Algebra I - Resueltos 2021

Por Libatio[1]

November 30, 2021

[1]Agradecimientos y coautoria de tew, el sinse, ido, luchando por la vida

Esto es una beta con los ejercicios resueltos de Algebra hasta el primer parcial. Puede contener **errores**, así como también aciertos. Lo voy a terminar post 15 de Diciembre cuando me libere con los parciales.

Muchas gracias a Teresa, Nico, Georgi, Vicky, Juli y Sergio por hacer esto posible [etc]

Chapter 1

Conjuntos, Relaciones y Funciones

1.1 Conjuntos

1. i) Verdadero. ii) Verdadero. iii) Verdadero. iv) Falso. v) Falso.

2. i) Falso pues $3 \notin A$. ii) Verdadero. iii) Falso pues $\{\{3\}\} \subset A$.

iv) Verdadero. v) Verdadero. vi) Verdadero. vii) Verdadero

viii) Falso pues $3 \notin A$. ix) Falso pues $\emptyset \notin A$

x) Verdadero. xi) Falso pues $A \notin A$ xii) Verdadero.

3. i) Como B tiene a los elementos de A uno a uno (recordemos que no importa el orden) entonces $A \subseteq B$

ii) $A \nsubseteq B$, pues $\nexists x \in A$ tal que $x \notin B(i.e../x = 3)$

iii) $A \nsubseteq B$, pues$\sqrt{x^2} < \sqrt{3} \leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$ y como$\sqrt{3} < 3$ $luego \exists x \in A/x \notin B$

iv) $A \nsubseteq B$

4.

$$A = \{1, -2, 7, 3\}, B = \{1, \{3\}, 10\} C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$$

$$i) A \cap (B \triangle C)$$

$$(B\triangle C) = \{1, \{3\}, 10, -2, \{1,2,3\}, 3\}\ y\ A = \{1, -2, 7, 3\}\ entonces:$$

$$A \cap (B\triangle C) = \{1, -2, 3\}$$

$$ii)(A \cap B)\triangle(A \cap C)$$

$$(A \cap B) = \{1\}\ y\ (A \cap C) = \{-2, 3\}$$

$$(A \cap B)\triangle(A \cap C) = \{1, -2, 3\}$$

$$iii)A^c \cap B^c \cap C^c\ \ bueno\, hacelo\, vos.$$

asdasdasd

5. Dados A B C subconjuntos de un conjunto ref V, describir $(A \cap B \cap C)^c$ en terminos de

Intersecciones y complentos:

$((A \cap B) \cap C)^c \qquad Por\ asociatividad\ de\ la\ union$

$(A \cap B)^c \cap C^c \qquad De\ Morgan$

$A^c \cap B^c \cap C^c \qquad Idem$

Uniones y complementos:

$((A \cap B) \cap C)^c \qquad Por\ asociatividad\ de\ la\ union$

$(A \cap B)^c \cup C^c \qquad De\ Morgan$

$A^c \cup B^c \cup C^c \qquad Idem$

6. Hecho en dibujitos que hay que subir (y me da pajulis)

7. i) $(A \cap B^c) \cup ((B \cap C) \cup A^c)$

ii) $(A\triangle C) \cap B^c$

iii) $(A \cap B)\triangle(B \cap C) \cup (A \cap C) \cap B^c$

8. i) $A = 1, \ \ \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \emptyset\}$

ii)$A = \{a, b\}, \ \ \mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

iii)

9. Probar etc.

Bueno, qué corno hago? En criollo, tenemos que probar que partes de A es un subconjunto de partes de B ***sí sólo sí*** A está contenido en B. Para probar este tipo de implicaciones, tenemos que probar la ida ($\Rightarrow$) y luego la vuelta ($\Leftarrow$)

Recuerdo: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ *o tambien* $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$

Ida ($\Rightarrow$): Asumo que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ quiero ver que $A \subseteq B$ Tomo $x \in A$ quiero ver que $x \in B$. Se que $A \subseteq A$. A, el conjunto, es un elemento de $\mathcal{P}(A)$ y se escribe $A \in \mathcal{P}(A)$ y como se que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces por transitividad, $A \in \mathcal{P}(B)$. Pero, ¿qué significa que $A \in \mathcal{P}(B)$? Por definición de $\mathcal{P}(B)$, A tiene que ser un subconjunto de B. Y como es un subconjunto, $A \subseteq B$.

Vuelta ($\Leftarrow$): Sabiendo que $A \subseteq B$ q.v.q. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Tomo $X \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y entonces $X \subseteq A \subseteq B$ y por transitividad, $X \subseteq B$. A la vez, por defínici'on, $X \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(B)$, luego $X \subseteq P(B)$, por lo tanto $X \subseteq \underline{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$ que es lo que queriamos probar.

10. Tablas de verdad

11. Tablas de verdad

12. Tablas de verdad (Agregar notas sobre cuantificadores)

13. Tablas de verdad

14. Similar

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A, A \times B, (A \cap B) \times (A \cup B)$

$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$

$(A \cap B) \times (A \cup B) = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$

16. Probalo vos.

1.2 Relaciones

17. i. Es relacion? Si, pues todos los elementos que se relacionan de A en B existen en A o B segun especifica la relacion.

ii. No es, ya que $(3, 2) \in R$ pero $2 \notin B$

iii. Si, idem i.

iv. Si, idem i.

18. i) $\{(a,b) \in A \times B \,:\, a \leq b\}$

ii) $\{(a,b) \in A \times B \,:\, a > b\}$

iii) $\{(a,b) \in A \times B, , k \in \mathcal{Z} \,:\, ab = 2k\}$

iv) $\{(a,b) \in A \times B \,:\, a + b > 6\}$

19. Hacer por extension, clasificar.

20. Reflex? No. Sim? Si. As? No se. Trans? Si

21. Sea A ...

i) 4 ii) 1 iii) 5 iv) 6 v) 5 vi) ??? (Revisar, hecho de cuaderno viejo)

22.i) R? Si S? No As? Si Tr? Si

ii) Es reflexiva? $(a,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ a + a = 2a$ es par. Si.

Es simetrica? $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ a + b\, es\, par \Rightarrow (b,a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b + a$ es par. Si, por conmutatividad de la suma.

Es antisimetrica? No. i.e. (2,4) y (4,2)

Es Transitiva? No. i.e. (1,1) y (2,2)