Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 1

Początek zapisów: **9 października 2017 r.**

Termin realizacji: **12 listopada 2017 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***8–12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P1.15, P1.21) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P1.1. 10 punktów Ciąg $x_k := 2^k \sin \dfrac{\pi}{2^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny do π. Wykazać, że ciąg ten spełnia każdy z następujących trzech związków rekurencyjnych:

(1) $$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ x_1 = 2);$$

(2) $$x_{k+1} = \frac{2x_k}{\sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ x_1 = 2);$$

(3) $$x_{k+1} = x_k \sqrt{\frac{2x_k}{x_k + x_{k-1}}} \qquad (k = 2, 3, \ldots;\ x_1 = 2,\ x_2 = 2\sqrt{2}).$$

Stosując oddzielnie wzory (1)–(3) obliczać – z pojedynczą, a następnie z podwójną precyzją – kolejne wyrazy ciągu $\{x_k\}$ do chwili, gdy dwa kolejne wyrazy mają 5 identycznych początkowych cyfr. Powtórzyć obliczenia żądając stabilizacji 8 cyfr. Wyciągnąć wnioski.

P1.2. 10 punktów Następujący *algorytm sumowania z poprawkami* pozwala obliczyć z dużą dokładnością sumę $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$, w standardowej arytmetyce *fl*:

```
s := x_1;    c := 0;
for i from 2 to n do
     y := c + x_i;
     t := s + y;
     c := (s − t) + y;
     s := t;
end
```

Dowodzi się, że $fl(s) = \sum_{i=1}^{n}(1 + \xi_i)x_i$, gdzie $|\xi_i| \leqslant 2 \cdot 2^{-t} + O(n2^{-2t})$.
Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{10000} k^{-2}$$

stosując

a) algorytm sumowania składników w naturalnej oraz odwrotnej kolejności (i) z pojedynczą precyzją, następnie (ii) z podwójną precyzją, a także

b) algorytm sumowania z poprawkami, w arytmetyce z pojedynczą precyzją.

Porównaj wyniki. Podaj wnioski.

P1.3. 10 punktów Stosując strategię *dziel i zwyciężaj* wartość sumy $\sum_{k=1}^{8} a_k$ można wyznaczyć wykonując obliczenia zgodnie z następującym diagramem:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[dr] & & a_2 \arrow[dl] & & a_3 \arrow[dr] & & a_4 \arrow[dl] & & a_5 \arrow[dr] & & a_6 \arrow[dl] & & a_7 \arrow[dr] & & a_8 \arrow[dl] \\
& s_{12} \arrow[drr] & & & & s_{34} \arrow[dll] & & & & s_{56} \arrow[drr] & & & & s_{78} \arrow[dll] & \\
& & & s_{14} \arrow[drrrr] & & & & & & & & s_{58} \arrow[dllll] & & & \\
& & & & & & & s_{18} & & & & & & &
\end{tikzcd}$$

gdzie $s_{ij} := a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$. Zaproponuj podobny sposób wyznaczania wartości wyrażenia $\sum_{k=1}^{n} a_k$, gdzie $n := 2^m$ dla pewnego $m \in \mathbb{N}$ i porównaj go pod względem jakości numerycznej z tradycyjną metodą sumowania. Przeprowadź eksperymenty wykonując obliczenia z pojedynczą i podwójną precyzją dla odpowiednio dobranych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Czy inne uporządkowanie elementów a_k coś zmienia? Co możemy zaobserwować dla dużych wartości n? Jak to wytłumaczyć?

P1.4. 8 punktów Niech $x := 1 + \pi/10^6$. Oblicz x^n dla $n = k \times 10^c$ ($k = 1, 2, \ldots, 9$; $c = 5, 6$), stosując arytmetyki z pojedynczą i podwójną precyzją; oblicz błąd względny ρ_n wyniku obliczonego w arytmetyce z pojedynczą precyzją w odniesieniu do wyniku obliczonego w arytmetyce z podwójną precyzją. (Jaka powinna być, w przybliżeniu, wartość x^n dla $n = 10^6$?) Dla podanych wyżej wartości n wydrukuj: n, x^n, ρ_n, $\rho_n/(n \times \varepsilon)$, gdzie ε jest błędem reprezentacji maszynowej.

P1.5. 11 punktów Wartość skończonego *ułamka łańcuchowego*

$$C_n := b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ldots + \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

można obliczyć metodą *„schodami w górę”*, używając wzorów

$$\begin{aligned}
U_n &= b_n, \\
U_k &= \frac{a_{k+1}}{U_{k+1}} + b_k \qquad (k = n-1, n-2, \ldots, 0), \\
C_n &= U_0.
\end{aligned}$$

Metoda *„schodami w dół”* jest następująca: obliczamy pomocnicze wielkości P_k i Q_k wg wzorów

$$\begin{aligned}
&P_{-1} = 1, \quad P_0 = b_0, \qquad P_k = b_k P_{k-1} + a_k P_{k-2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \\
&Q_{-1} = 0, \quad Q_0 = 1, \qquad Q_k = b_k Q_{k-1} + a_k Q_{k-2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Wówczas $C_n = P_n/Q_n$.

a) Porównaj te metody pod względem kosztu realizacji i własności numerycznych.

b) Wykonaj obliczenia dla następujących danych:
   i. $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 9,\ a_4 = 25,\ a_5 = 49, \ldots,\ b_0 = 0,\ b_1 = 1,\ b_k = 2 \quad (k \geqslant 2)$; sprawdź, czy dla dostatecznie dużego n jest $C_n \approx \pi/4$;
   ii. $b_0 = 2,\ a_k = b_k = k + 1 \quad (k \geqslant 1)$; sprawdź, czy dla dostatecznie dużego n jest $C_n \approx e$.

Literatura

[1] P. Van der Cruyssen, *A continued fraction algorithm*, Numerische Mathematik 37 (1981), 149–156.

P1.6. 10 punktów Napisz podprogram obliczający wartość $\ln x$ wg następującej metody. Jeśli $x = 1$, to sprawa jest oczywista. W przeciwnym wypadku należy wyznaczyć takie $n \in \mathbb{Z}$ i $r \in [\frac{1}{2}, 1)$, że $x = r \times 2^n$. Następnie połóż $u := (r - \sqrt{2}/2)/(r + \sqrt{2}/2)$ i oblicz przybliżoną wartość $\ln \dfrac{1+u}{1-u}$ ze wzoru

$$\ln \frac{1+u}{1-u} \approx u \cdot \frac{20790 - 21545.27u^2 + 4223.9187u^4}{10395 - 14237.635u^2 + 4778.8377u^4 - 230.41913u^6}.$$

Wreszcie, przyjmij, że $\ln x \approx \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \dfrac{1+u}{1-u}$. Porównaj wartości obliczone w ten sposób z podawanymi przez podprogram biblioteczny (funkcję standardową) dla np. 100 wartości argumentu. Jaki jest największy błąd względny? Skomentuj wyniki.

P1.7. 8 punktów Obliczać — z pojedynczą, a następnie z podwójną precyzją — kolejne wyrazy ciągów

$$\textbf{(a)} \quad s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!^{-2}, \qquad \textbf{(b)} \quad t_n := \sum_{k=0}^{n} k!^{-2}$$

do chwili, gdy dwa kolejne wyrazy są równe w wybranej arytmetyce maszynowej. Objaśnić wyniki. (Wybierz odpowiedni sposób generowania składników sum!)

P1.8. 9 punktów Funkcja cosinus ma następujące rozwinięcie w szereg potęgowy, zbieżne dla każdej wartości x:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Przybliżoną wartość $\cos x$ można otrzymać jako wartość wielomianu

$$c_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

a) Wykonaj obliczenia w arytmetyce z pojedynczą precyzją dla $n = 0, 1, 2, \ldots, 12$ oraz dla wybranych wartości x z przedziału $[0, 10]$.
b) Sporządź wykresy wielomianów $c_2, c_4, \ldots, c_{24}$ w tym przedziale.
c) Skomentuj wyniki.

P1.9. 10 punktów *Stałą Eulera* $\gamma = 0.577215664901532286\ldots$ definujemy jako granicę $\gamma := \lim_{n\to\infty} \gamma_n$, gdzie $\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$. Zakładając, że dla dostatecznie dużych wartości n jest $\gamma_n - \gamma \approx cn^{-d}$, gdzie c i $d > 0$ są pewnymi stałymi, spróbuj przy pomocy komputera wyznaczyć doświadczalnie wartości tych stałych.

P1.10. 10 punktów Rozważmy iteracyjny algorytm Molera-Morrisona obliczania wartości $\sqrt{a^2 + b^2}$,

```
p := max (|a|, |b|) ;
q := min (|a|, |b|) ;
while (wartość q jest znacząca) do
      r := (q/p)^2 ;
      s := r/(4 + r);
      p := p + 2 * s * p;
      q := s * q;
end
return p;
```

Przetestuj powyższy algorytm dla kilku wybranych par (a, b), m.in. dla: $(3, 4)$, $(-5, 12)$ i $(7, -24)$. Jakie zalety ma podany algorytm w porównaniu z metodą bezpośrednią (wykorzystującą funkcję biblioteczną sqrt)? Ile iteracji potrzeba, aby w praktyce uzyskać zadowalające rezultaty?
Wykorzystując powyższy algorytm, zaproponuj metodę obliczania normy euklidesowej dowolnego wektora $\mathbf{x} := \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, tzn. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Literatura

[1] C. Moler, D. Morrison, *Replacing Square Roots by Pythagorean Sums*, IBM J. Res. Develop. 27 (1983), 577–581.

P1.11. 11 punktów Niech $\{s_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do granicy s. *Ciąg* Δ^2 *Aitkena*

$$t_n = \frac{s_n s_{n+2} - s_{n+1}^2}{s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

jest w wielu wypadkach zbieżny do s szybciej niż $\{s_n\}$, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n - s}{s_n - s} = 0.$$

a) Oblicz 20 początkowych wyrazów ciągów $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ oraz $\{e_n := s_n - s\}$ i $\{d_n := t_n - s\}$ w wypadku

i. $s_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j (2j+1)^{-1}$, $s = \pi/4 \approx 0.7853981634$;

ii. $s_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-3/2}$, $s \approx 2.612375348685488$.

Czy mamy do czynienia z istotnym przyspieszeniem zbieżności? Powtórz doświadczenie dla innych danych.

b) Zauważ, że zbieżność ciągu $\{t_n\}$ można przyspieszyć w analogiczny sposób, definiując ciąg $\{u_n\}$ wzorem

$$u_n = \frac{t_n t_{n+2} - t_{n+1}^2}{t_{n+2} - 2t_{n+1} + t_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Korzystając z tej obserwacji wykonaj kilka doświadczeń obliczeniowych, m. in. dla danych z punktu a).

c) Uogólniając metodę, zaproponuj sposób ***przyspieszenia ciągu*** $\{u_n\}$. Sprawdź eksperymentalnie jego skuteczność.

P1.12. 12 punktów Wiadomo, że suma szeregu

$$S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2 + 1} \tag{4}$$

wynosi $0.36398547250893341852488170816398\ldots$ Spróbuj wyznaczyć wartość tej liczby z dokładnością 10 i 16 cyfr za pomocą sum częściowych szeregu (4). Następnie zauważ, że

$$\frac{\pi^2}{12} - S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k^2+1)}, \qquad S_2 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{7\pi^4}{720} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4(k^2+1)}$$

i wykorzystaj te związki, aby przyspieszyć obliczenia. Postępując podobnie, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości szeregu

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^n + 1} \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots).$$

P1.13. 9 punktów Napisz podprogram obliczający dwa pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ o rzeczywistych współczynnikach a, b i c, jak również wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Użyj wzorów redukujących błędy zaokrągleń. Sprawdź działanie podprogramu m. in. dla

$$\begin{aligned}(a, b, c) \quad = \quad & (0, 1, 0),\ (0, 0, 1),\ (0, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (2, 10, 1),\ (1, -4, 3.99999),\\ & (1, -8.01, 16.004),\ (2 \times 10^{17}, 10^{18}, 10^{17}),\ (10^{-17}, -10^{17}, 10^{17}).\end{aligned}$$

P1.14. 12 punktów Zapoznaj się z artykułem [1]. Opisz i zrealizuj zaproponowane tam metody wykonywania działań arytmetycznych oraz pierwiastkowania z dużą dokładnością. Zbadaj eksperymentalnie jak sprawdzają się one w praktyce. Następnie opracuj algorytm znajdowania pierwiastków równania kwadratowego z dużą precyzją. *Sztuczka* z wzorami Viéte'a nie wystarczy, zadbaj też o odpowiednie obliczanie pierwiastka wyróżnika rozpatrywanego równania.

Literatura

[1] T. J. Dekker, *A floating-point technique for extending the available precision*, Numerische Mathematik 18 (1971), 224–242.

P1.15. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 11 punktów Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji sinus w **dziedzinie liczb zespolonych** z dokładnością bliską dokładności maszynowej.

P1.16. 10 punktów Następujące ***warianty metody Newtona***:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{2f(x_n)}{f'(x_n) + f'(x^*_{n+1})} \qquad (n = 0, 1, \ldots); \tag{5}$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'\left(\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x^*_{n+1}\right)} \qquad (n = 0, 1, \ldots); \tag{6}$$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{2}\left(\frac{1}{f'(x_n)} + \frac{1}{f'(x^*_{n+1})}\right) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{7}$$

gdzie

$$x^*_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

są przy pewnych założeniach zbieżne sześciennie do pojedynczego zera α funkcji f. Porównać liczby iteracji oraz obliczeń wartości funkcji f potrzebnych do wyznaczenia dokładnych 20 cyfr dziesiętnych α – przy użyciu metod (5)–(7) oraz klasycznej metody Newtona. W każdym wypadku wyznaczyć wartość ***numerycznego wykładnika zbieżności metody*** wg wzoru

$$p \approx \frac{\ln|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)|}{\ln|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)|} \qquad (n\text{– dostatecznie duże}).$$

Sugerowane obliczenia przykładowe dla:

$$\begin{array}{lll} (a) & f(x) = x^3+4x^2-10, & \alpha = 1.3652300134144\ldots; \\ (b) & f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1, & \alpha = 1.4044916482162\ldots; \\ (c) & f(x) = \exp(x^2+7x-30) - 1, & \alpha = 3. \end{array}$$

P1.17. 9 punktów Rozważmy zadanie wyznaczania miejsca zerowego funkcji nieliniowej w zadanym przedziale $[a,b]$, przy założeniu, że $ab > 0$. Metoda bisekcji konstruuje kolejne podprzedziały obliczając nowy początek lub koniec podprzedziału jako średnią arytmetyczną a_{k-1} i b_{k-1}, gdzie $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ jest podprzedziałem wyznaczonym w poprzedniej iteracji. Rozważmy podejście, które różni się od metody bisekcji tym, że zamiast średniej arytmetycznej wykorzystuje średnią geometryczną, tzn. początkiem lub końcem nowego podprzedziału jest $\operatorname{sgn}(a)\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}}$. Porównaj obie metody dla $f(x) = (x/2)^2 - \sin x$ w przedziale $[1.8, 2]$, oraz dla kilku innych wybranych przykładów.

P1.18. 11 punktów Wykorzystaj sumę częściową rozwinięcia w szereg Taylora,

$$f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2}f''(x_n) = 0, \qquad h = x - x_n,$$

dla równania $f(x_n+h) = 0$, aby wyprowadzić metodę iteracyjną Eulera,

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\frac{2}{1+\sqrt{1-2t(x_n)}},$$

gdzie

$$u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}, \qquad t(x) = u(x)\frac{f''(x)}{f'(x)},$$

która służy do rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$. Jakie założenia musi spełniać funkcja f? Przy dodatkowych założeniach, wykorzystaj odpowiednie przybliżenie, aby otrzymać następującą metodę iteracyjną:

$$x_{n+1} = x_n - u(x_n)\left(1 + \frac{1}{2}t(x_n)\right).$$

Przetestuj obie metody dla kilku wybranych nieliniowych funkcji f. Szczegóły w [1, §6.3.4].

Literatura:

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical methods in scientific computing*, volume I, SIAM, 2008.

P1.19. 12 punktów Rozważmy metodę iteracyjną Halleya,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{f''(x_k)}{2f'(x_k)}f(x_k)}, \tag{8}$$

oraz metodę iteracyjną quasi-Halleya,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \dfrac{f'(x_k)-f'(x_{k-1})}{2(x_k-x_{k-1})f'(x_k)}f(x_k)}. \tag{9}$$

Obie metody służą do rozwiązywania równań nieliniowych.

a) Pokaż w jaki sposób wykorzystać metodę Newtona do wyprowadzenia wzoru (8).

b) Jaki jest rząd zbieżności metody Halleya?

c) Pokaż w jaki sposób wykorzystać wzór (8) do wyprowadzenia wzoru (9).

d) Jaki jest rząd zbieżności metody quasi-Halleya?

Wybierz kilka przykładów i porównaj obie metody w praktyce.

Literatura:

[1] A. Ben-Israel, *Newton's Method with Modified Functions*, Contemporary Mathematics 204 (1997), 39–50.

P1.20. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla naturalnego $n \geqslant 2$ rozważyć równanie

$$\frac{x + x^{-1}}{x^n + x^{-n}} = \frac{1}{n}.$$

Równanie to można zapisać w równoważnej postaci $p_n(x) = 0$, gdzie p_n jest pewnym wielomianem. Można wykazać, że ma ono dokładnie dwa pierwiastki dodatnie,

$$\alpha_n \in (0, 1), \qquad \beta_n \in (1, 3).$$

Ponadto ciąg $\{\beta_n\}_{n=2}^{\infty}$ jest monotonicznie malejący, tj.

$$\beta_2 > \beta_3 > \ldots > \beta_n > \beta_{n+1} > \ldots$$

a) Metodą bisekcji wyznaczyć β_n $(n = 2, 3, \ldots, 20)$ z dokładnością 6 lub więcej cyfr dziesiętnych. Użyć $[1, 3]$ jako przedziału początkowego dla β_2 oraz $[1, \beta_n]$ – dla β_{n+1} $(n \geqslant 2)$. Dla każdego n zapisać liczbę wykonanych iteracji.

b) Stosując metodę Newtona do równania $p_n(x) = 0$ wyznaczyć β_n $(n = 2, 3, \ldots, 20)$ z dokładnością 6 cyfr dziesiętnych. Użyć 3 jako wartości początkowej dla β_2 oraz β_n – dla β_{n+1} $(n \geqslant 2)$. Dla każdego n zapisać liczbę wykonanych iteracji.

P1.21. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów}}$ Ważnym z punktu widzenia zastosowań jest zadanie obliczania wszystkich pierwiastków wielomianu $p_n \in \Pi_n$ o współczynnikach rzeczywistych, czyli takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dla których zachodzi

$$p_n(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n;\ a_n \neq 0).$$

Przybliżone wartości pierwiastków $z_1, z_2, \ldots, z_n$ można wyznaczyć stosując np. *iteracyjną metodę Bairstowa*, której zwięzły opis został podany m.in. w [1, str. 107], [2, str. 112], [3, str. 384] i [4, str. 293]. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę.

Literatura:

[1] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.

[3] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.

[4] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.