Лекция 1

10 сентября 2024

1 Общие определения

Определение 1

Бинарным отношением в множестве E называется всякое подмножество $B \subseteq E \times E$.

Определение 2

Бинарное отношение $\Re$ называется отношением эквивалентности в множестве E, если $\Re$

1. рефлексивно $(\forall a \in E \ (a, a) \in \Re)$.
2. симметрично $((a, b) \in \Re \implies (b, a) \in \Re)$.
3. транзитивно $((a, b) \in \Re \wedge (b, c) \in \Re \implies (a, c) \in \Re)$.

Замечание: вместо $(a, b) \in \Re$ в зависимости от типа множества E могут писать $a \sim b$ или $a = b$.

Определение 3

Бинарное отношение Ω называется отношением порядка в множестве E, если Ω

1. рефлексивно $(\forall a \in E \ (a, a) \in \Omega)$.
2. антисимметрично $((a, b) \in \Omega \wedge (b, a) \in \Omega \implies a = b)$.
3. транзитивно $((a, b) \in \Omega \wedge (b, c) \in \Omega \implies (a, c) \in \Omega)$.

Замечание 1: говорят, что отношение Ω упорядочивает E.
Замечание 2: запись $(a, b) \in \Omega$ эквивалентна записи $a \leq b$.
Замечание 3: если $\forall a, b \in E$ выполняется $\left[\begin{array}{l}(a, b) \in \Omega \\ (b, a) \in \Omega\end{array}\right.$, то говорят, что множество E вполне упорядочено.

Определение 4

Внутренней бинарной операцией на E называют отображение $f : E \times E \to E$.

Определение 5

Множество E, снаряженное внутренней бинарной операцией $\circ$, называется группой, если

1. операция $\circ$ ассоциотивна ($a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$).
2. существует нейтральный элемент ($\exists e \in E : \forall a \in E \; e \circ a = a$).
3. для каждого элемента существует симметричный ему элемент ($\forall a \in E \; \exists \overline{a} \in E : a \circ \overline{a} = e$).

Замечание 1: если операция $\circ$ коммутативна ($\forall a, b \in E \; a \circ b = b \circ a$), то группу называют коммутативной или абелевой.
Замечание 2: если операция $\circ$ – это сложение, то группу называют аддитивной; если умножение, то мультипликативной.

2 Аксиомы действительных чисел

Определение 6

Множество $\mathbb{R}$ любой природы называется полем действительных чисел, если для его элементов выполнен следующий комплекс условий:

1. Аксиомы сложения.
   - 1_+ Определена внутренняя бинарная операция $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   - 2_+ Операция $+$ ассоциотивна $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; (a + b) + c = a + (b + c)$.
   - 3_+ Существует 0 (нейтральный элемент) ($\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \; 0 + a = a + 0 = a$).
   - 4_+ Для каждого элемента существует противоположный ему элемент ($\forall a \in \mathbb{R} \; \exists (-a) \in \mathbb{R} : a + (-a) = (-a) + a = 0$).
   - 5_+ Операция $+$ коммутативна ($\forall a, b \in \mathbb{R} \; a + b = b + a$).
2. Аксиомы умножения.
   - $1_\bullet$ Определена внутренняя бинарная операция $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   - $2_\bullet$ Операция $\bullet$ ассоциотивна $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
   - $3_\bullet$ Существует 1 (нейтральный элемент) ($\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \; 1 \bullet a = a \bullet 1 = a$).
   - $4_\bullet$ Для каждого элемента существует противоположный ему элемент ($\forall a \in \mathbb{R} \; \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : a \bullet a^{-1} = a^{-1} \bullet a = 1$).
   - $5_\bullet$ Операция $\bullet$ коммутативна ($\forall a, b \in \mathbb{R} \; a \bullet b = b \bullet a$).
3. Операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения ($\forall a, b, c \in \mathbb{R} \; a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$).
4. Аксиомы порядка.
   - $1_\leq$ Между элементами $\mathbb{R}$ есть отношение порядка $\leq$, то есть $\forall x, y \in \mathbb{R}$ либо выполнено $x \leq y$, либо нет.
   - $2_\leq$ $\forall x \in \mathbb{R} \; x \leq x$.
   - $3_\leq$ $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \implies y = x$.
   - $4_\leq$ $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \implies x \leq z$.
   - $5_\leq$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \implies \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ y \leq x \end{array}\right.$
5. Связь сложения и порядка: если $x, y, z \in \mathbb{R}$ и $x \leq y$, то $x + z \leq y + z$.
6. Свзяь умножения и порядка: если $x, y \in \mathbb{R}$ и $x \geq 0 \wedge y \geq 0$, то $x \bullet y \geq 0$.
7. Аксиома полноты: если X и Y – непустые подмножества $\mathbb{R}$, причем $\forall x \in X, \; \forall y \in Y \; x \leq y$, то $\exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$.

Замечание 1: всякое множество, удовлетворяющее аксиомам (1), (3), $1_{\bullet}$, $2_{\bullet}$, $3_{\bullet}$, $4_{\bullet}$, называется телом. Если дополнительно выполнена аксиома $5_{\bullet}$, то множество называется числовым полем.
Замечание 2: если для некоторого множества выполняются аксиомы $1_{\leq}$, $2_{\leq}$, $3_{\leq}$, то говорят, что это множество частично упорядочено. Если дополнительно выполнена аксиома $4_{\leq}$, то говорят, что множество вполне упорядочено.

3 Полезная литература

- Ильин-Позняк "Основы математического анализа"
- Зорич "Математический анализ"
- Фихтенгольц "Математический анализ"
- Демидович "Сборник задач и упражнений по математическому анализу"
- Бутузов, Медведев, Крутитская, Шишкин "Математический анализ в вопросах и задачах"