1

Расскажите о понятиях множества и функции (отображения). Что такое инъекция, сюръекция, биекция, обратное отображение? Расскажите об операциях с множествами. Приведите примеры.

- **Множество** (набор неупорядоченных элементов) — математическая абстракция, задающаяся набором аксиом (например, аксиомами Цермело-Френкеля).
- **Отображение** из X в Y — это бинарное отношение $\mathcal{R}$ между X и Y такое, что $(x\ \mathcal{R}\ y_1) \wedge (x\ \mathcal{R}\ y_2) \implies (y_1 = y_2)$.
- **Сюръекция** из X в Y — это отображение $f : X \to Y$ такое, что $\forall y \in Y\ \exists x \in X : f(x) = y$.
- **Инъекция** из X в Y — это отображение $f : X \to Y$ такое, что $(f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2)$.
- **Биекция** из X в Y — это отображение $f : X \to Y$, являющееся одновременно инъективным и сюръективным.
- **Отображение** $f^{-1} : B \to A$ называется обратным для отображения $f : A \to B$, если $\begin{cases} \forall a \in A & f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall b \in B & f(f^{-1}(b)) = b \end{cases}$.

2

Расскажите об аксиомах поля действительных чисел: сформулируйте аксиомы сложения, умножения, порядка, аксиомы связи сложения (умножения) и порядка, и аксиому полноты (непрерывности).

Множество $\mathbb{R}$ любой природы называется полем действительных чисел, если для его элементов выполнен следующий комплекс условий:

- **Аксиомы сложения.**
  - 1_+ Определена внутренняя бинарная операция $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - 2_+ Операция $+$ ассоциотивна $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a + b) + c = a + (b + c)$.
  - 3_+ Существует 0 (нейтральный элемент) $(\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}\ 0 + a = a + 0 = a)$.
  - 4_+ Для каждого элемента существует противоположный ему элемент $(\forall a \in \mathbb{R}\ \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0)$.
  - 5_+ Операция $+$ коммутативна $(\forall a, b \in \mathbb{R}\ a + b = b + a)$.
- **Аксиомы умножения.**
  1. Определена внутренняя бинарная операция $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  2. Операция $\cdot$ ассоциотивна $\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
  3. Существует 1 (нейтральный элемент) $(\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R}\ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a)$.
  4. Для каждого элемента существует противоположный ему элемент $(\forall a \in \mathbb{R}\ \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1)$.
  5. Операция $\cdot$ коммутативна $(\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \cdot b = b \cdot a)$.
- Операция умножения **дистрибутивна** относительно операции сложения $(\forall a, b, c \in \mathbb{R}\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c)$.
- **Аксиомы порядка.**
  - $1_\leq$ Между элементами $\mathbb{R}$ есть отношение порядка $\leq$, то есть $\forall x, y \in \mathbb{R}$ либо выполнено $x \leq y$, либо нет.
  - $2_\leq$ $\forall x \in \mathbb{R}\ x \leq x$.
  - $3_\leq$ $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \implies y = x$.
  - $4_\leq$ $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \implies x \leq z$.
  - $5_\leq$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \implies \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array}\right.$
- **Связь сложения и порядка:** если $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$.
- **Свзяь умножения и порядка:** если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, то $x \cdot y \geq 0$.
- **Аксиома полноты:** если X и Y – непустые подмножества $\mathbb{R}$, причем $\forall x \in X,\ \forall y \in Y\ x \leq y$, то $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$.

3

Докажите, что в множестве действительных чисел:

1. имеется только один нулевой элемент;
2. у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент;
3. уравнение $a + x = b$ имеет, и притом единственное, решение $x = b + (-a)$.

1. Если 0_1 и 0_2 — нули в $\mathbb{R}$, то $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2$.
2. Если $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ — противоположные к $x \in \mathbb{R}$, то $x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = 0 + x_2 = x_2$.
3. $(a+x = b) \iff ((x+a)+(-a) = b+(-a)) \iff (x+(a+(-a)) = b+(-a)) \iff (x+0 = b+(-a)) \iff (x = b+(-a))$.

4

Расскажите о методе математической индукции. Докажите неравенство Бернулли. Расскажите о биноме Ньютона.

- **Принцип математической индукции:** пусть для последовательности утверждений $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \dots\ A_n,\ \dots$ верны утверждения:
  - База индукции: A_1 истинно.
  - Шаг индукции: A_n истинно $\implies$ A_{n+1} истинно для любого n

  Тогда A_n истинно для любого n.
- **Неравенство Бернулли:** для $x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ таких, что $x \geq -1 \land n \geq 1$, верно, что $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
  Доказательство по индукции.
  - База: пусть (n = 1), тогда $1 + x = 1 + x$.
  - Шаг: пусть неравенство верно для некоторого n, докажем, что оно верно и для $n + 1$:
  $$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) \geq 1 + nx + x = 1 + (n+1)x$$
  .
- **Бином Ньютона:** для произвольных $a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ верно, что $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

5

Расскажите об ограниченных множествах вещественных чисел. Дайте два определения верхней и нижней грани множества $E \subset \mathbb{R}$. Докажите теорему о существовании и единственности верхней (нижней) грани. Приведите примеры.

- Некоторое подмножество $E \subset \mathbb{R}$ **ограничено сверху** (снизу), если $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in E\ x \leq c\ (c \leq x)$. При этом число c называется верхней границей (нижней границей) множества X.
- Множество ограниченное сверху и снизу называется **ограниченным**.
- Наибольшее (наименьшее) из чисел, ограничивающих множество E сверху, называется **точной верхней (нижней) гранью** E (обозначается как $\sup E$ ($\inf X$)).
- Всякое непустое ограниченное сверху множество $E \subset \mathbb{R}$ имеет единственную точную верхнюю грань.
  Доказательство.
  1. Предположим, что есть две минимальных верхних грани x и y, в силу аксиомы антисимметричности $(x \leq y) \land (y \leq x) \implies x = y$.
  2. Положим $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall x \in E \implies (x \leq y)\}$.
  3. По условию Y и E не пусты.
  4. Тогда по аксиоме полноты $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in E,\ \forall y \in Y \implies (x \leq c \leq y)$. Другими словами, такое число c (существование которого гарантировано аксиомой полноты) является для E мажорантой, а для Y минорантой.
  5. Будучи мажорантой E, $c \in Y$; в то же время, как миноранта Y, $c = \min Y = \sup E$.

6

Дайте определения ограниченной (сверху, снизу) функции; верхней и нижней грани функции; монотонной функции; суперпозиции функций. Расскажите об обратной функции. Приведите примеры.

- Функция $f : X \to Y$ называется **ограниченной сверху** (снизу) на множестве $E \subset X$, если $\exists M \in E : \forall x \in X \ f(x) \leq M \ (f(x) \geq m)$. При этом число M называется **верхней (нижней) гранью** функции $f(x)$ на множестве E.

- Функция $f : X \to Y$ называется **ограниченной** на множестве $E \subset X$, если $\exists A \in E : \forall x \in X \ |f(x)| \leq A$.

- Функция $f : X \to Y$ называется **монотонной**, если

$$\left[\begin{aligned} &\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} \ x_1 < x_2 \iff f(x_1) \leq f(x_2) \\ &\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} \ x_1 < x_2 \iff f(x_1) \geq f(x_2) \end{aligned}\right.$$

- Пусть даны две функции $f : A \to B$, $g : B \to C$. Их **композицией** $f \circ g$ называется функция $g(f(a))$.

- Если функция $f : A \to B$ биективна, то к ней можно определить **обратную** функцию $f^{-1} : B \to A$: $\begin{cases} \forall a \in A \quad f^{-1}(f(a)) = a \\ \forall b \in B \quad f(f^{-1}(b)) = b \end{cases}$.

7

Дайте определение числовой последовательности. Что такое монотонная последовательность? Что такое ограниченная (сверху, снизу) последовательность? Приведите примеры. Исследуйте на монотонность и ограниченность последовательность $x_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.

- **Числовая последовательность** множества E — это функция вида $f : \mathbb{N} \to E$.

- Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **монотонной**, если

$$\left[\begin{aligned} &\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ n_1 < n_2 \iff x_{n_1} \leq x_{n_2} \\ &\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \ n_1 < n_2 \iff x_{n_1} \geq x_{n_2} \end{aligned}\right.$$

- Числовая последовательность $\{x_n\}$ множества E называется ограниченной сверху (снизу), если

$$\exists A \in E : \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq A \ (x_n \geq A)$$

.

- Докажем, что $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+3)(2n+1)}{(2n+3)(n+2)} = \frac{2n^2+7n+3}{2n^2+7n+6} < 1$$

8

Дайте определение пределов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty, \ +\infty, -\infty$. Приведите примеры. Докажите теорему о единственности конечного предела последовательности. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности. Докажите, что если последовательность сходится, то она является фундаментальной.

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ |x_n - A| < \varepsilon$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \iff \forall M > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ \ |x_n| > M$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall M > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n > M$.

- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall M > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ x_n < -M$.

- Последовательность $\{x_n\}$ множества E может иметь только один конечный предел.
Доказательство.
  1. Пусть у последовательности есть два предела: A и B.
  2. По определению $\begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_1\ \ |x_n - A| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N_2\ \ |x_n - B| < \varepsilon \end{cases}$
  3. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N\ \ |B - A| \leq |x_n - B| + |x_n - A| < 2\varepsilon \implies |B - A| \to 0 \implies B = A$.

- Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется **фундаментальной**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N\ \ |x_m - x_n| < \varepsilon$$

- **Критерий Коши:** Последовательность сходится $\iff$ последовательность фундаментальная.
Доказательство.
  1. (1) $\implies$ (2)
     (a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. То есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N\, |x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
     (b) Из (1) получим, что $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \ |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies$ $\{x_n\}$ фундаментальная.
  2. (2) $\impliedby$ (1)
     (a) Пусть x_n фундаментальная $\implies$ (по лемме 2) $\{x_n\}$ ограничена.
     (b) По теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$.
     (c) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим ε и $\dfrac{\varepsilon}{2}$ окрестности точки A.
     (d) Начиная с некоторого номера N_1 все члены подпоследовательности x_{k_n} лежат в $\dfrac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки A.
     (e) Начиная с некоторого номера N_2 все члены последовательности отстоят друг от друга не более, чем на $\dfrac{\varepsilon}{2}$ (так как $\{x_n\}$ фундаментальна).
     (f) Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N\ x_n \in U_\varepsilon(A) \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

9

Докажите, что всякая последовательность, имеющая конечный предел, ограничена. Покажите на примере, что обратное утверждение неверно. Докажите теорему Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.

- Последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел $A \implies$ она ограничена.
Доказательство.
  1. Положим $\varepsilon = 1$. Тогда по определению $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N\ \ |x_n - A| < 1 \implies |x_n| < |A| + 1$.
  2. Возьмем $M > \max\{|x_1|, \ldots |x_n|, |A| + 1\}$. Получии, что $\forall n \in [N]\, |x_n| < M$.