Programowanie Funkcyjne 2018

Lista zadań nr 8: Wstęp do programowania w Haskellu

Na zajęcia 13 grudnia 2018

Rozbudowana składnia wyrażeń listowych w Haskellu pozwala bardzo zwięźle i czytelnie zapisywać nawet skomplikowane funkcje przetwarzające listy. Poniższe zadania zawierają wiele funkcji, które zaprogramowałeś już w Ocamlu. Staraj się nie sugerować rozwiązaniem Ocamlowym, tylko przemyśl, jakie *nowe* środki wyrazu oferuje Haskell.

Zadanie 1 (2 pkt). Zaprogramuj funkcję

```
(><) :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
```

wyznaczającą produkt dwóch list w porządku przekątniowym Cantora, tj.

$$[x_1, x_2, x_3, \ldots] \texttt{ >< } [y_1, y_2, y_3, \ldots] \;=\; [(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_1,y_3),(x_2,y_2),(x_3,y_1),\ldots]$$

Zauważ, że listy mogą być skończone, bądź nie, np. możemy napisać

```
pairs :: (Integer,Integer)
pairs = [0..] >< [0..]
```

Zadanie 2 (2 pkt). Napisz wyrażenie, którego wartością jest taka funkcja typu `[Integer] -> [Integer]` (nazwijmy ją f), że $f\,[n_0, n_1, n_2 \ldots]$ jest listą tych spośród liczb $n_1, n_2, \ldots$, które nie dzielą się przez n_0. Jeśli $l =$ `[2..]`, to mamy

$$\begin{aligned} l &= [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,\ldots] \\ f(l) &= [3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35,37,39,41,\ldots] \\ f(f(l)) &= [5,7,11,13,17,19,23,25,29,31,35,37,41,43,47,49,53,55,59,61,\ldots] \\ f(f(f(l))) &= [7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,49,53,59,61,67,71,73,77,\ldots] \end{aligned}$$

itd. Zauważ, że głowy tak obliczonych list tworzą listę liczb pierwszych. Wykorzystaj ten pomysł do zdefiniowania listy

```
primes :: [Integer]
```

zawierającej wszystkie liczby pierwsze w kolejności rosnącej. Przydadzą się przy tym standardowe funkcje

```
head :: [a] -> a
map :: (a -> b) -> ([a] -> [b])
iterate :: (a -> a) -> a -> [a]
iterate f x = x : iterate f (f x)
```

Zauważmy, że powyższy algorytm jest bardzo bliski idei sita Eratostenesa. Musieliśmy jedynie zastąpić nieskończoność aktualną, występującą w oryginalnym sformułowaniu Eratostenesa, nieskończonością potencjalną. Robi to za nas Haskell za pomocą leniwego wartościowania.

Zadanie 3 (2 pkt). Zauważmy, że liczba p jest pierwsza, jeśli nie dzieli się przez żadną taką liczbę pierwszą q, że $q^2 \leq p$ (np. żeby sprawdzić, że liczba 13 jest pierwsza, wystarczy spróbować podzielić ją przez 2 i 3). Zatem listę liczb pierwszych można zdefiniować rekurencyjnie:

$$\texttt{primes'} \;=\; [\,p \mid p \in [2..], \forall q \in \texttt{primes'}.(q^2 \leq p \Rightarrow q \nmid p)\,]$$

Niestety rekursja w powyższej zależności nie jest dobrze ufundowana — najmniejsza liczba pierwsza, tj. 2, powinna być jawnie podana:

$$\texttt{primes'} \;=\; 2 : [\,p \mid p \in [3..], \forall q \in \texttt{primes'}.(q^2 \leq p \Rightarrow q \nmid p)\,]$$

Wykorzystaj powyższy pomysł do zdefiniowania listy liczb pierwszych

```
primes' :: [Integer]
```

Przydadzą się przy tym funkcje biblioteczne

```
all :: (a -> Bool) -> [a] -> Bool
all p = foldr ((&&) . p) True

takeWhile :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
takeWhile p = foldr (\ x xs -> if p x then x:xs else []) []
```

(Pierwsza z nich ma w Haskellu nieco ogólniejszy typ, co w naszym przypadku nie ma znaczenia.)

Zadanie 4 (2 pkt). Definicje bardzo wielu ciągów można przedstawić w postaci zależności rekurencyjnej. Jeśli np. `fib :: [Integer]` jest ciągiem Fibonacciego, to mamy:

$$\begin{array}{rl}
\texttt{fib} = & [1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ \ldots] \\
& \ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ +\ \ + \\
\texttt{tail fib} = & [1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ \ldots] \\
& \ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \|\ \ \| \\
\texttt{fib} = 1:1: & [2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ \ldots]
\end{array}$$

Wykorzystaj standardową funkcję

```
zipWith :: (a -> b -> c) -> [a] -> [b] -> [c]
zipWith (+) (x:xs) (y:ys) = x+y : zipWith (+) xs ys
zipWith _ _ _ = []
```

oraz powyższą zależność rekurencyjną do zdefiniowania ciągu `fib`.

Zadanie 5 (2 pkt). Zaprogramuj w Haskellu funkcje

```
iperm, sperm :: [a] -> [[a]]
```

wyznaczające listy wszystkich permutacji podanej listy. Pierwsza z nich generuje permutacje poprzez wstawianie, druga poprzez wybieranie.

Zadanie 6 (1 pkt). Podlistą listy $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ jest lista $[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}]$, gdzie $0 \leq k \leq n$ oraz $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Lista n-elementowa posiada 2^n podlist. Zaprogramuj w Haskellu funkcję

```
sublist :: [a] -> [[a]]
```

wyznaczającą listę wszystkich podlist podanej listy.

Zadanie 7 (1 pkt). Zaprogramuj w Haskellu funkcję

```
qsortBy :: (a -> a -> Bool) -> [a] -> [a]
```

sortującą podaną listę według podanej relacji porównania i wykorzystującą algorytm Quicksort. Przyjmij przy tym, że elementem rozdzielającym elementy listy na małe i duże jest głowa podanej listy. Użyj wyrażeń listowych do opisania list elementów małych i dużych.

Zadanie 8 (3 pkt). Zbiory elementów uporządkowanego typu reprezentujemy często za pomocą drzew binarnych:

```
data Tree a = Node (Tree a) a (Tree a) | Leaf
```

Możemy w ten sposób reprezentować jedynie zbiory skończone. Aby rodzina reprezentowalnych podzbiorów była algebrą Boole'a możemy do zbiorów skończonych dodać koskończone, tj. takie, których dopełnienie jest skończone:

```
data Set a = Fin (Tree a) | Cofin (Tree a)
```

Zaprogramuj następujące operacje:

```
setFromList :: Ord a => [a] -> Set a
setEmpty, setFull :: Ord a => Set a
setUnion, setIntersection :: Ord a => Set a -> Set a -> Set a
setComplement :: Ord a => Set a -> Set a
setMember :: Ord a => a -> Set a -> Bool
```

Funkcja `setFromlist` tworzy zbiór skończony zawierający elementy podanej listy. Wartości `setEmpty` i `setFull` reprezentują, odpowiednio, zbiór pusty i zbiór zawierający wszystkie elementy typu `a`.

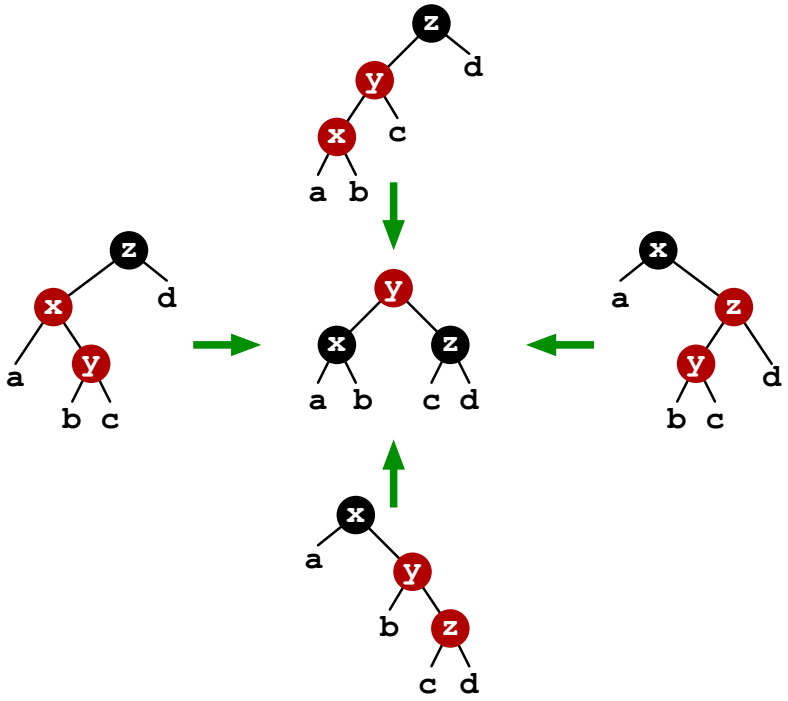
Zadanie 9 (2 pkt). Rozważmy drzewa czerwono-czarne:

```
data Color = Red | Black
data RBTree a = RBNode Color (Tree a) a (Tree a) | RBLeaf
```

Zaprogramuj operację rebalansowania drzewa jako *smart constructor*

```
rbnode :: Color -> Tree a -> a -> Tree a -> Tree a
```

Smart constructor ma taki sam typ, jak „prawdziwy" konstruktor `RBNode`, ale zanim utworzy nowy węzeł drzewa dokonuje w razie potrzeby rotacji. Implementacja funkcji `rbnode` polega na przepisaniu poniższego obrazka opisującego rotacje w postaci czterech klauzul Haskellowych:



Zaprogramuj następnie funkcję

```
rbinsert :: Ord a => a -> RBTree a -> RBTree a
```

wstawiającą element do drzewa czerwono-czarnego. Jej implementacja prawie nie różni się od implementacji funkcji wstawiającej element do drzewa niezbalansowanego, jedynie zamiast konstruktora `Node` należy użyć *smart constructora* `rbnode`, który rebalansuje drzewo po wstawieniu elementu.

Zadanie 10 (3 pkt). Zaprogramuj funkcję

```
rbtreeFromList :: Ord a => [a] -> RBTree a
```

która buduje drzewo czerwono-czarne zawierające elementy podanej *posortowanej* listy. Czas działania tej funkcji powinien wynosić $O(n)$, gdzie n jest liczbą elementów listy, zatem

```
rbtreeFromList = foldr rbinsert RBLeaf
```

nie jest poprawną implementacją.