Задача 15

1. Покажите, что счетное произведение $\mathbb{R}$ на себя имеет мощность континуум.
2. Докажите, что мощность множества всех непрерывных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равна континууму.
3. Найдите мощность множества всех монотонных функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Пункт 1

1. $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \implies$ существует биекция $\varphi : \mathbb{R} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
2. Сопоставим последовательности $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3 \dots)$ действительных чисел последовательность $\varphi(x_1),\ \varphi(x_2),\ \varphi(x_3) \dots$
3. Получим биекцию $\alpha : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ (так как φ — биекция).
4. Последовательности последовательностей сопоставим таблицу Φ, где $\Phi_{ij} = \varphi(x_i)_j$.
5. Получим биекцию $\beta : (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$.
6. $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}} \implies$ существует биекция $\gamma : \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
7. Получена биеция: $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\alpha} (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\beta} \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \xrightarrow{\gamma} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{R}$.

Пункт 2

1. Покажем, что если значения непрерывных функций $f_1,\ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ во всех рациональных точках совпадают, то эти функции тождественно равны.
2. Функция f называется непрерывной в точке a, если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
3. Определение предела функции по Гейне: значение A является пределом функции при $x \to a$, если для любой последовательности точек, сходящейся к a, но не содержащей a в качестве одного из своих элементов, последовательность значений функции сходится к A.
4. $(2) \wedge (3) \implies (1) \implies$ непрерывная функция однозначно задана значениями в рациональных точках.
5. Мощность множества всех функций $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ равна $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}\right| = \left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$, ч.т.д.

Пункт 3

1. Рассмотрим все возрастающие функции $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Мощность множетсва A всех таких функций равна $|\mathbb{R}|$.
2. Для произвольной функции $f \in A$ поймем, сколько существует непрерывных функций $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что во всех рациональных точках $f(x) = g(x)$.
3. Положим $f^-(x) = \sup\limits_{q\in\mathbb{Q}\cap(-\infty,\ x)} f(q)$, $f^+(x) = \inf\limits_{q\in\mathbb{Q}\cap(x,\ +\infty)} f(q)$. $f^-(x) \le g(x) \le f^+(x)$.
4. Положим $B = \{x \in \mathbb{I} \mid (f^-(x),\ f^+(x)) \neq \varnothing\}$. Для разных $x \in B$ соответствующие им интервалы не пересекаются $\implies |B| = |\mathbb{N}|$.
5. Получим, что для произвольной функции $f \in A$ сущетсвутет не более чем счетное количество непрерывных функций $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $f(x) = g(x)$ во всех рациональных точках.
6. Мощность искомого множества равна $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right| = |\mathbb{R}|$.