Лекция 12

19 ноября 2024

Правила дифференцирования

Теорема 1

Пусть даны две дифференцируемые в точке x функции — $u(x)$ и $v(x)$.

1. $(u(x) \pm v(x))' = u(x)' \pm v(x)'$.
2. $(u(x) \cdot v(x))' = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$.
3. $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u(x)' \cdot v(x) - v(x)' \cdot u(x)}{v(x)^2}$.

Доказательство 2.

1. Пусть $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$
2. Прибавим и отнимем $u(x) \cdot v(x + \Delta x)$: $\Delta y = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x)$
3. Сгруппируем слагаемые: $\Delta y = (u(x + \Delta x) - u(x)) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot (v(x + \Delta x) - v(x)) = \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + \Delta v \cdot u(x)$
4. Поделим на Δx: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x)$
5. Выполним предельный переход: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = u(x)' \cdot v(x) + v(x)' \cdot u(x)$.

Следствие 1: $(c \cdot y(x))' = c \cdot y(x)'$, где c — константа
Следствие 2: $(\tan(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
Следствие 3: $(\cot(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$

Производная обратной функции

Теорема 2

Пусть функция $y = f(x)$ определена, строго монотонна и непрерывна в $U(x_0)$. $\exists\ f'(x_0) = y_0 \neq 0 \implies$ в некоторой $U(y_0)$ существует обратная функция $f^{-1}(y)$, дифференцируемая в точке y_0, причем $(f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство.

1. Рассмотрим некторой отрезок $[a, b],\ a < x_0 < b$. $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на $[a, b]$.
2. В силу теормеы о промежуточном значении, множеством значений функции будет являться $Y = [f(a),\ f(b)]$.
3. На Y существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, являющаяся строго монотонной и непрерывной, при этом $y_0 \in [f(a),\ f(b)]$.

4. Придадим аргументу y обратной функции в точке y_0 приращение Δy столь малое, что $y_0 + \Delta y \in (f(a),\ f(b))$.
5. $\Delta x = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \neq 0$ (в силу строгой монотонности обратной функции).
6. $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \iff \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim\limits_{\Delta x \to o} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} \iff (f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Пример 1.

1. $f(x) = \sin(x),\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. $x = \arcsin(y),\ y \in (-1,\ 1)$.
3. $(\arcsin(y))' = \dfrac{1}{\sin'(x)} = \dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Замечание: при $x \to \pm 1$ $(\arcsin(x))' \to \infty$ (касательная перпундикулярна графику).

Пример 2.

1. $y = \tan(x),\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.
2. $x = \arctan(y),\ y \in (-\infty,\ +\infty)$.
3. $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{(\tan(x))'} = \cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)} = \dfrac{1}{1+y^2}$.

Производная сложной функции

Теорема 3

Пусть $t = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $\varphi(x_0) = t_0$. Пусть $y = f(t)$ дифференцируема в точке t_0. Тогда сложная функция $F(x) = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем $F'(x_0) = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0)$.

Доказательство.

1. По определению требуется доказать, что $\Delta y = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция, $\alpha(0) = 0$.

2. $\Delta t = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)$. В силу дифференцируемости, $\Delta t = \varphi(x_0) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\beta(\Delta x)$ — бесконечно малая функция, $\beta(0) = 0$.

3. $\Delta y = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. В силу дифференцируемости, $\Delta y = f'(t_0) \cdot \Delta t + \gamma(\Delta t) \cdot \Delta t$, где $\gamma(\Delta x)$ — бесконечно малая функция, $\gamma(0) = 0$.

4. $\Delta y = f'(t_0) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + (\beta \cdot f'(t_0) + \gamma \cdot f'(x_0) + \gamma \cdot \beta) \cdot \Delta x = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \cdot \Delta x + \theta(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\theta(\Delta x)$ — бесконечно малая функция, $\theta(0) = 0$.

Следствие 1: $f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \implies (x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Следствие 2: $f(x) = \ln(\cos(\arctan(e^x))) \implies f'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

Следствие 3: $f(x) = u(x)^{v(x)} \implies f'(x) = u^v \cdot \ln(u) \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$.

Доказательства следствий предлагаются читателю в качестве несложного упражнения.