Лекция 5

31 сентября 2024

Теорема 1

Сумма и разность двух бесконечно малых функций — это бесконечно малая функция.

Доказательство.
Пусть $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно малы при $x \to a$. Тогда

1. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in 0 < |x - a| < \delta_1 : |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
2. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in 0 < |x - a| < \delta_2 : |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1, \; \delta_2\}$. При таком δ оба неравенства выполнены автоматиески: $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \; |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Следовательно, $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \; |f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| \pm |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies f(x) \pm g(x)$ — бесконечно малая функция.
Следствие.
Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

Теорема 2

Произведение бесконечно малой (в точке a) функции на ограниченную (в окрестности точки a) функцию — это бесконечно малая (в точке a) функция.

Доказательство.
Пусть $f(x)$ — бесконечно малая в точке a функция. Пусть $g(x)$ — функция, ограниченая в некоторой проколотой окрестности ω точки a ($\exists m > 0 : \forall x \in \omega \; |g(x)| \leq m$).
Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $g(x)$ бесконечно мала, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \; |f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{m}$.
Возьмем $\delta_1 < \delta$ столь малым, чтобы проколотая δ_1-окрестность точки a целиком принадлежала ω. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta_1 > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta_1\} \; |f(x)g(x)| < |f(x)||g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon$.
Следствие.
Произведение конечного числа ограниченных функций, среди которых хотя бы одна функция является бесконечно малой, является бесконечно малым.

1 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших

Определение 1

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — две бесконечно малые функции. Тогда предел вида $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределенностью типа $\dfrac{0}{0}$.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Определение 2

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости (имеет более высокий порядок малости), чем $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Замечание: обозначается как $f = o(g)$.
Пример. $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$.

Определение 3

Бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = const \neq 0$.

Замечание 1: обозначается как $f = O(g)$ при $x \to a$.
Пример 1. $2x^2 + x^3 = O(x^2)$ при $x \to 0$.
Замечание 2: если предел отношения равен 1, то фунции называаются эквивалентными ($f(x) \sim g(x)$).
Пример 2. $x^2 + x^3 \sim x^2$ при $x \to 0$.
Пример 3. $\sin(x) \sim x$ при $x \to 0$.
Замечание 3: для неопределенности $\dfrac{0}{0}$ в случае, кода рассматриваются односторонние пределы, все определения сохраняют силу.

2 Свойства символа o

1. $o(g) \pm o(g) = o(g)$.
2. если $f = o(g)$, то $o(f) \pm o(g) = o(g)$ (Например, $o(x^2) \pm o(x) = o(x)$).
3. если f и g бесконечно малы, то $f, g = o(f)$ и $f, g = o(g)$.
4. если $f \sim g$, то $f - g = o(f)$ и $f - g = o(g)$.
5. $o(c \cdot g) = o(g)$, если c — константа, отличная от 0.
6. $o(g + o(g)) = o(g)$ (Например, $o(x + 2x^2) = o(x)$).

Замечание: все равенства с o читаются в одну сторону (знак 'равно' означает символ 'принадлежит').
Пример. $x^2 = o(x)$, но $o(x) \neq x^2$.
Доказательство пункта 1.
Пусть $\alpha_1(x) = o(g),\ \alpha_2(x) = o(g)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_2(x)}{g(x)} = 0 \implies \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)+\alpha_2(x)}{g(x)} = 0 + 0 = 0$.

Определение 4

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно большие при $x \to a$ функции, тогда предел вида $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ называется неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Определение 5

Говорят, что $f(x)$ имеет более высокий порядок роста чем $g(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Пример. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$, а $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$. То есть $f(x)$ в окрестности 0 имеет более высокий порядок роста чем $g(x)$.

Определение 6

Говорят, что бесконечно малые f и g имеют при $x \to a$ одинаковый порядок роста, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = const$.

Пример. $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \frac{1}{x+1}$ имеют одинаковый порядок роста при $x \to 0$.

Другие виды неопределенностей:

- $\infty - \infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- $0 \cdot \infty$: $\lim\limits_{x \to 0} (x \cdot \cot(x))$
- 1^∞: $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
- 0^0: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$
- ∞^0: $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

3 Свойства пределов функции

Лемма 1

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b = const$, то $f(x)$ можно представить в виде $b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая в точке a функция.

Доказательство.

Согласно определению предела $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \ |f(x) - b| < \varepsilon$. Это и означает, что функция $f(x) - b = \alpha(x)$ бесконечно малая в точке a. То есть $f(x) = b + [f(x) - b] = b + \alpha(x)$.

Лемма 2

Если функцию при $x \to a$ можно представить как $b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ бесконечно малая, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.