Pour commencer quelque part: j'ai regardé les définitions de “smale space”, et essayé de les rendre uniformes. Mon premier jet est ci-dessous.

Je refléchis déjà à la syntaxe de Lean.

(1) il me semble que c'est une bonne idée de d'abord parler d'un espace avec crochet, et ensuite d'un homéomorphisme. Ça double le nombre de définitions, mais ça les rend plus courtes.

(2) Je ne connais pas très bien la notation pour les structures uniformes. J'aimerais bien dire “pour tous x, y assez proches”, ce qui veut dire “il existe un entourage $\mathcal{U}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathcal{U}$”; est-ce qu'on peut dire ça de manière plus compacte? Pour moi, les entourages sont toujours ouverts, j'espère que c'est le cas pour tout le monde.

(3) qui est une conséquence de (2), il me semble bien de dire que le crochet est défini partout, mais qu'il est continu seulement près de la diagonale, qu'il est préservé par f seulement près de la diagonale, etc. Ça va peut-être éviter un peu de yoga de coercion. L'inconvénient est qu'il faut le définir de manière débile (comme $x/0 = 0$) loin de la diagonale.

(4) qui est une conséquence de (2), deux algèbres de projection sont isomorphes si leurs crochets correspondent sur un entourage.

Definition 0.1. Une *ProjectionAlgebra* est

- un espace uniforme X;
- un “crochet de Ruelle” $[,]\colon X^2 \to X$

tels que:

(1) il existe un entourage $\mathcal{U}$ sur lequel $[,]$ est uniformément continu;
(2) $[x, x] = x$;
(3) il existe un entourage $\mathcal{U}$ tel que, pour tous x, y, z avec $(x, y), (x, z), (y, z) \in \mathcal{U}$ on a
$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] = [x, z].$$

△

Lemma 0.2. *Pour tout n il existe un entourage $\mathcal{U}_n$ tel que, pour tous $x_1, \ldots, x_n$ avec $\forall i, j : (x_i, x_j) \in \mathcal{U}$, on a*

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] = [x_1, x_n] \text{ quel que soit l'ordre des crochets au milieu.}$$

On définit, pour un entourage $\mathcal{V}$, les sous-ensembles de X

$$\mathcal{V}_x^- = \{u : u = [u, x], (u, x) \in \mathcal{V}\}, \quad \mathcal{V}_x^+ = \{u : u = [x, u], (u, x) \in \mathcal{V}\}.$$

Lemma 0.3. *Il existe un entourage $\mathcal{V}$ tel que, pour tout x, la restriction de $[,]$ à $\mathcal{V}_x^- \times \mathcal{V}_x^+$ est un homéomorphisme sur son image.*

Proof. On prend $\mathcal{V}$ assez fin pour que $(x, u), (x, v) \in \mathcal{V} \Rightarrow (x, [u, v]) \in \mathcal{U}_4$.

Étant donnés $(x, y) \in \mathcal{U}_4$, on pose $u = [y, x], v = [x, y]$, et alors

$$u = [u, x], v = [x, v], [u, v] = y, [v, u] = x.$$

L'inverse de $[,]\colon \mathcal{V}_x^- \times \mathcal{V}_x^+ \to X$, est donc donné par $y \mapsto ([y, x], [x, y])$. □

Corollary 0.4. *Si $(x, y) \in \mathcal{U}_4$ alors $\{[x, y]\} = \mathcal{V}_x^+ \cap \mathcal{V}_y^-$ avec $\mathcal{V} = \mathcal{U}_3$.*

Definition 0.5. Un *SmaleSpace* est

- une ProjectionAlgebra X;
- un homéomorphisme uniformément continu $f\colon X \to X$

tels que:

1. il existe un entourage $\mathcal{U}$ avec $\forall (x,y) \in \mathcal{U} : f([x,y]) = [f(x), f(y)]$;
2. il existe un entourage $\mathcal{U}$ tel que, pour tout entourage $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, il existe un entourage $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ “beaucoup plus petit” (“λ fois plus petit”), avec
$$\forall x : f(\mathcal{V}_x^+) \subseteq \mathcal{W}_{f(x)}^+, \quad f^{-1}(\mathcal{V}_x^-) \subseteq \mathcal{W}_{f(x)}^-.$$

$\triangle$

Lemma 0.6 (Putnam, Theorem 2.2.2)**.** *Pour tout entourage $\mathcal{U}$ assez petit, et pour tout entier N, il existe un entourage $\mathcal{U}_N$ avec $\forall (x,y) \in \mathcal{U}_N, \forall i \in \{0,\dots,N\}$: $f^i([x,y]) = [f^i(x), f^i(y)] \in \mathcal{U}$.*

0.1. **Exemple 1.** on prend un ensemble A, qu'on voit comme espace topologique discret, et on considère $X_0 = A^{\mathbb{Z}}$ avec la topologie produit, et les entourages engendrés par les $\mathcal{U}_{n,m} = \{(x,y) \in X_0^2 : x_t = y_t \forall t \in [m,n]\}$ avec $m,n \in \mathbb{Z}$. L'application f est le décalage. Finalement on se donne un graphe dirigé $G \subseteq A^2$, et on regarde $X = \{x \in X_0 : (x_n, x_{n+1} \in G \forall n\}$.

Alors $[x,y] = (\dots, y_{-1}, y_0, x_1, x_2, \dots)$ pour $(x,y) \in \mathcal{U}_{0,0}$, et $f^{\pm 1}$ contracte $\mathcal{U}_{0,0}$ en $\mathcal{U}_{-1,1}$ respectivement sur $(\mathcal{U}_{0,0})_x^{\pm 1}$.

0.2. **Traçage.**

Theorem 0.7 (Ombach, Theorem)**.** *Soit X uniforme, $f\colon X \to X$ un homéomorphisme uniforme. TFAE:*

1. *f a des coordonnées canoniques et est expansif;*
2. *f a des coordonnées hyperboliques wrt une métrique [probablement seulement si X est métrisable];*
3. *f trace les pseudo-orbites et est λ-expansif wrt une métrique [probablement seulement si X est métrisable compact];*
4. *f trace les pseudo-orbites et est expansif;*
5. *f a des coordonnées régulières;*
6. *f est un espace de Smale.*

Definition 0.8.
$$W^u = \{(x,y) \in X^2 : f^n(x,y) \to \Delta \text{ quand } n \to -\infty\}.$$
$$W^s = \{(x,y) \in X^2 : f^n(x,y) \to \Delta \text{ quand } n \to +\infty\}.$$
Pour un entourage $\mathcal{U}$,
$$W_{\mathcal{U}}^u = \bigcap_{n \le 0} f^n(\mathcal{U}), \quad W_{\mathcal{U}}^s = \bigcap_{n \ge 0} f^n(\mathcal{U}).$$

Si $U \subseteq X^2$ est une relation, on note $U(x) = \{y : (y,x) \in U\}$, etc.

f a des *coordonnées canoniques* si
$$\forall \mathcal{U} \text{ assez petit} : \exists \mathcal{V} : (x,y) \in \mathcal{V} \Rightarrow W_{\mathcal{V}}^s(x) \cap W_{\mathcal{V}}^u(y) \neq \emptyset.$$

f a des *coordonnées régulières* si
$$\forall \mathcal{U} \text{ assez petit} : \exists \mathcal{V} : \exists [,] \colon \mathcal{V} \to X \text{ continue} : (x,y) \in \mathcal{V} \Rightarrow W_{\mathcal{V}}^s(x) \cap W_{\mathcal{V}}^u(y) = \{[x,y]\},$$
et $W_{\mathcal{U}}^s \subset W^s, W_{\mathcal{U}}^u \subset W^u$.

f a des *coordonnées hyperboliques* s'il existe un entourage $\mathcal{U}$, $\lambda \in (0,1)$, $C \ge 0$ tq
$$W_{\mathcal{U}}^s \subset \{(x,y) : d(f^n x, f^n y) \le C \lambda^n d(x,y) \forall n \ge 0\},$$

$$W^u_{\mathcal{U}} \subset \{(x,y) : d(f^n x, f^n y) \leq C\lambda^n d(x,y) \forall n \leq 0\}.$$

f est *expansive* s'il existe un entourage $\mathcal{U}$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U}) = \Delta$.

f est λ-*expansive* avec $\lambda \in (0,1)$ s'il existe $C > 0, e > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} : (d(f^k x, f^k y) \leq e \forall |k| \leq n) \Rightarrow d(x,y) \leq C\lambda^n d(x,y).$$

f *trace les pseudo-orbites* si pour tout entourage $\mathcal{U}$ il existe un entourage $\mathcal{V}$ tel que toute $\mathcal{V}$-pseudo-orbite est $\mathcal{U}$-tracée par une orbite; i.e. si $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait $\forall n : (x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{V}$, alors il existe x avec $\forall n : (f^n(x), x_n) \in \mathcal{U}$. △

Proof. [Bowen, Proposition 3.6 et Corollary 3.7]

[Ombach] □

0.3. **Décomposition spectrale.** [Bowen, Theorem 3.5]

0.4. **Partitions de Markov.** [Bowen, Theorem 3.12]

0.5. **Références.** I. Putnam, Lecture Notes on Smale Spaces, 2015.

R. Bowen. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes in Math. No. 470. Springer, Berlin, 1975.

J. Ombach, Equivalent conditions for hyperbolic coordinates, Topology Appl. 23 (1986) 87-90.