Лекция 7

15 октября 2024

1 Число e

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, докажем, что она является монотонной и ограниченной.

1. Вспомним неравенство Бернулли: $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1, +\infty) : (1+x)^n = 1 + nx$.
2. Используя неравенство, покажем, что x_n монотонно возрастает. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot$ $\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \cdot \frac{n+1}{n} = 1 \implies \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} > x_n$.
3. Положим $y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N}\ y_n > x_n$. Можно доказать, что y_n монотонно убывает (по аналогии с пунктом 2).
4. Заметим, что $x_n \geq 2$ и $y_n \leq 4$. То есть последовательности x_n и y_n монотонны и ограниченны $\implies$ x_n сходится.

Определение 1 – Определение числа e

Числом e называется предел последовательности $\{x_n\}$, где $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

2 Непрерывность функции

2.1 Непрерывность и точки разрыва функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a.

Определение 2

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример 1. $f(x) = \sin(x)$ непрерывна в нуле, так как $\sin(0) = 0$ и $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$.

Пример 2. $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывна в любой точке, в которой $Q_m(x)$ отличен от нуля.

Определение 3 – Непрерывность на языке $\varepsilon,\ \delta$

Функция $f(x)$ называется непрерыной в точке a, елси $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \{|x - a| < \delta\} : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Утверждение 1 – Свойство устойчивости знака непрерывной функции

Если $f(x)$ непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то она будет положительной и в некоторой окрестности точки a.

Доказательство.

1. Будем считать, что $f(a) > 0$.
2. Возьмем $\varepsilon = f(a)$, тогда (согласно определению) существует такое δ, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon = f(a)$ в δ-окрестности точки a.
3. $-f(a) < f(x) - f(a) < f(a) \implies f(x) > 0$ в δ-окрестности точки a.

Домашнее задание. Проверить на истинность утверждения:

1. Если $f(x)$ непрерывна в точке a, то $|f(x)|$ непрерывна в точке a.
2. Если $|f(x)|$ непрерывна в точке a, то $f(x)$ непрерывна в точке a.

2.2 Односторонняя непрерывность

Пусть $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки a, то есть при $x \in [a,\ a+\delta)$.

Определение 4

Функция $f(x)$ называется непрерывной справа в точке a, если $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

Замечание: аналогично определяется непрерывность слева.
Пример. Рассмотрим $f(x) = [x]$. $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$, $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n - 1$, при этом $f(n) = n$. То есть $f(x)$ непрерывна в точках $x = n$ только справа. В других точках она непрерывна и справа, и слева.

Теорема 1

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и слева, и справа, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

1. По условию: $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
2. Если односторонние пределы функции в точке равны $f(a)$, то у неё существует предел в этой точке равный $f(a)$ (это утверждение было доказано ранее).

2.3 Точки разрыва

Определение 5

Предельная точка области определения функции $f(x)$, в которой данная функция не является непрерывной, называется точкой разрыва данной функции.

Пример 1. $f(x) = [x]$ разрывна в точках $x = n$.

Пример 2. Функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$.

Пример 3. $f(x) = x \cdot D(x)$ непрерывна в нуле и разрывна во всех остальных точках.

2.4 Классификация точке разрыва

Определение 6 – Устранимая точка разрыва

Точка a называется точкой устранимого разрыва, если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, но при этом либо $f(x)$ не определена в точке a, либо $f(a) \neq b$.

Замечание 1: если положить $f(a) = b$, то разрыв будет устранен.

Пример. $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Далее будет доказано, что $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, но при этом $f(x)$ в нуле не определена.

Замечание 2: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{если } x \neq 0 \\ 1 & \text{если } x = 0 \end{cases}$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Определение 7 – Разрыв первого рода

Точка a называется точкой разрыва первого рода функции $f(x)$, если $\begin{cases} \exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = b \\ \exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c \end{cases}$, но $b \neq c$.

Пример 1. $f(x) = [x]$

Определение 8 – Разрыв второго рода

Точка a называется точкой разрыва второго рода функци $f(x)$, если в этой точке не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Пример 1. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Точка 0 является точкой разрыва второго рода.

Пример 2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Пример 3. $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$. В точке 1 разрыв второго рода.

2.5 Свойства непрерывных функций

Теорема 2

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные в точка a функции, тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при условии, что $g(a) \neq 0$).

Замечание: доказательство следует из арифметических свойств пределов.

2.6 Непрерывность сложной функции

Определение 9

Пусть аргумент t некоторой функции f является функцией $g(x)$, тогда говорят, что $y = f(g(x))$ — сложная функция (суперпозиция) переменной x.

Пример 1. $y = \sin(x^2)$.

Теорема 3 – О непрерывности сложной функции

Пусть функция $t = \varphi(x)$ непрерывна в точке a, при этом $\varphi(a) = b$. Пусть функция $y = f(t)$ непрерывна в точке b. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке a.

Доказательство.

1. По сути, требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a))$. То есть, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : |f(\varphi(x)) - f(\varphi(a))| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.
2. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\exists\gamma > 0 : |f(t) - f(b)| < \varepsilon$ при $|t - b| < \gamma$.
3. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке a, для данного γ $\exists\delta > 0 : |\varphi(x) - \varphi(a)| < \delta$ при $|x - a| < \delta$.