دانشگاه علامه طباطبائی
دانشکده آمار، ریاضی و رایانه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته علم داده‌ها

عنوان

سطر اول عنوان پایان نامه
سطر دوم عنوان پایان نامه

استاد راهنما

نام استاد راهنما

استاد مشاور

نام استاد مشاور

استاد داور

نام داور

پژوهش‌گر

نام پژوهشگر

زمستان ۱۴۰۲

بسم الله الرحمن الرحیم

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه

برای دانشگاه علامه طباطبائی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع مانعی ندارد.

منشور اخلاق پژوهش

به یاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداوند است و همواره ناظر به اعمال انسان و به منظور پاس‌داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری ما دانشجویان دانشکده‌های دانشگاه علامه طباطبائی متعهد می‌گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت‌های پژوهشی مد نظر قرارداده و از آن تخطی نکنیم:

۱. اصل حقیقت‌جویی: تلاش در راستای پی‌جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان‌سازی حقیقت.

۲. اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳. اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهشی.

۴. اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵. اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب‌داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۶. اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان‌ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷. اصل احترام: تعهد به رعایت حریم‌ها و حرمت‌ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸. اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹. اصل برائت: التزام به برائت‌جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه‌ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه‌های غیر علمی می‌آلایند.

نام و نام خانوادگی: نام پژوهشگر

امضا:

تصویر
امضاء

زمستان ۱۴۰۲

تعهدنامه‌ی اصالت پایان‌نامه

عنوان پایان‌نامه: سطر اول عنوان پایان نامه

سطر دوم عنوان پایان نامه

پژوهش‌گر: نام پژوهشگر
شماره‌ی دانشجویی: شماره دانشجویی
استاد راهنما: نام استاد راهنما

این‌جانب **نام پژوهشگر** دانش آموخته مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد رشته‌ی **رشته علم داده‌ها** از دانشکده‌ی علوم ریاضی و رایانه دانشگاه علامه طباطبائی هستم و از پایان‌نامه خود در زمستان ۱۴۰۲دفاع نموده‌ام، متعهد می‌شوم:

۱. این پایان‌نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از مقاله، کتاب، پایان‌نامه و غیره) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوط ذکر و درج کرده‌ام.

۲. این پایان‌نامه قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین‌تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳. چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده از هرگونه بهره‌برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ازین دست موارد از این پایان‌نامه را داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه علامه طباطبائی مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴. چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می‌پذیرم و دانشگاه مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: نام پژوهشگر

امضا:

زمستان ۱۴۰۲

دانشگاه علامه طباطبائی
دانشکده آمار، ریاضی و رایانه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

سطر اول عنوان پایان نامه
سطر دوم عنوان پایان نامه

پژوهش‌گر: نام پژوهشگر

استاد راهنما: نام استاد راهنما   امضاء:

استاد مشاور: نام استاد مشاور   امضاء:

استاد داور: نام داور   امضاء:

تقدیم به پدر مادر و مهربانم که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

سپاس‌گزاری

سپاس خدای را که هر توفیقی در گرو عنایت اوست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام رسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای نام استاد راهنما که به پایان رساندن این تحقیق جز با راهنمایی‌های پدرانه و هدایت‌های بی‌دریغ ایشان میسر نبود، قدردانی نمایم.

در پایان، از خانواده‌ام، به‌ویژه پدر و مادرم که با حمایت‌های خویش، همواره مرا پشتیبانی کرده‌اند نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

زمستان ۱۴۰۲

چکیده

در این پایان‌نامه، روش هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی فراگیر برای تقریب جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی وابسته به زمان بررسی می‌شود. تا کنون پیاده سازی شرایط مرزی چندگانه با استفاده از این روش برای مسایل وابسته به زمان حتی در حالت یک بعدی نیز مورد بررسی قرار نگرفته است. ما پیاده سازی شرایط مرزی چندگانه با روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی را از دیدگاه تئوری و عملی مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم. از لحاظ تئوری، آنالیز خطای روش توابع پایه شعاعی فراگیر برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزیی مورد بررسی قرار گرفته است. از لحاظ محاسباتی، جزییات پیاده سازی برای روش‌های ارایه شده، بحث شده است. همچنین کارایی آن‌ها با مقایسه‌ی جواب دقیق و روش‌های دیگر نشان داده شده است. دو روش هم‌محلی مبتنی بر کاربرد موضعی توابع پایه شعاعی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وابسته به زمان مورد بحث قرار گرفته است. توابع پایه شعاعی مبتنی بر روش افراز واحد بعنوان یک روش کارا برای حل این نوع مسایل معرفی شده است. خصوصیات روش افراز واحد کمک می‌کند تا از انعطاف پذیری بیشتری برای انتخاب نقاط موضعی هنگام تقریب جواب برخوردار شویم. در ادامه ماتریس متناظر با عملگرهای مشتق را از این روش استخراج می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این چنین ماتریس‌هایی تنک بوده و کارایی بهتری برای حل مسایل چندبعدی دارد. نهایتا، بعنوان یک کاربرد عملی، این روش برای تقریب جواب مساله اختیار خرید دوبعدی آمریکایی پیاده سازی شده است.

واژگان کلیدی: *معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، توابع پایه شعاعی، روش افراز واحد، روش هم‌محلی، آنالیز خطا .*

فهرست مطالب

فهرست جداول

فهرست تصاویر

نمادها و علامت‌های اختصاری

انتگرال	$\int$
هم ارزی	$\equiv$
ضرب تانسوری	$\bigoplus$
ضرب کوپروداکت	$\coprod$

فصل ۱

آشنایی و کلیات

عموما رفتار پدیده‌های فیزیکی را می‌توان توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی مدل‌بندی کرد. با ابعاد بالا نقش مهمی در بسیاری از علوم مهندسی و کاربردی بویژه مکانیک سیالات، ریاضیات مالی، فیزیک جامدات، فیریک شیمی و ... ایفا می‌کنند.

۱.۱ مقدمه

اخیرا، اختیار خریدها بدلیل کاربرد وسیع در بازارهای مالی اهمیت زیادی کسب کرده‌اند. خرید قراردادهای مالی با دارایی‌های مورد معامله چندگانه بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است. این چنین اختیار خریدهایی با معادله چند بعدی بلک–شولز [1] و یا صورت تعمیم یافته آن مدل بندی می‌شود (زوان، ۱۹۹۸؛ کواک، ۲۰۰۸).

حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی موضوع تحقیقاتی در زمینه‌های علمی متفاوت بوده است. روش‌های تفاضلات متناهی، روش‌های اجزاء متناهی و روش‌های طیفی از جمله روش‌های متداول در ادبیات موضوع برای حل عددی این گونه مسایل می‌باشند. دقت روش‌های فوق الذکر تحت تاثیر شبکه‌بندی نقاط و گسسته سازی دامنه می‌باشد (لارسن، ۲۰۱۳).

۲.۱ پیشینه پژوهش

نمونه ارجاع به مرجع فارسی (واحدی، ۱۳۸۷).

[1] Black–Scholes

۱.۲.۱ زیر بخشی از پیشینه پژوهش

۱.۱.۲.۱ زیر بخشی از زیر بخشی از پیشینه پژوهش

۲.۱.۲.۱ زیر بخشی دوم از زیر بخشی از پیشینه پژوهش

در دو دهه اخیر، روش‌های هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی بدلیل کاربرد آن‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی بسیار مورد توجه واقع شده‌اند (پلاته، ۲۰۰۵؛ وا، ۲۰۰۳؛ لارسن، ۲۰۱۳). روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای فائق آمدن به ضعف‌های روش‌های متداول قبلی پدید آمدند. مهم‌ترین برتری این روش‌ها این است که نیازی به شبکه‌بندی دامنه نیست و برای تقریب جواب فقط به نقاط پراکنده از دامنه نیاز است. به همین دلیل این روش‌ها موسوم به روش‌های بدون شبکه‌بندی هستند. این روش‌ها به آسانی قابل اجرا بر روی مسایل با بعد بالا و یا با دامنه‌های پیچیده هستند. خواص جالب همراه با همگرایی خوب (نرخ نمایی در برخی موارد) این روش‌ها را بعنوان روشی کارا برای حل معادلات با مشتقات جزیی معرفی می‌کند.

طی سالیان متمادی، توابع پایه شعاعی بعنوان درونیاب‌های نقاط پراکنده چندبعدی شناخته شده بودند (وندلند، ۱۹۹۵). نتایج عالی این درونیاب‌ها در نقاط پراکنده انگیزه‌ای برای توسیع آن‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی شد. چند نمونه از روش‌های بدون شبکه‌بندی موجود و در حال مطالعه در ادبیات موضوع عبارتند از: هم‌محلی توابع پایه شعاعی نامتقارن (لارسن، ۲۰۱۳)، هم‌محلی توابع پایه شعاعی متقارن (ریقر، ۲۰۱۰؛ هون، ۱۹۹۹) و روش افراز واحد مبتنی بر توابع پایه شعاعی (مکلین، ۱۹۷۶).

۳.۱ هدف پژوهش

در این پایان‌نامه، هدف بررسی روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی در حالت موضعی و فراگیر برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی از دیدگاه محاسباتی و تئوری است. هدف اولیه این تحقیق، توسیع هم‌محلی توابع پایه شعاعی فراگیر برای دسته وسیعی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وابسته به زمان با شرایط مرزی متفاوت می‌باشد. همچنین این روش برای حل عددی مسایل با مشتقات از مراتب بالاتر و وابسته به زمان مانند معادله روزنا مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر این آنالیز خطای روش‌های ارایه شده هنگامی که روش ترازی برای حالت گسسته شده به کار رفته، مورد تحلیل قرار گرفته است.

هدف بعدی در این پایان نامه، توسیع هم‌محلی توابع پایه شعاعی در حالت موضعی مانند توابع پایه شعاعی مبتنی بر روش تفاضلات متناهی و توابع پایه شعاعی مبتنی بر روش افراز واحد برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وابسته به زمان می‌باشد. نهایتا هدف ایجاد یک الگوریتم کارا برای بررسی عددی مسایل با مقیاس بالا و چند بعدی و پیاده سازی آن برای اختیار خریدهای چند بعدی است.

۴.۱ تعریف‌ها و مفهوم‌های پایه‌ای

۵.۱ چشم‌انداز

این پایان‌نامه به صورت زیر طراحی و نگارش شده است.

در فصل ۲ توابع پایه شعاعی را بصورت خلاصه معرفی می‌شوند، بعلاوه خواص توابع پایه شعاعی متفاوت و کاربرد آن‌ها برای درونیابی چند بعدی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین درونیابی با این توابع از دیدگاه تئوری و محاسباتی بطور مختصر بیان شده است.

فصل ۳ کاربرد هم‌محلی توابع پایه شعاعی فراگیر برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی وابسته به زمان را مورد بحث قرار می‌دهد. روش نقطه تصوری و روش بازتصویر برای مسایل مقدار مرزی با مشتقات از مرتبه بالاتر معرفی شده است. آنالیز خطا و پایداری روش‌های ارایه شده، مورد بررسی قرار گرفته است.

فصل ۴ هم‌محلی توابع پایه شعاعی موضعی را معرفی می‌کند. جزئیات محاسباتی توابع پایه شعاعی موضعی مبتنی بر تفاضلات متناهی برای معادله شرودینگر مطرح شده است. دقت محاسباتی این روش که منجر به ماتریس ضرایب تنک می‌شود با روش فراگیر و سایر روش‌ها مقایسه شده است. همچنین روش توابع پایه شعاعی بر اساس افراز واحد بعنوان یک روش کارای موضعی برای مسایل با مقیاس بالا معرفی شده است. پیاده سازی این روش برای مسایل وابسته به زمان ارایه شده و جزییات محاسباتی آن برای معادله نفوذ گرمای وابسته به زمان دوبعدی نشان داده شده است.

فصل ۲

خلاصه‌ای از توابع پایه شعاعی

این فصل، مروری بر توابع پایه شعاعی و خواص آن می‌باشد. تعریف توابع پایه شعاعی به همراه خواص درونیاب ایجاد شده توسط این نوع توابع برای نقاط پراکنده مورد بحث قرار می‌گیرد. همچنین خلاصه‌ای از جزییات محاسباتی و نظری تابع درونیاب ایجاد شده بیان می‌شود.

توابع دو یا سه ضابطه‌ای را می‌توان بصورت زیر ایجاد کرد.

$$f(x) = \begin{cases} \exp x & \text{if } x < ۰ \\ x^۲ & \text{if } ۰ \leq x < ۲ \\ x^۳ + x^۲ + ۱ & \text{if } ۲ \leq x < ۶ \end{cases} \tag{۱.۲}$$

۱.۲ ایجاد محیط‌های نگارشی ویژه

تعریف ۱.۱.۲. نمونه تعریف: برای ایجاد محیط تعریف به همین ترتیب عمل شود.

لم ۲.۱.۱. نمونه لم: *برای ایجاد محیط لم به همین ترتیب عمل شود.*

قضیه ۲.۱.۱. نمونه قضیه: *برای ایجاد محیط قضیه به همین ترتیب عمل شود.*

مثال ۱.۱.۲. نمونه مثال: *برای ایجاد محیط مثال به همین ترتیب عمل شود.*

۲.۲ توابع پایه شعاعی

تعریف ۱.۲.۲. تابع $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ یک تابع شعاعی نامیده می‌شود هرگاه یک تابع یک متغیره $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ موجود باشد بطوریکه

$$f(x) = \phi(\|x\|), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{۲.۲}$$

که $\|.\|$، نرم اقلیدسی می‌باشد.

لم ۱.۲.۲. *به ازای هر مجموعه از نقاط مجزای* $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$*، تابع پیوسته* $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *تابع معین مثبت شرطی از مرتبه* m *نامیده می‌شود هرگاه ضرایب* $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ *در رابطه زیر صدق کنند*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i p(x_i) = 0,$$

که در آن p *همه چند جمله‌ای‌های از درجه کوچکتر و مساوی* m *بوده و داریم:*

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \lambda_i \lambda_j \phi(\|x_i - x_j\|) > 0.$$

توابع پایه شعاعی معین مثبت شرطی از مرتبه صفر را توابع پایه شعاعی معین مثبت اکید می‌نامند. توابع گاوسی و مالتی کوادریک معکوس نمونه‌هایی از توابع پایه شعاعی معین مثبت اکید هستند.

پرامتر پهنا، ε نقش مهمی در نرخ همگرایی تقریب‌ها و عدد حالت ماتریس تولید شده دارد (وندلند، ۱۹۹۵؛ فشوئر، ۲۰۰۴).

توابع پایه شعاعی را می‌توان به دو دسته کلی تقسیم بندی کرد: توابع بصورت نامتناهی هموار و شامل پرامتر آزاد (پارامتر پهنا) و توابع بصورت قطعه‌ای هموار و فاقد پارامتر آزاد. باید توجه کرد که تعدادی از خواص توابع هموار تفاوت زیادی با توابع پایه‌ای قطعه‌ای هموار دارد. به عنوان مثال نرخ همگرایی توابع پایه‌ای هموار برای دسته‌ای از توابع مورد درونیابی نمایی است درحالی که نرخ همگرایی توابع پایه‌ای قطعه‌ای هموار برای همه توابع از نوع چندجمله‌ای است. لازم به ذکر است که بدحالتی ماتریس متناظر با توابع هموار در مقایسه با توابع قطعه‌ای هموار بیشتر است. در این رساله، استفاده از توابع پایه‌ای هموار مورد توجه و تمرکز قرار گرفته است.

رده دیگری از توابع پایه‌ای که نتیجه تحقیقات انجام شده در (وندلند، ۱۹۹۵؛ وا، ۲۰۰۳) می‌باشند را توابع پایه شعاعی با تکیه گاه فشرده می‌نامند. ایده اصلی این نوع توابع استفاده از چندجمله‌ای‌ها بعنوان تابعی از $\|.\|$ با تکیه‌گاهی روی گوی واحد است. به

جدول ۱.۲: جواب تقریبی اختیار فروش امریکایی با دو دارایی پایه ناهمبسته با توزیع یکنواخت نقاط به ازای $\varepsilon = ۱/۵$

مرتبه همواری	توابع پایه شعاعی
$C^{۰}$	$\phi(r) = (۱-r)_+^{۲}$
$C^{۲}$	$\phi(r) = (۱-r)_+^{۴}(۴r+۱)$
$C^{۴}$	$\phi(r) = (۱-r)_+^{۶}(۳۵r^{۲}+۱۸r+۳)$
$C^{۶}$	$\phi(r) = (۱-r)_+^{۸}(۳۲r^{۳}+۲۵r^{۲}+۸r+۱)$

ازای هر d کوچکتر یا مساوی مقدار ثابت $d_۰$ توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده در فضای $\mathbb{R}^d$ معین مثبت است. تعریف پایه‌ای توابع با تکیه‌گاه فشرده $\phi_{l,k}$ بصورت

$$\phi_{l,k}(r) = (۱-r)_+^{n} p(r) \quad k \geq ۱, \tag{۳.۲}$$

است که در آن $r = \|.\|$، $(۱-r)_+ = \max\{۰, (۱-r)\}$ و $l = \lfloor \frac{d}{۲} \rfloor + k + ۱$ بعد فضاست. در معادله (۳.۲) $p(r)$ یک چند جمله‌ای و $\phi_{l,k}$ دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه $۲k$ است. توابع پایه شعاعی متداول وندلند [1] به ازای $d = ۳$ با تکیه‌گاه فشرده در جدول ۱.۲ معرفی شده است. لازم به ذکر است که توابع معرفی شده در جدول ۱.۲ را می توان با تغییر مقیاس متغیر r با $\frac{r}{\sigma}$ به توابع با تکیه‌گاهی در $[۰, \sigma]$ تغییر داد. نمودار تعدادی از توابع پایه‌ای با پارامتر پهنای متفاوت در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.

۳.۲ درونیابی با توابع پایه شعاعی

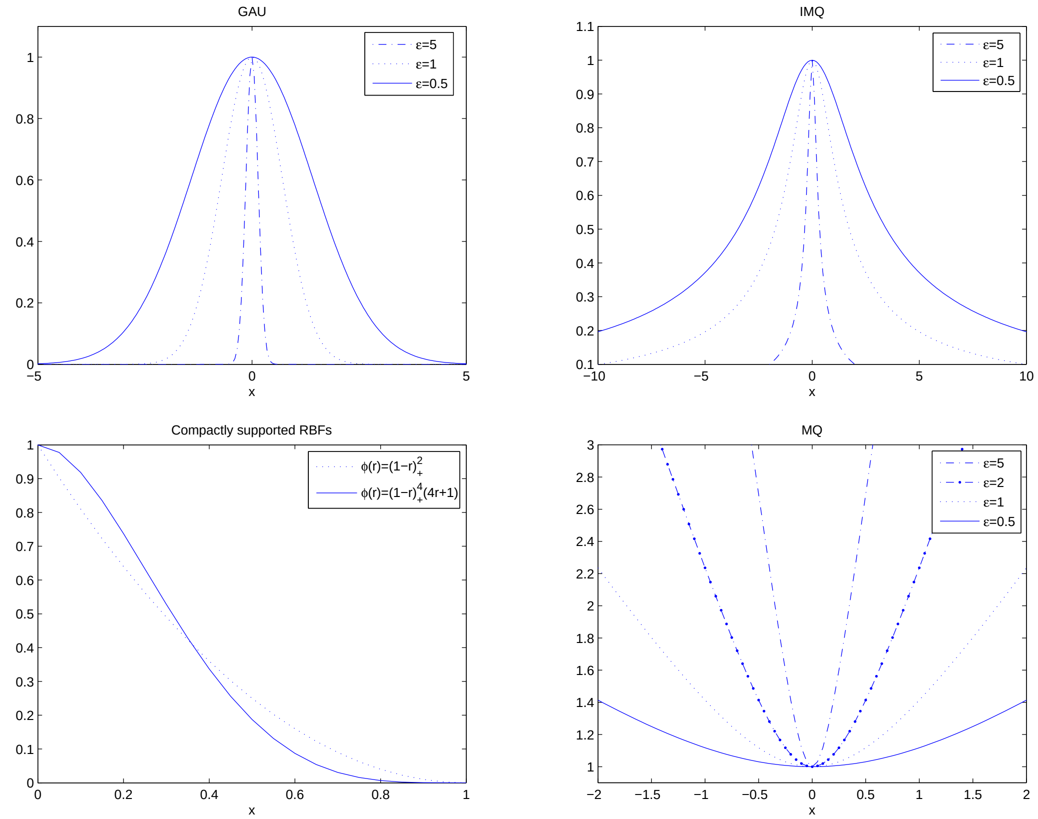
نقطه‌های متمایز $x_۱, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$ و مقدار تابع $u(x_۱), \ldots, u(x_N)$ متناظر با آن نقاط مفروض است. مساله استاندارد درونیابی با استفاده از توابع پایه شعاعی محاسبه تابع درونیابی بصورت

$$s(x) = \sum_{j=۱}^{N} \lambda_j \phi(\|x - x_j\|) + p(x), \tag{۴.۲}$$

است. که در آن $\|.\|$ نرم اقلیدسی، $\lambda_j \in \mathbb{R}$، $j = ۱, \ldots, N$ ضرایب مجهول و $p \in \Pi_{m-۱}^d$ فضای خطی تولید شده از چندجمله‌ای‌ها d متغیره از درجه کوچکتر یا مساوی $m-۱$ می‌باشد.

ماتریس $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ را بصورت $A_{ij} = \phi(\|x_i - x_j\|)$، $i, j = ۱, \ldots, N$ تعریف نموده و فرض می‌کنیم $\hat{m}$، بعد فضای خطی $\prod_{m-۱}^d$ باشد. بدیهی است که $\hat{m} = \binom{m+d-۱}{d}$. همچنین فرض کنید $p_۱, \ldots, p_{\hat{m}}$ پایه‌ای برای $\prod_{m-۱}^d$ باشد

[1] Wendland



شکل ۱.۲: نمودار یک بعدی تعدادی از توابع پایه شعاعی با پارامتر پهناهای متفاوت

و ماتریس $P \in R^{N\times\hat{m}}$ را بفرم $P_{jk} = p_k(x_j)$، $k = 1,\dots,\hat{m}$، $j = 1,\dots,N$ تعریف می‌کنیم. ضرایب مجهول $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ و $\gamma_1,\dots,\gamma_{\hat{m}}$ با اعمال شرایط درونیابی $s(x_j) = u(x_j)$، $j = 1,\dots,N$ و $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_k(x_j) = 0$، $k = 1,\dots,\hat{m}$ حاصل می‌شود. اعمال این شرایط منجر به دستگاه خطی متقارن بلوکی بصورت زیر می‌شود.

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{۵.۲}$$

که در آن $u = [u(x_1)\dots u(x_N)]^T$، $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]^T$ و $\gamma = [\gamma_1 \dots \gamma_{\hat{m}}]^T$.

ماتریس متناظر با دستگاه (۵.۲)، به ازای هر مجموعه از نقاط مجزای x_j، $j = 1,\dots N$ معکوس پذیر است اگر و تنها اگر ماتریس P رتبه کامل ستونی باشد (میشلی، ۱۹۸۶). به همین دلیل $N \geq \hat{m}$ شرط لازم برای معکوس پذیری ماتریس ضرایب است.

اگر تابع u هموار باشد و تابع پایه شعاعی هموار ϕ برای درونیابی استفاده شود کاربر می‌تواند انتظار خطای خیلی کوچکی را داشته باشد.

تعریف ۱.۳.۲. (وندلند، ۱۹۹۵) برای یک دامنه کران‌دار Ω فاصله پرکننده بر مجموعه نقاط $X = \{x_1,\dots,x_N\} \in \Omega$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$h := h_{X,\Omega} := \sup_{x\in\Omega} \min_{1\leq j\leq N} \|x - x_j\|_2.$$

فاصله پرکننده را می‌توان فاصله حداکثری h تعبیر کرد که به ازای هر $x \in \Omega$ یک نقطه x_j با این فاصله موجود باشد.

در عمل هرگاه تراکم نقاط بیشتر شود، به عبارت دیگر $h \to 0$ خطای درونیابی با استفاده از توابع پایه شعاعی همگرا به صفر می‌شود (وا، ۲۰۰۳). برای توابع پایه شعاعی هموار از مرتبه بینهایت مانند توابع گاوسی و مالتی کوادراتیک معکوس حتی می‌توان همگرایی نمایی بفرم $\exp^{(-c/h)}$ بدست آ ورد (وندلند، ۱۹۹۵). اما یک عامل بازدارنده جدی هنگام استفاده از توابع پایه شعاعی برای مجموعه نقاط چگال یا بطور صحیح‌تر برای مجموعه نقاط با فاصله پرکننده کوچکتر وجود دارد. به عبارت دیگر، هرگاه فاصله جدا کننده [2] کوچکتر شود، عدد حالت ماتریس ضرایب در (۵.۲) به شدت افزایش می‌یابد.

تعریف ۲.۳.۲. (لارسن، ۲۰۱۳) برای دامنه کران‌دار Ω فاصله جدا کننده برای مجموعه نقاط $X = \{x_1,\dots,x_N\} \in \Omega$

[2] Separation distance

بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$q_X := \frac{۱}{۲}\min_{i\neq j}\|x_i - x_j\|_۲.$$

فاصله جدا کننده را می توان ماکسیمم شعاع $r > ۰$ تعبیر کرد که گوی‌های $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_j\|_۲ < r\}$ جدا از هم باشند.

مجموعه نقاط X را یکنواخت گوسی [3] نسبت به ثابت $c > ۱$ نامند هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$\frac{۱}{c}q_X \leq h_{X,\Omega} \leq cq_X$$

وقتی که فاصله جدا کننده و فاصله پرکننده متناسب باشند، ارتباط نزدیکی بین خطا و پایداری درونیابی وجود دارد. به عبارت دیگر ساختن تابع درونیابی از توابع پایه شعاعی که همزمان خطای خیلی کوچک با پایداری خوب را تضمین کند، وجود ندارد.

[3] Quasi-uniform

فصل ۳

روش هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی فراگیر

در این فصل، روش هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی فراگیر برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وابسته به زمان مورد مطالعه قرار می‌گیرد. جزییات این روش را با سه مثال ارایه خواهیم داد.

۱.۳ شرایط مرزی چندگانه

حالت یک بعدی معادلات روزنا را در بازه متقارن $[-L,\, L]$ بصورت

$$u_t + \alpha(x,t)u_{xxxxt} + \beta u_{xx} = g_u(u)u_x, \quad (x,t) \in [-L,\, L] \times (0,\, T], \tag{۱.۳}$$

با شرایط مرزی زیر است

$$u(\pm L, t) = f_1(\pm L, t), \quad t \in (0,\, T], \tag{۲.۳}$$

$$u_x(\pm L, t) = f_2(\pm L, t), \quad t \in (0,\, T]. \tag{۳.۳}$$

در ادامه این رساله، فرض شده که

- به ازای هر $(x,t) \in \Omega \times [0, T]$ ثابت‌های مثبت α_0 و β_0 وجود دارند بطوریکه $\alpha_0 < \alpha(x,t) < \beta_0$.
- تابع g را یک چندجمله‌ای از درجه ۱ + s، $s > 0$ در نظر می‌گیریم.

تا کنون، حتی برای حالت یک بعدی نیز هیچ روش مشخصی در هم‌محلی با توابع پایه شعاعی برای شرایط مرزی چندگانه در مسایل وابسته به زمان ارایه نشده است. در معادله (۱.۳) دو شرط مرزی وجود دارد که باید در نقاط انتهایی دامنه صدق کنند. به عبارت دیگر، چهار شرط مرزی باید در دو نقطه مرزی صدق کنند. بنابراین، تعداد معادلات در هم‌محلی معادله (۱.۳) در نقاط درونی بیشتر از تعداد نقاط خواهد بود. در واقع با یک دستگاه ابر معین سروکار خواهیم داشت که یا باید تعدادی از معادلات را کنار بگذاریم و یا باید تعدادی متغیر اضافی در نظر بگیریم.

تاکنون این طیف از مسایل در ادبیات روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی مطرح نشده است ولی در روش‌های هم‌محلی دیگری مانند روش‌های طیفی مورد بررسی قرار گرفته است. ما پنج روش که برای این نوع مسایل مورد بررسی قرار گرفته است را بصورت زیر لیست کرده‌ایم:

۱. ترکیبی از شرایط مرزی ضعیف و سخت

۲. روش‌های جریمه‌ای طیفی

۳. تبدیل به دستگاه از مرتبه پایین‌تر

۴. روش نقطه تصوری

۵. روش باز تصویر

در این رساله، ما فقط روش‌های (۳)-(۵) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم چرا که هیچ راهی برای پیدا کردن پارامتر جریمه که منجر به پایداری عددی جواب شود، برای روش‌های (۱) و (۲) وجود ندارد.

۱.۱.۳ تبدیل به دستگاه از مرتبه پایین‌تر

از جمله روش‌های متداول برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات از مرتبه بالاتر تبدیل به دستگاه معادلات دیفرانسیلی از مرتبه پایین‌تر می‌باشد. اگر قرار دهیم $w = u_x$ آنگاه می‌توان معادله (۱.۳) را بصورت زیر بازنویسی کرد.

$$u_t + \alpha(x,t)w_{xxxt} + \beta w_x = wg_u(u) \tag{۴.۳}$$

$$w_t - u_{xt} = 0 \tag{۵.۳}$$

که در آن $u(\pm L,t) = f_1(\pm L,t)$ و $w(\pm L,t) = f_2(\pm L,t)$ شرایط مرزی هستند.

مزیت این روش این است که شرایط مرزی نیومن برای u به شرایط مرزی دریکله برای w تبدیل می‌شود ولی ابعاد دستگاه دو برابر می‌شود و حجم محاسبات بصورت قابل توجه افزایش می‌یابد. به همین دلیل، تبدیل به دستگاه از مرتبه پایین‌تر برای روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی فراگیر که ماتریس ضرایب پر هست، به صرفه نمی‌باشد. همچنین برای روش هم‌محلی بر اساس توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی که دارای ماتریس تنک می‌باشد، راه حل خوبی محسوب نمی‌شود.

۲.۱.۳ روش نقطه تصوری

تاکنون، روش‌های مبتنی بر نقطه تصوری برای اعمال شرایط مرزی چندگانه در روش تفاضلات متناهی مورد استفاده قرار گرفته است و اخیرا تعمیم آن برای روش‌های هم‌محلی فراگیر مانند روش‌های طیفی توسط فرنبرگ مورد بررسی قرار گرفته است (فرونبرگ، ۲۰۰۷).

۲.۳ پیاده سازی با متلب

در این بخش پیاده سازی روش نقطه تصوری و روش باز تصویر با متلب برای معادله روزنا ارایه شده است. همچنین برای نشان دادن جزییات بیشتر از پیاده سازی، برنامه‌های متلب روش‌های مطرح شده ارایه شده است.

۱.۲.۳ پیاده سازی روش نقطه تصوری

پیرو آنچه که در بخش‌های قبلی مربوط به روش نقطه تصوری گفته شد، دو نقطه مجازی به تعداد نقاط گسسته شده اضافه نموده و ماتریس مشتق متناظر با تابع توسیع یافته‌ی پایه مالتی‌کوادریک معکوس را ایجاد می‌کنیم. بعد از تفکیک ماتریس مشتق، می‌توان ماتریس $N-۲ \times N-۲$ متناظر با نقاط درونی را بدست آورد. همچنین شرایط مرزی نیز توسط نقاط مرزی و نقاط تصوری اعمال می‌شود. سرانجام با به کاربردن روش ترازی می‌توان جواب تقریبی را محاسبه کرد.

کدهای ارایه شده معادله ارایه شده در (۱.۳)-(۳.۳) که دارای جواب دقیق $u(x,t)=\mathrm{sech}(x-t)$ می‌باشد؛ به ازای $g(u)=۱۰u^۳-۱۲u^۵-\frac{۳}{۲}u$، $\beta=۰$، $\alpha(x,t)=۱$ و $N=۵۱$ نقطه گسسته شده با توزیع یکنواخت را در بازه $[-۱,۱]$ حل می‌کند. دستگاه معادله دیفرانسیل معمولی حاصل با تابع **s۱۵ode** متلب حل شده است.

```
N = 51; L = 1; Tfinal = 30;
phi = @(ep,r) 1./sqrt(1+(ep*r).^2); %Inverse MQ-RBF
x = linspace(-1,1,N);
linmap = @(x,x1,x2,y1,y2) (y2-y1)*(x-x1)/(x2-x1) + y1;
```

```
% Map x to [-L,L] such that x(2) = -L, x(N-1) = L
% and x(1), x(N) are left and right fictitious points respectively.
x = linmap(x,x(2),x(N-1),-L,L); x = x(:); % RBF nodes
ep = 0.1/min(diff(x)); % Shape parameter
```

که تابع **odefun** بصورت زیر است.

```
function U = odefun(t,u,x,N,D1d,D1bf,D4d,D4bf,Id)
F = [sech(x([2 N-1]) - t); sech(x([2 N-1]) - t).*tanh(x([2 N-1]) - t)];
Ft = [-sech(x([2 N-1]) - t).*tanh(x([2 N-1]) - t);...
end
```

۲.۲.۳ پیاده سازی روش باز تصویر

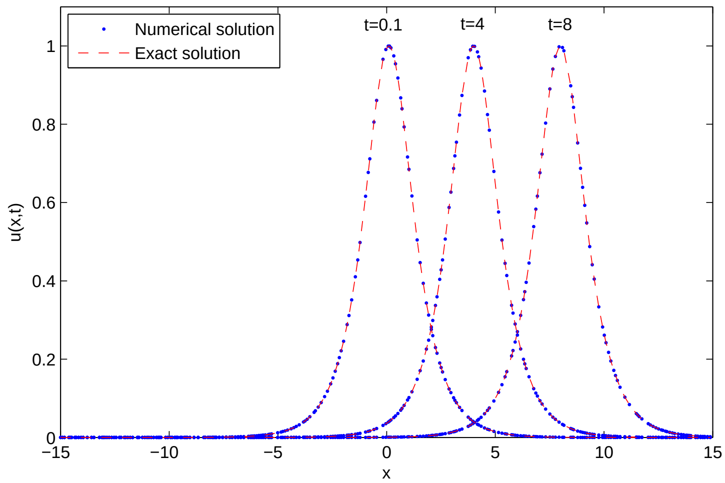
در بخش مربوط به روش باز تصویر، چگونگی تبدیل معادله روزنا به دستگاه جبری دیفرانسیلی توضیح داده شد. به خاطر داریم که اعمال چهار شرط مرزی در نقاط مرزی منجر به چهار معادله جبری شد و $N-۴$ معادله دیفرانسیلی نیز از هم‌محلی $N-۴$ نقطه درونی کمکی ایجاد شد. همان طور که گفته شد نقاط کمکی نباید منطبق بر نقاط اصلی گسسته شده باشد.

فرض کنیم بردار $u = [u_۱ \cdots u_N]^T$ تقریب عددی جواب در نقاط $x_۱, \cdots, x_N$ باشد. حالت گسسته شده معادله با استفاده از روش باز تصویر را می‌توان بصورت ماتریسی و برداری زیر نشان داد.

```
N = 51; L = 1; Tfinal = 30;
phi = @(ep,r) 1./sqrt(1+(ep*r).^2); %Inverse MQ-RBF
xc = linspace(-L,L,N).'; % RBF nodes
ep = 0.1/min(diff(xc)); % Shape parameter
```

که تابع **daefun** بصورت زیر است.

```
function F = daefun(t,u)
u_t = (-1.5 - 60*u.^4 + 30*u.^2).*(D*u);
BC = [u(1)-sech(xc(1)-t);u(N)-sech(xc(N)-t);...
end
```



شکل ۱.۳: جواب دقیق و تقریبی حاصل از روش باز تصویر به ازای ۲۵۰ نقطه با توزیع هالتن و $\varepsilon = ۱$

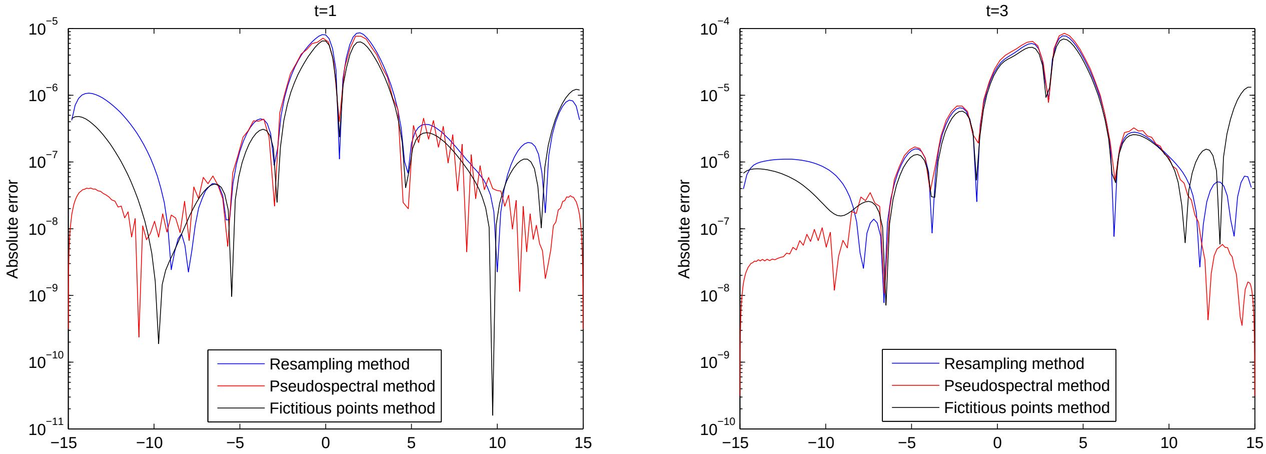
۳.۳ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از روش‌های باز تصویر و نقطه تصوری برای حل عددی معادله روزنا ارایه شده است. در این نتایج تابع چند مربعی معکوس بعنوان تابع پایه‌ای در نظر گرفته شده است. همچنین دامنه $\Omega = [-۱۵, ۱۵]$ با توزیع یکنواخت و توزیع نقاط هالتن گسسته سازی شده است. معادله توسیع یافته روزنا که در مراجع (وندلند، ۱۹۹۵؛ ایتو، ۲۰۰۹) بیان شده است را در نظر می‌گیریم.

$$u_t + \frac{۱}{۲}u_{xxxxt} = g(u)_x, \qquad (۶.۳)$$

که $g(u) = ۱۰u^۳ - ۱۲u^۵ - \frac{۳}{۲}u$. جواب دقیق معادله (۶.۳) بصورت $u(x,t) = \operatorname{sech}(x-t)$ می‌باشد. شرایط اولیه به ازای $t = ۰$ را می‌توان از جواب دقیق استخراج کرد.

$$u(x, ۰) = \operatorname{sech}(x),$$



شکل ۲.۳: مقایسه خطای مطلق روش باز تصویر و نقطه تصوری به ازای ۱۵۰ نقطه یکنواخت و روش باز تصویر طیفی به ازای ۱۵۰ نقطه چبیشف در $t = ۱$ و $t = ۳$

جدول ۱.۳: جواب تقریبی اختیار فروش امریکایی با دو دارایی پایه ناهمبسته با توزیع یکنواخت نقاط به ازای $\varepsilon = ۱٫۵$

$P(S_۱, S_۲, t)$	نقطه ۱۶ × ۱۶	نقطه ۲۱ × ۲۱	نقطه ۳۱ × ۳۱	نقطه ۴۱ × ۴۱
$P(۰٫۹, ۱, ۰)$	۷٫۸۱۵۹e − ۰۰۲	۷٫۴۸۶۶e − ۰۰۲	۷٫۶۳۹۸e − ۰۰۲	۷٫۵۹۲۰e − ۰۰۲
$P(۱, ۰٫۹, ۰)$	۶٫۶۳۷۳e − ۰۰۲	۶٫۱۸۴۲e − ۰۰۲	۶٫۳۴۰۰e − ۰۰۲	۶٫۳۷۰۰e − ۰۰۲
$P(۱, ۱٫۱, ۰)$	۳٫۱۷۹۳e − ۰۰۲	۳٫۱۱۵۴e − ۰۰۲	۳٫۲۲۹۰e − ۰۰۲	۳٫۲۰۴۲e − ۰۰۲
$P(۱٫۱, ۱, ۰)$	۲٫۵۴۴۷e − ۰۰۲	۲٫۵۱۵۹e − ۰۰۲	۲٫۵۸۶۵e − ۰۰۲	۲٫۵۹۲۵e − ۰۰۲

همچنین شرایط مرزی نیز بفرم زیر است.

$$u(-۱۵,t) = \mathrm{sech}(-۱۵-t), \qquad u(۱۵,t) = \mathrm{sech}(۱۵-t),$$

$$u_x(-۱۵,t) = -\mathrm{sech}(-۱۵-t)\tanh(-۱۵-t), \qquad u_x(۱۵,t) = -\mathrm{sech}(۱۵-t)\tanh(۱۵-t).$$

جدول ۲.۳: خطای L_∞ حاصل از روش باز تصویر و نقطه تصوری به ازای ۱۵۰ نقطه با توزیع یکنواخت و $\varepsilon =$ ۰٫۵ و خطای L_∞ حاصل از روش باز تصویر طیفی به ازای ۱۵۰ نقطه چبیشف

t	بازتصویر	نقطه‌تصوری	بازتصویرطیفی
۰٫۱	۴٫۷۸۴۲$E^{-۶}$	۲٫۹۵۶۵$E^{-۶}$	۴٫۵۵۷۲$E^{-۶}$
۰٫۵	۵٫۴۰۱۸$E^{-۶}$	۴٫۷۳۳۸$E^{-۶}$	۴٫۵۶۰۳$E^{-۶}$
۱	۸٫۷۹۳۳$E^{-۶}$	۶٫۹۲۳۹$E^{-۶}$	۷٫۶۵۸۰$E^{-۶}$
۳	۸٫۱۰۳۲$E^{-۵}$	۷٫۳۵۰۶$E^{-۵}$	۸٫۴۸۷۶$E^{-۵}$
۵	۲٫۶۰۴۱$E^{-۴}$	۲٫۴۹۶۳$E^{-۴}$	۲٫۸۴۲۵$E^{-۴}$
۸	۶٫۹۷۳۱$E^{-۴}$	۲٫۰۵۲۴$E^{-۳}$	۷٫۸۳۲۲$E^{-۴}$
۱۰	۱٫۰۸۶۸$E^{-۳}$	۱٫۵۱۶۹$E^{-۲}$	۱٫۲۴۶۴$E^{-۳}$

جدول ۳.۳: خطای L_∞ حاصل از روش باز تصویر و نقطه تصوری به ازای ۱۵۰ نقطه با توزیع یکنواخت و $\varepsilon =$ ۰٫۵ و خطای L_∞ حاصل از روش باز تصویر طیفی به ازای ۱۵۰ نقطه چبیشف

باز تصویر طیفی	طیفی	باز تصویر	t
۵۵۷۲.۴	۹۵۶۵.۲	۷۸۴۲.۴	۱.۰
۵۶۰۳.۴	۷۳۳۸.۴	۴۰۱۸.۵	۵.۰
۶۵۸۰.۷	۹۲۳۹.۶	۷۹۳۳.۸	۱
۴۸۷۶.۸	۳۵۰۶.۷	۱۰۳۲.۸	۳
۸۴۲۵/۲	۴۹۶۳.۲	۶۰۴۱.۲	۵
۸۳۲۲.۷	۰۵۲۴.۲	۹۷۳۱.۶	۸
۲۴۶۴.۱	۵۱۶۹.۱	۰۸۶۸.۱	۱۰

فصل ۴

روش‌های هم‌محلی موضعی مبتنی بر توابع پایه شعاعی

در فصل قبل، روش هم‌محلی توابع پایه شعاعی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی وابسته به زمان مورد مطالعه قرار گرفت. در این فصل، فرمولبندی دیگری از توابع پایه شعاعی که منجر به درونیابی موضعی با نقاط پراکنده می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برخلاف روش‌های فراگیر، درونیابی موضعی منجر به ماتریس ضرایب تنک می‌شود. در این فصل، در حالت کلی دو روش موضعی به شرح زیر بررسی خواهد شد.

۱. توابع پایه شعاعی مبتنی بر تفاضلات متناهی

۲. روش توابع پایه شعاعی مبتنی افراز واحد

۱.۴ روش افراز واحد

پیوست آ

کدهای زبان برنامه‌نویسی Python

در این قسمت کدهای مربوط به نرم افزار شما قرار دارد.

```python
# Import Libraries
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 2*np.pi, 100)
y = np.sin(x)
plt.plot(x, y)
```

Listing :1. Example Python code

مرجع‌ها

Fasshauer, G., Khaliq, A. Q. M., and Voss, D. A. (2004), "Using mesh free approximation for multi asset American options," *in: C.S. Chen (Ed.), Mesh free methods, Journal of Chinese Institute of Engineers*, 27, 563–571, special issue.

Fornberg, B. and Zuev, J. (2007), "The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation," *Comput. Math. Appl.*, 54, 379–398.

Hon, Y. C. and Mao, X. Z. (1999), "A radial basis function method for solving options pricing models," *J. Financial Engineering*, 8, 31–49.

Ito, K. and Toivanen, J. (2009), "Lagrange multiplier approach with optimized finite difference stencils for pricing American options under stochastic volatility," *SIAM J. Sci. Comput.*, 31, 2646–2664.

Kwok, Y. K. (2008), *Mathematical models of financial derivatives*, Springer Finance, Berlin: Springer, 2nd ed. .

Larsson, E. and Heryudono, A. (2013), "A partition of unity radial basis function collocation method for partial differential equations," Manuscript in preparation.

McLain, D. H. (1976), "Two dimensional interpolation from random data," *Comput. J.*, 19, 178–181.

Micchelli, C. A. (1986), "Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions," *Constr. Approx.*, 2, 11–22.

Platte, R. B. (2005), *Accuracy and stability of global radial basis function methods for the numerical solution of partial differential equations*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, thesis (Ph.D.)–University of Delaware.

Rieger, C. and Zwicknagl, B. (2010), “Sampling inequalities for infinitely smooth functions, with applications to interpolation and machine learning,” *Adv. Comput. Math.*, 32, 103–129.

Wendland, H. (1995), “Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree,” *Adv. Comput. Math.*, 4, 389–396.

Wu, Z. and Hon, Y. C. (2003), “Convergence error estimate in solving free boundary diffusion problem by radial basis functions method,” *Engrg. Anal. Bound. Elem.*, 27, 73–79.

Zvan, R., Forsyth, P. A., and Vetzal, K. R. (1998), “Penalty methods for American options with stochastic volatility,” *J. Comput. Appl. Math.*, 91, 199–218.

واحدی، مصطفی (۱۳۸۷)، ”درختان پوشای کمینه دورنگی مسطح،“ *مجله فارسی نمونه*، ۱، ۲۲–۳۰.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ا

احتمالی	Probabilistic
ارزیابی	Valuation
اندازه	Measure

پ

پایدار	Stably

ت

توپولوژی ضعیف	Weak Topology

د

دامنه‌توانی	Powerdomain
دامنه معنایی	Semantic Domain

م

مجموعه جزئاً مرتب کامل جهت‌دار	Dcpo
مرتب	Ordered

Abstract

In this thesis, we invistigate the global RBF collocation method for the non-linear system of the time-dependent PDEs. Even for the one-dimensional case, how to implement multiple boundary conditions for a time-dependent problem is not obvious. We explore this difficulty and possible remedies at theoretical and practical levels. Theoretically, we study the error estimate of global RBF collocation method when the method of line is applied for discretized form of the time-dependent non-linear PDEs. Computationally, we present the details of implementation for the new proposed methods. The efficiency of the proposed methods is demonstrated by comparing with the other methods. We also study the local RBF collocation methods for numerical solution of the PDEs. The partition of unity based on RBF is introduced as a robust method for the time-dependent PDEs. The properties of the partition of unity method (PUM) allow to have greater flexibility to adjust local approximation. We generate the differentiation matrices based on RBF–PUM discretizations and show that such schemes can lead to sparse matrices that is suitable for numerical study of the large scale problems. As a more practical approach, we develop the RBF–PUM for the numerical approximation of the two-dimensional American put option pricing.

Keywords: *PDEs, Radial basis function, Partition of unity method, collocation method, Error estimate.*

Allameh Tabataba'i University
Faculty of Statistics, Mathematics and Computer
Department of Statistics

Thesis Submitted in Partial Fulfillment for the Degree of Master of Science (MSC) in the Data Science

Title

FIRST LINE OF TITLE
SECOND LINE OF TITLE

Supervisor

name of your supervisor

Advisor

name of your enadvisor

Examiner

name of your enreferee

By

your name

winter 2024