Sławomir Górawski

Lista 8, zadanie 3. Mamy n osób. Każda data urodzenia jest równie prawdopodobna (załóżmy, że nikt nie urodził się 29 lutego). Ile musi wynosić n, żeby prawdopodobieństwo istnienia dwóch osób z tą samą datą urodzenia przekraczało 1/2?

Rozwiązanie. Niech $P(n)$ oznacza prawdopodobieństwo, że w grupie n osób istnieją dwie osoby z tą samą datą urodzenia. Policzymy najpierw prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: każda z n osób urodziła się innego dnia. Aby tak było, pierwsza osoba może urodzić się dowolnego dnia, druga – każdego oprócz tego co pierwsza, trzecia – każdego oprócz tych co pierwsza i druga itd.:

$$P(n) = 1 - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

Podstawiając kolejne wartości n, możemy dojść do rozwiązania: $P(n) > 1/2$ dla $n \geqslant 23$. Możemy też spróbować uzyskać wynik, przybliżając wzór na $P(n)$ przy użyciu szeregu Taylora. Skorzystamy z faktu, że $e^x \approx 1 + x$. Wtedy $1 - a/365 \approx e^{-a/365}$. Po podstawieniu daje nam to:

$$\begin{aligned} P(n) &\approx 1 - e^{-1/365} \cdots e^{-(n-1)/365} \\ &= 1 - e^{-(1+2+\cdots+(n-1))/365} \\ &= 1 - e^{-(n(n-1)/2)/365} \\ &= 1 - e^{-n(n-1)/730} \\ &\approx 1 - e^{-n^2/730} \end{aligned}$$

Chcemy teraz rozwiązać nierówność:

$$\begin{aligned} P(n) &> \frac{1}{2} \\ 1 - e^{-n^2/730} &> \frac{1}{2} \\ e^{-n^2/730} &< \frac{1}{2} \\ -\frac{n^2}{730} &< -\ln 2 \\ n^2 &> 730 \ln 2 \\ n &> \sqrt{730 \ln 2} \\ n &> 22.49\ldots \end{aligned}$$

Dla całkowitych n daje to $n \geqslant 23$.