# Лекция 6

8 октября 2024

**Теорема 1 – Об арифметических свойствах пределов**

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности точки $a$. Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = c$.

1. $\exists \lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.
2. $\exists \lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$.
3. Если $c \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности точки $a$ определена функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

<u>Доказательство пункта 1.</u>

1. В силу леммы 1, $f(x) = b + \alpha(x)$, $g(x) = c + \beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции в точке $a$.
2. Тогда $f(x) \pm g(x) = b \pm c + (\alpha(x) \pm \beta(x)) = b \pm c + \gamma(x)$, где $\gamma(x)$ — бесконечно малая в силу теоремы 2 функция.
3. Согласно лемме 2: $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.

<u>Доказательство пункта 3.</u>

1. Без ограничения общности положим $c > 0$.
2. Возьмем $\varepsilon = \dfrac{c}{2}$. По определению предела: $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \implies |g(x) - c| < \varepsilon$.
3. $c - \varepsilon < g(x) < c + \varepsilon \iff \dfrac{c}{2} < g(x) < \dfrac{3c}{2} \implies g(x) \neq 0$ в проколотой $\delta$-окрестности точки $a \implies$ в этой проколотой $\delta$-окрестности определена функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.
4. Используя равенства $f(x) = b + \alpha(x)$, $g(x) = c + \beta(x)$, получим $\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{b}{c} = \left(\dfrac{b + \alpha(x)}{c + \beta(x)}\right) - \dfrac{b}{c} = \dfrac{\gamma(x)}{c \cdot g(x)}$, где $\gamma(x)$ — бесконечно малая функция.
5. Функция $\dfrac{1}{c \cdot g(x)}$ ограничена в проколотой $\delta$-окрестности точки $a$. $g(x) > \dfrac{c}{2} \implies \dfrac{1}{c \cdot g(x)} \in \left(0, \dfrac{2}{c^2}\right) \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{b}{c} = \xi(x)$ (бесконечно малая).
6. В силу леммы 2: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c}$.

<u>Замечание:</u> теорема 1 справедлива также и для односторонних пределов и пределов при $x \to \infty$ (в частности она справедлива и для числовых последовательностей).

**Утверждение 1**

$\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

**Определение 1**

Пусть $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — алгебраические многочлены степеней $n$ и $m$ соответственно. Тогда $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется рациональной функцией или дробью.

**Утверждение 2**

Если $Q_m(x)$ в точке $a$ отличен от нуля, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{P_n(a)}{Q_m(a)}$.

**Теорема 2 – О предельном переходе в неравенствах**

Если в некоторой проколотой окрестности точки $a$ выполянется неравенство $f(x) \geq c$ ($f(x) \leq c$), и при этом существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $b \geq c$ ($b \leq c$).

Доказательство.

1. Предположим противное: $b < c$.
2. Возьмем $\varepsilon > 0$ столь малым, что $b + \varepsilon < c$.
3. По определению предела: $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \implies |f(x) - b| < \varepsilon \iff b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$.
4. Тем самым в некоторой проколотой $\delta$-окрестности точки $a$ одновременно $f(x) \geq c$ и $f(x) < b + \varepsilon < c$. Получено противоречие.

Замечание: теорема 2 справедлива также для односторонних пределов и пределов при $x \to \infty$ (в частности она справедлива и для числовых последовательстей).

**Теорема 3 – О пределе последовательности**

Если $\forall n \in \mathbb{N} : c \leq x_n \leq b$ и $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, то $c \leq a \leq b$.

Замечание: из условия $f(x) > c$ не следует, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) > c$.

**Пример.** $f(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ при $x \to 0$, но $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

**Теорема 4 – О двух милиционерах**

Если в проколотой окрестности точки $a$ выполняются неравенства $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = c$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Доказательство.

1. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$.
2. По определению предела: $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \implies |f(x) - b| < \varepsilon$ и $|h(x) - b| < \epsilon$.
3. $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \iff f(x) - b \leq g(x) - b \leq h(x) - b \implies |g(x) - b| < \varepsilon$ при $x \in \{0 < |x - a| < \delta\} \implies \lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Замечание: теорема справедлива для односторонних пределов, пределов при $x \to \infty$ и числовых последовательностей.

# 1 Предел монотонной функции

**Определение 2**

Функця $f(x)$ называется

(а) возрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.

(б) убывающей, если $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

(в) невозрастающей, если $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

(г) неубывающей, если $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.

Замечание: функции (в) и (г) называеюся монотонными; (а) и (б) — строго монотонными.
**Пример 1.** $f(x) = x^2$ строго монотонная на $[0, +\infty)$.
**Пример 2.** $f(x) = [x]$ не убывает на $\mathbb{R}$.

**Теорема 5 – Обобщение теоремы Вейерштрасса**

Если функция $f(x)$ монотонна и ограничена на $x \geq a$, то $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Доказательство.
Без ограничения общности рассмотрим случай, когда $f(x)$ не убывает на $[a, +\infty)$ и ограничена сверху на этом множестве. Область значений такой функции представляет собой ограниченное (сверху) числовое множество $\implies$ $\exists \sup\limits_{x \in [a, +\infty)} f(x) = b$.

1. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим число $b - \varepsilon$.
2. По определению супремума: $\exists A \in [a, +\infty) : f(A) > b - \varepsilon$.
3. Так как $f(x)$ не убывает, то $f(x) \geq f(A)$ при $x > A \implies f(x) > b - \varepsilon$ при $x > A$.
4. Получаем, что $b - f(x) < \varepsilon$ при $x > A$ или $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x > A \implies \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Замечание: теорема справедлива для односторонних пределов.