Formelsammlung Theoretische ET II

(Stand: 12. Juli 1991)

Inhaltsverzeichnis

---

1 Wichtige Größen

$\vec{F}$	Feld allgemein
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke
$\vec{E}$	Elektrische Feldstärke
$\vec{P}$	Potential allgemein
$\vec{V}$	Skalarpotential
$\vec{A}$	Vektorpotential
$\vec{p} = \vec{E} \times \vec{H}$	Poyntingscher Vektor, Leistung im elektromagnetischen Feld
$\operatorname{div} \vec{p} = -p_v$	Verlustleistungsdichte

1.1 Ableitungen der Besselfunktionen

gewöhnliche Besselfunktionen 1. und 2. Art

$$\frac{d\mathcal{J}_n(x)}{dx} = -\mathcal{J}_{n+1}(x) + \frac{n}{x}\mathcal{J}_n(x) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathcal{N}_n(x)}{dx} = -\mathcal{N}_{n+1}(x) - \frac{n}{x}\mathcal{N}_n(x)$$

modifizierte Besselfunktionen 1. und 2. Art

$$\frac{d\mathcal{I}_n(x)}{dx} = \mathcal{I}_{n+1}(x) + \frac{n}{x}\mathcal{I}_n(x) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathcal{K}_n(x)}{dx} = -\mathcal{K}_{n+1}(x) - \frac{n}{x}\mathcal{K}_n(x)$$

1.2 Vektoroperationen

1.2.1 Rotation eines Vektorfeldes

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{V}_x & \vec{V}_y & \vec{V}_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \vec{V}_\rho & \vec{V}_\varphi & \vec{V}_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\vartheta & r\sin\vartheta\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \vec{V}_r & r\vec{V}_\vartheta & r\sin\vartheta\vec{V}_\varphi \end{vmatrix}$$

1.2.2 Divergenz eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{V} = \vec{\nabla}\vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta V_\vartheta}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

1.2.3 Gradient eines Skalarfeldes

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\Phi &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_z\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_z\right) \\ &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r\right) \end{aligned}$$

1.2.4 Kreuzprodukt

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

1.3 Koordinatenumrechnungen

1.3.1 Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi & \vec{e}_\rho &= \vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi & \vec{e}_x &= \vec{e}_\rho\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi & \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi & \vec{e}_y &= \vec{e}_\rho\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi \\ z &= z & \vec{e}_z &= \vec{e}_z & \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned}$$

1.3.2 Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi & \vec{e}_r &= \vec{e}_x\sin\vartheta\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\vartheta\sin\varphi + \vec{e}_z\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi & \vec{e}_\vartheta &= \vec{e}_x\cos\vartheta\cos\varphi + \vec{e}_y\cos\vartheta\sin\varphi + \vec{e}_z\sin\vartheta \\ z &= r\cos\vartheta & \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_x\sin\varphi + \vec{e}_y\cos\varphi \end{aligned}$$

1.4 Winkelfunktionen

$$\sin = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} \qquad \cos = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$$

siehe kleine Formelsammlung Seite 14

2 Transformationen

2.1 Möbius-Transformation

Verknüpfung grundlegender analytischer Funktionen zu einer Abbildungsfunktion.

Möbius-Transformation ist eindeutig umkehrbar, bildet *drei* wählbare Punkte aus der z-Ebene in *drei* Punkte in der w-Ebene ab, von denen *einer* im Unendlichen liegen kann.

2.1.1 Kreis mit *nicht* homogenem Potentialverlauf

$\Rightarrow$ auf die obere Hälfte der w-Ebene abbilden; Plattenkondensator

Möbius-Transformation, für $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\beta}{\delta}\frac{\frac{\alpha}{\beta}z + 1}{\frac{\gamma}{\delta}z + 1} \Rightarrow \boxed{w = j\frac{a-z}{a+z}}$$

mit $\frac{\beta}{\delta} = j$ aus Kreismittelpunkt, $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{a}$ und $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{1}{a}$ aus Punkten am Kreis auf der x-Achse.

Umkehrfunktion für die Rücktransformation

$$z = -\frac{\delta w - \beta}{\gamma w - \alpha} \Rightarrow \boxed{z = a\frac{j-w}{j+w}}$$

1. drei Punkte wählen, die zu transformieren sind, um eine Anordnung in der w-Ebene zu erhalten (siehe oben).
2. Tabelle für z_λ und w_λ in den drei Punkten aufstellen
3. Konstanten für Berandungspunkte bestimmen (Werte aus der Tabelle)
   (evtl. weitere Werte aufnehmen oder Zahl der Unbekannten reduzieren, siehe oben)
   $\Rightarrow$ Abbildungsfunktion und Umkehrfunktion, damit markante Punkte für den Potentialverlauf in die w-Ebene transformieren
4. komplexes Potential
   $$P_m(w_p) = -\frac{\mu_0}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V_m(u_Q)\frac{du_Q}{w_p - u_Q}$$
5. konjugiert komplexe Feldstärke (mit $\frac{dz}{dw} = a\frac{-2j}{(j+w)^2}$)
   $$E^*(z_p) = -\frac{dP_m(w_p)}{dw_p}\frac{1}{\frac{dz_p}{dw_p}} \qquad B^*(z) = j\frac{dP_m(w)}{dw}\frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

2.1.2 Kreisförmige Anordnung mit jeweils homogenem Potentialverlauf

$\Rightarrow$ Zylinderkondensator

Möbius-Transformation, für $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z + \frac{\beta}{\alpha}}{z + \frac{\delta}{\gamma}} \Rightarrow \boxed{w = r\frac{z+s}{z+t}}$$

Umkehrfunktion für die Rücktransformation

$$z = -\frac{\delta w - \beta}{\gamma w - \alpha}$$

1. drei Punkte wählen, die zu transformieren sind, um eine rotationssymetrische Anordnung zu erhalten (Zylinderkondensator)
2. Tabelle für z_λ und w_λ in den drei Punkten aufstellen
3. Konstanten für Berandungspunkte bestimmen (Werte aus der Tabelle)
   (evtl. weitere Werte aufnehmen oder Zahl der Unbekannten reduzieren)
   $\Rightarrow$ Abbildungsfunktion und Umkehrfunktion, damit markante Punkte für den Potentialverlauf in die w-Ebene transformieren
4. komplexes Potential
   $$P_m(w_p) = -\frac{\mu_0}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} V_m(u_Q) \frac{du_Q}{w_p - u_Q}$$
5. konjugiert komplexe Feldstärke
   $$E^*(z_p) = -\frac{dP_m(w_p)}{dw_p} \frac{1}{\frac{dz_p}{dw_p}} \qquad B^*(z) = j\frac{dP_m(w)}{dw} \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

2.2 Schwarz-Christoffel-Transformation

Bestimmen von Potential- und Feldlinienverläufen innerhalb einer polygonal begrenzten Fläche der z-Ebene (auch mit parallelen und offenen Kanten) durch Transformation in die obere Hälfte der w-Ebene.

1. Die Anordnung wird von einer Kurve in positiver Richtung durchlaufen, wobei die Knickpunkte des Polygons (P_λ) auf Punkte der u-Achse in der w-Ebene übertragen werden – vorzugsweise $u_\lambda = -1, 0, 1$. Hierbei darf höchstens ein Punkt im Unendlichen enden. Die Punkte, die im Unendlichen enden (P'_λ und P''_λ), werden verbunden. *Symetrien bleiben bei der Transformation erhalten.*

2. Tabelle für $z_\lambda, \alpha_\lambda, w_\lambda$ aufstellen ($\alpha_\lambda < 0$ für Rechtsknick, $\alpha_\lambda > 0$ für Linksknick, Summe immer gleich 2)

3. Schwarz-Christoffel-Integral (nach BRONSTEIN S. 87ff lösen)

$$z = C \int \prod_{\lambda=1}^{n-1} (w - w_\lambda)^{-\alpha_\lambda} dw + C^*$$

   (für $z_\lambda = 0 \rightarrow w_\lambda = 0$ folgt $C^* = 0$ integrieren von $0 \ldots \mathrm{w}$)

4. Konstanten bestimmen

   (a) Pol der z-Ebene $\rightarrow$ im Endlichen der w-Ebene, nur für alle $w_k \neq \infty$ (z.B. bei parallelen Kanten, Punkte gleichen Potentials, siehe Hilfsblätter)

$$C = \frac{j}{\pi}(z''_k - z'_k) \left[\prod_{\lambda=1/\lambda\neq k}^{n-1} (w_k - w_\lambda)^{-\alpha_\lambda} \right]^{-1}$$

   (b) Pol der z-Ebene $\rightarrow$ im Unendlichen der w-Ebene

$$C = -\frac{j}{\pi}(z''_k - z'_k)$$

   (c) C^* in den Korrelationspunkten (z.B. -1 oder 1) durch Einsetzen bestimmen

5. komplexes Potential (mit $V(u')$ gesamtes Potential auf der u-Achse der w-Ebene)

$$P(w_p) = \frac{j}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(u') \frac{du'}{w_p - u'}$$

   Potentialverteilung auf der reellen Achse (u) beachten, Integrale entsprechend aufspalten, bei Grenzen im ∞en mit $\lim_{u\rightarrow\infty}$ arbeiten

6. konjugiert komplexe Feldstärke (mit $\frac{dz}{dw} = C \prod_{\lambda=1}^{n-1} (w - w_\lambda)^{-\alpha_\lambda}$ dem Integranden des Schwarz-Christoffel-Integrals)

$$E^*(z_p) = -\frac{dP(w_p)}{dw_p} \frac{1}{\frac{dz_p}{dw_p}} \qquad B^*(z) = j \frac{dP(w)}{dw} \frac{1}{\frac{dz}{dw}}$$

2.3 Transformation mit Hilfe analytischer Funktionen

2.3.1 Abbildung der speziellen Parabel nach Schwarz-Christoffel

Zuerst in die Hilfsebene $\xi = r + j\varphi$, dann in die Transformationsebene $w = u + jv$ abbilden.

Korrelationstafel für $z = f(\xi)$

λ	1	2	3	4	
z_λ	1	$\infty + j0$	-1	$-\infty + j0$	z'_λ
		$-\infty + j0$		$\infty + j0$	z''_λ
α_λ	-1	2	-1	2	$\sum \alpha_\lambda = 2$
ξ_λ	1	∞	-1	0	

Korrelationstafel für $w = g(\xi)$

λ	1	2	3	4	
w_λ		$\infty + j0$	jv_a	$-\infty + jv_a$	z'_λ
		$-\infty + jv_a$		$-\infty + j0$	z''_λ
α_λ	0	1	0	1	$\sum \alpha_\lambda = 2$
ξ_λ		∞	-1	0	

Abbildungsfunktion mit Schwarz-Christoffel-Integral bestimmen $z = f(\xi)$:

$z = \int (\xi - 1)^1 (\xi + 1)^1 (\xi - 0)^{-2} d\xi + C^* \Rightarrow z = C\left[\xi + \frac{1}{\xi}\right] + C^*$

Einsetzen eines Punktes ergibt die Konstanten: $C^* = 0$ und $C = \frac{1}{2}$

Abbildungsfunktion $w = g(\xi)$: $w = C \int (\xi - 0)^{-1} d\xi + C^* \Rightarrow w = C \ln \xi + C^*$

Einsetzen eines Punktes ergibt die Konstanten: $C^* = 0$ und bei parallelen Kanten auf Pol im Unendlichen mit $v_a = \pi$ folgt: $C = 1$.

Insgesamt ergibt sich die Abbildungsfunktion $z(w) = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w}) = \cosh w$ und die Umkehrfunktion $w = \operatorname{arcosh} z$

2.3.2 Abbildung der speziellen Hyperbel nach Schwarz-Christoffel

Korrelationstafel für $z = f(\xi)$

λ	1	2	3	
z_λ	0	$\infty + j0$	1	z'_λ
		$0 + j\infty$		z''_λ
α_λ	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\sum \alpha_\lambda = 2$
ξ_λ	0	∞	1	

Abbildungsfunktion bestimmen (mit $C^* = 0$): $z = C \int (\xi - 0)^{-\frac{1}{2}} d\xi$ und $w = C2\sqrt{\xi}$
Einsetzen eines Punktes ergibt die Konstante: $C = \frac{1}{2}$.
Keine weitere Abbildung nötig: $\xi \to w$.

3 Finite Elemente

Ermittlung von Feld- und Potentiallinienverläufen beliebig berandeter Gebiete mit Näherungsverfahren, auf zwei Arten von Differentialgleichungen anwendbar:

Elliptische Dgl. (Anwendung: Laplace- bzw. Poisson–Gleichung)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_3\frac{\partial f}{\partial z}\right)+a_4f+a_5=0$$

Parabolische Dgl. (Anwendung: Diffusions- bzw. Skingleichung)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_3\frac{\partial f}{\partial z}\right)+a_4f+a_5=a_0\frac{\partial f}{\partial t}$$

Für die Variablen a_i gilt dabei:

parabolische Dgl.	— $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_0$ =konst.
elliptische Dgl.	— a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 =konst., $a_0 = 0$
Eulersche Dgl.	— $a_1(x,y), a_2(x,y), a_3(x,y), a_4(x,y), a_5(x,y),\ a_0 = 0$
Helmholtz Dgl.	— $a_1 = a_2 = 1,\ a_4$ =konst., $a_5 = a_0 = 0$
Poisson Dgl.	— $a_1 = a_2 = 1,\ a_4 = a_0 = 0,\ a_5(x,y)$
Laplace Dgl.	— $a_1 = a_2 = 1,\ a_4 = a_5 = a_0 = 0$

Anstatt die partielle Dgl. direkt numerisch zu lösen (*Finite Differenzen*), ist es bei der *Finite Elemente Methode* vorteilhaft, das Randwertproblem in ein Variationsproblem zu überführen. Dies besteht in der Ermittlung der Zielfunktion f aus einer vorher minimierter Energie W, die ein Funktional von f darstellt.

3.1 Jakobi–Determinante

Bedingung für eine eindeutige, umkehrbare Abbildung ist die Existenz der Determinante im gesamten Integrationsbereich.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

3.2 Energieintegral

$$\begin{aligned} W(f) \;=\; & \iiint_v \frac{1}{2}\left[a_1\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + a_2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + a_3\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 - a_4 f^2\right] \\ & -a_5 f + a_0\frac{\partial f}{\partial t} f\,dv + \oiint_A \left[\frac{k_1}{2}f^2 - f_c f\right] dA \end{aligned}$$

$$f_c = K_1 f + K_2\frac{\partial f}{\partial n}$$

in allgemeiner Form für dreidimensionale Anordnungen. Je nach Anordnung (zwei- oder eindimensional), oder Problemstellung (Skin- bzw. Laplace-Dgl.) geht das Volumenintegral in ein Flächenintegral bzw. ein einfaches Integral über, hierbei sind die entsprechenden Koeffizienten a_i Null zu setzen. Aus dem zweiten Integral wird ein Linienintegral oder die Grenzen werden so in den Integranden eingesetzt; durch diese *Variation* geht mit Hilfe des *Euler'schen Theorems* das Energieintegral in das Energiefunktional über. (δ – Totales Differential)

$$W(V) \;\rightarrow\; min \qquad \Rightarrow \qquad \delta W(V) = 0$$

3.2.1 Totales Differential

$$\begin{aligned}\delta W(f) \;=\; & \iiint_v a_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + a_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + a_3 \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \\ & -a_4 f \delta f - a_5 \delta f + a_0 \frac{\partial f}{\partial t} \delta f \, dv + \oiint_A K_1 f \delta f - f_c \delta f \, dA \equiv 0\end{aligned}$$

Anmerkung:

$\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$	$\Rightarrow$	Dirichlet–Problem
$k_1 = 0$	$\Rightarrow$	Neumann–Problem

3.2.2 Partielle Integration mit zwei Veränderlichen (Produktintegration)

$$\iint_A v(x,y) \frac{\partial}{\partial x} [v(x,y)] \, dA = \oint_C v(x,y) u(x,y) n_x \, ds - \iint_A \frac{\partial}{\partial x} (v(x,y) u(x,y)) \, dA$$

$$\delta \frac{\partial f}{\partial x} = \delta f \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\text{mit:} \quad \delta f = u(x,y) \quad \text{und} \quad v(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Einsetzen in das Totale Differential des Energiefunktionals liefert eine neue Gleichung, die null werden muß ($\delta W(f) = 0$). Beachte: gleichartige Integranden zusammenfassen und null setzen.

3.3 Ritz'scher Ansatz für Energieminimierung

Näherungslösung $\tilde{f}$ statt f in das Energiefunktional einsetzen: ($W(\tilde{f}) \;\rightarrow\; min$)

$$\tilde{f}(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i(x,y,z)$$

Näherungslösung (modifizierter Ritz'scher Ansatz) für ein Element mit m Knotenpunkten:

$$\tilde{f}^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{m} f_i^e N_i^e(x,y,z) \;\Rightarrow\; \tilde{f}(x,y,z) = \sum_{j=1}^{n} f_j N_j$$

$\tilde{f}(x,y,z)$	— Näherungslösung: Ansatzfunktion
$g_i(x,y,z)$	— linear unabhängige Basisfunktionen
c_i	— Koeffizienten
$N_i^e(x,y,z)$	— Einheits-Formfunktion: Basisfunktion in den Knotenpunkten
	— $N_i^e(x_j^e, y_j^e, z_j^e) = 1$ für $j = i$, sonst 0
f_i^e	— Einheits-Knotenvariablen: Koeffizienten in den Knotenpunkten

Um die Extremalbedingung zu erhalten, ist die Matrizenschreibweise vorteilhaft:

$$W(c) = c^T A c + c^T a \ \rightarrow \ min \qquad \text{(mit Lösungsvektor } c\text{)}$$

$$c = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \qquad c^T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad a = \begin{bmatrix} \oint_C \tilde{I}_C(g_1)\, ds \\ \oint_C \tilde{I}_C(g_2)\, ds \\ \vdots \\ \oint_C \tilde{I}_C(g_n)\, ds \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \int_A \tilde{I}_A(g_1, g_1)\, dA & \ldots & \int_A \tilde{I}_A(g_1, g_n)\, dA \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_A \tilde{I}_A(g_n, g_1)\, dA & \ldots & \int_A \tilde{I}_A(g_n, g_n)\, dA \end{bmatrix} \qquad \text{(symetrische Matrix)}$$

Die besondere Eigenschaft der Formfunktion N_j^e in den Einheitselementen erlaubt die einfache Addition aller Formfunktionen in jedem Knotenpunkt j zur globalen Formfunktion N_j. Das Energieintegral besitzt dann die Matrizenform:

$$W(f) = f^T S f + d^T f \ \rightarrow \ min \quad \text{(mit Gesamtlösungsvektor } f\text{)}$$

$$f = [f_1, f_2, \ldots, f_n] \qquad f^T = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} \oint_{C_0} \tilde{I}_{C_0}(N_1^e)\, ds \\ \oint_{C_0} \tilde{I}_{C_0}(N_2^e)\, ds \\ \vdots \\ \oint_{C_0} \tilde{I}_{C_0}(N_n^e)\, ds \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} \int_{A_0} \tilde{I}_{A_0}(N_1^e, N_1^e)\, dA_0 & \ldots & \int_{A_0} \tilde{I}_{A_0}(N_1^e, N_n^e)\, dA_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{A_0} \tilde{I}_{A_0}(N_n^e, N_1^e)\, dA_0 & \ldots & \int_{A_0} \tilde{I}_{A_0}(N_n^e, N_n^e)\, dA_0 \end{bmatrix} \qquad \text{(symetrische Matrix)}$$

Zum Erfüllen der Extremalbedingung sind die Koeffizienten, das heißt der Lösungsvektor, zu bestimmen.

$$\boxed{Ac + a = 0} \qquad \boxed{Sf + d = 0}$$

$$\boxed{c = -A^{-1} a} \qquad \boxed{f = -S^{-1} d}$$

3.3.1 Eindimensionale Elemente — Einheitselement

- Lineare Ansatzfunktion: $\tilde{f}^e(u) = c_1 + c_2 u$
- Quadratische Ansatzfunktion: $\tilde{f}^e(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^2$
- Kubische Ansatzfunktion: $\tilde{f}^e(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^2 + c_4 u^3$
- Transformation: $x = x_j + u(x_{j+1} - x_j)$ daraus ergibt sich für das Energiefunktional (mit $a_2 = a_3 = a_0 = 0$):

$$W(f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left[a_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{(\Delta x_j)^2} - a_4 f^2 \right] - a_5 f \right) \Delta x_j \, du + \left[\frac{1}{2} k_1 f^2(u) - f_C(u) f(u) \right]_0^1$$

3.3.2 Zweidimensionale Elemente

- Lineare/Bilineare Ansatzfunktion für
  - Einheitsdreieck: $\tilde{f}^e(u,v) = c_1 + c_2u + c_3v$
  - Einheitsquadrat: $\tilde{f}^e(u,v) = c_1 + c_2u + c_3v + c_4uv$
- Quadratische Ansatzfunktion für
  - Einheitsdreieck: $\tilde{f}^e(u,v) = c_1 + c_2u + c_3v + c_4u^2 + c_5uv + c_6v^2$
  - Einheitsquadrat: $\tilde{f}^e(u,v) = c_1 + c_2u + c_3v + c_4u^2 + c_5uv + c_6v^2 + c_7u^2v + c_8uv^2$
- Transformationen:
  - Dreieck $\rightarrow$ Einheitsdreieck:
    $x = x_j + u(x_{j+1} - x_j) + v(x_{j+2} - x_j)$ und
    $y = y_j + u(y_{j+1} - y_j) + v(y_{j+2} - y_j)$
  - Parallelogramm $\rightarrow$ Einheitsquadrat:
    $x = x_j + u(x_{j+1} - x_j) + v(x_{j+2} - x_j)$ und
    $y = y_j + u(y_{j+1} - y_j) + v(y_{j+2} - y_j)$
    wie beim Dreieck, da durch drei Ecken eindeutig festgelegt
  - Krummliniges Dreieck $\rightarrow$ Einheitsdreieck:
    $x = c_1 + c_2u + c_3v + c_4u^2 + c_5uv + c_6v^2$ und
    $y = d_1 + d_2u + d_3v + d_4u^2 + d_5uv + d_6v^2$
    (höhergradige Ansatzfunktionen verwenden)
  - Krummliniges Viereck $\rightarrow$ Einheitsquadrat:
    $x = c_1 + c_2u + c_3v + c_4u^2 + c_5uv + c_6v^2 + c_7u^2v + c_8uv^2$ und
    $y = d_1 + d_2u + d_3v + d_4u^2 + d_5uv + d_6v^2 + d_7u^2v + d_8uv^2$

3.4 Lösungsverfahren

Typ 1 — Gegeben: Energiefunktional $W(f(x,y))$, außerdem die Basisfunktionen $g_1(x,y)$ und $g_2(x,y)$

1. Differentialgleichung aus $W(f)$ ermitteln: Integrand des ersten Integrals, daraus a_i und den Typ ermitteln
2. Ritz'scher Ansatz: gegebene g_i, c_n ($\tilde{f}$) einsetzen,
3. Kurvenintegral aus Randwertvorgaben bestimmen:
   - Teilintegrale über Teilgebiete, -strecken bilden, hierbei Potentialvorgaben berücksichtigen. Koeffizientenvergleich mit Ansatz

     $$k_1 f + a_1 \frac{\partial f}{\partial x} n_x + a_2 \frac{\partial f}{\partial y} n_y = f_c$$

     hieraus k_1 und f_c ermitteln (n_x in y-Richtung $= 1$, und n_y in y-Richtung $= 0$)
   - Ansatzfunktion, Koeffizienten a_i und k_1 in Energiefunktional einsetzen, dann integrieren. c_n aus $\partial W_i / \partial c_i = 0$ bestimmen. Für homogenes Gleichungssystem Matrizenschreibweise: $A_1 c + A_2 \beta^2 c = 0$

Typ 2 — Gegeben: Potentialvorgabe V_0 und $V = 0$ auf Zylinderkondensator und Basisfunktionen g_1, g_2 und g_3. Rechnen mit Laplace-Dgl. in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Hierbei gilt: $\partial/\partial\varphi = 0$ und $\partial/\partial z = 0$

1. Energiefunktional aufstellen:

$$W(V) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \rho\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2 d\rho + \left(\frac{1}{2}k_1 V^2(\rho) - V_c(\rho)V(\rho)\right)_a^b \quad \rightarrow \quad min$$

2. Ritz'scher Ansatz (1-dimensional):
   - $\tilde{V} = c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 = c_1 + c_2\rho + c_3\rho^2$
   - Transformation: $\rho = \rho_j + u(\rho_{j+1} - \rho_j)$ $\rho_1 = a \rightarrow 0$ und $\rho_2 = \frac{a+b}{2} \rightarrow 0,5$, sowie $\rho_3 = b \rightarrow 1$ und $j = 1$
   $\Rightarrow$ $\rho = a + u(b-a)$ Daraus folgt das transformierte Energiefunktional:

$$W(\tilde{V}) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (a + u(b-a))\,\frac{\left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial u}\right)^2}{(\Delta\rho)^2}\delta\rho\, du + \left(\frac{1}{2}k_1\tilde{V}^2(u) - V_c(u)\tilde{V}(u)\right)_0^1$$

   - Anpassen der Ansatzfunktion: $\tilde{V}(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^2$
   Einsetzen der gewählten Punkte $\tilde{V}(0) = c_1$, $\tilde{V}(0,5) = c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{4}c_3$ und $\tilde{V}(1) = c_1 + c_2 + c_3$ liefert B-Matrix:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Lösungsvektor $c = B^{-1}\tilde{V}^e$ bestimmen, dann einsetzen in Ansatz:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(u) &= \tilde{V}_1^e + (-e\tilde{V}_1^e + 4\tilde{V}_2^e - \tilde{V}_3^e)u + (2\tilde{V}_1^e - 4\tilde{V}_2^e + 2\tilde{V}_3^e)u^2 \\ &= \tilde{V}_1^e\underbrace{(1 - 3u + 2u^2)}_{N_1^e(u)} + \tilde{V}_2^e\underbrace{(4u - 4u^2)}_{N_2^e(u)} + \tilde{V}_3^e\underbrace{-u + 2u^2)}_{N_3^e(u)}\end{aligned}$$

   - Berechnung des Energiefunktionals über $S\tilde{f}^e + d = 0$

Typ 3 — Gegeben: eindimensionales Problem: drei Potentiale auf der x-Achse.

1. Energiefunktional: $W(V)$ mit $a_2 = a_3 = a_0 = 0$ $\quad\Rightarrow$ Linienintegral und Integrand mit Grenzen
2. Transformationstabelle (für eindimensional):

Knoten-nummer j	Koordinaten x_i	Differenz Δx_i	Transformations-gleichung	Element j
$\vdots$	$\vdots$	$\Delta x_i = x_{j+1} - x_i$	$x = x_i + u\Delta x_i$	$\vdots$

3. Sind z.B. drei Elemente zu transformieren, ergeben sich auch drei transformierte Energiefunktionale.

$$W_j(V) = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2}\left[a_1\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2}{(\Delta x_j)^2} - a_4 V^2\right] - a_5 V\right)\Delta x_j\, du + \left[\frac{1}{2}k_1 V^2(u) - V_C(u)V(u)\right]_0^1$$

Typ 4 — Gegeben: zweidimensionales Problem: Dreieck in allgemeiner Lage

1. Energiefunktional: $W(V)$ mit Laplace-Gleichung $a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = a_4 = a_5 = a_0 = 0 \quad \Rightarrow$ Flächenintegral und Kurvenintegral
2. Transformationstabelle (für zweidimensional):

Knoten-nummer i	Koord. x_i	y_i	Transforma-tionsgleichung	Differntialquot. $\frac{du}{dx}$	$\frac{dv}{dx}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{dv}{dy}$	Jakobi-Determ.	Element j
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

   mit: $\frac{du}{dx} = \left(\frac{dx}{du}\right)^{-1} = \frac{1}{x_{j+1}-x_j}$
   $x = x_j + u(x_{j+1} - x_j) + v(x_{j+2} - x_j)$; $y = y_j + u(y_{j+1} - y_j) + v(y_{j+2} - y_j)$
3. Transformiertes Energiefunktional:

$$W_i(V(u,v)) = \iint_{D_0} \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\partial V}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{dv}{dx}\right]^2 + \left[\frac{\partial V}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{dv}{dy}\right]^2\right\} J\, dA_0 + \oint_{C_0}\left[\frac{1}{2}k_1 V^2 - V_c v\right] ds_0 \quad \to min$$

4. Linearer Ansatz: $\tilde{V}(u,v) = V_1^e N_1^e(u,v) + V_2^e N_2^e(u,v) + V_3^e N_3^e(u,v)$ daraus folgt: $\frac{\partial V}{\partial u}$ und $\frac{\partial V}{\partial v}$, dann Einsetzen in Energiefunktional
   Beachte: die V_i^e sind von u, v unabhängig und werden vor das Integral gezogen. Ergebnis des Integrals ist die Fläche des Einheitsdreiecks ($\frac{1}{2}$).

Typ 5 — Gegeben: eindimensionales Problem:

$$W_j(f) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left[a_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{(\Delta x_j)^2} - a_4 f^2\right] - a_5 f\right)\Delta x_j\, du + \left[\frac{1}{2}k_1 f^2(u) - f_C(u) f(u)\right]_0^1 \;\to\; min$$

Aufgabe: Lösung eindimensionaler Randwertprobleme mit Hilfe der Matrizenrechnung

$$W(f) = f^T S f + f^T d \;\to\; min \quad \text{oder} \quad Sf + d = 0$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}\left[a_1 \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}{(\Delta x_j)^2} - a_4 f^2\right] - a_5 f\right)\Delta x_j\, du = f^{e^T} S_j^e f^e + f^{e^T} M_j^e f^e + f^{e^T} b_j^e \qquad \Rightarrow$$

$$f^{e^T} S_j^e f^e = \underbrace{\frac{a_1}{2\Delta x_j}}_{q_{j,1}} \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\right)^2 du$$

$$f^{e^T} M_j^e f^e = \underbrace{-\frac{a_4}{2}\Delta x_j}_{q_{j,2}} \int_0^1 \tilde{f}^2\, du$$

$$f^{e^T} b_j^e = \underbrace{-a_5 \Delta x_j}_{q_{j,3}} \int_0^1 \tilde{f}\, du$$

1. linearer Ansatz: $\tilde{f}(u) = f_1^e N_1^e(u) + f_2^e N_2^e(u)$ mit z.B.: $N_1^e = 1 - u$ und $N_2^e = u$
   $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$, $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\right)^2$, $\tilde{f}$ und $\tilde{f}^2$ ermitteln und in die Integrale einsetzen.
2. Beispiel zur Ermittlung der Matrizen — Integral liefert:

$$
\begin{aligned}
f^{e^T} S_j^e f^e &= \underbrace{\frac{a_1}{2\Delta x_j}}_{q_{j,1}} \left[(f_1^e)^2 + 2 f_1^e f_2^e + (f_2^e)^2\right] \\
&\Rightarrow \; S_{j,1}^e = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; S_j^e = q_{j,1} S_{j,1}^e \\
f^{e^T} M_j^e f^e &= \underbrace{-\frac{a_4}{2}\Delta x_j}_{q_{j,2}} \left[\frac{1}{3}(f_1^e)^2 + \frac{1}{3} f_1^e f_2^e + \frac{1}{3}(f_2^e)^2\right] \\
&\Rightarrow \; M_{j,2}^e = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & +1 \\ +1 & 2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; M_j^e = q_{j,2} M_{j,2}^e \\
f^{e^T} b_j^e &= \underbrace{-a_5 \Delta x_j}_{q_{j,3}} \left[\frac{1}{2} f_1^e + \frac{1}{2} f_2^e\right] \\
&\Rightarrow \; b_{j,3}^e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; b_j^e = q_{j,3} b_{j,3}^e
\end{aligned}
$$

   Beachte folgende Regel: gemischte Glieder (f_1, f_2) auf zwei Werte aufteilen (Vorzeichen beachten) und mit ganzzahligen Faktoren in die Matrix schreiben, hierzu ggf. erweitern.
3. quadratischer Ansatz: $\tilde{f}(u) = f_1^e N_1^e(u) + f_2^e N_2^e(u) + f_3^e N_3^e(u)$ mit z.B.: $N_1^e = 1 - 3u + 2u^2$, $N_2^e = 4u - 4u^2$ und $N_3^e = -u + 2u^2$
   $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}$, $\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\right)^2$, $\tilde{f}$ und $\tilde{f}^2$ ermitteln und in die Integrale einsetzen. Weiter: analog linearer Ansatz, Matrizen dann 3×3

Typ 6 — Gegeben: zweidimensionales Randwertproblem, Lösungsverfahren: Zerlegen in Dreiecke, linearer Ansatz, Matrizenrechnung.

1. $\tilde{f}(u,v) = f_1^e N_1^e(u,v) + f_2^e N_2^e(u,v) + f_3^e N_3^e(u,v)$
   Formfunktionen für das Einheitsdreieck: $N_1^e = 1 - u - v$, $N_2^e = u$ und $N_3^e = v$
2. allgemeines transformiertes Energiefunktional

$$
\begin{aligned}
W_j(f) &= \iint_{D_0} \frac{1}{2}\left[a_1\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{du}{dx}\right)^2 + a_2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dy} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{du}{dy}\right)^2 - a_4 f^2\right] \\
&\quad - a_5 f J \, du \, dv + \oint_C \left[\frac{1}{2} k_1 f^2 - f_c f\right] ds_0 \;\rightarrow\; min
\end{aligned}
$$

3. Integrale zur Bestimmung der Matrizen:

$$
\begin{aligned}
f^{e^T} q_{j,1} S_{j,1}^e f^e &= \underbrace{\frac{J}{2}\left[a_1\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + a_2\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]}_{q_{j,1}} \iint_{D_0} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 du\,dv \\
f^{e^T} q_{j,2} S_{j,2}^e f^e &= \underbrace{J\left[a_1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + a_2 \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy}\right]}_{q_{j,2}} \iint_{D_0} \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}\, du\,dv
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f^{e^T} q_{j,3} S^e_{j,3} f^e &= \underbrace{\frac{J}{2}\left[a_1\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + a_2\left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right]}_{q_{j,3}} \iint_{D_0} \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 du\, dv \\
f^{e^T} q_{j,4} M^e_{j,4} f^e &= \underbrace{-\frac{J}{2} a_4}_{q_{j,4}} \iint_{D_0} f^2\, du\, dv \\
f^{e^T} q_{j,5} b^e_{j,5} &= \underbrace{-J a_5}_{q_{j,5}} \iint_{D_0} f\, du\, dv
\end{aligned}
$$

Die Integranden ergeben sich aus dem Lösungsansatz $\tilde{f}$.

4. Tabellen:

Element	$\frac{du}{dx}$	$\frac{dv}{dx}$	$\frac{du}{dy}$	$\frac{dv}{dy}$	J
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Element	$q_{j,1}$	$q_{j,2}$	$q_{j,3}$	$q_{j,4}$	$q_{j,5}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

5. Mit Hilfe der für das Einheitsdreieck bekannten Matrizen

$$S_{j,1}^e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_{j,2}^e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_{j,3}^e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_{j,4}^e = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b_{j,5}^e = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V^e = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

wird für jedes Element j die Matrix S_j^e aufgestellt (j – Element, i – Knoten):

$$S_j^e = \sum_{i=1}^{3} q_{j,i} S_{j,i}^e = q_{j,1}S_{j,1}^e + q_{j,2}S_{j,2}^e + q_{j,3}S_{j,3}^e$$

6. Gesamtmatrix (S): Dimension: $k \times k$ (k – Anzahl der Knoten)
   (a) Knoten der Gesamtanordnung numerieren
   (b) Knoten der Einzelelemente numerieren (beginnen auf der x-Achse, weiter gegen Uhrzeigersinn)
   (c) Hauptdiagonalenelemente: Summe der an den Dreiecken beteiligten Knotenpunkten (aus der Hauptdiagonalen der Elemente der S_j^e)
   (d) übrige Elemente (symetrisch): nicht verbundene Hauptknoten = 0 — verbundene Hauptknoten n und m bilden das Matrixelement $S_{n,m}$, Summe der Geraden der beteiligten Dreiecke (Indizes der Einzelelemente verwenden).
7. d-Matrix enthält die gegebene Potentialverteilung der Knoten (Strecken).

4 Skin-Effekt

Vereinbarungen über die Schreibweise:

$\check{F}$	Feld allgemein, entspricht $\check{A}$, $\check{H}$
$\vec{F}(\vec{r}, t)$	Vektor, orts- und zeitabhängig, *nicht* quellenfrei
$\vec{F}^*(\vec{r}, t)$	Vektor, orts- und zeitabhängig, quellenfrei
$\check{F}(\vec{r})$	ortsabhängige komplexe Amplitude ($\omega = const$)
$\check{F}^*(\vec{r})$	ortsabhängige konjugiert komplexe Amplitude ($\omega = const$)
	$\check{F} = \check{\underline{\vec{F}}}$ (Raumzeiger oder Vektor)
$\hat{\underline{F}}_x$	x-Komponente der ortsabhängigen komplexen Amplitude
$\overline{F}(\vec{r})$	vektorieller Mittelwert

4.1 Wichtige Formeln

$$\check{S} = -j\omega\kappa\check{A} = -\kappa\frac{\partial\check{A}}{\partial t} = \text{rot}\,\check{H} \qquad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial t} = j\omega$$

$$\oint H d\vec{s} = \hat{\underline{I}} \qquad \check{H} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\,\check{A} \qquad \text{rot}\,\check{A} = \check{B}$$

- komplexe Transformation $i(t) = \hat{i}\cos\omega t \Rightarrow \hat{\underline{I}} = \hat{i}\,[\cos\omega t - j\sin\omega t]$
- Skinkonstante: $\alpha^2 = j\omega\kappa\mu$
- bei Strombelag an einer Grenzfläche: $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$
- eine hochpermeable Grenzfläche $\Rightarrow$ einmal an der Fläche spiegeln ergibt Ersatzanordnung mit $I = I'$
- zwei parallele, hochpermeable Grenzflächen $\Rightarrow$ an der Fläche spiegeln, ergibt unendlich ausgedehnte Anordnung (z.B. $\frac{\partial}{\partial y} = 0$)
- unendlich lange Ausdehnung in z.B. z-Richtung $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} = 0$
- rotationssymetrisch $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$
- für $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{rot}\,\check{A} = -\vec{e}_x\frac{\partial\hat{\underline{A}}_z}{\partial x}$
- für $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \Rightarrow \text{rot}\,\check{A} = -\vec{e}_\varphi\frac{\partial\hat{\underline{A}}_z}{\partial\rho}$

4.2 Rechteckleiter — kartesische Koordinaten

1. immer die z-gerichtete Größe wählen, z.B. $\underline{\hat{I}}_z$ gegeben $\Rightarrow$ Skingleichung mit $\underline{\hat{H}}$ aufstellen. Außer H_z ist gegeben, dann A aufstellen.

2. Richtung und Abhängigkeit ermitteln (z.B. für $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\vec{I} = \vec{e}_z I$)

$$\check{B} = \text{rot}\,\check{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\hat{A}}_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_y \frac{\partial \underline{\hat{A}}_z}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\hat{H}}_y(x)$$

3. Skingleichung für Teilräume aufstellen (für verschiedene Stromrichtung verschiedene Teilräume), hierbei zusätzlich Indizierung verwenden:

   - Teilraum $\kappa \neq 0$:

   $$\Delta\check{F} - \alpha^2\check{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{\hat{F}}_y(x)}{\partial x^2} - \alpha^2 \hat{F}(x) = 0$$

   mit $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\alpha^2 = j\omega\kappa\mu$ (Skinkonstante)
   Lösungsansatz: $\underline{\hat{F}}(x) = \underline{\hat{C}}_1 \cosh(\alpha x) + \underline{\hat{C}}_2 \sinh(\alpha x)$

   - Teilraum $\kappa = 0$:

   $$\Delta\check{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{\hat{F}}(x)}{\partial x^2} = 0$$

   mit $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\alpha^2 = 0$
   Lösungsansatz: $\underline{\hat{F}}(x) = \underline{\hat{C}}_3 + \underline{\hat{C}}_4 x$

4. Lösung durch Bestimmen der Konstanten

   - $\check{H}$ – Feld kann im Unendlichen nicht ∞ werden $\Rightarrow$ $\underline{\hat{C}}_4 = 0$
   - für die gesuchte Größe im Teilraum $\kappa \neq 0$
     - Teilräume und enthaltene Größen unsymetrisch $\Rightarrow$ ungerade Funktion ($\sinh(x)$) $\Rightarrow$ $\underline{\hat{C}}_1 = 0$
     - Teilräume und enthaltene Größen symetrisch $\Rightarrow$ gerade Funktion ($\cosh(x)$) $\Rightarrow$ $\underline{\hat{C}}_2 = 0$
   - Betrachtung von $\underline{\hat{F}}(x)$ an den Grenzflächen, wenn gilt:
     - kein Strombelag: Stetigkeit, da innen = außen
     - Strombelag: $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$
       (wobei $\vec{n}$ Tangentenvektor der Fläche mit Belag)

5. Strom $\underline{\hat{I}}$ gegeben $\Rightarrow$ Berechnung durch $\oint H\,d\vec{s} = \underline{\hat{I}}$ auf der Berandung des Teilgebietes $\int_a^b H dx + \int_c^d H dy + \int_e^f H dx + \int_g^h H dy = I$, wobei hier z.B. $dy = 0$

6. die bestimmten Konstanten in Lösungsansätze einsetzen.

7. Stromdichte $\check{S} = \text{rot}\,\check{H}$ (nach Bestimmung von rot $\check{H}$ muß noch abgeleitet werden)

4.3 Rundleiter — Zylinderkoordinaten

1. bei rotationssymetrischen Anordnungen die $\vec{e}_z$-gerichtete Größe ansetzen, z.B. $\underline{\hat{I}}_z$ gegeben $\Rightarrow$ Skingleichung mit $\underline{\hat{H}}$ aufstellen. Außer H_z ist gegeben, dann A aufstellen.

2. Richtung und Abhängigkeit ermitteln (z.B. für $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\vec{I} = \vec{e}_z I$)

$$\check{B} = \text{rot}\,\check{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\hat{A}}_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_\varphi \frac{\partial \underline{\hat{A}}_z}{\partial\varphi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\hat{H}}_\varphi(\rho)$$

3. Skingleichung für Teilräume aufstellen (für verschiedene Stromrichtung verschiedene Teilräume), hierbei zusätzlich Indizierung verwenden:

   - Teilraum $\kappa \neq 0$:

   $$\Delta\check{F} - \alpha^2\check{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{\hat{F}}(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{\hat{F}}(\rho)}{\partial\rho} - \alpha^2 \underline{\hat{F}}(\rho) = 0$$

   mit $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\alpha^2 = j\omega\kappa\mu$

   Lösungsansatz: $\underline{\hat{F}}(\rho) = \underline{\hat{C}}_1 \mathcal{I}_0(\alpha\rho) + \underline{\hat{C}}_2 \mathcal{K}_0(\alpha\rho)$ (modifizierte Besselfunktion)

   - Teilraum $\kappa = 0$:

   $$\Delta\check{F} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{\hat{F}}(\rho)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \underline{\hat{F}}(\rho)}{\partial\rho} = 0$$

   mit $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ und $\alpha^2 = 0$

   Lösungsansatz: $\underline{\hat{F}}(\rho) = \underline{\hat{C}}_3 + \underline{\hat{C}}_4 \ln\left(\frac{\rho}{R}\right)$

4. Lösung durch Betrachtung der modifizierten Besselfunktionen

$$\frac{d\mathcal{I}_n(x)}{dx} = \mathcal{I}_{n+1}(x) + \frac{n}{x}\mathcal{I}_n(x) \quad \text{und} \quad \frac{d\mathcal{K}_n(x)}{dx} = -\mathcal{K}_{n+1}(x) - \frac{n}{x}\mathcal{K}_n(x)$$

5. Lösung durch Bestimmen der Konstanten

   - $\check{H}$ – Feld kann im Unendlichen nicht ∞ werden $\Rightarrow$ $\underline{\hat{C}}_4 = 0$
   - Betrachtung von $\underline{\hat{F}}(\rho)$ an den Grenzflächen, wenn gilt:
     - kein Strombelag: Stetigkeit, da innen = außen
     - Strombelag: $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$
       (wobei $\vec{n}$ Tangentenvektor der Fläche mit Belag — meistens $\vec{e}_\rho$)

6. Strom $\underline{\hat{I}}$ gegeben $\Rightarrow$ $\check{H}$ kann durch umschlossenen Strom bestimmt werden über $\oint H d\vec{s} = \underline{\hat{I}} \quad \Rightarrow$
   $\check{H} = \vec{e}_\varphi \frac{\hat{I}_0}{2\pi\rho}$ für I_0 in z-Richtung und $\kappa = 0$ (Außenraum)
   $\check{H} = \vec{e}_\varphi \frac{\hat{I}_0}{2\pi r^2}\rho$ für I_0 in z-Richtung und $\kappa \neq 0$ (Innenraum).

7. die bestimmten Konstanten in Lösungsansätze einsetzen.

8. Stromdichte $\check{S} = \text{rot}\,\check{H}$ (nach Bestimmung von rot $\check{H}$ muß noch abgeleitet werden)

5 Wellen

5.1 Freie Wellenausbreitung im Raum

$$\text{rot rot}\,\vec{F} + \mu\epsilon\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial f^2} = 0$$

5.1.1 Seperation in kartesischen Koordinaten

$$\Delta\underline{\hat{F}}_i = \frac{\partial^2\underline{\hat{F}}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\underline{\hat{F}}_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\underline{\hat{F}}_i}{\partial z^2} = -\beta^2\underline{\hat{F}}_i$$

mit $i = x, y, z$ und $\beta^2 = \omega^2\mu\epsilon$

Produktansatz von Bernoulli: $\underline{\hat{F}}_i(x,y,z) = X_i(X)\cdot Y_i(y)\cdot\underline{\hat{Z}}_i(z)$ führt zu den Differentialgleichungen:

$$\underbrace{\frac{1}{X_i}\frac{d^2X_i}{dx^2}}_{-p^2} + \underbrace{\frac{1}{Y_i}\frac{d^2Y_i}{dy^2}}_{-q^2} + \underbrace{\frac{1}{\underline{\hat{Z}}_i}\left(\frac{d^2\underline{\hat{Z}}_i}{dz^2} + \beta^2\underline{\hat{Z}}_i\right)}_{p^2+q^2} = 0$$

Das führt auf drei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2X_i}{dx^2} + p^2X_i = 0 \qquad \frac{d^2Y_i}{dy^2} + q^2Y_i = 0 \qquad \frac{d^2\underline{\hat{Z}}_i}{dz^2} + (\beta^2 - p^2 - q^2)\cdot\underline{\hat{Z}}_i = 0$$

deren Lösungen lauten:

$$\begin{aligned} X_i(x) &= C_p\cos px + D_p\sin px \\ Y_i(y) &= E_q\cos qx + F_q\sin qx \\ \underline{\hat{Z}}_i(z) &= Me^{-j\beta' z} + Ne^{j\beta' z} \end{aligned}$$

Funktionen der in $\pm z$-Richtung fortschreitenden Welle mit $\beta'^2 = \beta^2 - p^2 - q^2$

5.1.2 Seperation in Zylinderkoordinaten

$$\Delta\underline{\hat{F}} = \frac{d^2\underline{\hat{F}}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\underline{\hat{F}}}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d\underline{\hat{F}}}{d\varphi^2} + \frac{d^2\underline{\hat{F}}}{dz^2} = \beta^2\underline{\hat{F}}$$

mit $i = x, y, z$

Produktansatz von Bernoulli: $\underline{\hat{F}}(\rho,\varphi,z) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi)\cdot\underline{\hat{Z}}_i(z)$ führt zu den Differentialgleichungen:

$$\underbrace{\frac{1}{R}\left(\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}\right)}_{-p^2+\frac{m^2}{\rho^2}} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2}\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{-\frac{m^2}{\rho^2}} + \underbrace{\frac{1}{\underline{\hat{Z}}}\frac{d^2\underline{\hat{Z}}}{dz^2} + \beta^2}_{q^2} = 0$$

Das führt auf eine gewöhnliche Bessel-Differentialgleichung und zwei Differentialgleichungen für harmonische Schwingung mit $\beta'^2 = \beta^2 - p^2$:

$$\frac{d^2R}{d(pq)^2} + \frac{1}{pq}\frac{dR}{d(pq)} + \left(1 - \frac{m^2}{p^2q^2}R\right) = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \qquad \frac{d^2\underline{\hat{Z}}_i}{dz^2} + \beta'^2\underline{\hat{Z}} = 0$$

deren Lösungen lauten:

$$\begin{aligned}
R(\rho) &= C_m \mathcal{J}_m(pq) + D_m \mathcal{N}_m(pq) \\
\Phi(\varphi) &= E_m \cos m\varphi + F_m \sin m\varphi \\
\hat{\underline{Z}}(z) &= M e^{-j\beta' z} + N e^{j\beta' z}
\end{aligned}$$

5.1.3 Seperation in Kugelkoordinaten

Wellen breiten sich in r-Richtung aus $\Rightarrow$ Beschränkung auf rotationssymetrische Anordnungen: $\check{A} = \vec{e}_r \hat{\underline{A}}(r, \vartheta)$

$$\Delta \hat{\underline{A}} = \frac{\partial \hat{\underline{A}}}{\partial r^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial \hat{\underline{A}}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\underline{A}}}{\partial \vartheta^2} = -\beta^2 \hat{\underline{A}}$$

mit $\beta^2 = \omega^2 \mu z$ Produktansatz von Bernoulli: $\hat{\underline{A}}(r, \vartheta) = \hat{\underline{R}}(r) \cdot \Theta(\vartheta)$ führt nach Substitution zu der gewöhnlichen Bessel'schen Differentialgleichung $(n + 1/2)$-Ordnung

$$\frac{d^2 \hat{\underline{R}}}{d(\beta r)^2} + \frac{1}{\beta r} \frac{d \hat{\underline{R}}}{d(\beta r)} + \left[1 - \left(\frac{n + 1/2}{\beta r} \right)^2 \right] \hat{\underline{R}}' = 0$$

und der Differentialgleichung für gewöhnliche orthogonale Kugelfunktionen:

$$\frac{d}{du} \left[(1 - u)^2 \frac{d\Theta}{du} \right] + n(n+1)\Theta = 0$$

deren Lösungen lauten:

$$\hat{\underline{R}}'(r) = C_n \mathcal{J}_{n+1/2}(\beta r) + D_n \mathcal{N}_{n+1/2}(\beta r)$$

5.1.4 Ebene Wellen, periodisch

$$\frac{d^2 \check{A}(z)}{dz^2} = -\beta^2 \check{a}(z)$$

$$\vec{A}(z, t) = \Re \left[\check{A}_1 e^{j(\omega t - \beta z)} + \check{A}_2 e^{j(\omega t + \beta z)} \right]$$

5.1.5 Reflektion ebener Wellen

Brechungsgesetz von Snellius: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_e}$ Grenzwinkel für Totalreflektion: $\theta_{e\ tot} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$

5.2 Geführte Wellenausbreitung in Leitern

5.2.1 Rechteckhohlleiter

1. TE – Wellen

2. TM – Wellen

5.2.2 Kreiszylindrische Hohlleiter

5.2.3 TEM – Wellen auf Leitern