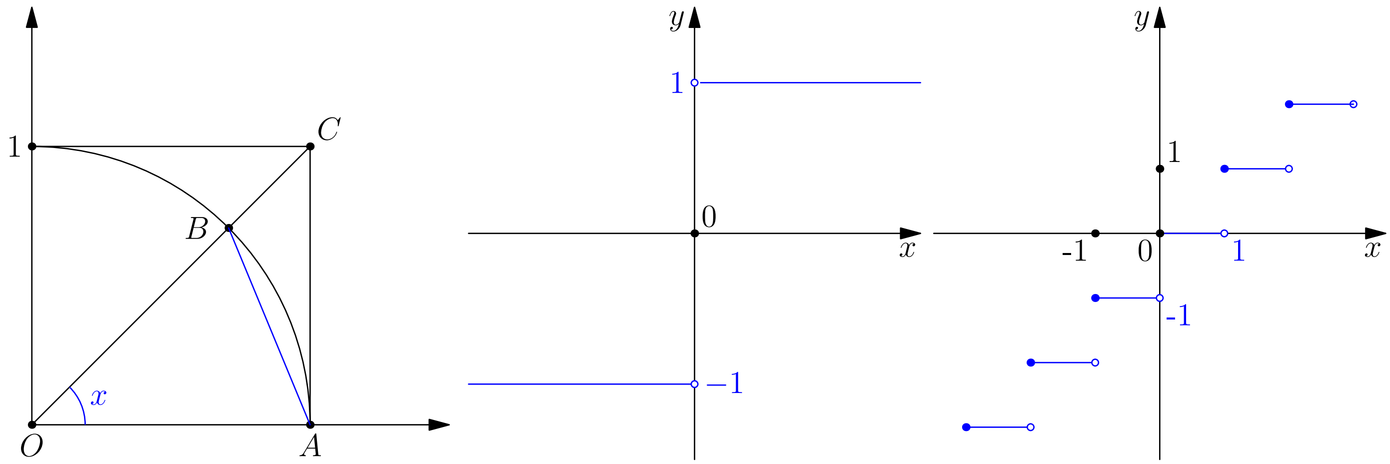
Лекция 4

24 сентября 2024

Замечание: существование предела функции в точке никак не связано с тем, опрделена сама функция в этой точке или нет.
Домашнее задание: привести пример, когда функция в точке определена, а предела в этой точке у неё нет.



(a) (b) $y = sign(x)$ (c) $y = [x]$

Пример 6 (рисунок а). $f(x) = \sin(x)$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$:

1. Площадь равнобедренного треугольника OAB, вписанного в сектор единичной окружности, меньше площади этого сектора: $S_{AOB} = \frac{1}{2}\sin(x) < S_{\text{сект.}AOB} = \frac{1}{2}x \implies \sin(x) < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
2. С другой стороны, $S_{\text{сект.}AOB} < S_{AOC}$, то есть $\frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan(x) \iff x < \tan(x)$.
3. В силу нечетности функций $\sin(x)$ и x: $|\sin(x)| < |x|$.
4. Воспользуемся определением предела: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0\ \forall x : 0 < |x| < \delta \implies |\sin(x) - 0| = |\sin(x)| < |x| < \varepsilon$.

1 Односторонние пределы

Может случиться так, что при $x \to a$ функция $f(x)$ имеет разные предельные значения.

Пример 1 (рисункок b). $f(x) = sign(x) = \begin{cases} +1 & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -1 & \text{если } x < 0 \end{cases}$.

Определение 1

Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a справа, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in (a, a+\delta)\ |f(x) - B| < \varepsilon$.

Замечание: обозначается как $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = B$ или $f(a+0) = B$.

Пример 2 (рисунок с). $f(x) = [x]$. Целая часть числа x — это такое наибольшее целое число, не превосходящее x. $f(n-0) = n-1$, $f(n+0) = n$.

Теорема 1 – О связи пределов

Существование предела в точке равносильно существованию равных односторонних пределов в этой точке.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \iff \begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = A \end{cases}$$

.

2 Предел функции при $x \to \infty$

Пусть $f(x)$ задана на множестве X и $\forall A\ \exists x \in X : x > A$.

Определение 2

Число B называется педелом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists A(\varepsilon) : \forall x > A\ |f(x) - B| < \varepsilon$.

Замечание 1: обозначается как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B$.

Замечание 2: если $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = B \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B \end{cases}$, то пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = B$.

Пример. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.
2. Выберем в качестве A число $\frac{1}{\varepsilon}$.
3. Получим, что $\forall x > A : |f(x) - 0| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon$.

Замечание: частный случай предела функции при $x \to +\infty$ — это предел числовой последовательности.

3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 3

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой в точке a (при $x \to a$), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Домашнее задание: записать это определение на языке ε, δ.
Пример 1. $\sin(x)$ бесконечно малая в точке 0.
Замечание: функция бесконечно малая в точке a — вообще говоря — в точке a может не обращаться в 0.
Пример 2. $f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{если } x \neq 0 \\ 1 & \text{если } x = 0 \end{cases}$ бесконечно малая в точке 0.
Замечание: не всякая функция, обращающаяся в 0 в точке a, является бесконечно малой.
Пример 3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ бесконечно мала при $x \to \infty$.

Определение 4

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой в точке a (при $x \to a$), если $\forall A > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < x < \delta \implies |f(x)| > A$.

Замечание 1: обозначается как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.
Замечание 2: если $f(x) > A$, то пишут, что $\lim\limits_{x\to a} = +\infty$.
Пример. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ бесконечно большая в нуле.
Замечание 3: аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.