

# Лекция 5

31 сентября 2024

## Теорема 1

Сумма и разность двух бесконечно малых функций — это бесконечно малая функция.

Доказательство.

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — бесконечно малы при  $x \rightarrow a$ . Тогда

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in 0 < |x - a| < \delta_1 : |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in 0 < |x - a| < \delta_2 : |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . При таком  $\delta$  оба неравенства выполнены автоматически:  $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$  и  $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $\forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \quad |f(x) \pm g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies f(x) \pm g(x)$  — бесконечно малая функция.

Следствие.

Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

## Теорема 2

Произведение бесконечно малой (в точке  $a$ ) функции на ограниченную (в окрестности точки  $a$ ) функцию — это бесконечно малая (в точке  $a$ ) функция.

Доказательство.

Пусть  $f(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция. Пусть  $g(x)$  — функция, ограниченная в некоторой проколотой окрестности  $\omega$  точки  $a$  ( $\exists m > 0 : \forall x \in \omega \quad |g(x)| \leq m$ ).

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Так как  $g(x)$  бесконечно мала,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{m}$ .

Возьмем  $\delta_1 < \delta$  столь малым, чтобы проколотая  $\delta_1$ -окрестность точки  $a$  целиком принадлежала  $\omega$ . Тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta_1 > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta_1\} \quad |f(x)g(x)| < |f(x)||g(x)| < \frac{\varepsilon}{m} \cdot m = \varepsilon$ .

Следствие.

Произведение конечного числа ограниченных функций, среди которых хотя бы одна функция является бесконечно малой, является бесконечно малым.

## 1 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших

### Определение 1

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — две бесконечно малые функции. Тогда предел вида  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  называется неопределенностью типа  $\frac{0}{0}$ .

**Пример.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ .

### Определение 2

Функция  $f(x)$  называется бесконечно малой более высокого порядка малости (имеет более высокий порядок малости), чем  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ .

Замечание: обозначается как  $f = o(g)$ .

**Пример.**  $x^2 = o(x)$  при  $x \rightarrow 0$ .

### Определение 3

Бесконечно малые функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются бесконечно малыми одного порядка, если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{const} \neq 0$ .

Замечание 1: обозначается как  $f = O(g)$  при  $x \rightarrow a$ .

**Пример 1.**  $2x^2 + x^3 = O(x^2)$  при  $x \rightarrow 0$ .

Замечание 2: если предел отношения равен 1, то функции называются эквивалентными ( $f(x) \sim g(x)$ ).

**Пример 2.**  $x^2 + x^3 \sim x^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

**Пример 3.**  $\sin(x) \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Замечание 3: для неопределенности  $\frac{0}{0}$  в случае, когда рассматриваются односторонние пределы, все определения сохраняют силу.

## 2 Свойства символа o

1.  $o(g) \pm o(g) = o(g)$ .
2. если  $f = o(g)$ , то  $o(f) \pm o(g) = o(g)$  (Например,  $o(x^2) \pm o(x) = o(x)$ ).
3. если  $f$  и  $g$  бесконечно малы, то  $f, g = o(f)$  и  $f, g = o(g)$ .
4. если  $f \sim g$ , то  $f - g = o(f)$  и  $f - g = o(g)$ .
5.  $o(c \cdot g) = o(g)$ , если  $c$  — константа, отличная от 0.
6.  $o(g + o(g)) = o(g)$  (Например,  $o(x + 2x^2) = o(x)$ ).

Замечание: все равенства с  $o$  читаются в одну сторону (знак 'равно' означает символ 'принадлежит').

**Пример.**  $x^2 = o(x)$ , но  $o(x) \neq x^2$ .

Доказательство пункта 1.

Пусть  $\alpha_1(x) = o(g)$ ,  $\alpha_2(x) = o(g)$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_2}{g(x)} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{g(x)} = 0 + 0 = 0$ .

### Определение 4

Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — бесконечно большие при  $x \rightarrow a$  функции, тогда предел вида  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  называется неопределенностью вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

### Определение 5

Говорят, что  $f(x)$  имеет более высокий порядок роста чем  $g(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ .

**Пример.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , а  $g(x) = \frac{1}{x}$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ . То есть  $f(x)$  в окрестности 0 имеет более высокий порядок роста чем  $g(x)$ .

### Определение 6

Говорят, что бесконечно малые  $f$  и  $g$  имеют при  $x \rightarrow a$  одинаковый порядок роста, если  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{const.}$

**Пример.**  $f(x) = \frac{1}{x}$  и  $g(x) = \frac{1}{x+1}$  имеют одинаковый порядок роста при  $x \rightarrow 0$ .

Другие виды неопределенностей:

- $\infty - \infty$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$
- $0 \cdot \infty$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cot(x))$
- $1^\infty$ :  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$
- $0^0$ :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- $\infty^0$ :  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}$

## 3 Свойства пределов функции

### Лемма 2

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \text{const.}$ , то  $f(x)$  можно представить в виде  $b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая в точке  $a$  функция.

Доказательство.

Согласно определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} |f(x) - b| < \varepsilon$ . Это и означает, что функция  $f(x) - b = \alpha(x)$  бесконечно малая в точке  $a$ . То есть  $f(x) = b + [f(x) - b] = b + \alpha(x)$ .

### Лемма 2 – Обратная

Если функцию при  $x \rightarrow a$  можно представить как  $b + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  бесконечно малая, то  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .