Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M **15**

31 stycznia 2018 r.

M15.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest *macierzą ze ściśle dominującą przekątną*, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

to $\|B_J\|_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

M15.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z dominującą przekątną <u>kolumnowo</u>.)
Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A, jest zbieżna.

M15.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, to $\|B_S\|_\infty < 1$, a więc metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.

M15.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Macierz B_ω, związana z metodą nadrelaksacji (SOR), określona jest wzorem

$$B_\omega := (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U],$$

gdzie ω jest parametrem. Wykazać, że promień spektralny macierzy B_ω spełnia nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|.$$

M15.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{q}_j \in \mathbb{R}^m$ oznaczają wektory uzyskiwane w metodzie ortogonalizacji Gramma-Schmidta, dla danego układu liniowo niezależnych wektorów $\boldsymbol{a}_j \in \mathbb{R}^m$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Udowodnić, że zachodzi równość

$$I - P_k = (I - \boldsymbol{q}_k\boldsymbol{q}_k^T)\cdots(I - \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T)(I - \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T),$$

gdzie P_k jest macierzą rzutu prostopadłego:

$$P_k := \sum_{j=1}^{k} \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_j^T.$$

M15.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć rozkład QR macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

za pomocą metody Householdera. Wskazać kolejne wektory $v_1, v_2, \ldots$ określające odbicia Householdera.
Uwaga: chodzi o rozkład, w którym $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

29 stycznia 2018
Rafał Nowak