Численные методы

Дмитрий Чегодаев, СПбАУ 202/302

Задача 1, вариант 22

Полагаем краевые условия для сплайна $s'(a) = f'(a) = d_1; s'(b) = f'(b) = d_n$. a) Обозначим $m_i = s'(x_i)$. Сетка равномерная, поэтому система имеет вид

$$\begin{cases} 2hm_1 + hm_2 = 6(\frac{f_2 - f_1}{h} - d_1) \\ hm_{i-1} + 4hm_i + hm_{i+1} = 6(\frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h}), \quad i \in \{2, ..., n\} \\ hm_n + 2hm_{n+1} = 6(d_n - \frac{f_{n+1} - f_n}{h}) \end{cases}$$

b) Вынесем h, тогда получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & ... & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & ... \\ ... & & & & \\ 0 & ... & 1 & 4 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

И систему уравнений можно записать в виде

$$hA \begin{pmatrix} m_1 \\ ... \\ m_n \end{pmatrix} = F$$

c) Определитель тридиагональной матрицы $n+1 \times n+1$ вычисляется по формуле $f_{n+1} = a_{n+1}f_n - c_n b_n f_n$ (разложили по строке), где a_n - элементы главной диагонали, b_n - верхней диагонали, c_n - нижней.

Не будем решать рекурренту, а лишь дадим оценку $detA$. Покажем последовательно, что $f_i > 0$ и $f_i > f_{i-1}$.

$f_1 = a_1 = 2$, $f_2 = a_2 f_1 - 1 = 4f_1 - 1 = 7 > f_1$.

Для $i = 3..n \quad f_i = 4f_{i-1} - f_{i-2} > 3f_{i-1} > 0$.

Тогда и $detA = f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} > f_{n-1} > 0$.

Следовательно, система (сплайн) имеет единственной решение.

Задача 3, вариант 12

Разложим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \beta & 0 \\ \beta & 2\sqrt{2} & \beta \\ 0 & \beta & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = L{+}D{+}U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Метод сходится тогда и только тогда, когда спектральный радиус

$r((D + L)^{-1}U) < 1$. Вычислим:

$$r((D + L)^{-1}U) = max\{|\frac{-\beta^2}{4}|, 0\} = |\frac{-\beta^2}{4}|$$

Получим неравенство $\frac{\beta^2}{4} < 1$, значит $|\beta| < 2$