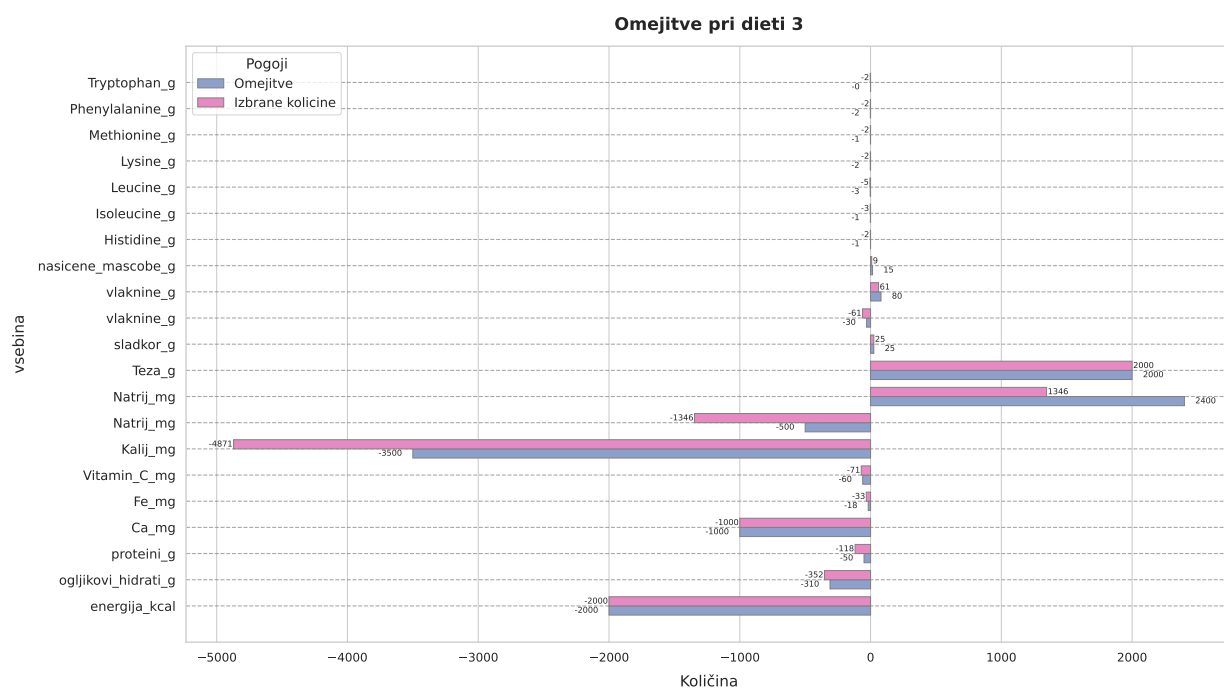


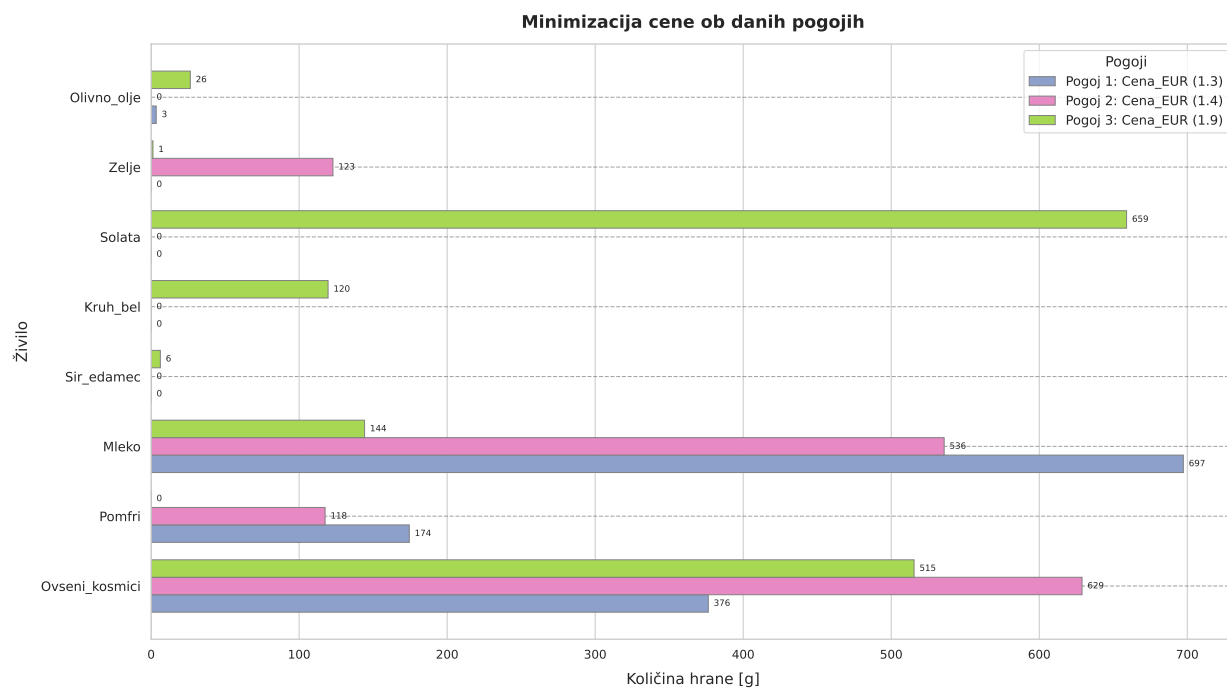
Figure 8: Dosežene omejitve pri dieti 3



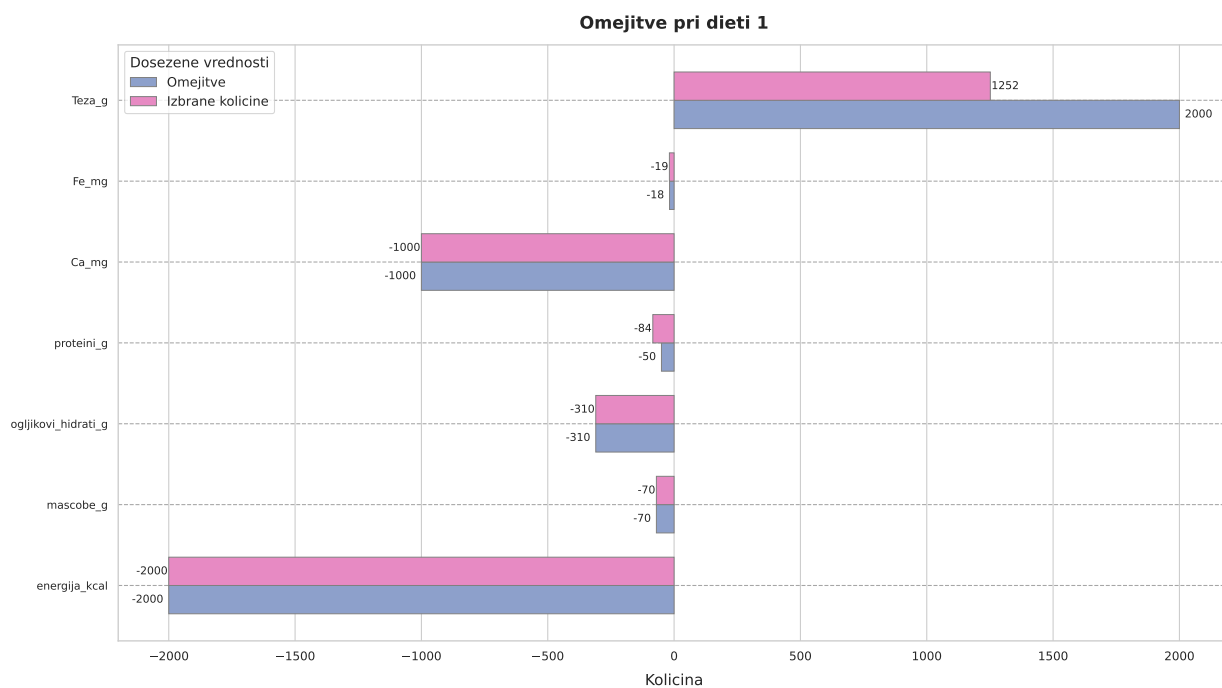
Omejčitve	Type	Dual 1 $y_i \cdot \delta b_i$	Dual 2 $y_i \cdot \delta b_i$	Dual 3 $y_i \cdot \delta b_i$
energija_kcal	$\geq$	-0.22	-0.26	-1.80
ogljikovi_hidrati_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
proteini_g	$\geq$	-0.49	-0.48	0.00
Ca_mg	$\geq$	-2.34	-2.43	-3.34
Fe_mg	$\geq$	-0.08	0.00	0.00
Vitamin_C_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Kalij_mg	$\geq$	0.00	-0.13	0.00
Natrij_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Natrij_mg	$\leq$	0.00	0.00	0.00
Teza_g	$\leq$	-2.39	-2.56	-2.42
sladkor_g	$\leq$	0.00	0.00	-1.29
vlaknine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
vlaknine_g	$\leq$	0.00	0.00	0.00
nasicene_mascope_g	$\leq$	0.00	0.00	0.00
Histidine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Isoleucine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Leucine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Lysine_g	$\geq$	0.00	0.00	-0.24
Methionine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Phenylalanine_g	$\geq$	-0.08	0.00	-0.08
Tryptophan_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00

Minimizaciji masščob ugotovimo, da je največja ovira količina kalcija, energijski vrednot, sladkor in proteini. V tem primeru je dobro živilo solata saj ne vsebuje veliko masščob in ima ostale potrebne hranilne vrednosti. Za doseg dovolj energije model ponuja marmelado in nekaj belega kruha. Dodatno se pojavi fižol, ki zagotovi dovolj vlaknin in beljakovin.

### 4.3 Minimizacija stroškov



**Figure 9:** Nabor živi, ki minimizira stroške za izbrane pogoje.



**Figure 10:** Dosežene omejitve pri dieti 1

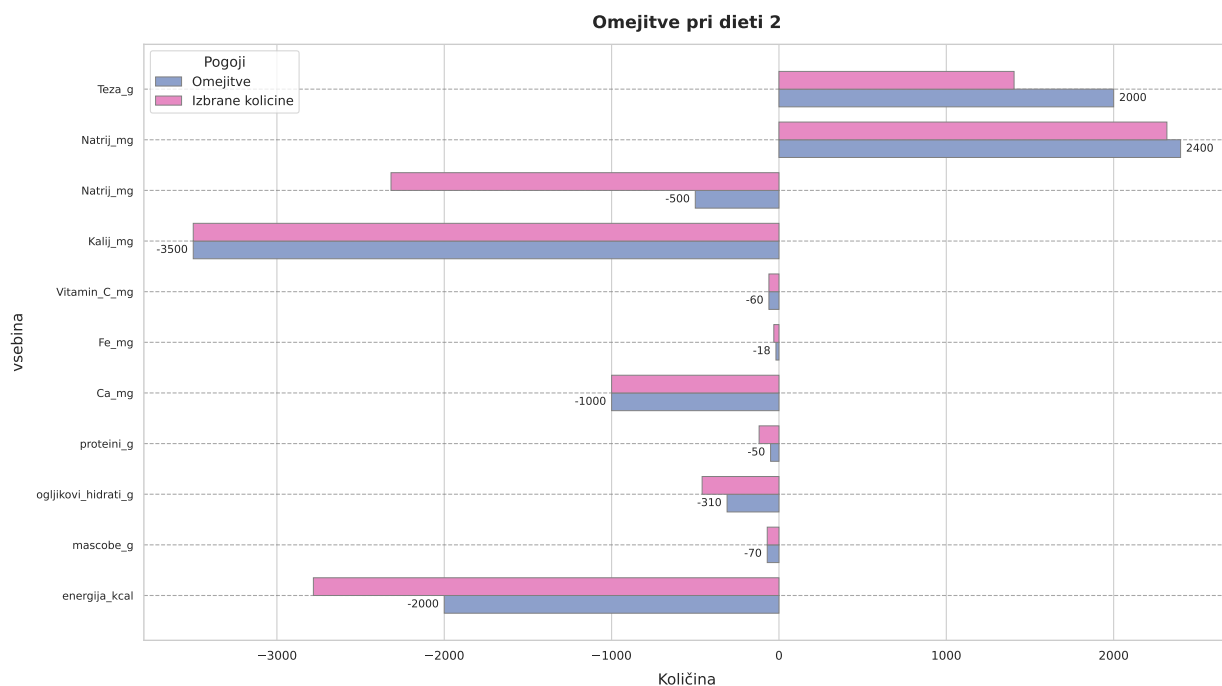


Figure 11: Dosežene omejitve pri dieti 2

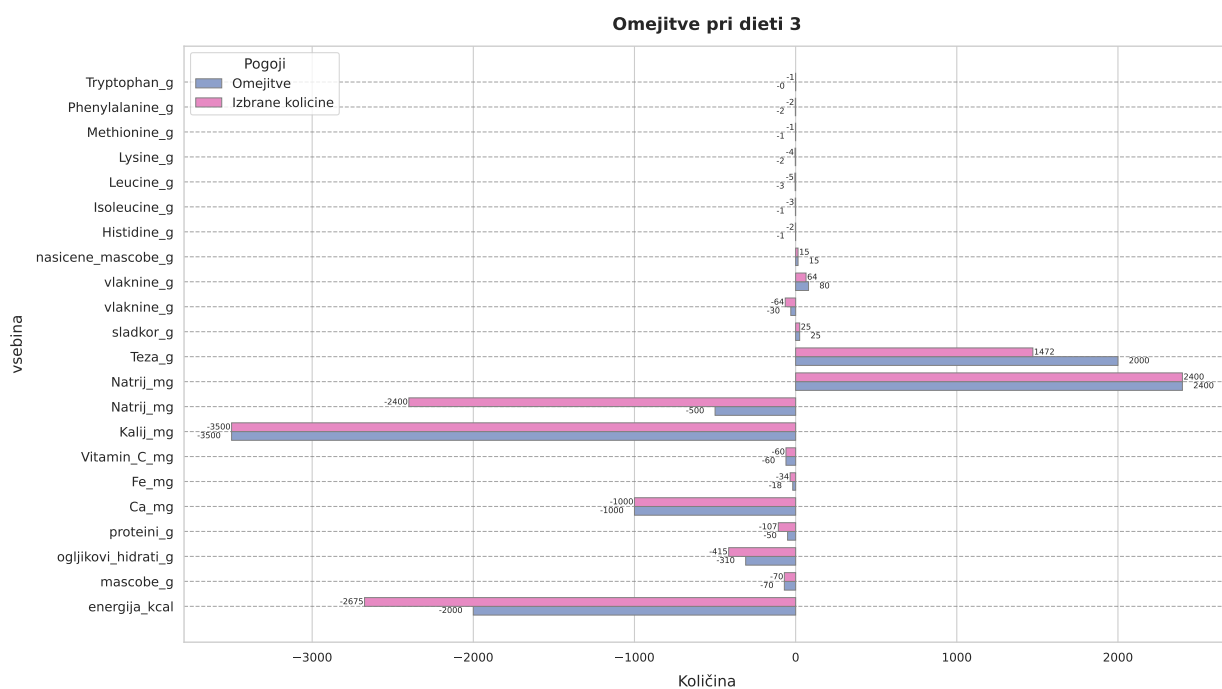
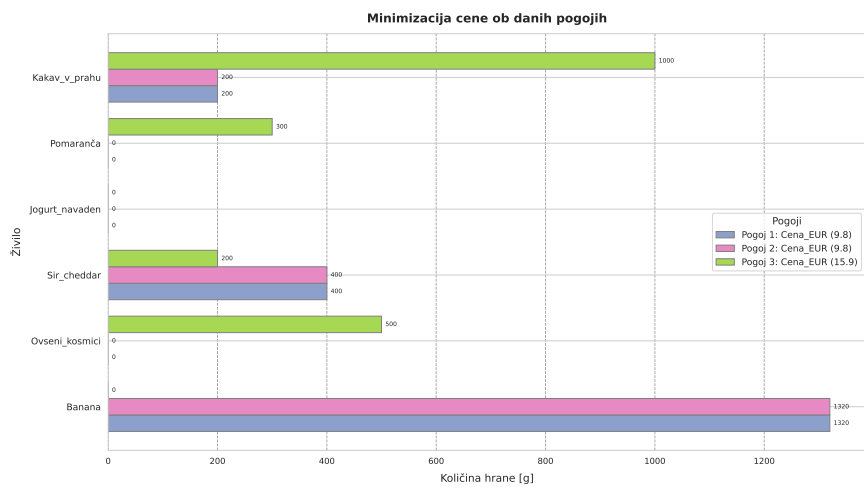


Figure 12: Dosežene omejitve pri dieti 3

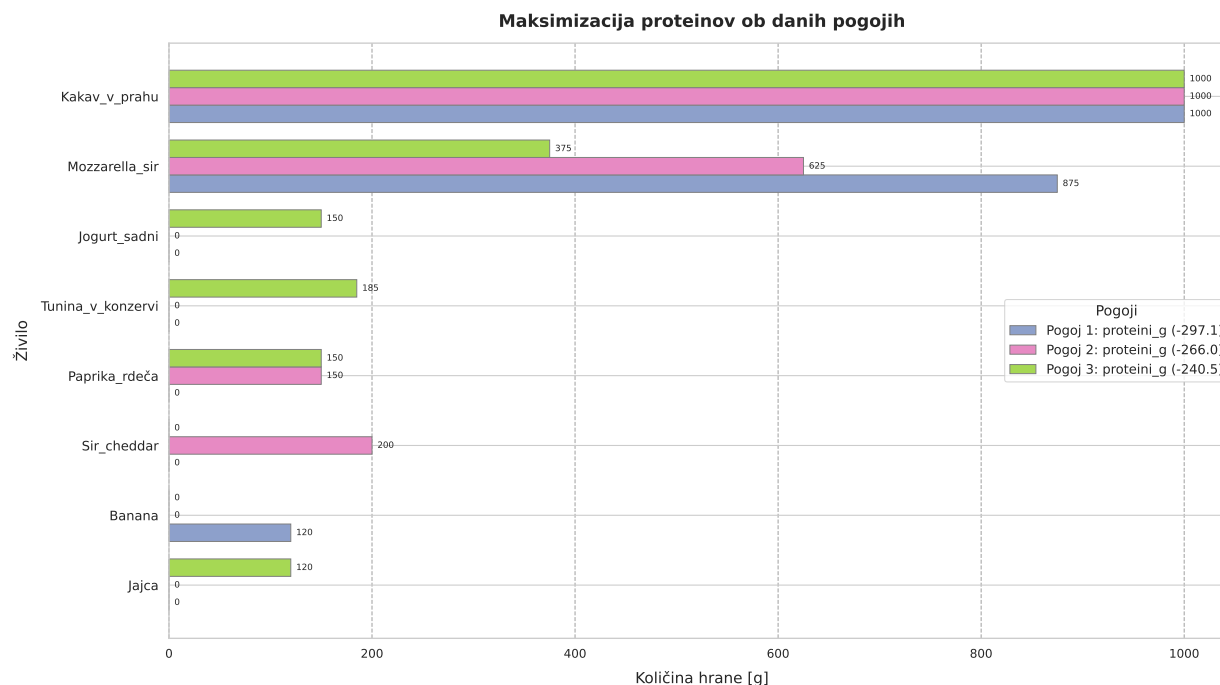
Omejitve	Type	Dual 1 $y_i \cdot \delta b_i$	Dual 2 $y_i \cdot \delta b_i$	Dual 3 $y_i \cdot \delta b_i$
energija_kcal	$\geq$	-0.01	0.00	0.00
mascobe_g	$\geq$	-0.05	-0.01	-0.13
ogljikovi_hidrati_g	$\geq$	-0.00	-0.00	0.00
proteini_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Ca_mg	$\geq$	-0.06	-0.07	-0.20
Fe_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Vitamin_C_mg	$\geq$	0.00	-0.00	-0.00
Kalij_mg	$\geq$	0.00	-0.06	-0.02
Natrij_mg	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Natrij_mg	$\leq$	0.00	0.00	-0.03
Teza_g	$\leq$	0.00	0.00	0.00
sladkor_g	$\leq$	0.00	0.00	-0.02
vlaknine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
vlaknine_g	$\leq$	0.00	0.00	0.00
nasicene_mascobe_g	$\leq$	0.00	0.00	-0.12
Histidine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Isoleucine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Leucine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Lysine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Methionine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Phenylalanine_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00
Tryptophan_g	$\geq$	0.00	0.00	0.00

Vidimo, da je minimizacija stroškov negativno vpliva na zdravo prehrano, saj so največje omejitve cene ravno nasičena maščoba in vitamini. Ponovno je v ospredju zdravja solata. Tukaj bi bilo tudi smiselno analizirati koliko posamezne količine nam prinese željenih hranil, vendar ni bilo dovolj časa. Zanimivo si je tudi ogledati, kako je z minimizacijo stroškov, če lahko kopujemo le celotne izdelke iz trgovine. Izdelki, ki jih lahko kupimo v trgovini njihova količina in hranilne vrednosti najdete v datoteki *živila.csv*. Nalogo sem reševal z celoštevilskim programiranjem, ki je bolj zahteven problem.



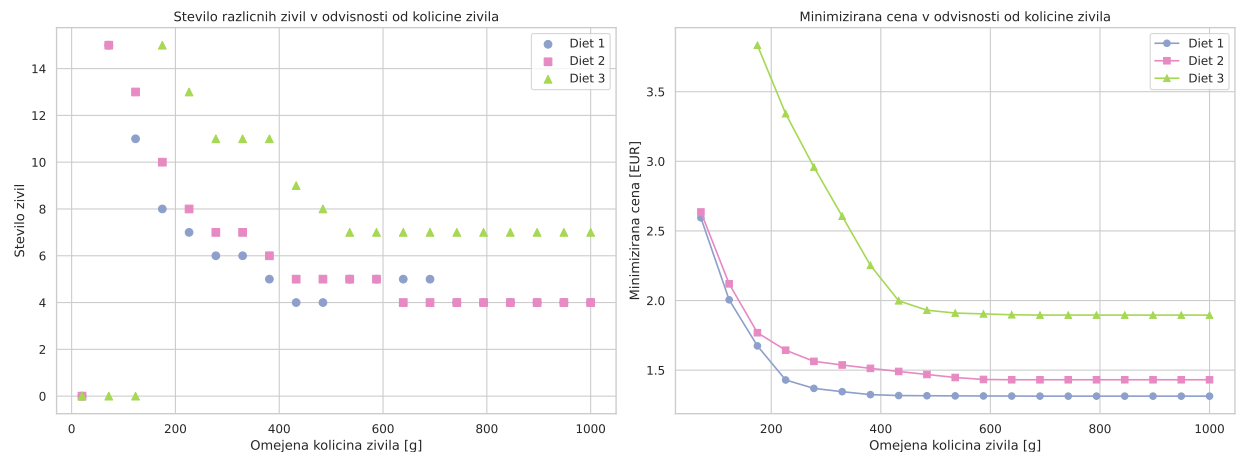
**Figure 13:** Celoštevilsko programiranje in rešitev najmanjše cene

Celoštevilski nakup nam pove, da je za minimalno ceno vseeno bolje kupovati hrano, ki ima ravno toliko hranilnih vrednosti kot jih količinsko na izdelek rabimo. Tukaj v osrpedje skočijo kakav, ovseni kosimiči in banane. Za vse, ki fitnesirajo je zanimivo gledati maksimalno količino proteinov, ki jih lahko kupijo v trgovini, če se omejimo z 20 EUR.

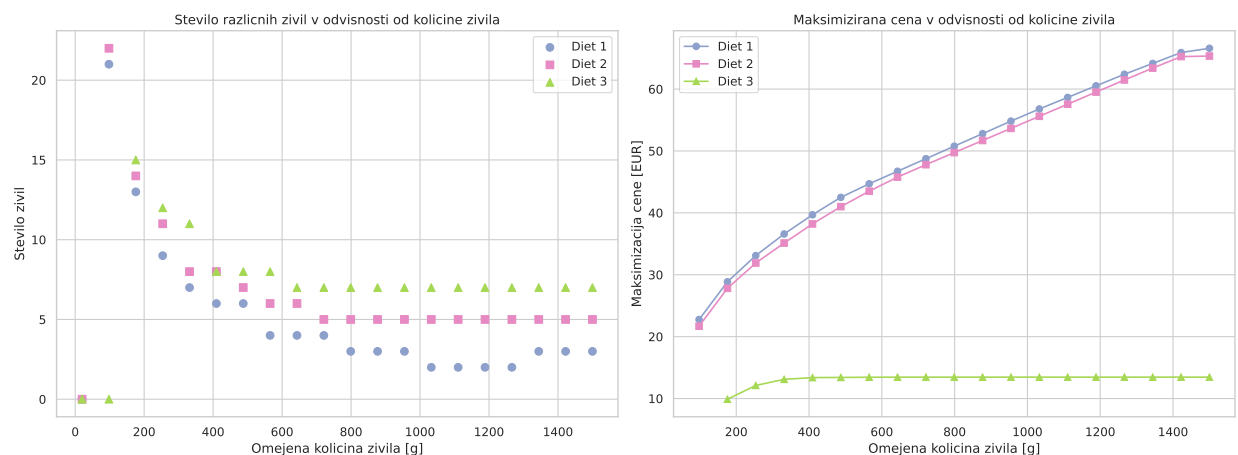


#### 4.4 Omejitve količin živil

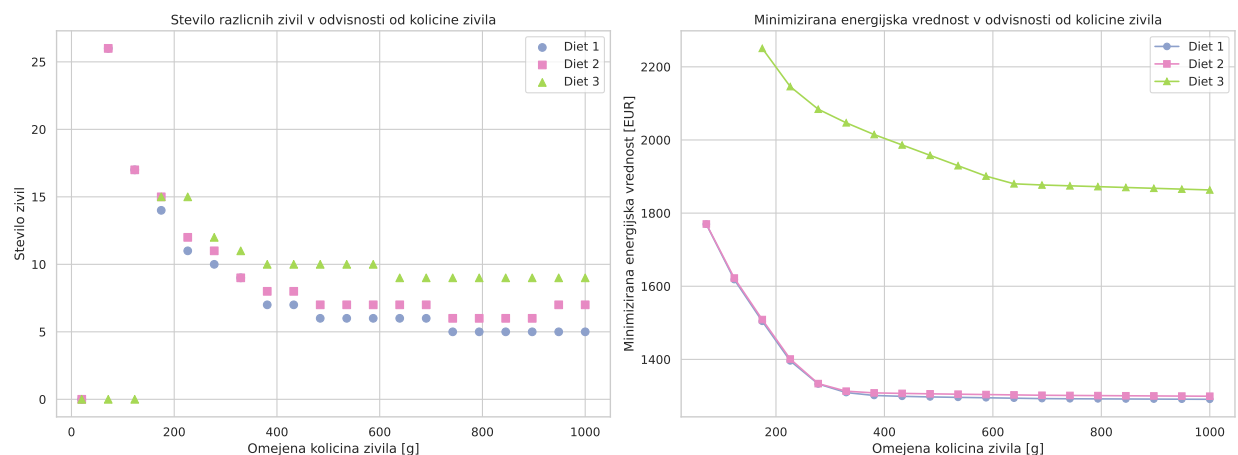
Z omejevanjem količine vsakega živila lahko dosežemo bolj raznoliko prehrano. Slika 14 prikazuje kako količina vsakega živila vpliva na minimalni skupni strošek in število živil, ki jih moramo zaužiti. Slika 15 prikazuje isto, vendar v primeru, da želimo maksimizirati ceno. Slika 16 prikazuje primer ko želimo minimizirati energijsko vrednost.



**Figure 14:** Levo: število živil, ki jih moramo zaužiti v odvisnosti od količine vsakega živila, Desno: vpliv količine vsakega živila na skupne stroške



**Figure 15:** Levo: število živil, ki jih moramo zaužiti v odvisnosti od količine vsakega živila, Desno: vpliv količine vsakega živila na skupne stroške



**Figure 16:** Levo: število živil, ki jih moramo zaužiti v odvisnosti od količine vsakega živila, Desno: vpliv količine vsakega živila na skupno energijsko vrednost