Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики
УЧЕБНЫЙ ЦЕНТР ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ФТФ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Группа R3142 К работе допущен

Студент Лоскутова И. В. Работа выполнена

Преподаватель Курашова С. А. Отчет принят

Рабочий протокол и отчет по лабораторной работе №1.01

Исследование распределения случайной величины

1. Цель работы.
   1. Провести многократные измерения определенного интервала времени.
   2. Построить гистограмму распределения результатов измерения.
   3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки.
   4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же, как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией.

2. Задачи, решаемые при выполнении работы.
   1. Снятие измерений для определенного интервала времени.
   2. Построение гистограммы распределения результатов измерения.
   3. Вычисление среднего значения и дисперсии полученной выборки.
   4. Сравнение гистограммы с графиком функции Гаусса с совпадающими средним значением и дисперсией экспериментального распределения.

3. Объект исследования.
   Ошибка, возникающая при снятии измерений случайной величины.

4. Метод экспериментального исследования.
   Многократное исследование определённого интервала времени.

5. Рабочие формулы и исходные данные.

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \langle t\rangle_N = \frac{1}{N}(t_1 + t_2 + \dots + t_N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$$

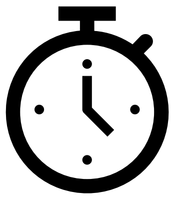
$$\Delta t = \langle t\rangle_N - t_{\text{ист}},\ \varepsilon_x = \frac{\Delta t}{t_{ucm}},\ \sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\cdot\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2},\ m = \sqrt{N},\ \Delta_{\bar{t}} = t_{\alpha,N}\cdot\sigma_{\langle t\rangle}$$

$$\sigma_{\langle t\rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\cdot\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2}, \qquad \Delta t = \frac{[t_{min};\ t_{max}]}{m}, \qquad \rho_{max} = \frac{1}{\sigma_N\cdot\sqrt{2\pi}}$$

6. Измерительные приборы.

№ п/п	*Наименование*	*Тип прибора*	*Используемый диапазон*	*Погрешность прибора*
1	*Секундомер*	*цифровой*	*60 с*	*0,01 с*
2	*Секундомер*	*механический*	*60 с*	*0,2 с*

7. Схема установки (*перечень схем, которые составляют Приложение 1*).

1  2 

1 – механический секундомер

2 – цифровой секундомер

8. Результаты прямых измерений и их обработки (*таблицы, примеры расчетов*).

№	t_i, c	$t_i - \langle t \rangle_N$, с	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2$, с^2
1	4,81	-0,13	$0,18*10^{-1}$
2	4,81	-0,13	$0,18*10^{-1}$
3	4,81	-0,13	$0,18*10^{-1}$
4	4,84	-0,10	$0,11*10^{-1}$
5	4,84	-0,10	$0,11*10^{-1}$
6	4,85	-0,09	$0,90*10^{-2}$
7	4,85	-0,09	$0,90*10^{-2}$
8	4,85	-0,09	$0,90*10^{-2}$
9	4,87	-0,07	$0,56*10^{-2}$
10	4,87	-0,07	$0,56*10^{-2}$
11	4,87	-0,07	$0,56*10^{-2}$
12	4,88	-0,06	$0,42*10^{-2}$

13	4,88	-0,06	$0{,}42*10^{-2}$
14	4,89	-0,05	$0{,}30*10^{-2}$
15	4,90	-0,04	$0{,}20*10^{-2}$
16	4,90	-0,04	$0{,}20*10^{-2}$
17	4,91	-0,03	$0{,}12*10^{-2}$
18	4,91	-0,03	$0{,}12*10^{-2}$
19	4,91	-0,03	$0{,}12*10^{-2}$
20	4,91	-0,03	$0{,}12*10^{-2}$
21	4,93	-0,01	$0{,}22*10^{-3}$
22	4,93	-0,01	$0{,}22*10^{-3}$
23	4,93	-0,01	$0{,}22*10^{-3}$
24	4,93	-0,01	$0{,}22*10^{-3}$
25	4,93	-0,01	$0{,}22*10^{-3}$
26	4,94	$-0{,}05*10^{-1}$	$0{,}25*10^{-4}$
27	4,94	$-0{,}05*10^{-1}$	$0{,}25*10^{-4}$
28	4,94	$-0{,}05*10^{-1}$	$0{,}25*10^{-4}$
29	4,94	$-0{,}05*10^{-1}$	$0{,}25*10^{-4}$
30	4,94	$-0{,}05*10^{-1}$	$0{,}25*10^{-4}$
31	4,97	0,03	$0{,}63*10^{-3}$
32	4,97	0,03	$0{,}63*10^{-3}$
33	4,97	0,03	$0{,}63*10^{-3}$

34	4,97	0,03	$0,63*10^{-3}$
35	5,00	0,06	$0,30*10^{-2}$
36	5,00	0,06	$0,30*10^{-2}$
37	5,00	0,06	$0,30*10^{-2}$
38	5,00	0,06	$0,30*10^{-2}$
39	5,01	0,07	$0,42*10^{-2}$
40	5,01	0,07	$0,42*10^{-2}$
41	5,03	0,09	$0,72*10^{-2}$
42	5,03	0,09	$0,72*10^{-2}$
43	5,03	0,09	$0,72*10^{-2}$
44	5,03	0,09	$0,72*10^{-2}$
45	5,04	0,10	$0,90*10^{-2}$
46	5,05	0,11	0,01
47	5,05	0,11	0,01
48	5,08	0,14	0,02
49	5,15	0,21	0,04
50	5,15	0,21	0,04
	$\langle t\rangle_N = 4{,}94\ c,\ \sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N) = 0{,}00\ c$ $\sigma_N = 0{,}08\ c,\ p_{max} = 0{,}49\ c^{-1}$		

Таблица 1: Результаты прямых измерений

Среднее значение времени $\langle t\rangle_N$: $\langle t\rangle_N = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N} t_i = \frac{1}{50}\cdot 247{,}25 = 4{,}94$ c

Проверка среднего значения времени $\langle t\rangle_N$: $\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)$ $=0{,}15*10^{-14} = 0$ c

Выборочное СКО: $\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50-1} \cdot 0{,}33} = 0{,}08 \text{ с} = 0{,}08 \text{ с}$

Максимальное значение плотности распределения ρ_{max}: $\rho_{max} = \frac{1}{\sigma_N \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{1}{0{,}08 \cdot \sqrt{2\pi}} = 4{,}88 \text{ с}^{-1}$

9. Расчет результатов косвенных измерений (*таблицы, примеры расчетов*).

Границы интервалов, c	ΔN	$\frac{\Delta N}{N \cdot \Delta t}$, с^{-1}	t, с	ρ, с^{-1}
4,81 4,86	8	2,90	4,84	1,82
4,86 4,91	8	2,90	4,89	3,90
4,91 4,96	14	5,09	4,94	4,84
4,96 5,01	8	2,90	4,99	4,20
5,01 5,06	9	3,27	5,04	2,49
5,06 5,11	1	0,36	5,09	1,26
5,11 5,15	2	0,72	5,13	0,21

Таблица 2: Данные для построения гистограммы

	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle t \rangle_N \pm \sigma_N$	4,86	5,03	32	0,64	0,683
$\langle t \rangle_N \pm 2\sigma_N$	4,78	5,11	48	0,96	0,954
$\langle t \rangle_N \pm 3\sigma_N$	4,70	5,19	50	1,00	0,997

Таблица 3: Стандартные доверительные интервалы

Абсолютная погрешность измерения: $\Delta t = |\langle t \rangle_N - t_{\text{ист}}| = |4{,}94 - 5| = 0{,}06$

Относительная погрешность измерения: $\varepsilon_x = \frac{\Delta t}{t_{ucm}} = \frac{0{,}06}{5} = 0{,}01 * 100\% = 1{,}00\%$

Количество интервалов m: t_{min} = 4,81 с, t_{max} = 5,15 с, $m = \sqrt{N} = \sqrt{50} \approx 7$

Значение интервала Δt: $\Delta t = \frac{[t_{min}; t_{max}]}{m} = \frac{[4{,}81; 5{,}15]}{7} = \frac{0{,}34}{7} = 0{,}05$ с

Значение t – середина выбранных интервалов, для 4-го интервала: $t = \frac{4{,}96+5{,}01}{2} = 4{,}99$ с

Плотность распределения ρ для значений t (пример для t_4 – середины первого интервала):

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma_N \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(t - \langle t \rangle_N)^2}{2\sigma_N^2}\right) = \frac{1}{0{,}08 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(4{,}99 - 4{,}95\,)^2}{2 \cdot 0{,}08^2}\right) = 4{,}20$$

10. Расчет погрешностей измерений (*для прямых и косвенных измерений*).

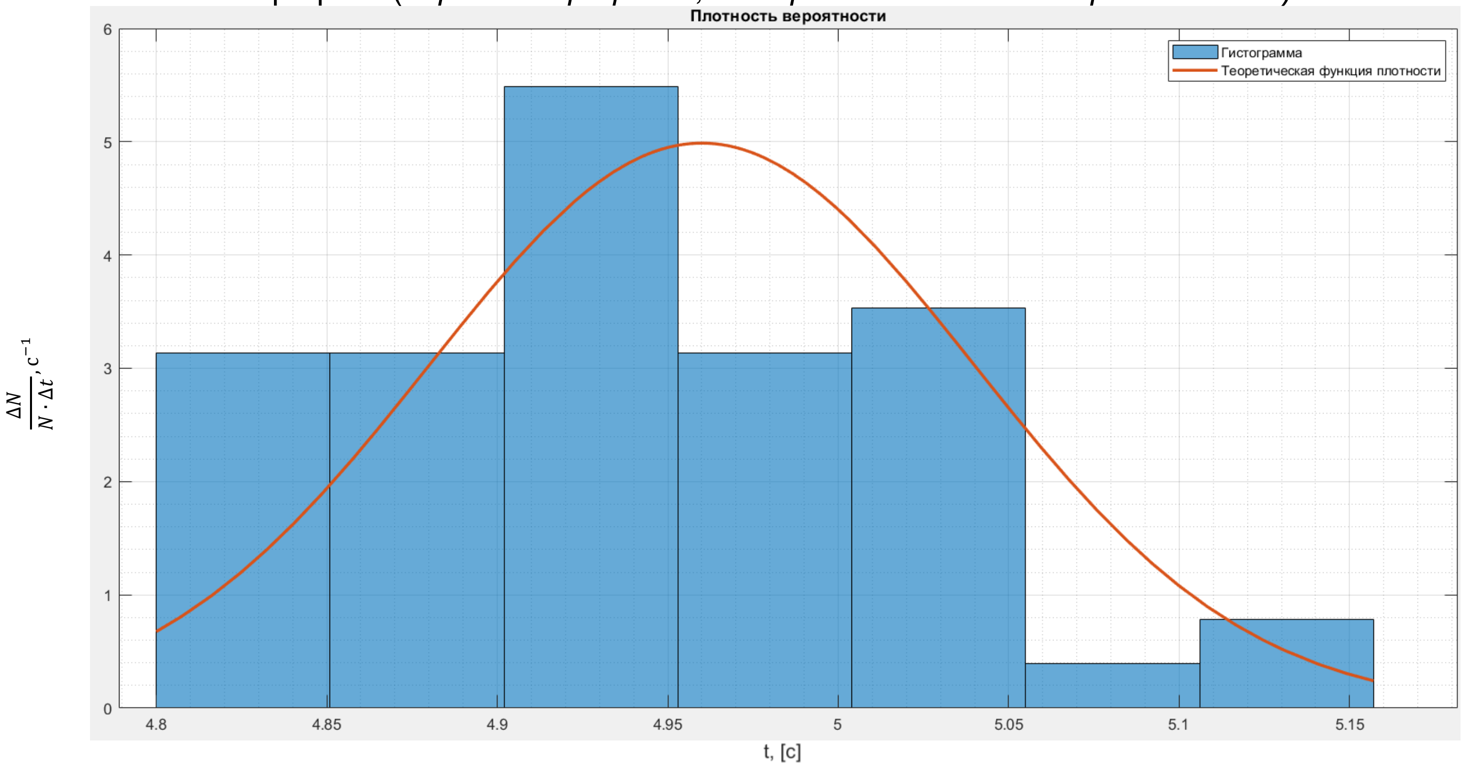
СКО среднего значения:

$$\sigma_{\langle t \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} (t_i - \langle t \rangle_N)^2} = \sqrt{\frac{1}{50 \cdot 49} \cdot 0{,}33} = 0{,}12 * 10^{-1} \text{ с}$$

Случайная погрешность (при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}95$, количестве измерений $N = 50$ и коэффициенте Стьюдента $t_{\alpha,N} = 2{,}0085591$):

$\Delta_{\bar{t}} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t \rangle} = 2{,}0085591 \cdot 0{,}01 \; = 0{,}02$ с

11. Графики (*перечень графиков, которые составляют Приложение 2*).



12. Окончательные результаты.

Среднее время: $\langle t \rangle_N = 4{,}94$ с

Выборочное СКО: $\sigma_N = 0{,}08$ с

Максимальная плотность распределения: $\rho_{max} = 4{,}87$ с$^{-1}$

Абсолютная погрешность измерения: $\Delta t = \; 0{,}06$

Относительная погрешность измерения: $\varepsilon_x = 1{,}00\%$

СКО среднего значения: $\sigma_{\langle t\rangle} = 0{,}12 * 10^{-1}$ с

Значение интервала: $\Delta t = 0{,}05$ с

Случайная погрешность: $\Delta_{\bar{t}} = 0{,}02$ с

13. Выводы и анализ результатов работы.

В результате проведения исследования данных, снятых при многократном измерении определенного промежутка времени, была построена гистограмма распределения случайной величины и график функции Гаусса. Получено среднее время, среднеквадратичное отклонение среднего значения, максимальное значение плотности распределения, а также случайная погрешность. Полученные значения соответствуют закону нормального распределения.
Анализируя полученную гистограмму, можно отметить, что она немного различается с графиком функции Гаусса из-за маленького размера выборки (N=50). Некоторые ее столбики (номера при счете: 1, 3, 4, 6) сильно различаются со своими ожидаемыми значениями (значения, при которых будет идеальное совпадение с графиком функции Гаусса), что также вызывает асимметрию гистограммы.

14. Дополнительные задания. Выполнение дополнительных заданий.

1. Являются ли, по вашему мнению, случайными следующие физические величины:
   – плотность алмаза при $20°C$
   – напряжение сети
   – сопротивление резистора, взятого наугад из партии с одним и тем же номинальным сопротивлением
   – число молекул в 1см3 при нормальных условиях?
   Приведите другие примеры случайных и неслучайных физических величин.

   Случайными величинами будут являться напряжение сети и сопротивление резистора.

   Неслучайными величинами являются плотность алмаза и число молекул.

   Примеры:
   - Случайная величина – число выпавших очков на игральной кости
   - Неслучайная величина – число Авогадро
2. Изучая распределение ЭДС партии электрических батареек, студент использовал цифровой вольтметр. После нескольких измерений получились такие результаты (в вольтах): 1,50; 1,49; 1,50; 1,50; 1,49. Имеет ли смысл продолжать измерения? Что бы вы изменили в методике этого эксперимента?

   Я бы не стала менять методику измерений, но продолжила бы измерения для получения достаточного большого числа выборки.
3. При обработке результатов измерений емкости партии конденсаторов получено: $\langle C\rangle$ = 1,1 мкФ, σ = 0,1 мкФ. Если взять коробку со 100 конденсаторами из этой партии, то сколько среди них можно ожидать конденсаторов с емкостью меньше 1 мкФ? больше 1,3 мкФ?

   При C < 1:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(C-<C>)^2}{2\sigma^2}} dc * 100 \approx 0{,}16 * 100 \approx 16 \text{ шт}$$

   При C > 1,3:

$$\int_{1,3}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{(C-<C>)^2}{2\sigma^2}} dc * 100 \approx 0{,}02 * 100 \approx 2 \text{ шт}$$