Álgebra I - Ejercicios Resueltos - 2do Cuatrimestre 2021

santi

Esto es una beta con los ejercicios resueltos de Algebra hasta el primer parcial. Acordate que esta hecho por alumnos para alumnos asi que puede contener **errores**, así como también errores. Lo voy a terminar post 15 de Diciembre cuando me libere con los parciales.

Muchas gracias a Teresa, Nico, Georgi, Vicky, Juli y Sergio por hacer esto posible y a mis compañeros Tew, Lucho, Nico, Ivo y Marian[etc]

1 Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

1.1 Conjuntos

1. i) Verdadero. ii) Verdadero. iii) Verdadero. iv) Falso. v) Falso.

2. i) Falso pues $3 \notin A$. ii) Verdadero. iii) Falso pues $\{\{3\}\} \subset A$.
iv) Verdadero. v) Verdadero. vi) Verdadero. vii) Verdadero
viii) Falso pues $3 \notin A$. ix) Falso pues $\emptyset \notin A$
x) Verdadero. xi) Falso pues $A \notin A$ xii) Verdadero.

3. i) Como B tiene a los elementos de A uno a uno (recordemos que no importa el orden) entonces $A \subseteq B$
ii) $A \nsubseteq B$, pues $\nexists x \in A$ tal que $x \notin B (i.e../x = 3)$
iii) $A \nsubseteq B$, pues$\sqrt{x^2} < \sqrt{3} \leftrightarrow |x| < \sqrt{3}$ y como$\sqrt{3} < 3$ $luego \exists x \in A/x \notin B$
iv) $A \nsubseteq B$

4.

$$A = \{1, -2, 7, 3\}, B = \{1, \{3\}, 10\} C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$$

$$i) A \cap (B \triangle C)$$

$$(B \triangle C) = \{1, \{3\}, 10, -2, \{1, 2, 3\}, 3\} \; y \; A = \{1, -2, 7, 3\} \; entonces:$$

$$A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 3\}$$

$$ii) (A \cap B) \triangle (A \cap C)$$

$$(A \cap B) = \{1\} \; y \; (A \cap C) = \{-2, 3\}$$

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = \{1, -2, 3\}$$

$$iii) A^c \cap B^c \cap C^c \;\; bueno \; hacelo \; vos.$$

5. Dados A B C subconjuntos de un conjunto ref V, describir $(A \cap B \cap C)^c$ en terminos de
Intersecciones y complentos:
$((A \cap B) \cap C)^c \qquad Por \; asociatividad \; de \; la \; union$
$(A \cap B)^c \cap C^c \qquad De \; Morgan$
$A^c \cap B^c \cap C^c \qquad Idem$
Uniones y complementos:
$((A \cap B) \cap C)^c \qquad Por \; asociatividad \; de \; la \; union$
$(A \cap B)^c \cup C^c \qquad De \; Morgan$
$A^c \cup B^c \cup C^c \qquad Idem$

6. Hecho en dibujitos que hay que subir (y me da pajulis)

7. i) $(A \cap B^c) \cup ((B \cap C) \cup A^c)$
ii) $(A \triangle C) \cap B^c$

iii) $(A \cap B) \triangle (B \cap C) \cup (A \cap C) \cap B^c$
8. i) $A = 1, \quad \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \emptyset\}$
ii)$A = \{a, b\}, \quad \mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$
iii)
9. Probar etc.
Bueno, qué corno hago? En criollo, tenemos que probar que partes de A es un subconjunto de partes de B ***sí sólo sí*** A está contenido en B. Para probar este tipo de implicaciones, tenemos que probar la ida ($\Rightarrow$) y luego la vuelta ($\Leftarrow$)
Recuerdo: $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ *o tambien* $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$
Ida ($\Rightarrow$): Asumo que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ quiero ver que $A \subseteq B$ Tomo $x \in A$ quiero ver que $x \in B$. Se que $A \subseteq A$. A, el conjunto, es un elemento de $\mathcal{P}(A)$ y se escribe $A \in \mathcal{P}(A)$ y como se que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces por transitividad, $A \in \mathcal{P}(B)$. Pero, ¿qué significa que $A \in \mathcal{P}(B)$? Por definición de $\mathcal{P}(B)$, A tiene que ser un subconjunto de B. Y como es un subconjunto, $A \subseteq B$.
Vuelta ($\Leftarrow$): Sabiendo que $A \subseteq B$ q.v.q. $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
Tomo $X \in \mathcal{P}(A)$ entonces $X \subseteq A$ y entonces $X \subseteq A \subseteq B$ y por transitividad, $X \subseteq B$. A la vez, por definici'on, $X \subseteq B \subseteq \mathcal{P}(B)$, luego $X \subseteq P(B)$, por lo tanto $X \subseteq \underline{\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}$ que es lo que queriamos probar.
10. Tablas de verdad
11. Tablas de verdad
12. Tablas de verdad (Agregar notas sobre cuantificadores)
13. Tablas de verdad
14. Similar
15. Sean $A = \{1, 2, 3\} B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A, A \times B, (A \cap B) \times (A \cup B)$
$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
$A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 1), (2, 2), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$
$(A \cap B) \times (A \cup B) = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7)\}$
16. Probalo vos.

1.2 Relaciones

17. i. Es relacion? Si, pues todos los elementos que se relacionan de A en B existen en A o B segun especifica la relacion.
ii. No es, ya que $(3, 2) \in R$ pero $2 \notin B$
iii. Si, idem i.
iv. Si, idem i.
18. i) $\{(a, b) \in A \times B \ : \ a \leq b\}$
ii) $\{(a, b) \in A \times B \ : \ a > b\}$
iii) $\{(a, b) \in A \times B, , k \in \mathcal{Z} \ : \ ab = 2k\}$
iv) $\{(a, b) \in A \times B \ : \ a + b > 6\}$
19. Hacer por extension, clasificar.
20. Reflex? No. Sim? Si. As? No se. Trans? Si
21. Sea A ...
i) 4 ii) 1 iii) 5 iv) 6 v) 5 vi) ??? (Revisar, hecho de cuaderno viejo)
22.i) R? Si S? No As? Si Tr? Si
ii) Es reflexiva? $(a, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ a + a = 2a$ es par. Si.
Es simetrica? $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ a + b \, es \, par \Rightarrow (b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b + a$ es par. Si, por conmutatividad de la suma.

Es antisimetrica? No. i.e. (2,4) y (4,2)
Es Transitiva? No. i.e. (1,1) y (2,2)
24. $\bar{\text{a}}=\{a,b,f\}$ $\bar{\text{c}}=\{e,f\}$ $\bar{\text{d}}=\{d\}$
la partición asociada a $\mathcal{R}$: $\{a,b,f\}\cap\{c,e\}\cap\{d\}$
25. Tiene cuatro clases de equivalencia. Cada clase está representada en la partición $\mathcal{R}$ como cada "elemento" de esta. (Adjuntar gráfico)
26. Para probar que una relación es de equivalencia, necesitamos saber si es simultaneamente reflexiva, simétrica y transitiva.
Reflexiva $A\mathcal{R}A \Leftrightarrow A\triangle A\cap\{1,2,3\}=\emptyset$
$A\triangle A=\emptyset\Rightarrow\emptyset\cap\{1,2,3\}=\emptyset$
Simétrica $A\mathcal{R}B\Leftrightarrow B\mathcal{R}A$
$A\mathcal{R}B\Leftrightarrow A\triangle B\cap\{1,2,3\}=\emptyset$
$A\mathcal{R}B\Leftrightarrow B\triangle A\cap\{1,2,3\}=\emptyset$ (Esto se puede ver por simetría de la diferencia simétrica[$\triangle$])
Transitiva Se puede demostrar por tabla de verdad
Finalmente, el ejercicio nos pide decidir si la relación es antisimétrica:
Antisimétrica
ii)Encontrar la clase de equivalencia de $A=\{1,2,3\}$
27. Similarmente al ejercicio anterior, debemos ver que cumpla las tres condiciones ya nombradas para probar que es una relación de equivalencia.
Reflexiva $x\mathcal{R}x\Leftrightarrow x^2-x^2=93x-93x=0$
Simétrica $x\mathcal{R}y\Rightarrow y\mathcal{R}x$
$y\mathcal{R}x\Leftrightarrow y^2-x^2=93y-93x$
Y multiplicando por -1:
$y\mathcal{R}x\Leftrightarrow x^2-y^2=93x-93y\Rightarrow x\mathcal{R}y$
Y por lo tanto es simétrica.
Transitiva $x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}z\Rightarrow x\mathcal{R}z$
$x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x^2-y^2=93x-93y$
$y\mathcal{R}z\Leftrightarrow y^2-z^2=93y-93z$
Sumando ambas ecuaciones:
$x^2-y^2+y^2-z^2=93x-93y+93y-93z$
$\Leftrightarrow x^2-z^2=93x-93z\Rightarrow x\mathcal{R}z$
Entonces la relación es reflexiva, simétrica y transitiva y por lo tanto podemos concluir que es de equivalencia. Por último, el ejercicio nos pide decidir si es antisimétrica:
Antisimetrica $x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}x\Rightarrow x=y$
Esto se puede demostrar como Falso con un simple contraejemplo. Si tomamos 92 y 1 como x e y respectivamente, obtenemos:
$92\,\mathcal{R}\,1\Leftrightarrow 92^2-1^2=93(92)-93$
$\Leftrightarrow 92^2-1^2=93(92)-93$
$\Leftrightarrow 92^2-1^2=93(92-1)$
$\Leftrightarrow (92+1)(92-1)=93\cdot 91$
$\Leftrightarrow 93\cdot 91\ =93\cdot 91\Rightarrow 93=91$ Absurdo!
Entonces no es antisimétrica.
ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x\in A$
28. i) $A\mathcal{R}B\Leftrightarrow \#X=\#Y$
Entonces, como hay 10 elementos en A, es posible formar 10 clases de equivalencia distintas, cada uno correspondiendo al cardinal indicado.

$\#\overline{\{1\}}, \#\overline{\{1,2\}}, ...\#\overline{\{1,2...10\}}$ (nota: los cardinales están de más, arreglar)
ii)Infinitas clases de equivalencia.
$\#\bar{1}, \#\bar{2}, ...\#\bar{n}$

1.3 Funciones

29. i) No pues $(3,a) \in \mathcal{R} \wedge (3,d) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow a = d$ Absurdo.
ii) No pues 5 no se relaciona con nadie.
iii) Si, pues todo los elementos del conjunto de partida se relacionan.
iv) $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{R}, \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}x\mathbb{R} : a = 2b - 3\}$
Si, pues todos los elementos de $\mathbb{N}$ están relacionados con algún elemento de $\mathbb{R}$
Esto se puede ver como: $a = 2b - 3 \Rightarrow \frac{a+3}{2} = b \in \mathbb{R}$
Es un numero real pues $a \in \mathbb{N}$
v)$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R}x\mathbb{N} : a = 2b - 3\}$
No, pues no todos los elementos de $\mathbb{R}$ están relacionados con los elementos de $\mathbb{N}$ (Está al revés, se puede ver fácilmente buscando un contraejemplo con la expresión anterior)
vi)$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R}x\mathbb{N} : a + b\, es\, divisible\, por\, 5\}$
Luego, $a + b = 5k$ con $k \in \mathbb{Z}$
30. i) Inyectividad Asumimos que es inyectiva, y probamos por contraejemplo que no lo es:
$f(1) = f(-1) \Rightarrow 1 = -1$ Absurdo! Entonces no es inyectiva.
Sobreyectiva $12x^2 + 5 = y \Rightarrow \sqrt{\frac{y+5}{12}} = x$ con $\frac{y+5}{12} \geqslant 0$
Entonces, restringiendo la imagen(?), es sobreyectiva con $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant}5$
Biyectiva No es biyectiva ya que es sobreyectiva pero no inyectiva.
ii)
31. i) $f(g(n,m)) = \frac{(n(m+1))^2}{2}$
Finalmente nos queda:

$$f \circ g(n,m) = \begin{cases} \frac{(n(m+1))^2}{2} & \text{si } n = 6k \\ 3(n(m+1)) + 1 & \text{si } n \neq 6k \end{cases}$$

Habiendo calculado esto, evaluando:
$f \circ g(2,5) = 72$
$f \circ g(3,2) = 28$
$f \circ g(3,4) = 46$
ii)

$$f \circ g(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 7 \\ 2\sqrt{n} - 1 & \text{si } n > 7 \end{cases}$$

con n $>$ 0.
Para el primer caso, $f \circ g(n) \neq 13$ pues $n \leq 7$
Para el segundo caso, habra que encontrar un n tal que $f \circ g(n) = 13 = 2\sqrt{n} - 1 \Leftrightarrow \frac{14}{2} = 7 = \sqrt{n} \Leftrightarrow |n| = 7^2$
Entonces o bien n es $(-7)^2 \notin \mathbb{N}$ o bien n es $7^2 \in \mathbb{N}$
Luego $f \circ g(49) = 13$.
Para 15 lo mismo, solo que el valor será 64.
32. i) $f \circ g(x) = 2(x+3)^2 - 18$
$g \circ f(x) = 2x^2 - 15$

ii) $f \circ g : f(4n)$

$$f \circ g(n) = \begin{cases} 4n-2 & \text{si } n = 4k \\ 4n+1 & \text{si } n \neq 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$g \circ f$:

$$g \circ f(n) = \begin{cases} 4(n-2) & \text{si } n = 4k \\ 4(n+1) & \text{si } n \neq 4k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

iii) Acá todo bien con fog pero no con gof. Fijate:
$f \circ g(n) = (\sqrt{n} + 5, 3\sqrt{n})$
PERO $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Absurdo!
33. $f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si n par} \\ n & \text{si n impar} \end{cases} \qquad g(n) = 2n$$

$f \circ g = \frac{2n}{n} = n$

$$g \circ f(n) = \begin{cases} \frac{2n}{2} & \text{si n par} \\ 2n & \text{si n impar} \end{cases}$$

Como podemos ver, en el caso impar nos devuelve un numero par, por lo que la distingue de $Id_{\mathbb{N}}$ y cumple la condición indicada. Qué tul?
34. i)fog es inyectiva... *completar*
35. i) Para probar si es una relación de equivalencia, debemos ver las tres condiciones habituales. Además, el ejercicio nos pide ver si es antisimétrica:
Reflexiva Como f es biyectiva y el $Codominio = Im(f)$ y es sobreyectiva:
$\{1, ..., 10\} \subseteq Im(f)$ por ejemplo: $f(1) = 1$
$f\mathcal{R}f \Leftrightarrow \exists n \in \{1, ..., 10\} / f(n) = 1 y f(n) = 1$
Simétrica $f\mathcal{R}g \Rightarrow f\mathcal{R}f$
$\exists n / f(n) = g(n) = 1 \Rightarrow g\mathcal{R}f \Rightarrow g\mathcal{R}f$
Transitiva $f\mathcal{R}g \wedge g\mathcal{R}h \Rightarrow f\mathcal{R}h$
$\exists n_1 / f(n_1) = g(n_1) = 1$
$\exists n_2 / f(n_2) = h(n_2) = 2$
Como $f(n_1) = g(n_2) = 1 = g(n_2) = h(n_2)$ entonces $f(n_1) = h(n_2)$ y $f\mathcal{R}h$.
$\therefore$ es una relación de equivalencia.
Por último, nos falta probar la antisimetría:
Antisimetría No. Punto.
ii)
36.

2 Numeros Naturales e Inducción

2.1 Sumatoria y Productoria

1. i)

$$a)\sum_{k=0}^{100} k \quad b)\sum_{k=0}^{10} 2^k \quad c)\sum_{k=0}^{11} (-1)^k k^2 \quad d)\sum_{k=0}^{10} (2k+1)^k \quad e)\sum_{k=0}^{2n+1} 2k+1 \quad f)\sum_{k=0}^{n} kn$$

ii)

$$a) \prod k = 5^{100}k \quad b) \prod_{k=0}^{10} 2^k \quad c) \prod_{k=1}^{n} kn$$

2. i) $2 + 4 + ... + 2(n-5) + 2(n-4)$
ii)$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{n(n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n)} + \frac{1}{(2n)(2n+1)}$
iii) $\frac{n+1}{2} + \frac{n+2}{4} + ... + \frac{2n}{2n} + \frac{2n+1}{2n}$??
iv) $\frac{n}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+1)^2}$
v) copiar despues

3. Calcular.
a) 2n(n+1)+n
b) ...
4.

2.2 Inducción

5. i) El cuadrado es de 7x7, luego 7^2 lo que coincide con:

$$\sum_{i=1}^{7}(2i-1) = 49$$

Entonces, el caso para n cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

ii) Con suma de Gauss:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} n = \frac{2(n(n+1))}{2} - n = n^2 + n - n = n^2$$

iii) Con inducción:

$$\text{Caso base (n=1)} \sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 1$$

$$\text{Paso Inductivo} \quad HI: \sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2 \quad QVQ: \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = (k+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + 2k + 1 \overset{HI}{=} k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

□

6.Completar
7.Completar
8. Caso Base

$$P(1) = a^1 - b^1 = (a-b)\sum_{i=1}^{1} a^{i-1}b^{1-i} = a - b$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}b^{k-i}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)\sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}b^{k+1-i}$$

Reescribimos:

HI:

$$P(k) = \frac{a^k - b^k}{a-b} = \sum_{i=1}^{k} a^{i-1}b^{k-i}$$

$$\begin{aligned}
P(k+1) = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} &= \sum_{i=1}^{k+1} a^{i-1}b^{k+1-i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} a^{i-1}b^{k-i}b + a^{(k+1)-1}b^{k+1-(k+1)} \\
&\overset{HI}{=} b\sum_{i=1}^{k} a^{i-1}b^{k-i} + a^k \\
&= b\frac{a^k - b^k}{a-b} + a^k \\
&= \frac{a^k b - b^{k+1}}{a-b} + \frac{a^k(a-b)}{a-b} = \frac{a^k b - b^{k+1} + a^{k+1} - a^k b}{a-b} \\
&= \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}
\end{aligned} \tag{1}$$

$\square$

Cómo queríamos probar. Para la geométrica se puede plantear [...], luego:

$$\frac{a^n - 1}{a-1} = \sum_{i=1}^{n} a^{i-1}$$

9.i)<u>Caso Base</u>

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} a_{i+1} - a_i = a_2 - a_1$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} a_{i+1} - a_i = a_{k+1} - a_1$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1$$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} a_{i+1} - a_i = a_{k+2} - a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_{i+1} - a_i + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &\overset{HI}{=} a_{k+1} - a_1 + a_{k+2} - a_{k+1} \\ &= a_{k+2} - a_1 \end{aligned} \tag{2}$$

$\square$

Cómo queríamos probar.

ii)Acá tenemos que conjeturar en base a lo que nos dan, ya que no tenemos una formula cerrada. Una vez que la encontremos, probamos por inducción nuestra conjetura.
"Conjeturo":

$$\begin{aligned} n &= 1 & \qquad & \frac{1}{2} \\ n &= 2 & & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \\ n &= 3 & & \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esto me suena de la forma $\frac{n}{n+1}$ Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

<u>Caso Base</u>

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k+1}{k+2}$$

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&\overset{HI}{=} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)}
\end{aligned} \tag{3}
$$

$\square$

Cómo queríamos probar.

iii) Por la sugerencia, observemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{(2i-1)(2i+1)}$$

Entonces, conjeturando solo la sumatoria del lado derecho de la igualdad:

$$
\begin{array}{ll}
n = 1 & \frac{2}{3} \\
n = 2 & \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{4}{5} \\
n = 3 & \frac{4}{5} + \frac{2}{35} = \frac{6}{7}
\end{array}
$$

Luego:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2} \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

Pareciera ser $\frac{n}{2n+1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Pruebo por Inducción:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Caso Base

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{3}$$

Paso Inductivo

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{k+1}{2k+3}$$

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} + \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)} \\
&\overset{HI}{=} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{2k^2+3k+1}{4k^2+8k+3} = \frac{2k^2+3k+1}{2(8k^2+4k+\frac{3}{2}}
\end{aligned} \tag{4}
$$

Factorizando:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k+\frac{1}{2})(k+1)}{2(k+\frac{1}{2})(k+\frac{3}{2})} \\
&= \frac{(k+1)}{2(k+\frac{3}{2})} = \frac{(k+1)}{2k+3}
\end{aligned} \tag{5}
$$

□

Cómo queríamos probar.

10.Completar. Checkear iv-vii.

11. Prestale atención a este ejercicio porque es GOOOOD.

i) Fijate que nos piden probar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de numeros reales, todos **del mismo signo!!** Y que es mayor estricta que -1. Entonces, eso nos deja dos casos posibles:

$$a_n > -1, todos\ mismo\ signo$$

$$[a_n > -1] \begin{cases} (-1, 0) \\ (0, +\infty) \end{cases}$$

Planteemos el caso base y paso inductivo. Defino el predicado:

$$P(n) = \prod_{i=1}^{n} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i$$

<u>Caso Base</u>

$$P(1) = \prod_{i=1}^{1} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{1} a_i \Leftrightarrow 1 + a_1 \geq 1 + a_1$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \prod_{i=1}^{k} (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \boxed{\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i)} \geq \boxed{1+\sum_{i=1}^{k+1} a_i}$$

Acá prestale atención a los colorcitos, porque vamos a "separar" ambas partes de la ecuacion para despues manipularlas en nuestra prueba:

$$\boxed{\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i)} = (1+a_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1+a_i) \overset{HI}{\geq} \boxed{(1+\sum_{i=1}^{k} a_i)(1+a_{k+1})}$$

$$\boxed{1+\sum_{i=1}^{k+1} a_i} = 1 + a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i$$

Entonces tenemos que:

$$\boxed{(1+\sum_{i=1}^{k} a_i)(1+a_{k+1})} = 1 + a_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \boxed{1+\sum_{i=1}^{k+1} a_i} = 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i + a_{k+1}$$

Elminando términos de la inecuación, nos queda:

$$a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$$

y como tenemos una multiplicación de dos elementos, y por enunciado, **todos** los elementos son del **mismo signo**, entonces o bien $a_{k+1} \wedge \sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$ es mayor a cero, o bien $a_k + 1 \wedge \sum_{i=1}^{k} a_i \leq 0$ lo que cumple que $a_{k+1}\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$ ya que multiplicar dos elementos con un mismo signo nos da un número positivo.

Entonces cómo probamos que p(k) Verdadero entonces p(k+1) Verdadero, y p(1) Verdadero (nuestro Caso Base) entonces p(n) es Verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$

$\square$

ii.

12. Probar que:

i. $n! \geq 3^{n-1}, \forall n \geq 5$

Estamos con un típico ejercicio de inducción corrida. Fijate que arranca para todo n mayor o igual a 5, por lo tanto nuestro caso base lo tendremos que probar a partir de ese número. Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = n! \geq 3^{n-1}$$

<u>Caso Base</u>

$$P(5) = 5! \geq 3^4$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = k! \geq 3^{k-1}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = (k+1)! \geq 3^{k}$$

$$\begin{aligned}(k+1)! = k!(k+1) \geq 3^{k-1}(k+1) &\geq 3^{k} \\ k+1 &\geq 3^{k-(k-1)} \\ k &\geq 3-1 \\ k &\geq 2\end{aligned}$$

y como $k \geq 5$ esto es verdadero. Por lo tanto, nuestro paso inductivo es verdadero, y como el caso base es verdadero, entonces $p(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

ii. $3^{n} - 2^{n} > n^{3}, \forall n \geq 4$

Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = 3^{n} - 2^{n} > n^{3}$$

<u>Caso Base</u>

$$P(4) = 3^{4} - 2^{4} > 4^{3}$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = 3^{k} - 2^{k} > k^{3}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = 3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)^{3}$$

Recordemos que: $a > b \Leftrightarrow \boxed{x} + a > \boxed{x} + b$

$$\boxed{3^{k+1} - 2^{k+1}} = 3 \cdot 3^{k} - 2 \cdot 2^{k} = \boxed{2 \cdot 3^{k} - 2^{k}} + \boxed{3^{k} - 2^{k}} \overset{\text{HI}}{>} \boxed{2 \cdot 3^{k} - 2^{k}} + \boxed{k^{3}} \overset{\text{QVQ}}{>} \boxed{(k+1)^{3}}$$

Y como arranca desde $4 \geq 0$ *va a estar acotado por* $2 \cdot 3^{4} - 2^{4} + 4^{3} > 5^{3}$

Tenemos que: $2 \cdot \underbrace{3^{k}}_{\geq 162} - 2^{k} + \underbrace{k^{3}}_{\geq 64} > \underbrace{(k+1)^{3}}_{\geq 125}$

y como $k \geq 4$ esto es verdadero. Por lo tanto, nuestro paso inductivo es verdadero, y como el caso base es verdadero, entonces $p(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$.

. $\square$

iii. $\sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i}}{i!} < 6n - 5, \forall n \geq 3$ Lo pruebo por inducción:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i}}{i!} < 6n - 5, \forall n \geq 3$$

<u>Caso Base</u>

$$P(3) = \sum_{i=1}^{3} \frac{3^i}{i!} = 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} < 6(3) - 5 \Leftrightarrow 12 < 13$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{3^i}{i!} < 6k - 5$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{3^i}{i!} < 6k + 1$$

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{3^i}{i!} = \sum_{i=1}^{k} \frac{3^i}{i!} + \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} < 6k - 5 + \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} < 6k + 1$$

Como $k \geq 3$ entonces cumple la desigualdad por acotacion. Luego, por ppio. de induccion corrido, $p(3)$ verdadero y $p(k)V \Rightarrow P(k+1)V$ entonces $p(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

13. El Caso Base arranca en 5. Probemos que $n \geq 5$ por induccion.

$$P(n) = n^2 + 1 < 2^n$$

<u>Caso Base</u>

$$P(5) = 5^2 + 1 < 2^5 \quad \textit{Verdadero.}$$

<u>Paso Inductivo</u>

$$P(k)V \Rightarrow P(k+1)V$$

Hipótesis Inductiva(HI):

$$P(k) = k^2 + 1 < 2^k$$

Quiero ver que(QVQ):

$$P(k+1) = (k+1)^2 + 1 < 2^{k+1}$$

Como vimos anteriormente que $n^2 + 1 < 2^n$ es equivalente a $2^n > n^2 + 1$, podemos expresar el paso inductivo como:

$$\begin{aligned} 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \overset{HI}{>} 2(k^2+1) &\overset{qvq}{>} (k+1)^2 + 1 \\ 2k^2 + 1 &> (k+1)^2 \\ k^2 &> 2k \\ \underset{\geq 25}{k^2} - \underset{\geq 10}{2k} &> 0 \end{aligned}$$

$$\textit{pues } k \geq 5 \textit{ entonces es verdadero}$$

Por lo tanto, por principio de inducción corrida, cómo nuestro caso base $p(5)$ *verdadero* y $p(k)$ *verdadero* $\Rightarrow$

$p(k+1)$ *verdadero* luego $p(n)$ *verdadero*, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ $\square$

14. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que:

i) La cantidad de diagonales de un poligono de n lados es $\dfrac{n(n-3)}{2}$

Ponele que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ va a ser una sucesión, le pongo L por lados (y si). Entonces vamos a tener que nuestra preposicion, $p(n)$ va a estar definida por:

$$p(n) := L_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Para nuestro CASO BASE fijate que vamos a arrancar a contar desde el 3, ya que 3 es el **mínimo** de lados para formar un polígono (un triángulo, Pitágoras Fan Club):

$$p(3) := L_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$$

Y esto está perfecto! Fijate que si es un triángulo no hay manera de que nos queden diagonales. Ahora, pasando al PASO INDUCTIVO se viene lo jodido. O no. Planteamos:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := L_k = \frac{k(k-3)}{2}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := L_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Acá usamos un truquito que es una propiedad de las sucesiones (?? checkear, no estaba claro en mi cuaderno): $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

Entonces nos queda:

$L_{k+1} = \underset{HI}{L_k} + (k-1) = \dfrac{k(k-3)}{2} + (k-1) = \dfrac{k(k-3) + 2(k-1)}{2} = \dfrac{k^2 - k - 2}{2} = \dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$

entonces por induccion blabla... $\square$

ii) la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $\pi(n-2)$

$$p(n) := \alpha_n = \pi(n-2)$$

CASO BASE:

$$p(3) := \alpha_3 = \pi(3-2) = 180 \deg$$

PASO INDUCTIVO:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := \alpha_k = \pi(k-2)$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := \alpha_{k+1} = \pi(k-1)$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \pi$$
$$\alpha_{k+1} = \pi(k-2) + pi$$
$$\alpha_{k+1} = \pi(k-1)$$

Notemos que se utilizó lo mismo visto en el inciso anterior. $\square$

2.3 Recurrencia

15. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de numeros reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 2 \quad y \quad a_{n+1} = 2na_n + 2^{n+1}n!, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n n!$

$$p(n) := a_n = 2^n n!$$

CASO BASE:

$$p(1) := a_1 = 2^1 1! = 2$$

PASO INDUCTIVO:
Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = 2^k k!$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = 2^k k!$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = 2ka_k + 2^{k+1}k!$. Nuestra HI dice que $a_k = 2^k k!$, y reemplazando:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2k\, a_k + 2^{k+1}k! \\ &= 2k\, 2^k k! + 2^{k+1}k! \\ &= 2^k(2k \cdot k! + 2 \cdot k!) \\ &= 2^k(2k!(k+1)) \\ &= 2^k 2k!(k+1) = 2^{k+1}(k+1)k! = 2^{k+1}(k+1)! \end{aligned}$$

Como queriamos probar. $\square$

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de numeros reales definida recursivamente por:

$$a_1 = 0 \quad y \quad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$

$$p(n) := a_n = 2^n n!$$

CASO BASE:

$$p(1) := a_1 = 2^1 1! = 2$$

PASO INDUCTIVO:
Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = k^2(k-1)$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = (k+1)^2 \cdot k$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = a_k + k(3k+1)$. Nuestra HI dice que $a_k = k^2(k-1)$, y reemplazando:

$$\begin{aligned} a_{k+1} \overset{def}{=} a_k + k(3k+1) \overset{HI}{=} & \, k^2(k-1) + k(3k+1) \\ &= k(k(k-1) + (3k+1)) \\ &= k(k^2+2k+1) \\ &= k(k+1)^2 \end{aligned}$$

Como queriamos probar. $\square$

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1 \quad y \quad a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Conjeturo:

$$\begin{aligned} n &= 0 & a_1 &= 1 \\ n &= 1 & a_2 &= (1+\sqrt{a_1})^2 = (1+\sqrt{1})^2 = 4 \\ n &= 2 & a_3 &= (1+\sqrt{a_2})^2 = (1+\sqrt{4})^2 = 9 \\ n &= 3 & a_4 &= (1+\sqrt{a_3})^2 = (1+\sqrt{9})^2 = 16 \end{aligned}$$

Parece ser que $p(n) := a_n = n^2$. Luego:

$$p(n) := a_n = n^2$$

Caso Base:

$$p(1) := a_1 = 1^2 = 1$$

Paso Inductivo:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = k^2$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = (k+1)^2$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = (1+\sqrt{a_k})^2$. Nuestra HI dice que $a_k = k^2$, entonces:

$$a_{k+1} = (1+\sqrt{a_k})^2 = (1+\sqrt{k^2})^2 = (k+1)^2$$

Como queríamos probar. $\square$

ii) $a_1 = 3 \quad y \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Conjeturo:

$$\begin{aligned}
n &= 0 & a_1 &= 3\\
n &= 1 & a_2 &= 2a_1 + 3^1 = 9\\
n &= 2 & a_3 &= 2a_2 + 3^2 = 27\\
n &= 3 & a_4 &= 2a_3 + 3^3 = 81
\end{aligned}$$

Parece ser que $p(n) := a_n = 3^n$. Luego:

$$p(n) := a_n = 3^n$$

CASO BASE:

$$p(1) := a_1 = 3^1 = 3$$

PASO INDUCTIVO:
Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = 3^k$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = 3^(k+1)$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = 2a_k + 3^k$. Nuestra HI dice que $a_k = 3^k$, entonces:

$$a_{k+1} = 2a_k + 3^k = 2(3^k) + 3^k = 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$$

Como queríamos probar. $\square$

iii) $a_1 = 1 \quad y \quad a_{n+1} = na_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Conjeturo:

$$\begin{aligned}
n &= 0 & a_1 &= 1\\
n &= 1 & a_2 &= 1 \cdot 1 = 1\\
n &= 2 & a_3 &= 2 \cdot 1 = 2\\
n &= 3 & a_4 &= 3 \cdot 2 = 6\\
n &= 3 & a_5 &= 4 \cdot 6 = 24
\end{aligned}$$

Parece ser que $p(n) := a_n = n!$ Luego:

$$p(n) := a_n = n!$$

CASO BASE:

$$p(1) := a_1 = 1! = 1$$

PASO INDUCTIVO:
Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = k!$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = (k+1)!$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = ka_k$. Nuestra HI dice que $a_k = k!$, entonces:

$$a_{k+1} = ka_k = k \cdot k! = k(k+1)k! = k(k+1)! = (k+1)!$$

Como queríamos probar. $\square$

iv) $a_1 = 2 \quad y \quad a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, \forall n \in \mathbb{N}$

Conjeturo:

$$\begin{aligned} n &= 0 & a_1 &= 2 \\ n &= 1 & a_2 &= 2 - \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2} \\ n &= 2 & a_3 &= 2 - \frac{1}{a_3} = \frac{4}{3} \\ n &= 3 & a_4 &= 2 - \frac{1}{a_4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Parece ser que $p(n) := a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Luego:

$$p(n) := a_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Caso Base:

$$p(1) := a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$$

Paso Inductivo:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = 1 + \frac{1}{k}$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1} = \frac{k+2}{k+1}$$

Por *definición* del enunciado sabemos que $a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k}$. Nuestra HI dice que $a_k = 1 + \frac{1}{k}$, entonces:

$$a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k} = 2 - \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{k+2}{k+1}$$

Como queríamos probar. $\square$

17. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesion definida por:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \forall n \in \mathcal{N}$$

Probar que $a_n = n!$

Caso Base:

$$p(1) := a_1 = 1! = 1$$

Paso Inductivo:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = k!$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = (k+1)!$$

Por definicion:

$$a_{k+1} = a_k + k \cdot k! = k! + k \cdot k! = k!(k+1) = (k+1)!$$

Ahora, para calcular $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$ con el Ej. 9i) lo podemos ver como:

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n} i(i-1)! = a_{k+1} - a_1$$
$$a_n = a_{n+1} - a_1$$
$$a_{n+1} = a_n + a_1$$

(Falta actualizar, copiado de cuaderno viejo, reordernar)

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesion definida por:

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^3$ y, aplicando el Ej. 9i) calcular de otra forma $\sum_{i=1}^{n} i^2$ (comparar con el Ej 6).

Caso Base:

$$p(1) := 1^3 = 1$$

Paso Inductivo:

Hipótesis Inductiva(HI):

$$p(k) := a_k = k^3$$

Quiero ver que(QVQ):

$$p(k+1) := a_{k+1} = (k+1)^3$$

Por definicion:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_{k+1} - a_1 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - 1 = k(k^2 + 3k)$$

Comparado con:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Corregir. 18.Hallar una formula para el termino gral de las sucesiones...

19.

20.

21.

22.

23.

24.
25.

3 Combinatoria de Conjuntos, Relaciones y Funciones

3.1 Cantidad de conjuntos y cantidad de relaciones y funciones

1. $15k, k \in Z$ con $A \subseteq V, \#A^c$
$A^c = \{n \in V/n\ 132\}$

$\Rightarrow A^c = \dfrac{132}{15} = 8$
2. $V = \{n \in \mathbb{N}/n \leq 1000\}, \#V = 1000, \#A = 467$

A: multiplos de 3	$\dfrac{1000}{3} = 333$
B: multiplos de 5	$\dfrac{1000}{5} = 200$
AUB: multiplos de 3 y 5	$\dfrac{1000}{15} = 66$

$\Rightarrow \#(A \cup B) = 333 + 200 - 66 = 467$
3. $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$
4. i) $\#V = 150, \#A = 83, \#B = 67\#(A \cup B) = 45$
$\#(A \cup B) = 83 + 67 - 45 = 105$
$\#V - \#(A \cup B) = 150 - 105 = \underset{\#(A \cup B)^c}{45}$
ii) Emprolijar y pasar
5. Arrancando desde buenos aires, tenemos 3 posibilidades (rutas distintas) de ir a Rosario. Y desde Rosario, 4 posibilidades para ir a Santa Fe. Y de ahi, dos para ir a Reconquista. Por lo tanto, tenemos $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 4!$ posibles maneras de hacer el recorrido de Buenos Aires a Reconquista. (Adjuntar dibujito)
6. i)$\underset{8}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_}\ \underset{9}{\_\_} \Rightarrow 8 \cdot 9^3 = 5832$ Ya que serian 10 cifras en cada "bloque", sacando el 0 y 5 del primero(ya que son numeros de 4 cifras), y 5 de los 3 restantes como posibilidades.
ii) Si contienen al digito 7, podemos equivalentemente "sacar" al 7 como hicimos anteriormente con el 5, y nos daría que los que **no** tienen al 7 son 5832. Sin embargo, para sacar los que tienen, debemos restar esta cifra a nuestro conjunto universal o referencial, que en este caso su cardinal es de 9000 ya que los numeros de 4 cifras son aquellos contenidos entre $\{999 < x < 10000/x \in \mathbb{N}\}$ Por lo tanto nos queda que $9000 - 5832 = 3168$ números de 4 cifras que contienen al dígito 7. 7.Como se vio en la teorica, este tipo de ejercicios es muy simple. María tiene 17 libros y 3 cajas, por lo tanto:
$\#cajas^{\#libros} = 3^17$ maneras.
8.i) $A = \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\} + \underset{(\emptyset)}{M_0}, \#M_0 = 1$
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{M_1\}, \{M_1, M_2\}...\}$
$\mathcal{P}(A) = 2^{\#A} = 2^5 = 32$ formas. (Y como $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ contempla cursar cero materias).
ii) $2^5 - \underset{(2^1)}{5} - 1 = 26$
9. Cantidad de relaciones: $\#(A \times A) = \#A \cdot \#A = 2^{n^2}$
Cuantas son reflexivas? n pues las que se repiten seran (n, n)
Cuantas son simetricas? $n_1 \mathcal{R} n_2 \Rightarrow n_2 \mathcal{R} n_1$ y se que $n1, n2 \in A \Rightarrow$ las relaciones simetricas son n^2 porque le sumo

n de las ref que son simetricas. (Corregir,expresar mejor)

10.i) 12^5

ii) 11^5 no tienen el 10

iii) $\underset{(1)}{12^5} - \underset{(2)}{11^5} = 87.781$

(1) Todas las funciones (2) las que $10 \notin Im(f)$

iv)$\underset{3}{\underline{f(1)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(2)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(3)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(4)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(5)\quad}} = 3 \cdot 12^4 = 62.208$

11. i)$\#A = \#B \Rightarrow \#\mathcal{F} = n!$

7! Cantidad de funciones.

ii) $3! \cdot 4!$(adjuntar explicacion)

12. Numeros de 5 cifras usando los digitos del 1 al 5: 5!

Del 1 al 7: $\dfrac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

$\dfrac{7!}{2!} - (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) = 2160$ (adjuntar explicaciones) 13. i) $\#A \leq \#B \Rightarrow m \leq n$ y por la teoria sabemos que cantidad de funciones inyectivas se cuenta: $\dfrac{n!}{(n-m)!} \Rightarrow \dfrac{10!}{3!} = 604.800$

ii) Tales que f(1) es par:

$\underset{3}{\underline{f(1)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(2)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(3)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(4)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(5)\quad}} = 3 \cdot 12^4 = 62.208$

Tales que f(1) y f(2) son pares:

$\underset{3}{\underline{f(1)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(2)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(3)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(4)\quad}}\ \underset{12}{\underline{f(5)\quad}} = 3 \cdot 12^4 = 62.208$

14.$\dfrac{5!}{2!} \cdot 4$

15.

16.

3.2 Número Combinatorio

17. i.$\binom{7}{4} = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = 35$

ii. $\binom{6}{3} = 20$

iii. $\binom{7}{4} - \binom{6}{3} = 35 - 20 = 15$

iv. $2 \cdot \binom{5}{3} = 20$

18.i. $\binom{6}{4} \cdot \binom{14}{6}$

ii. $2 \cdot \binom{10}{5} = 504$

19. $\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m$

20. Determinar cuantas funciones...

Analizando las condiciones:

1. f es inyectiva:
   Considerando que f es inyectiva, y que tenemos 11 elementos en el dominio y 16 en el codominio, llamemos A al dominio y B al codominio, por lo tanto por lo visto en ejercicios anteriores tenemos que:
   $\dfrac{\#B!}{(\#A - \#B)!} = \dfrac{16!}{(16-11)!} = \dfrac{16!}{5!}$
2. Si n es par, f(n) es par:
   Este item lo podemos expresar como $f(2n) = 2n$
3. $f(1) \leqslant f(3) \leqslant f(5) \leqslant f(7)$
   Para que este item se cumpla, debemos tomar el combinatorio de los 11 elementos del dominio, para conseguir los subconjuntos que forman los 4 elementos ordenados de menor a mayor que necesito.

Sintetizando los puntos 2 y 3, tenemos que tomar la cantidad de funciones cuando el dominio es par que devuelvan un numero par, que son cinco ($f(\{2,4,6,7,10\})$). Por este item, tenemos 4 lugares del dominio ocupados, y como son funciones inyectivas, tenemos que la cantidad de funciones totales sin tomar items 2 y 3 son 11!. Ya tomamos un "lugar" con $\binom{11}{4}$, entonces para las funciones pares nos queda $\frac{8!}{3!}$. Y las que restan, $7 \cdot 6$. Finalmente:
$\frac{8!}{3!} \cdot \binom{11}{4} \cdot 7 \cdot 6$

Esto se observa mejor de la siguiente manera:

$f(1)$	$f(2)$	$f(3)$	$f(4)$	$f(5)$	$f(6)$	$f(7)$	$f(8)$	$f(9)$	$f(10)$	$f(11)$
$\leqslant$	par	$\leqslant$	par	$\leqslant$	par	$\leqslant$	par	7	par	6

(corregir, no esta bien explicado/hecho)

4 Numeros Enteros (Parte 1)

4.1 Divisibilidad

1. Decidir cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$
i) $ab \mid c \Rightarrow a \mid c$ y $b \mid c$
Por definición de divisibilidad:
$ab \mid c \Leftrightarrow c = ab \cdot k, k \in \mathbb{Z}$
Y por asociatividad de la multiplicación:
$c = a(b \cdot k) \Leftrightarrow a \mid c$
$c = b(a \cdot k) \Leftrightarrow b \mid c$
como queríamos ver.
ii) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$
Por definición de divisibilidad, $a^2 = 4k, k \in \mathbb{Z}$
Acá podemos cometer un error muy común, que consiste en tomar raíz cuadrada de ambos lados de la definición de divisibilidad. Mirá lo que pasa:
$\sqrt{a^2} = \sqrt{4k} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{k}$ pero esto es absurdo! Acordate que estamos trabajando con numeros enteros y $\sqrt{k} \notin \mathbb{Z}$.
Por lo tanto, vamos a hacer algo distinto.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a^2 = 4k \\
&\Leftrightarrow a^2 = 2 \cdot 2k \\
&\Leftrightarrow 2 \mid a^2
\end{aligned}$$

Pero si $2 \mid a^2$ también vale que $2 \mid a \cdot a$, lo que es lo mismo que decir que $2 \mid a$ ya que por propiedad de divisibilidad sabemos que si $d \mid a \Rightarrow d \mid n \cdot a, n \in \mathbb{Z}$ y nuestra afirmación anterior es válida. (Pues "a" sería "n" en este caso). (esto esta mal)
iii) $2 \mid ab \Rightarrow 2 \mid a$ o $2 \mid b$
Esto se cumple si a o b son ambos pares, o si a es par y b impar, o viceversa. No se cumple cuando a y b son ambos impares, ya que un numero impar por otro numero impar da un numero impar, por lo tanto no seria divisible por 2. Nótese que 2 es un numero primo, más tarde en la materia veremos que los numeros primos tienen una propiedad fundamental que indica que si $p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ o $p \mid b$ con p primo y $a, b \in \mathbb{Z}$
iv) $9 \mid ab \Rightarrow 9 \mid a$ o $9 \mid b$
Esto es Falso, demostrable con un contraejemplo:

$9 \mid 18 \Rightarrow 9 \nmid 3$ ni $9 \nmid 6$

v) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ o $a \mid c$

Falso, demostrable con contraejemplo:

$2 \mid 8 = 5 + 3 \Rightarrow 2 \nmid 5$ ni $2 \nmid 3$

vi) $a \mid c \wedge a \mid b \Rightarrow ab \mid c$

Falso, demostrable con contraejemplo:

$18 \mid 36 \wedge 3 \mid 36 \Rightarrow 18 \cdot 3 \mid 36$

vii) $a \mid b \Rightarrow a \leqslant b$

Pruebo por absurdo:

$a \mid b \Rightarrow a > b$, i.e. si $3 \mid 18 \Rightarrow 3 > 18$ Absurdo! Por lo tanto, $3 \mid 18 \Rightarrow 3 \leqslant 18$ y confirma nuestro enunciado.

No se si esta bien, pero tambien se puede probar que:

$a \mid b \Leftrightarrow b = a \cdot k \geqslant a \Rightarrow b \geqslant a$, $k \in \mathbb{Z}$ no nulo.

viii) Lo mismo que lo anterior, pero con $k \geqslant 1$

ix) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

Como se que $a \mid a$ y $a \mid a \cdot a = a^2$, y se que si $a \mid a \wedge a \mid b \Rightarrow a \mid a + b$ entonces si $a \mid b + a^2$ tambien divide a la resta, por lo tanto $a \mid b + a^2 - a^2 = b$, luego $a \mid b$ como queríamos ver.

x)$a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$

Se que si $a \mid b$ entonces divide a sus multiplos, por lo tanto $a \mid b^n$. Luego, por definición, si $b^n = ak$, se que $b^n = a(a^n \cdot k)$, y por asociatividad $b^n = a^n(ak) \Leftrightarrow a^n \mid b^n$ como queríamos probar.