

Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 3

Początek zapisów: 11 grudnia 2017 r.

Termin realizacji: 26 stycznia 2018 r.

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): 8–12 punktów

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P3.4 i P3.20) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P3.1. 11 punktów W artykule [1] przedstawiono iteracyjną metodę rozwiązywania równań różniczkowych postaci

$$(1) \quad y'(x) = f(x, y) \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

z warunkiem $y(\xi) = \eta$ ($\xi \in \{-1, 1\}$). Równanie różniczkowe (1) może być nieliniowe. Metoda w każdej iteracji konstruuje przybliżone rozwiązanie wielomianowe w postaci Czebyszewa wykorzystując aproksymację średnio-kwadratową na zbiorze dyskretnym. Omów, zaprogramuj i przetestuj tę metodę.

Literatura

[1] C. W. Clenshaw, H. J. Norton, The solution of nonlinear ordinary differential equations in Chebyshev series, The Computer Journal 6 (1963), 88–92.

P3.2. 9 punktów Zrealizować algorytm, który dla danej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$, liczby naturalnej n oraz układu $n + 2$ punktów $D_n := \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\} \subset [a, b]$ wyznacza n -ty wielomian optymalny w_n^* w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze D_n . Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji f i wartości n w wypadku, gdy

$$(i) \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n+1}; \quad (ii) \quad x_k = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Naszkicować wykres funkcji $e_n := f - w_n^*$ w przedziale $[a, b]$.

P3.3. 12 punktów Zrealizować algorytm Remeza, który dla danej funkcji $f \in C[a, b]$, konstruuje ciąg wielomianów zbieżny do wielomianu optymalnego w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na przedziale $[a, b]$. W k -tym kroku algorytmu należy wyznaczyć n -ty wielomian optymalny $w_k^* \in \Pi_n$ w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze dyskretnym $X_k = \{x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}\}$. W pierwszym kroku algorytmu rozważyć zbiór $n + 2$ punktów $X_0 = \{x_j^{(0)}\}_{j=0}^{n+1}$:

$$(i) \quad x_j^{(0)} = a + j \frac{b-a}{n+1}; \quad (ii) \quad x_j^{(0)} = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos \frac{j\pi}{n+1} \quad (j = 0, 1, \dots, n+1).$$

W celu znalezienia zbioru X_{k+1} należy wyznaczyć ekstremum funkcji $f - w_k^*$ w przedziale $[a, b]$, dla którego osiągnięta jest norma maksimum $\|f - w_k^*\|$. Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji f i wartości n . Naszkicować wykresy funkcji $e_k := f - w_k^*$ w przedziale $[a, b]$ dla kolejnych k .

P3.4. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów (Realizacja zadania wymaga umiejętności przekształcania obrazu (bitmapy) o 256 odcieniach szarości na tablicę liczb, i odwrotnie.) Załóżmy, że dany jest obraz o rozdzielczości M_x na M_y punktów. Zadanie polega na przekształceniu go do obrazu o rozdzielczości N_x na N_y punktów. Ponieważ zmiana rozmiaru odbywać się ma w poziomie i w pionie niezależnie od siebie, więc – dla uproszczenia – opis algorytmu ogranicza się jedynie do obrazów o rozmiarze M na 1 punktów. Obraz taki można traktować jako ciąg wartości kolorów w punktach $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_M = M$. Zmiana rozmiaru polega na wyznaczeniu wartości koloru $K(\cdot)$ w punktach $p_i = 1 + (i-1) \frac{M-1}{N-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N$), gdzie N jest nowym rozmiarem obrazu. Można to zrobić na kilka sposobów:

- metodą najbliższego sąsiedztwa, wyznaczając wartości $K(p_i)$ w sposób następujący: $K(p_i) := K(\text{round}(p_i))$ ($i = 1, 2, \dots, N$),
- skonstruować taką funkcję sklejaną S pierwszego stopnia, że $S(t_i) = K(t_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, M$, a następnie przyjąć $K(p_i) := S(p_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$),
- skonstruować taką naturalną funkcję sklejaną Z trzeciego stopnia, że $Z(t_i) = K(t_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, M$, a następnie przyjąć $K(p_i) := Z(p_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$), przy czym wartości wykraczające poza przedział dopuszczalnych wartości dla koloru są zastępowane końcami tego przedziału (np. wartość -2 zostanie zastąpiona przez 0, a 256 przez 255; zakładamy przy tym, że *kolor* jest liczbą całkowitą z przedziału $[0, 255]$).

W wypadku obrazów, których oba wymiary są większe od 1, zmieniamy rozdzielczość najpierw w pionie, a następnie w poziomie (albo najpierw w poziomie, a potem w pionie). Należy

- przetestować trzy podane wyżej metody zmiany rozdzielczości obrazka,
- sprawdzić, czy istotne jest to, w którym kierunku obraz jest najpierw przeskalowywany; można np. generować „obraz różnicy” o kolorach $|K^{(1)}(\cdot, \cdot) - K^{(2)}(\cdot, \cdot)|$, gdzie $K^{(1)}$ jest kolorem otrzymanym pierwszym sposobem, a $K^{(2)}$ – drugim (warto rozważyć też sytuacje, w których jeden wymiar jest zwiększany, a drugi zmniejszany),

- iii) porównać czasy działania trzech podanych wyżej algorytmów,
- iv) (*nieobowiązkowe*) porównać (wizualnie) najlepszy z powyższych algorytmów z profesjonalnym programem obróbki obrazów,
- v) (*nieobowiązkowe*) zastosować najlepszy z algorytmów do zmiany rozmiaru obrazów kolorowych (obraz kolorowy, to w istocie nałożone na siebie trzy obrazy jednobarwne); powtórzyć punkt (iv) dla kolorowych obrazków.

P3.5. 8 punktów Zrealizować następującą metodę obliczania przybliżonej wartości całki

$$I := \int_a^b f(x) dx.$$

Podzielić przedział całkowania na N podprzedziałów o równej długości, a następnie zastosować do obliczenia całki w każdym z podprzedziałów — po uprzedniej liniowej zamianie zmiennej całkowania — dwupunktową kwadraturę Gaussa-Legendre'a

$$Q_1(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

Przybliżenie całki I daje suma przybliżeń całek w podprzedziałach. Powtórzyć czynności dla $N := 2N$ i porównać otrzymane wyniki. Wykonać obliczenia kontrolne m. in. dla funkcji podcałkowych podanych w zadaniu **P3.9**.

P3.6. 10 punktów Dla danego n i danych węzłów x_0, x_1, \dots, x_n wyznaczyć współczynniki kwadratury interpolacyjnej

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

stosując wzór

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_{-1}^1 \frac{\omega(x)}{x - x_k} dx, \quad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Rozważyć (a) węzły równoodległe, (b) węzły będące zerami $(n+1)$ -go wielomianu Czebyszewa, (c) punkty ekstremalne n -tego wielomianu Czebyszewa. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)} \sin \pi(1+x).$$

P3.7. 8 punktów Obliczyć **przybliżoną wartość całki** $\int_a^b f(x) dx$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Zastosować co najmniej dwie różne metody! Wykonać obliczenia kontrolne dla kilku wybranych funkcji podcałkowych.

P3.8. 9 punktów Zrealizować następującą metodę obliczenia przybliżonej wartości całki nieoznaczonej

$$I(x) := \int_a^x f(t) dt \quad \text{dla } a \leq x \leq b,$$

przy założeniu, że znane są tylko wartości funkcji f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

(i) Wyznaczyć naturalną funkcję sklejaną III stopnia s , interpolującą f w punktach t_0, t_1, \dots, t_n .

(ii) Przyjąć $I(x) \approx \int_a^x s(t) dt$.

Oceń dokładność metody na podstawie wykonanych obliczeń kontrolnych.

P3.9. 8 punktów Zadanie polega na realizacji metody Romberga obliczania całki $I := \int_a^b f(x) dx$. Dla danych a, b, f i $\varepsilon > 0$ należy skonstruować K początkowych wierszy tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, gdzie K jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|T_{K0} - T_{K-1,0}| < \varepsilon |T_{K0}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów $\{|I - T_{mk}|/|I|\}$. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla następujących całek:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 0.9} dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx, \quad \int_0^1 \frac{2}{2 + \sin(10\pi x)} dx.$$

P3.10. 10 punktów W zadaniu chodzi o realizację wariantu metody Romberga obliczania całki $\int_a^b f(x) dx$, w którym stosuje się rozbięcie przedziału całkowania na podprzedziały, uwzględniające charakter zmienności funkcji f .

Niech będą dane $h > 0$ i d . W znany sposób konstruujemy dla przedziału $[a, a+h]$ początkowy fragment tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, zawierający nie więcej niż 4 wiersze (tj. $m, k \leq 4$). Jeśli dla pewnego $m \leq 4$ T_{m0} i $T_{m-1,0}$ zgadzają się z dokładnością do d cyfr, to akceptujemy T_{m0} jako wartość całki $\int_a^{a+h} f(x) dx$ i przechodzimy do przedziału $[a+h, a+2h]$ (wartość h można przy tym zwiększyć, jeśli $m = 1$, lub zmniejszyć – w wypadku $m = 4$). Jeśli T_{40} i T_{30} nie pokrywają się z dokładnością do d cyfr, to zmniejszamy krok h i powtarzamy opisane czynności dla skróconego podprzedziału. Przykładowe całki podano w zadaniu **P3.9**.

- P3.11.** 12 punktów Wykorzystując poznane metody numerycznego obliczania całek oznaczonych, zaproponuj i zrealizuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki podwójnej

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całki

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy dx}{x^2 + y^2 + 1} = 0.639510351870311001962693085427323679 \dots$$

Literatura:

- [1] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1*, WNT, 1988, str. 164–166.
 [2] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971, str. 139–140.

- P3.12.** 8 punktów Wyznaczyć rozkład danej macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ na iloczyn czynników trójkątnych. Korzystając z powyższego wyniku rozwiązać układ równań $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Wykonać obliczenia m.in. dla **macierzy Hilberta** $A = [a_{ij}]$, gdzie

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

i **macierzy Pei**

$$A := \begin{bmatrix} d & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & d \end{bmatrix}$$

(Zauważmy, że dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!) Omówić wyniki, podając wartość $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

- P3.13.** 12 punktów Załóżmy, że znany jest rozkład LU macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. W wielu zadaniach praktycznych należy wyznaczyć rozkład LU macierzy A^* danej wzorem $A^* := A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t$, gdzie $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ są danymi wektorami. Patrz np. [1, §6.3]. Zaproponuj szybki algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy A^* . Wykonaj odpowiednie testy numeryczne sprawdzające jego stabilność i skuteczność.

Literatura:

- [1] A. Kielbański, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.

- P3.14.** 10 punktów Macierz $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, odwrotna do danej macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, spełnia równanie $AX = I$, gdzie $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest macierzą jednostkową. Zaproponować algorytm wykorzystujący ten fakt do wyznaczenia macierzy X . Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki.

- P3.15.** 10 punktów Układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ warto niekiedy zmodyfikować, wprowadzając nowe zmienne $y_i = d_i x_i$, gdzie d_i są dodatnie. W symbolice macierzowej mamy tu wzór $\mathbf{y} = D\mathbf{x}$, gdzie D jest macierzą przekątniową, o elementach d_1, d_2, \dots, d_n na przekątnej. Nowym układem równań jest $AD^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Jeśli $d_j = \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}|$, to przekształcenie nazywamy *wyważaniem kolumn*. Napisać program rozwiązujący układ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ metodą eliminacji z pełnym wyborem elementów głównych,

i) bez dodatkowych przekształceń układu,

ii) z zastosowaniem wyważania kolumn,

iii) z zastosowaniem analogicznie określonego wyważania wierszy.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|\mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\mathbf{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

- P3.16.** 12 punktów Niech A będzie macierzą nieosobliwą oraz niech $\{X_k\}$ dla $k = 0, 1, \dots$ będzie ciągiem macierzy spełniających

$$X_{k+1} := X_k + X_k(I - AX_k),$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Udowodnij, że:

- i) przy założeniu $\|I - AX_0\| < 1$, gdzie $\|\cdot\|$ jest normą macierzową indukowaną przez normę wektorową, zachodzi zbieżność $\{X_k\}$ do A^{-1} . Ponadto, dla $E_k := I - AX_k$, pokaż że $E_{k+1} = E_k E_k$;
- ii) powyższa metoda jest lokalnie zbieżna kwadratowo;
- iii) przy założeniu $AX_0 = X_0 A$ zachodzi $AX_k = X_k A$ dla $k \geq 0$.

Na podstawie wybranych macierzy A , sprawdź działanie powyższej metody iteracyjnej Schulza w praktyce. W jaki sposób wybrać X_0 ? Czy metoda jest szybsza niż znane metody bezpośrednie odwracania macierzy?

Literatura:

- [1] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover Publications Inc., New York, 2006.

P3.17. 10 punktów Zrealizować następujący **algorytm Banachiewicza-Choleskiego**. Dla danej macierzy symetrycznej dodatnio określonej $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wyznaczyć macierz trójkątną dolną $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ o dodatnich elementach na głównej przekątnej i taką, że $LL^T = A$. Wykorzystać powyższy wynik do rozwiązania układu równań $Ax = b$. Wykonać obliczenia m.in. dla macierzy Hilberta i dla macierzy Pei (zob. zadanie **P3.12**) stopnia n , przyjmując wartości $n = 3, 6, 9, 12$ (lub zbliżone do nich) oraz różne wartości parametru d (dla $d \approx 1$ macierz Pei jest źle uwarunkowana!); wektor b można np. dobrać tak, by wektor $x^T = [1, 1, \dots, 1]$ był rozwiązaniem układu. Dla każdego zestawu danych podać wartość $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$, gdzie \tilde{x} jest obliczonym rozwiązaniem.

P3.18. 10 punktów Jak wiadomo, rzędem macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Wykorzystując wiadomości podane na wykładzie z algebry liniowej, opracuj efektywny sposób wyznaczania rzędu macierzy. Następnie, wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

P3.19. 10 punktów Za pomocą metod iteracyjnych Jacobiego i Seidela wyznaczyć przybliżone rozwiązanie \tilde{x} układu równań liniowych $Ax = b$ ($A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$), przyjmując $\tilde{x} := x^{(k)}$, gdzie k jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty / \|x^{(k)}\|_\infty < \varepsilon.$$

Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta oraz omówić wyniki, podając wartość $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$, gdzie \tilde{x} jest obliczonym rozwiązaniem, jak również przyjmując $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$, $5 \cdot 10^{-7}$ oraz różne wartości parametrów n i d . Można założyć, że rozwiązaniem dokładnym jest wektor $e := [1, 1, \dots, 1]^T$ lub, inaczej mówiąc, że $b := Ae$.

P3.20. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 11 punktów Porównać na wybranych przykładach cztery warianty metody eliminacji rozwiązywania układów równań liniowych – pod względem dokładności wyników:

- i) bez wyboru elementów głównych,
- ii) z pełnym wyborem elementów głównych,
- iii) z wyborem elementów głównych w kolumnach,
- iv) z wyborem elementów głównych w wierszach.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|b - A\tilde{x}\|_\infty$, gdzie \tilde{x} jest obliczonym rozwiązaniem.