Лекция 3

17 сентября 2024

Формула оценивания (всего 2 КР и 1 коллоквиум): 0.15(КР1) + 0.15(КР2) + 0.15(Коллоквиум) + 0.1(Активность) + 0.45(оценка за экзамен).

1 Модуль вещественного числа

Определение 1 – Модуль вещественного числа

Если дано вещественное число x, то $|x|$ определяется следующим образом: $|x| = \begin{cases} x & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -x & \text{если } x < 0 \end{cases}$

Определение 2

Расстоянием между действительными числами x и y называется $|x - y|$.

Утверждение 1

$\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$ справедливо, что $|x - y| \leq |y - z| + |z - x|$.

Замечание: равенство выполняется только когда все три числа либо неотрицательны, либо неположительны.

Утверждение 2

$\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ справедливо, что $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство.

1. $\begin{cases} 0 \leq y \\ 0 \leq x \end{cases} \implies \begin{cases} |x + y| = x + y \\ |x| = x \\ |y| = y \end{cases} \implies |x + y| = x + y = |x| + |y|.$

2. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \\ |x| = -x \\ |y| = -y \end{cases} \implies |x + y| = (-x) + (-y) = |x| + |y|.$

3. $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \implies \left[\begin{array}{l} x < x + y \leq 0 \implies |x + y| < |x| \\ 0 \leq x + y < y \implies |x + y| < |y| \end{array}\right. \implies |x + y| < |x| + |y|.$

Замечание: для n произвольных действительных чисел имеет место равенство $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ (доказывается по индукции).

2 Предел функции

Определение 3

Пусть X и Y — некоторые числовые множества. Если $\forall x \in X \mapsto !y \in Y$ (то есть каждому x из X ставится в соответствие единственный y из Y), то говорят, что на множестве X определена числовая функция $y = y(x)$.

- Множество X называется областью определения функции (обозначается как $D(f)$).
- Переменная x называется аргументом функции.
- Число y, соответствующее данному x, называется частным значением функции.
- Совокупность $\{y\}$ всех частных значений функции называется областью значений (обозначается как $E(f)$).

Определение 4

График функции — это множество вида $\{M(x, f(x)),\ x \in X\}$ (в прямоугольной системе координат).

Замечание: $\exists$ функции, графики которых нельзя изобразить: $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$ (функция Дирихле).

Определение 5

Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве K, если $\exists M \in K\ (m \in K) : \forall x \in X\ f(x) \leq M\ (f(x) \geq m)$. При этом число M называется верхней гранью (а число m — нижней гранью) функции $f(x)$ на множестве K.

Определение 6 – Ограниченность I

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве K, если $\exists M, m \in K : \forall x \in X : m \leq f(x) \leq M$.

Определение 7 – Ограниченность II

Функция $f(x)$ называется ограниченной на множестве K, если $\exists A \in K > 0 : \forall x \in X\ |f(x)| \leq A$.

Домашнее задание: доказать, что определение 7 эквивалентно определению 6.

Определение 8

Наименьшая из верхних граней, ограничивающих сверху функцию $f(x)$, называется ее точной верхней гранью (обозначается как $\sup\limits_X f(x)$). Можно сказать, что $\sup\limits_X f(x) = \sup\{y\}$.

Замечание: можно дать аналогичное определение для точней нижней грани.

Утверждение 3

Число $M = \sup_X f(x)$, если

1. $\forall x \in X : f(x) \leq M$ (то есть число M — это одна из верхних граней).
2. $\forall \widetilde{M} < M\ \exists \widetilde{x} \in X : f(\widetilde{x}) > \widetilde{M}$ (то есть число M — наименьшая из верхних граней).

Домашнее задание 1: сформулировать аналогичное определение для точной нижней грани.
Домашнее задание 2: пользуясь правилом построения отрицаний сформулировать определение

1. неограниченной сверху функции.
2. неограниченной снизу функции.
3. неограниченной функции.

Замечание: ограниченная функция может не принимать значение, равное какой-либо её точной грани.
Пример: $y = \sin x$. Возьмем $D(y) = \{x : 0 < x \leq \frac{\pi}{2}\} \implies \sup\{\sin x\} = 1 \in \{y\}$. $\inf\{\sin x\} = 0 \notin \{y\}$.

3 Определение предела функции

Определение 9

Число A называется предельной точкой некоторого числового множества X, если в любой (сколь угодно малой) проколотой ε-окрестности точки A содержатся точки из множества X.

Пример 1: $X = \{x : a < x < b\}$, любая точка такого интервала (а также точки a и b) является предельной точкой X.
Пример 2: Множество $\mathbb{N}$ не имеет ни одной предельной точки.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве X. Пусть A — предельная точка множества X.

Определение 10 – Определение предела по Коши

Число B называется пределом функции $f(x)$ в точке a (при $x \to a$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - B| < \varepsilon$$

Замечание 1: выражение $<$предел функции $f(x)$ в точке a равен $B>$ обозначается как $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.
Замечание 2: $|f(x) - B| < \varepsilon \iff b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.

Утверждение 4

Функция в данной точке может иметь не более одного предела.

Утверждение 5

Если функция $f(x)$ имеет в данной точке предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство.
Следует непосредственно из определения предела.

Пример 1: Докажем, что если $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = c = const$, то $\forall a \in \mathbb{R} \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем любое $\delta > 0$, тогда $|f(x) - c| \equiv 0 < \varepsilon$.
Пример 2: $f(x) = \begin{cases} b & \text{если } x \neq a \\ c \neq b & \text{если } x = a \end{cases} \implies \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
Пример 3: $f(x) = \begin{cases} b & \text{если } x \neq a \\ \text{не определена} & \text{если } x = a \end{cases} \implies \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.
Замечание 1: во всех примерах $\forall \varepsilon > 0$ можно взять любое δ (то есть δ не зависит от ε).

Замечание 2: если в определении предела убрать неравенство $0 < |x-a| < \delta$, то есть потребовать выполнение неравенства $|f(x) - B| < \varepsilon$ для всех значений аргумента из δ-окрестности точки a (включая саму точку а, при условии, что она принадлежит области определения функции), то

- ответ в примере 3 не изменится, поскольку $x = a$ не является значением аргумента функици.
- ответ в примере 2 изменится. А именно, предел у функции $f(x)$ не будет существовать, так как при $x = a$ неравенство $|f(x)-B| < \varepsilon$ принимает вид $|c-b| < \varepsilon$. Данное неравенство не выполняется, если взять $\varepsilon < |c-b|$.

Пример 4: докажем, что если $f(x) = x$, то $\forall a \in \mathbb{R} \lim\limits_{x\to a} f(x) = a$. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon : \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$.

Пример 5: Докажем, что $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0 ($x = 0$ — предельная точка области определения, поэтому вопрос о существовании предела является корректным).

1. Предположим, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x} = b$.
2. Возьмем $\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 : \left|\sin\frac{1}{x} - b\right| < 1$ при $0 < |x| < \delta$.
3. Возьмем $x_1 = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n},\ x_2 = \dfrac{1}{\frac{-\pi}{2} + 2\pi n}$ $(0 < |x_1|, |x_2| < \delta)$.
4. Заметим, что $\left|\sin\dfrac{1}{x_1} - b\right| = |1-b| < 1$, $\left|\sin\dfrac{1}{x_2} - b\right| = |-1-b| < 1$ и система $\begin{cases}|1-b| < 1\\ |-1-b| = |1+b| < 1\end{cases}$ неразрешима в действительных числах $\implies f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0.