Лекция 8

21 октября 2024

Определение 1

Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример. $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ непрерывна на любом интервале, на котором $Q_m(x) \neq 0$.

Теорема 1

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)f(b) < 0$, то $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$.

Доказательство:

1. Пусть (без ограничения общности) $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.
2. По теореме об устойчивости знака непрерывной функции, $f(x) < 0$ в правой полуокрестности точки a.
3. Рассмотрим $X = \{\widetilde{x} \mid f(x) < 0 \text{ при } a \leq x < \widetilde{x}\}$. X ограничено сверху $\implies \exists \sup X = s$.
4. Заметим, что $\forall x_0 < s$ $f(x_0) < 0$ (если $x_0 < 0$, то x_0 не является верхней гранью $X \implies \exists \widetilde{x} \in X : \widetilde{x} > x_0$. $f(x) < 0$ на $[a, \widetilde{x}) \implies f(x_0) < 0$).
5. Докажем, что $f(s) = 0$. Предположим противное:
   (a) $f(s) < 0$. Тогда, по теореме об устойчивости знака, $f(x) < 0$ в некоторой окрестности точки $s \implies \exists \widetilde{x} > s : f(x) < 0$ на $[a, \widetilde{x}) \implies \sup X \neq s$.
   (b) $f(s) > 0$, Тогда, по теореме об устойчивости знака, $f(x) > 0$ в некоторой окрестности точки $s \implies \exists \widetilde{x} < s : f(x) > 0$ на $[a, \widetilde{x}) \implies \exists x_0 < s : f(x) > 0$ (противоречит (3)).
6. В обоих случаях получено противоречие $\implies f(s) = 0$.

Теорема 2 – О промежуточном значении

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем $\begin{cases} f(a) = A \\ f(b) = B \end{cases} \implies \forall C \in (A, B)\ \exists c \in [a, b] : f(c) = C$.

Доказательство:

1. Пусть (без ограничения общности) $A < C < B$.
2. Введем $g(x) = f(x) - C$. $g(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$ и $g(b) = f(b) - C = B - C > 0$.
3. По теореме 1: $\exists c \in (a, b) : g(c) = 0 \implies f(c) = g(c) + C = C$.

1 Обратные функции

Определение 2

Отображение $R : X \to Y$ называется

1. Инъективным, если $\forall x \in X \; \exists! \; y \in Y : f(x) = y$.
2. Сюръективным, если $\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$.
3. Биективным, если оно и инъективно, и сюръективно.

Определение 3

Если задана биективная функция $f : X \to Y$, то на множестве Y можно определеить f^{-1} (обратную к f функцию).

Замечание: f является обратной к f^{-1}.

Пример 1. $f(x) = x^2 \; \{x > 0\}$. Очевидно, что $E(f) = [0, +\infty)$. Тогда $f^{-1}(y) = \sqrt{y} \; \{y \geq 0\}$.

Пример 2. $f(x) = x^2 \; \{x \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, что $E(f) = [0, +\infty)$. Обратной функции к $f(x)$ не существует, так как отношение, установленное данной функцией, не является биекцией.

Теорема 3

Пусть функция $f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна на $[a, b]$. Тогда

1. $E(f) = [f(a), f(b)]$.
2. На $E(f)$ существует обратная функция — $f^{-1}(y)$.
3. $f^{-1}(y)$ строго монотонна.
4. $f^{-1}(y)$ непрерывна на $E(f)$.

Доказательство:

0. Пусть (без ограничения общности) $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$.
1. Докажем пункт 1:
   (a) В силу непрерывности $f(x)$ принимает все значения от $f(a)$ до $f(b)$.
   (b) В силу монотонности $f(x)$ не имеет значений меньших $f(a)$ или больших $f(b)$.
2. Докажем пункт 2:
   (a) Предположим, что $\exists y \in Y : \; \exists x_1, \; x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) = y$.
   (b) Получим противоречие тому, что $f(x)$ строго монотонна.