Лекция 17

16 декабря 2024

Теорема 1 – 1-ая теорема Вейерштрасса

Функция непрерывная на отрезке ограничена на этом отрезке.

Доказательство.

1. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда $\forall A > 0\ \exists x \in [a, b] : f(x) > A$.
2. Рассмотрим последовательность $A_n = n \implies x_n \in [a, b] : f(x_n) > n$.
3. По теореме Больцано-Вейерштрасса можно выделить $\{x_{n_k}\} \to c \in [a, b]$, причем $f(x_{n_k}) > k \implies f(x_{n_k})$ расходится.
4. С другой стороны, в силу непрерывности $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$.
5. Получено противоречие.

Замечание: для интервала теорема 1 неверна.

Утверждение 1

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена сверху на X. Тогда $\exists \sup\limits_X f(x)$. Если $\exists x_1 \in X : f(x_1) = \sup\limits_X f(x)$, то говорят, что $f(x)$ достигает свою верхнюю.

Теорема 2 – 2-ая теорема Вейерштрасса

Непрерывная на отрезке функция достигает на этом отрезке свои точные грани.

Доказательство.

1. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.
2. Предположим, что утверждение теоремы неверно: $\forall x \in [a, b]\ f(x) < M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.
3. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$, непрерывную на $[a, b]$.
4. По теореме 1 $g(x)$ ограничена на $[a, b] \implies \exists A > 0 : \forall x \in [a, b] 0 < |g(x)| < A \implies f(x) < M - \dfrac{1}{A} \implies M - \dfrac{1}{A}$ — верхняя грань $f(x)$ на $[a, b]$.
5. Получено противоречие.

Следствие: непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке минимальное и максимальное значения.

1 Равномерная непрерывность функции

Определение 1

Говорят, что $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на $X \subseteq \mathbb{R}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1, x_2 \in X : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Утверждение 2

Если функция равномерно непрерывна на X, то она непрерывна на X.

Теорема 3 – Кантора

$f(x)$ непрерывна на $[a, b] \iff f(x)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство.

1. Прелположим, что $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b] \implies \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_1, x_2 \in [a, b] : |x_1 - x_2| < \delta$, но $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon$.
2. Возьмем $\{\delta_n\} \to 0$ $(\delta_n > 0)$. Согласно предположению $\forall \delta_n \ \exists x'_n, x''_n \in [a, b] : |x'_n - x''_n| < \delta_n$, но $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$.
3. По теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ можно выделить сходящиеся к $c \in [a, b]$ подпоследовательности.
4. $\left\{x'_{k_n}\right\} \to f(c) \wedge \left\{x''_{k_n}\right\} \to f(c) \implies \left|f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n})\right| \to 0$.
5. Получено противоречие.

2 Локальные экстремумы. Поведение функции в точке

Определение 2

Пусть дана функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $c \in (a, b)$. Говорят, что $f(x)$ возрастает в точке c, если

$$\exists U(c) : f(x) > f(c) \text{ при } x > c \text{ и } f(x) < f(c) \text{ при } x < c$$

Теорема 4 – Достаточное условие возрастания

$f(x) \in D(c) \ \wedge \ f'(c) > 0 \implies f(x)$ возрастает в c.

Доказательство.

1. Пусть $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$

2. Из 1 следует, что в этой δ-окрестности c $f(x) > f(c)$ при $x > c$ и $f(x) < f(c)$.

Пример. $f(x) = x^3$. $f'(0) = 0$, но $f(x)$ возрастает в точке 0.

Определение 3

Пусть дана функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ и $c \in (a, b)$. Говорят, что в точке c функция $f(x)$ имеет локальный максимум, если

$$\exists U(c) : \forall x \in U(c) \ f(x) \leq f(c)$$

Лемма 1 – Ферма

$f(x) \in D(c) \wedge (c$ — локальный экстремум$) \implies f'(c) = 0$.

Доказательство.

1. Пусть $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум, то есть $\exists U(c) : \forall x \in U(c) \ f(x) \leq f(c)$.

2. Предположим, что $f'(c) > 0 \implies$ по теореме 4 $f(x)$ возрастает в $c \implies \exists U(c) : f(x) > f(c)$ при $x > c \implies$ получено противоречие.

3. Аналогично можно доказать, что $f'(c)$ не может быть меньше нуля.

Замечание 1: условие равенства производной нуля — необходимое, но не достаточное условие локального экстремума.
Замечание 2: теорема Ферма показывает, что касательная к графику функции в точке c параллельна OX.

Пример. $f(x) = x^3$. $f'(0) = 0$, но 0 не является точкой экстремума.

3 Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 5 – Ролля

$f(x) \in C([a, b]) \ \wedge \ f(x) \in D((a, b)) \ \wedge \ f(a) = f(b) \implies \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

1. $f(x)$ непрерывна $[a, b] \implies$ по 2 теореме Вейерштрасса она имеет на $[a, b]$ максимальное и минимальное значение.

2. Положим $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x), \ m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$.

3. Если $M = m$, то $f(x) = const \implies f'(x) = 0$.

4. Если $M > m$, то хотя бы одно из значений функция принимает во внутренней точке c отрезка $[a, b] \implies f'(c) = 0$ по теореме Ферма.