Sławomir Górawski

Zadanie 98. *(Hierarchia arytmetyczna).* Niech $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie pewną ustaloną obliczalną bijekcją. Oznaczmy klasę zbiorów rekurencyjnych jako Σ_0. Dla danego Σ_i niech $\Pi_i = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \in \Sigma_i\}$, zaś $A \in \Sigma_{i+1}$, jeśli istnieje $B \in \Pi_i$ takie że $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m f(n,m) \in B\}$. Niech L będzie zbiorem numerów tych niepustych funkcji rekurencyjnych, których dziedzina jest skończona. Jakie jest najmniejsze i dla którego zachodzi $L \in \Sigma_i$?

Rozwiązanie. Odpowiedź to 2. Pokażemy, że:

1. $L \in \Sigma_2$,
2. $L \notin \Sigma_1$.

Intuicja z: `https://www.wikiwand.com/en/Tarski-Kuratowski_algorithm`.

1. Niech B będzie zbiorem takich $f(n, f(m,k))$, że n jest numerem funkcji rekurencyjnej, której największym elementem dziedziny jest m i $\phi_n(m)$ zwraca wynik w k krokach.

Pokażemy, że $B \in \Pi_1$. Π_1 to rodzina zbiorów co-r.e. Pokażemy, że $B \leqslant_{rek} \overline{K}$. Niech $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie redukcją, która dla $x = f(n, f(m,k))$ (znamy je, bo f jest bijekcją) zwraca numer takiego programu:

```
wczytaj _
uruchom k kroków φ_n(m)
jeżeli nie otrzymano wyniku, zwróć 1
inteligentnie uruchom φ_n(i) dla każdego i > m,
jeżeli coś zwrócił to zwróć 1
```

Dowód. Pokażemy, że $x \in B \iff r(x) \in \overline{K}$.

1. Dla $x = f(n, f(m,k)) \in B$:
   - $\phi_n(m)$ zwróci wynik,
   - $\phi_n(i)$ nic nie zwróci dla każdego $i > m$,
   - program się zapętli,
   - $r(x) \in \overline{K}$.
2. Dla $x = f(n, f(m,k)) \notin B$ mamy 2 możliwości:
   (a) $\phi_n(m)$ nie zwróci wyniku i program zwróci 1,
   (b) ϕ_n zwróci wynik dla m oraz dla jakiegoś $i > m$ i program zwróci 1.

   W obu przypadkach $r(x) \notin \overline{K}$.

□

2. Σ_1 to rodzina zbiorów r.e. Pokażemy, że $\overline{K} \leqslant_{rek} L$. Niech $r\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie redukcją, która dla n zwraca numer takiego programu:

wczytaj m
jeżeli $m = 1$, zwróć 1
uruchom $\phi_n(n)$
zwróć 1

Dowód. Pokażemy, że $n \in \overline{K} \iff r(n) \in L$.

1. Dla $n \in \overline{K}$:
   - $\phi_n(n)$ nie zatrzyma się nigdy,
   - $\phi_{r(n)}$ dla 1 zwróci 1 a dla innych argumentów się zapętli,
   - dziedzina $\phi_{r(n)}$ to $\{1\}$,
   - $r(n) \in L$.
2. Dla $n \notin \overline{K}$:
   - $\phi_n(n)$ zwróci wynik,
   - dla każdego argumentu $\phi_{r(n)}$ zwróci 1,
   - dziedzina $\phi_{r(n)}$ to $\mathbb{N}$,
   - $r(n) \notin L$.

$\square$