Álgebra I - Ejercicios Resueltos - 2do Cuatrimestre 2021

Santiago García

Esto es una beta con los ejercicios resueltos de Algebra hasta el primer parcial. Puede contener **errores**, así como también aciertos. Lo voy a terminar post 15 de Diciembre cuando me libere con los parciales.

Muchas gracias a Teresa, Nico, Georgi, Vicky, Juli y Sergio por hacer esto posible [etc]

1 Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

1.1 Conjuntos

1. i) Verdadero. ii) Verdadero. iii) Verdadero. iv) Falso. v) Falso.
2. i) Falso pues $3 \notin A$. ii) Verdadero. iii) Falso pues $\{\{3\}\} \subset A$.
iv) Verdadero. v) Verdadero. vi) Verdadero. vii) Verdadero
viii) Falso pues $3 \notin A$. ix) Falso pues $\emptyset \notin A$
x) Verdadero. xi) Falso pues $A \notin A$ xii) Verdadero.
3. i) Como B tiene a los elementos de A uno a uno (recordemos que no importa el orden) entonces $A \subseteq B$
ii) $A \nsubseteq B$, pues $\nexists x \in A$ tal que $x \notin B (i.e../x = 3)$
iii) $A \nsubseteq B$, pues$\sqrt{x^2} < \sqrt{3} \leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$ y como$\sqrt{3} < 3$ $luego \exists x \in A/x \notin B$
iv) $A \nsubseteq B$
4.

$$A = \{1, -2, 7, 3\}, B = \{1, \{3\}, 10\} C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$$

$$i) A \cap (B \triangle C)$$

$$(B \triangle C) = \{1, \{3\}, 10, -2, \{1, 2, 3\}, 3\} \ y \ A = \{1, -2, 7, 3\} \ entonces:$$

$$A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$$

$$ii) (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

$$(A \cap B) = \{1\} \ y \ (A \cap C) = \{-2, 3\}$$

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$$

$$iii) A^c \cap B^c \cap C^c \ \ bueno \ hacelo \ vos.$$

asdasdasd
5. Dados A B C subconjuntos de un conjunto ref V, describir $(A \cap B \cap C)^c$ en terminos de
Intersecciones y complentos:
$((A \cap B) \cap C)^c \quad Por\ asociatividad\ de\ la\ union$
$(A \cap B)^c \cap C^c \quad De\ Morgan$
$A^c \cap B^c \cap C^c \quad Idem$
Uniones y complementos:
$((A \cap B) \cap C)^c \quad Por\ asociatividad\ de\ la\ union$
$(A \cap B)^c \cup C^c \quad De\ Morgan$
$A^c \cup B^c \cup C^c \quad Idem$
6. Hecho en dibujitos que hay que subir (y me da pajulis)
7. i) $(A \cap B^c) \cup ((B \cap C) \cup A^c)$
ii) $(A \triangle C) \cap B^c$
iii) $(A \cap B) \triangle (B \cap C) \cup (A \cap C) \cap B^c$
8. i) $A = 1, \ \ \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \emptyset\}$
ii)$A = \{a, b\}, \ \ \mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$
iii)
9. Probar etc.
Bueno, qué corno hago? En criollo, tenemos que probar que partes de A es un subconjunto de partes de B ***sí sólo sí*** A está contenido en B. Para probar este tipo de implicaciones, tenemos que probar la ida ($\Rightarrow$) y luego la vuelta ($\Leftarrow$)
Recuerdo: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ $o\ tambien$ $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$
Ida ($\Rightarrow$): Asumo que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ quiero ver que $A \subseteq B$ Tomo $x \in A$ quiero ver que $x \in B$. Se que $A \subseteq A$. A, el

conjunto, es un elemento de $\mathcal{P}(A)$ y se escribe $A \in \mathcal{P}(A)$ y como se que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces por transitividad, $A \in \mathcal{P}(B)$. Pero, ¿qué significa que $A \in \mathcal{P}(B)$? Por definición de $\mathcal{P}(B)$, A tiene que ser un subconjunto de B. Y como es un subconjunto, $A \subseteq B$.
Vuelta ($\Leftarrow$): Sabiendo que $A \subseteq B$ q.v.q. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
Tomo $X \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y entonces $X \subseteq A \subseteq B$ y por transitividad, $X \subseteq B$. A la vez, por definici'on, $X \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(B)$, luego $X \subseteq P(B)$, por lo tanto $X \subseteq \underline{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$ que es lo que queriamos probar.
10. Tablas de verdad
11. Tablas de verdad
12. Tablas de verdad (Agregar notas sobre cuantificadores)
13. Tablas de verdad
14. Similar
15. Sean $A = \{1, 2, 3\}B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A, A \times B, (A \cap B) \times (A \cup B)$
$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$
$(A \cap B) \times (A \cup B) = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$
16. Probalo vos.

1.2 Relaciones

17. i. Es relacion? Si, pues todos los elementos que se relacionan de A en B existen en A o B segun especifica la relacion.
ii. No es, ya que $(3, 2) \in R$ pero $2 \notin B$
iii. Si, idem i.
iv. Si, idem i.
18. i) $\{(a, b) \in A \times B \,:\, a \leq b\}$
ii) $\{(a, b) \in A \times B \,:\, a > b\}$
iii) $\{(a, b) \in A \times B, , k \in \mathcal{Z} \,:\, ab = 2k\}$
iv) $\{(a, b) \in A \times B \,:\, a + b > 6\}$
19. Hacer por extension, clasificar.
20. Reflex? No. Sim? Si. As? No se. Trans? Si
21. Sea A ...
i) 4 ii) 1 iii) 5 iv) 6 v) 5 vi) ??? (Revisar, hecho de cuaderno viejo)
22.i) R? Si S? No As? Si Tr? Si
ii) Es reflexiva? $(a, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ a + a = 2a$ es par. Si.
Es simetrica? $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ a + b\, es\, par \Rightarrow (b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b + a$ es par. Si, por conmutatividad de la suma.
Es antisimetrica? No. i.e. (2,4) y (4,2)
Es Transitiva? No. i.e. (1,1) y (2,2)
24. $\bar{\text{a}}$=$\{a, b, f\}$ $\bar{\text{c}}$=$\{e, f\}$ $\bar{\text{d}}$=$\{d\}$
la partición asociada a $\mathcal{R}$: $\{a, b, f\} \cap \{c, e\} \cap \{d\}$
25. Tiene cuatro clases de equivalencia. Cada clase está representada en la partición $\mathcal{R}$ como cada "elemento" de esta. (Adjuntar gráfico)
26. Para probar que una relación es de equivalencia, necesitamos saber si es simultaneamente reflexiva, simétrica y transitiva.
Reflexiva $A\mathcal{R}A \Leftrightarrow A \triangle A \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$
$A \triangle A = \emptyset \Rightarrow \emptyset \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$
Simétrica $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow B\mathcal{R}A$
$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \triangle B \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$
$A\mathcal{R}B \Leftrightarrow B \triangle A \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$ (Esto se puede ver por simetría de la diferencia simétrica[$\triangle$])
Transitiva Se puede demostrar por tabla de verdad
Finalmente, el ejercicio nos pide decidir si la relación es antisimétrica:
Antisimétrica
ii)Encontrar la clase de equivalencia de $A = \{1, 2, 3\}$
27. Similarmente al ejercicio anterior, debemos ver que cumpla las tres condiciones ya nombradas para probar que es una relación de equivalencia.
Reflexiva $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 93x - 93x = 0$

Simétrica $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow y^2 - x^2 = 93y - 93x$
Y multiplicando por -1:
$y\mathcal{R}x \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 93x - 93y \Rightarrow x\mathcal{R}y$
Y por lo tanto es simétrica.
Transitiva $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 93x - 93y$
$y\mathcal{R}z \Leftrightarrow y^2 - z^2 = 93y - 93z$
Sumando ambas ecuaciones:
$x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = 93x - 93y + 93y - 93z$
$\Leftrightarrow x^2 - z^2 = 93x - 93z \Rightarrow x\mathcal{R}z$
Entonces la relación es reflexiva, simétrica y transitiva y por lo tanto podemos concluir que es de equivalencia. Por último, el ejercicio nos pide decidir si es antisimétrica:
Antisimetrica $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$
Esto se puede demostrar como Falso con un simple contraejemplo. Si tomamos 92 y 1 como x e y respectivamente, obtenemos:
$92\,\mathcal{R}\,1 \Leftrightarrow 92^2 - 1^2 = 93(92) - 93$
$\Leftrightarrow 92^2 - 1^2 = 93(92) - 93$
$\Leftrightarrow 92^2 - 1^2 = 93(92 - 1)$
$\Leftrightarrow (92 + 1)(92 - 1) = 93 \cdot 91$
$\Leftrightarrow 93 \cdot 91\ \ = 93 \cdot 91 \Rightarrow 93 = 91$ Absurdo!
Entonces no es antisimétrica.
ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$
28. i) $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow \#X = \#Y$
Entonces, como hay 10 elementos en A, es posible formar 10 clases de equivalencia distintas, cada uno correspondiendo al cardinal indicado.
$\#\overline{\{1\}}, \#\overline{\{1,2\}}, ...\#\overline{\{1,2...10\}}$ (nota: los cardinales están de más, arreglar)
ii)Infinitas clases de equivalencia.
$\#\bar{1}, \#\bar{2}, ...\#\bar{n}$

1.3 Funciones

29. i) No pues $(3, a) \in \mathcal{R} \wedge (3, d) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a = d$ Absurdo.
ii) No pues 5 no se relaciona con nadie.
iii) Si, pues todo los elementos del conjunto de partida se relacionan.
iv) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N}x\mathbb{R} : a = 2b - 3\}$
Si, pues todos los elementos de $\mathbb{N}$ están relacionados con algún elemento de $\mathbb{R}$
Esto se puede ver como: $a = 2b - 3 \Rightarrow \frac{a+3}{2} = b \in \mathbb{R}$
Es un numero real pues $a \in \mathbb{N}$
v)$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}x\mathbb{N} : a = 2b - 3\}$
No, pues no todos los elementos de $\mathbb{R}$ están relacionados con los elementos de $\mathbb{N}$ (Está al revés, se puede ver fácilmente buscando un contraejemplo con la expresión anterior)
vi)$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R}x\mathbb{N} : a + b\, es\, divisible\, por\, 5\}$
Luego, $a + b = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$
30. i) Inyectividad Asumimos que es inyectiva, y probamos por contraejemplo que no lo es:
$f(1) = f(-1) \Rightarrow 1 = -1$ Absurdo! Entonces no es inyectiva.
Sobreyectiva $12x^2 + 5 = y \Rightarrow \sqrt{\frac{y+5}{12}} = x$ con $\frac{y+5}{12} \geqslant 0$
Entonces, restringiendo la imagen(?), es sobreyectiva con $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant}5$
Biyectiva No es biyectiva ya que es sobreyectiva pero no inyectiva.
ii)
31. i) $f(g(n, m)) = \frac{(n(m+1))^2}{2}$
Finalmente nos queda:

$$f \circ g(n, m) = \begin{cases} \frac{(n(m+1))^2}{2} & \text{si } n = 6k \\ 3(n(m+1)) + 1 & \text{si } n \neq 6k \end{cases}$$

Habiendo calculado esto, evaluando:
$f \circ g(2,5) = 72$
$f \circ g(3,2) = 28$
$f \circ g(3,4) = 46$
ii)

$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 7 \\ 2\sqrt{n} - 1 & \text{si } n > 7 \end{cases}$$

con n > 0.
Para el primer caso, $f \circ g(n) \neq 13$ pues $n \leq 7$
Para el segundo caso, habra que encontrar un n tal que $f \circ g(n) = 13 = 2\sqrt{n} - 1 \Leftrightarrow \frac{14}{2} = 7 = \sqrt{n} \Leftrightarrow |n| = 7^2$
Entonces o bien n es $(-7)^2 \notin \mathbb{N}$ o bien n es $7^2 \in \mathbb{N}$
Luego $f \circ g(49) = 13$.
Para 15 lo mismo, solo que el valor será 64.
32. i) $f \circ g(x) = 2(x+3)^2 - 18$
$g \circ f(x) = 2x^2 - 15$
ii) $f \circ g : f(4n)$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} 4n - 2 & \text{si } n = 4k \\ 4n + 1 & \text{si } n \neq 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$g \circ f$:

$$g \circ f(n) = \begin{cases} 4(n - 2) & \text{si } n = 4k \\ 4(n + 1) & \text{si } n \neq 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

iii) Acá todo bien con fog pero no con gof. Fijate:
$f \circ g(n) = (\sqrt{n} + 5, 3\sqrt{n})$
PERO $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ Absurdo!
33. $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n par} \\ n & \text{si n impar} \end{cases} \quad g(n) = 2n$$

$f \circ g = \frac{2n}{n} = n$

$$g \circ f(n) = \begin{cases} \frac{2n}{2} & \text{si n par} \\ 2n & \text{si n impar} \end{cases}$$

Como podemos ver, en el caso impar nos devuelve un numero par, por lo que la distingue de $Id_{\mathbb{N}}$ y cumple la condición indicada. Qué tul?
34. i)fog es inyectiva... *completar*
35. i) Para probar si es una relación de equivalencia, debemos ver las tres condiciones habituales. Además, el ejercicio nos pide ver si es antisimétrica:
Reflexiva Como f es biyectiva y el $Codominio = Im(f)$ y es sobreyectiva:
$\{1, ..., 10\} \subseteq Im(f)$ por ejemplo: $f(1) = 1$
$f\mathcal{R}f \Leftrightarrow \exists n \in \{1, ..., 10\}/f(n) = 1 y f(n) = 1$
Simétrica $f\mathcal{R}g \Rightarrow f\mathcal{R}f$
$\exists n/f(n) = g(n) = 1 \Rightarrow g\mathcal{R}f \Rightarrow g\mathcal{R}f$
Transitiva $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \Rightarrow f\mathcal{R}h$
$\exists n_1/f(n_1) = g(n_1) = 1$
$\exists n_2/f(n_2) = h(n_2) = 2$
Como $f(n_1) = g(n_2) = 1 = g(n_2) = h(n_2)$ entonces $f(n_1) = h(n_2)$ y $f\mathcal{R}h$.
$\therefore$ es una relación de equivalencia.
Por último, nos falta probar la antisimetría:
Antisimetría No. Punto.
ii)
36.

2 Numeros Naturales e Inducción

2.1 Sumatoria y Productoria

1. i)

$$a) \sum_{k=0}^{100} k \quad b) \sum_{k=0}^{10} 2^k \quad c) \sum_{k=0}^{11} (-1)^k k^2 \quad d) \sum_{k=0}^{10} (2k+1)^k \quad e) \sum_{k=0}^{2n+1} 2k+1 \quad f) \sum_{k=0}^{n} kn$$

ii)

$$a) \prod k = 5^{100} k \quad b) \prod_{k=0}^{10} 2^k \quad c) \prod_{k=1}^{n} kn$$

2. i) $2 + 4 + ... + 2(n-5) + 2(n-4)$
ii) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n(n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n)} + \frac{1}{(2n)(2n+1)}$
iii) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} + ... + \frac{2n}{2n} + \frac{2n+1}{2n}$??
iv) $\frac{n}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+1)^2}$
v) copiar despues

3. Calcular.
a) 2n(n+1)+n
b) ...
4.
5. i) El cuadrado es de 7x7, luego 7^2 lo que coincide con:

$$\sum_{i=1}^{7} (2i-1) = 49$$

Entonces, el caso para n cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

ii) Con suma de Gauss:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} n = \frac{2(n(n+1))}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

iii) Con inducción:

$$\text{Caso base (n=1)} \sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 1$$

$$\text{Paso Inductivo} \quad HI: \sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2 \quad QVQ: \sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{k} (2i-1) + 2k + 1 \overset{HI}{=} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

$\square$

6.