

Álgebra I - Ejercicios Resueltos - 2do Cuatrimestre 2021

santi

Esto es una beta con los ejercicios resueltos de Algebra hasta el primer parcial. Acordate que esta hecho por alumnos para alumnos así que puede contener **errores**, así como también errores. Lo voy a terminar post 15 de Diciembre cuando me libere con los parciales.

Muchas gracias a Teresa, Nico, Georgi, Vicky, Juli y Sergio por hacer esto posible y a mis compañeros Tew, Lucho, Nico, Ivo y Marian[etc]

1 Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

1.1 Conjuntos

1. i) Verdadero. ii) Verdadero. iii) Verdadero. iv) Falso. v) Falso.

2. i) Falso pues $3 \notin A$. ii) Verdadero. iii) Falso pues $\{\{3\}\} \subset A$.

iv) Verdadero. v) Verdadero. vi) Verdadero. vii) Verdadero

viii) Falso pues $3 \notin A$. ix) Falso pues $\emptyset \notin A$

x) Verdadero. xi) Falso pues $A \notin A$ xii) Verdadero.

3. i) Como B tiene a los elementos de A uno a uno (recordemos que no importa el orden) entonces $A \subseteq B$

ii) $A \not\subseteq B$, pues $\nexists x \in A$ tal que $x \notin B$ (i.e. $x = 3$)

iii) $A \not\subseteq B$, pues $\sqrt{x^2} < \sqrt{3} \leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$ y como $\sqrt{3} < 3$ luego $\exists x \in A/x \notin B$

iv) $A \not\subseteq B$

4.

$$A = \{1, -2, 7, 3\}, B = \{1, \{3\}, 10\} C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$$

$$i) A \cap (B \Delta C)$$

$$(B \Delta C) = \{1, \{3\}, 10, -2, \{1, 2, 3\}, 3\} \text{ y } A = \{1, -2, 7, 3\} \text{ entonces :}$$

$$A \cap (B \Delta C) = \{1, -2, 3\}$$

$$ii) (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$(A \cap B) = \{1\} \text{ y } (A \cap C) = \{-2, 3\}$$

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$$

$$iii) A^c \cap B^c \cap C^c \text{ bueno hacelo vos.}$$

asdasdasd

5. Dados A, B, C subconjuntos de un conjunto ref V , describir $(A \cap B \cap C)^c$ en terminos de Intersecciones y complementos:

$$((A \cap B) \cap C)^c \quad \text{Por asociatividad de la union}$$

$$(A \cap B)^c \cap C^c \quad \text{De Morgan}$$

$$A^c \cap B^c \cap C^c \quad \text{Idem}$$

Uniones y complementos:

$$((A \cap B) \cap C)^c \quad \text{Por asociatividad de la union}$$

$$(A \cap B)^c \cup C^c \quad \text{De Morgan}$$

$$A^c \cup B^c \cup C^c \quad \text{Idem}$$

6. Hecho en dibujitos que hay que subir (y me da pajulis)

$$7. i) (A \cap B^c) \cup ((B \cap C) \cup A^c)$$

ii) $(A \Delta C) \cap B^c$

iii) $(A \cap B) \Delta (B \cap C) \cup (A \cap C) \cap B^c$

8. i) $A = 1, \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \emptyset\}$

ii) $A = \{a, b\}, \mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$

iii)

9. Probar etc.

Bueno, qué corno hago? En criollo, tenemos que probar que partes de A es un subconjunto de partes de B **sí sólo** **sí** A está contenido en B. Para probar este tipo de implicaciones, tenemos que probar la ida (\Rightarrow) y luego la vuelta (\Leftarrow)

Recuerdo: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ o tambien $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$

Ida (\Rightarrow): Asumo que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ quiero ver que $A \subseteq B$ Tomo $x \in A$ quiero ver que $x \in B$. Se que $A \subseteq A$. A, el conjunto, es un elemento de $\mathcal{P}(A)$ y se escribe $A \in \mathcal{P}(A)$ y como se que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces por transitividad, $A \in \mathcal{P}(B)$. Pero, ¿qué significa que $A \in \mathcal{P}(B)$? Por definición de $\mathcal{P}(B)$, A tiene que ser un subconjunto de B. Y como es un subconjunto, $A \subseteq B$.

Vuelta (\Leftarrow): Sabiendo que $A \subseteq B$ q.v.q. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Tomo $X \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y entonces $X \subseteq A \subseteq B$ y por transitividad, $X \subseteq B$. A la vez, por definici'on, $X \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(B)$, luego $X \subseteq \mathcal{P}(B)$, por lo tanto $X \subseteq \underline{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$ que es lo que queriamos probar.

10. Tablas de verdad

11. Tablas de verdad

12. Tablas de verdad (Agregar notas sobre cuantificadores)

13. Tablas de verdad

14. Similar

15. Sean $A = \{1, 2, 3\} B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A, A \times B, (A \cap B) \times (A \cup B)$

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$$

$$(A \cap B) \times (A \cup B) = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$$

16. Probalo vos.

1.2 Relaciones

17. i. Es relacion? Si, pues todos los elementos que se relacionan de A en B existen en A o B segun especifica la relacion.

ii. No es, ya que $(3, 2) \in R$ pero $2 \notin B$

iii. Si, idem i.

iv. Si, idem i.

18. i) $\{(a, b) \in A \times B : a \leq b\}$

ii) $\{(a, b) \in A \times B : a > b\}$

iii) $\{(a, b) \in A \times B, k \in \mathbb{Z} : ab = 2k\}$

iv) $\{(a, b) \in A \times B : a + b > 6\}$

19. Hacer por extension, clasificar.

20. Reflex? No. Sim? Si. As? No se. Trans? Si

21. Sea A ...

i) 4 ii) 1 iii) 5 iv) 6 v) 5 vi) ??? (Revisar, hecho de cuaderno viejo)

22.i) R? Si S? No As? Si Tr? Si

ii) Es reflexiva? $(a, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + a = 2a$ es par. Si.

Es simétrica? $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b \text{ es par} \Rightarrow (b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b + a \text{ es par}$. Si, por conmutatividad de la suma.

Es antisimétrica? No. i.e. $(2, 4)$ y $(4, 2)$

Es Transitiva? No. i.e. $(1, 1)$ y $(2, 2)$

24. $\bar{a} = \{a, b, f\}$ $\bar{c} = \{e, f\}$ $\bar{d} = \{d\}$

la partición asociada a $\mathcal{R} : \{a, b, f\} \cap \{c, e\} \cap \{d\}$

25. Tiene cuatro clases de equivalencia. Cada clase está representada en la partición \mathcal{R} como cada "elemento" de esta. (Adjuntar gráfico)

26. Para probar que una relación es de equivalencia, necesitamos saber si es simultáneamente reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexiva $A\mathcal{R}A \Leftrightarrow A \Delta A \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$

$$A \Delta A = \emptyset \Rightarrow \emptyset \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$$

Simétrica $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow B\mathcal{R}A$

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \Delta B \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$$

$$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow B \Delta A \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset \text{ (Esto se puede ver por simetría de la diferencia simétrica } [\Delta])$$

Transitiva Se puede demostrar por tabla de verdad

Finalmente, el ejercicio nos pide decidir si la relación es antisimétrica:

Antisimétrica

ii) Encontrar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$

27. Similarmente al ejercicio anterior, debemos ver que cumpla las tres condiciones ya nombradas para probar que es una relación de equivalencia.

Reflexiva $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 93x - 93x = 0$

Simétrica $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 93y - 93x$$

Y multiplicando por -1 :

$$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 93x - 93y \Rightarrow x\mathcal{R}y$$

Y por lo tanto es simétrica.

Transitiva $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 93x - 93y$$

$$y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = 93y - 93z$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 93x - 93y + 93y - 93z$$

$$\Leftrightarrow x^2 - z^2 = 93x - 93z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

Entonces la relación es reflexiva, simétrica y transitiva y por lo tanto podemos concluir que es de equivalencia. Por último, el ejercicio nos pide decidir si es antisimétrica:

Antisimétrica $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$

Esto se puede demostrar como Falso con un simple contraejemplo. Si tomamos 92 y 1 como x e y respectivamente, obtenemos:

$$92 \mathcal{R} 1 \Leftrightarrow 92^2 - 1^2 = 93(92) - 93$$

$$\Leftrightarrow 92^2 - 1^2 = 93(92) - 93$$

$$\Leftrightarrow 92^2 - 1^2 = 93(92 - 1)$$

$$\Leftrightarrow (92 + 1)(92 - 1) = 93 \cdot 91$$

$$\Leftrightarrow 93 \cdot 91 = 93 \cdot 91 \Rightarrow 93 = 91 \text{ Absurdo!}$$

Entonces no es antisimétrica.

ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$

28. i) $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \#X = \#Y$

Entonces, como hay 10 elementos en A, es posible formar 10 clases de equivalencia distintas, cada uno correspon-

diendo al cardinal indicado.

$\#\{1\}, \#\{1, 2\}, \dots \#\{1, 2, \dots, 10\}$ (nota: los cardinales están de más, arreglar)

ii) Infinitas clases de equivalencia.

$\#\bar{1}, \#\bar{2}, \dots \#\bar{n}$

1.3 Funciones

29. i) No pues $(3, a) \in \mathcal{R} \wedge (3, d) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a = d$ Absurdo.

ii) No pues 5 no se relaciona con nadie.

iii) Si, pues todo los elementos del conjunto de partida se relacionan.

iv) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} : a = 2b - 3\}$

Si, pues todos los elementos de \mathbb{N} están relacionados con algún elemento de \mathbb{R}

Esto se puede ver como: $a = 2b - 3 \Rightarrow \frac{a+3}{2} = b \in \mathbb{R}$

Es un numero real pues $a \in \mathbb{N}$

v) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : a = 2b - 3\}$

No, pues no todos los elementos de \mathbb{R} están relacionados con los elementos de \mathbb{N} (Está al revés, se puede ver fácilmente buscando un contraejemplo con la expresión anterior)

vi) $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} : a + b \text{ es divisible por } 5\}$

Luego, $a + b = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$

30. i) **Inyectividad** Asumimos que es inyectiva, y probamos por contraejemplo que no lo es:

$f(1) = f(-1) \Rightarrow 1 = -1$ Absurdo! Entonces no es inyectiva.

Sobreyectiva $12x^2 + 5 = y \Rightarrow \sqrt{\frac{y+5}{12}} = x$ con $\frac{y+5}{12} \geq 0$

Entonces, restringiendo la imagen(?), es sobreyectiva con $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 5}$

Biyectiva No es biyectiva ya que es sobreyectiva pero no inyectiva.

ii)

31. i) $f(g(n, m)) = \frac{(n(m+1))^2}{2}$

Finalmente nos queda:

$$f \circ g(n, m) = \begin{cases} \frac{(n(m+1))^2}{2} & \text{si } n = 6k \\ 3(n(m+1)) + 1 & \text{si } n \neq 6k \end{cases}$$

Habiendo calculado esto, evaluando:

$$f \circ g(2, 5) = 72$$

$$f \circ g(3, 2) = 28$$

$$f \circ g(3, 4) = 46$$

ii)

$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 7 \\ 2\sqrt{n} - 1 & \text{si } n > 7 \end{cases}$$

con $n > 0$.

Para el primer caso, $f \circ g(n) \neq 13$ pues $n \leq 7$

Para el segundo caso, habra que encontrar un n tal que $f \circ g(n) = 13 = 2\sqrt{n} - 1 \Leftrightarrow \frac{14}{2} = 7 = \sqrt{n} \Leftrightarrow |n| = 7^2$

Entonces o bien n es $(-7)^2 \notin \mathbb{N}$ o bien n es $7^2 \in \mathbb{N}$

Luego $f \circ g(49) = 13$.

Para 15 lo mismo, solo que el valor será 64.

32. i) $f \circ g(x) = 2(x+3)^2 - 18$

$g \circ f(x) = 2x^2 - 15$

ii) $f \circ g : f(4n)$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} 4n - 2 & \text{si } n = 4k \\ 4n + 1 & \text{si } n \neq 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$g \circ f :$

$$g \circ f(n) = \begin{cases} 4(n - 2) & \text{si } n = 4k \\ 4(n + 1) & \text{si } n \neq 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

iii) Acá todo bien con fog pero no con gof. Fijate:

$$f \circ g(n) = (\sqrt{n} + 5, 3\sqrt{n})$$

PERO $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Absurdo!

33. $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ n & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} \quad g(n) = 2n$$

$$f \circ g = \frac{2n}{n} = n$$

$$g \circ f(n) = \begin{cases} \frac{2n}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ 2n & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

Como podemos ver, en el caso impar nos devuelve un numero par, por lo que la distingue de $Id_{\mathbb{N}}$ y cumple la condición indicada. Qué tul?

34. i) fog es inyectiva... *completar*

35. i) Para probar si es una relación de equivalencia, debemos ver las tres condiciones habituales. Además, el ejercicio nos pide ver si es antisimétrica:

Reflexiva Como f es biyectiva y el *Codominio* $= Im(f)$ y es sobreyectiva:

$$\{1, \dots, 10\} \subseteq Im(f) \text{ por ejemplo: } f(1) = 1$$

$$f \mathcal{R} f \Leftrightarrow \exists n \in \{1, \dots, 10\} / f(n) = 1 y f(n) = 1$$

Simétrica $f \mathcal{R} g \Rightarrow f \mathcal{R} f$

$$\exists n / f(n) = g(n) = 1 \Rightarrow g \mathcal{R} f \Rightarrow g \mathcal{R} f$$

Transitiva $f \mathcal{R} g \wedge g \mathcal{R} h \Rightarrow f \mathcal{R} h$

$$\exists n_1 / f(n_1) = g(n_1) = 1$$

$$\exists n_2 / f(n_2) = h(n_2) = 2$$

Como $f(n_1) = g(n_2) = 1 = g(n_2) = h(n_2)$ entonces $f(n_1) = h(n_2)$ y $f \mathcal{R} h$.

\therefore es una relación de equivalencia.

Por último, nos falta probar la antisimetría:

Antisimetría No. Punto.

ii)

36.

2 Numeros Naturales e Inducción

2.1 Sumatoria y Productoria

1. i)

$$a) \sum_{k=0}^{100} k \quad b) \sum_{k=0}^{10} 2^k \quad c) \sum_{k=0}^{11} (-1)^k k^2 \quad d) \sum_{k=0}^{10} (2k+1)^k \quad e) \sum_{k=0}^{2n+1} 2k+1 \quad f) \sum_{k=0}^n kn$$

ii)

$$a) \prod k = 5^{100}k \quad b) \prod_{k=0}^{10} 2^k \quad c) \prod_{k=1}^n kn$$

2. i) $2 + 4 + \dots + 2(n-5) + 2(n-4)$

ii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} + \frac{1}{(2n)(2n+1)}$

iii) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} + \dots + \frac{2n}{2n} + \frac{2n+1}{2n} ??$

iv) $\frac{n}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+1)^2}$

v) copiar despues

3. Calcular.

a) $2n(n+1)+n$

b) ...

4.

2.2 Inducción

5. i) El cuadrado es de 7x7, luego 7^2 lo que coincide con:

$$\sum_{i=1}^7 (2i-1) = 49$$

Entonces, el caso para n cuadrados:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2$$

ii) Con suma de Gauss:

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n n = \frac{2(n(n+1))}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

iii) Con inducción:

$$\text{Caso base (n=1)} \sum_{i=1}^1 (2i-1) = 1$$

$$\text{Paso Inductivo} \quad HI : \sum_{i=1}^k (2i-1) = k^2 \quad QVQ : \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^k (2i-1) + 2k+1 \stackrel{HI}{=} k^2 + 2k+1 = (k+1)^2$$

□

6. Completar

7. Completar

8. Caso Base

$$P(1) = a^1 - b^1 = (a-b) \sum_{i=1}^1 a^{i-1} b^{1-i} = a-b$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = a^k - b^k = (a-b) \sum_{i=1}^k a^{i-1} b^{k-i}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b) \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} b^{k+1-i}$$

Reescribimos:

HI:

$$P(k) = \frac{a^k - b^k}{a-b} = \sum_{i=1}^k a^{i-1} b^{k-i}$$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} = \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1} b^{k+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^k a^{i-1} b^{k-i} b + a^{(k+1)-1} b^{k+1-(k+1)} \\ &\stackrel{HI}{=} b \sum_{i=1}^k a^{i-1} b^{k-i} + a^k \\ &= b \frac{a^k - b^k}{a-b} + a^k \\ &= \frac{a^k b - b^{k+1}}{a-b} + \frac{a^k(a-b)}{a-b} = \frac{a^k b - b^{k+1} + a^{k+1} - a^k b}{a-b} \\ &= \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} \end{aligned} \tag{1}$$

□

Cómo queríamos probar. Para la geométrica se puede plantear [...], luego:

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = \sum_{i=1}^n a^{i-1}$$

9.i) Caso Base

$$P(1) = \sum_{i=1}^1 a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^k a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &\stackrel{HI}{=} a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= a_{k+2} - a_1 \end{aligned} \tag{2}$$

□

Cómo queríamos probar.

ii)Acá tenemos que conjeturar en base a lo que nos dan, ya que no tenemos una formula cerrada. Una vez que la encontremos, probamos por inducción nuestra conjetura.

"Conjeturo":

$$\begin{aligned} n=1 & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} \\ n=2 & \qquad \qquad \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ n=3 & \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esto me suena de la forma $\frac{n}{n+1}$ Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Caso Base

$$P(1) = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&\stackrel{HI}{=} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)}
\end{aligned} \tag{3}$$

□

Cómo queríamos probar.

iii) Por la sugerencia, observemos que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{2}{(2i-1)(2i+1)}$$

Entonces, conjeturando solo la sumatoria del lado derecho de la igualdad:

$$\begin{aligned}
n=1 & \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3} \\
n=2 & \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{4}{5} \\
n=3 & \qquad \qquad \qquad \frac{4}{5} + \frac{2}{35} = \frac{6}{7}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2} \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

Pareciera ser $\frac{n}{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Pruebo por Inducción:

$$P(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Caso Base

$$P(1) = \sum_{i=1}^1 \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{3}$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$$\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^k \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\
&\stackrel{HI}{=} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{2k^2+3k+1}{4k^2+8k+3} = \frac{2k^2+3k+1}{2(8k^2+4k+\frac{3}{2})}
\end{aligned} \tag{4}$$

Factorizando:

$$\begin{aligned}
&= \frac{(k+\frac{1}{2})(k+1)}{2(k+\frac{1}{2})(k+\frac{3}{2})} \\
&= \frac{(k+1)}{2(k+\frac{3}{2})} = \frac{(k+1)}{2k+3}
\end{aligned} \tag{5}$$

□

Cómo queríamos probar.

10. Completar. Checkear iv-vii.

11. Prestale atención a este ejercicio porque es GOOOOD.

i) Fijate que nos piden probar que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, todos **del mismo signo!!** Y que es mayor estricta que -1. Entonces, eso nos deja dos casos posibles:

$$a_n > -1, \text{ todos mismo signo}$$

$$[a_n > -1] \begin{cases} (-1, 0) \\ (0, +\infty) \end{cases}$$

Planteemos el caso base y paso inductivo. Defino el predicado:

$$P(n) = \prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

Caso Base

$$P(1) = \prod_{i=1}^1 (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^1 a_i \Leftrightarrow 1+a_1 \geq 1+a_1$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \prod_{i=1}^k (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^k a_i$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i$$

Acá prestale atención a los colorcitos, porque vamos a "separar" ambas partes de la ecuacion para despues manipularlas en nuestra prueba:

$$\prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) = (1+a_{k+1}) \prod_{i=1}^k (1+a_i) \stackrel{HI}{\geq} (1 + \sum_{i=1}^k a_i)(1+a_{k+1})$$

$$1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i = 1 + a_{k+1} + \sum_{i=1}^k a_i$$

Entonces tenemos que:

$$(1 + \sum_{i=1}^k a_i)(1+a_{k+1}) = 1 + a_{k+1} + \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i = 1 + \sum_{i=1}^k a_i + a_{k+1}$$

Eliminando términos de la inecuación, nos queda:

$$a_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i \geq 0$$

y como tenemos una multiplicación de dos elementos, y por enunciado, **todos** los elementos son del **mismo signo**, entonces o bien $a_{k+1} \wedge \sum_{i=1}^k a_i \geq 0$ es mayor a cero, o bien $a_{k+1} \wedge \sum_{i=1}^k a_i \leq 0$ lo que cumple que $a_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i \geq 0$ ya que multiplicar dos elementos con un mismo signo nos da un número positivo.

Entonces cómo probamos que $p(k)$ Verdadero entonces $p(k+1)$ Verdadero, y $p(1)$ Verdadero (nuestro Caso Base) entonces $p(n)$ es Verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$

□

ii.

12. Probar que:

i. $n! \geq 3^{n-1}, \forall n \geq 5$

Estamos con un típico ejercicio de inducción corrida. Fijate que arranca para todo n mayor o igual a 5, por lo tanto nuestro caso base lo tendremos que probar a partir de ese número. Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = n! \geq 3^{n-1}$$

Caso Base

$$P(5) = 5! \geq 3^4$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = k! \geq 3^{k-1}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = (k+1)! \geq 3^k$$

$$\begin{aligned} (k+1)! &= k!(k+1) \geq 3^{k-1}(k+1) \geq 3^k \\ k+1 &\geq 3^{k-(k-1)} \\ k &\geq 3-1 \\ k &\geq 2 \end{aligned}$$

y como $k \geq 5$ esto es verdadero. Por lo tanto, nuestro paso inductivo es verdadero, y como el caso base es verdadero, entonces $p(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$. □

ii. $3^n - 2^n > n^3, \forall n \geq 4$

Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = 3^n - 2^n > n^3$$

Caso Base

$$P(4) = 3^4 - 2^4 > 4^3$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = 3^k - 2^k > k^3$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = 3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)^3$$

Recordemos que: $a > b \Leftrightarrow \boxed{x} + a > \boxed{x} + b$

$$\boxed{3^{k+1} - 2^{k+1}} = 3 \cdot 3^k - 2 \cdot 2^k = \boxed{2 \cdot 3^k - 2^k} + \boxed{3^k - 2^k} \overset{\text{HI}}{>} \boxed{2 \cdot 3^k - 2^k} + \boxed{k^3} \overset{\text{QVQ}}{>} \boxed{(k+1)^3}$$

Y como arranca desde $4 \geq 0$ va a estar acotado por $2 \cdot 3^4 - 2^4 + 4^3 > 5^3$

$$\text{Tenemos que: } \underset{\geq 162}{2 \cdot 3^k - 2^k} + \underset{\geq 64}{k^3} > \underset{\geq 125}{(k+1)^3}$$

y como $k \geq 4$ esto es verdadero. Por lo tanto, nuestro paso inductivo es verdadero, y como el caso base es verdadero, entonces $p(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$. □

iii. $\sum_{i=1}^n \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \forall n \geq 3$ Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = \sum_{i=1}^n \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \forall n \geq 3$$

Caso Base

$$P(3) = \sum_{i=1}^3 \frac{3^i}{i!} = 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} < 6(3) - 5 \Leftrightarrow 12 < 13$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^k \frac{3^i}{i!} < 6k - 5$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{3^i}{i!} < 6k + 1$$

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{3^i}{i!} = \sum_{i=1}^k \frac{3^i}{i!} + \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} < 6k - 5 + \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} < 6k + 1$$

Como $k \geq 3$ entonces cumple la desigualdad por acotacion. Luego, por ppio. de induccion corrido, $p(3)$ verdadero y $p(k)V \Rightarrow P(k+1)V$ entonces $p(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$ □

13. El Caso Base arranca en 5. Probemos que $n \geq 5$ por induccion.

$$P(n) = n^2 + 1 < 2^n$$

Caso Base

$$P(5) = 5^2 + 1 < 2^5 \text{ Verdadero.}$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = k^2 + 1 < 2^k$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = (k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$$

Como vimos anteriormente que $n^2 + 1 < 2^n$ es equivalente a $2^n > n^2 + 1$, podemos expresar el paso inductivo como:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} &= 2 \cdot 2^k \stackrel{HI}{>} 2(k^2 + 1) \stackrel{qvq}{>} (k+1)^2 + 1 \\ &2k^2 + 1 > (k+1)^2 \\ &k^2 > 2k \\ &\underset{\geq 25}{k^2} - \underset{\geq 10}{2k} > 0 \end{aligned}$$

pues $k \geq 5$ entonces es verdadero

Por lo tanto, por principio de inducción corrida, cómo nuestro caso base $p(5)$ verdadero y $p(k)$ verdadero \Rightarrow

$p(k+1)$ verdadero luego $p(n)$ verdadero, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ □

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que:

i) La cantidad de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{n(n-3)}{2}$

Ponele que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va a ser una sucesión, le pongo L por lados (y si). Entonces vamos a tener que nuestra preposicion, $p(n)$ va a estar definida por:

$$p(n) := L_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Para nuestro CASO BASE fijate que vamos a arrancar a contar desde el 3, ya que 3 es el **mínimo** de lados para formar un polígono (un triángulo, Pitágoras Fan Club):

$$p(3) := L_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

Y esto está perfecto! Fijate que si es un triángulo no hay manera de que nos queden diagonales. Ahora, pasando al PASO INDUCTIVO se viene lo jodido. O no. Planteamos:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := L_k = \frac{k(k-3)}{2}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := L_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Acá usamos un truquito que es una propiedad de las sucesiones (?? checkear, no estaba claro en mi cuaderno):

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Entonces nos queda:

$$L_{k+1} = \underset{HI}{L_k} + (k-1) = \frac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \frac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

entonces por induccion blabla... □

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$

$$p(n) := \alpha_n = \pi(n-2)$$

CASO BASE:

$$p(3) := \alpha_3 = \pi(3-2) = 180 \text{ deg}$$

PASO INDUCTIVO:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := \alpha_k = \pi(k-2)$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := \alpha_{k+1} = \pi(k-1)$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \pi$$

$$\alpha_{k+1} = \pi(k-2) + \pi$$

$$\alpha_{k+1} = \pi(k-1)$$

Notemos que se utilizó lo mismo visto en el inciso anterior. □

2.3 Recurrencia

15. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 2 \quad y \quad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n n!$

$$p(n) := a_n = 2^n n!$$

CASO BASE:

$$p(1) := a_1 = 2^1 1! = 2$$

PASO INDUCTIVO:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = 2^k k!$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = 2^{k+1} (k+1)!$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = 2ka_k + 2^{k+1}k!$. Nuestra HI dice que $a_k = 2^k k!$, y reemplazando:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2k a_k + 2^{k+1}k! \\ &= 2k \cdot 2^k k! + 2^{k+1}k! \\ &= 2^k (2k \cdot k! + 2 \cdot k!) \\ &= 2^k (2k!(k+1)) \\ &= 2^k 2k!(k+1) = 2^{k+1} (k+1)k! = 2^{k+1} (k+1)! \end{aligned}$$

Como queríamos probar.

□ ii)