Лекция 16

10 декабря 2024

1 Критерий Коши для последовательностей

Определение 1

Числовая последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \ \ |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Пример. $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

Лемма 1

Фундаментальная последовательность ограничена.

Теорема 1 – Критерий Коши для последовательностей

Последовательность сходится $\iff$ последовательность фундаментальная.

<u>Доказательство.</u>

1. Необходимость (последовательность сходится $\implies$ она фундаментальная).
   (a) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. То есть $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N \ |x_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (b) Из (1) получим, что $\forall n, m \in \mathbb{N} \ |x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \implies \{x_n\}$ фундаментальная.
2. Достаточность (последовательность фундаментальная $\implies$ она сходится).
   (a) Пусть x_n фундаментальная $\implies$ (по лемме 2) $\{x_n\}$ ограничена.
   (b) По теореме Больцано-Вейерштрасса из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$.
   (c) Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = A$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим ε и $\dfrac{\varepsilon}{2}$ окрестности точки A.
   (d) Начиная с некоторого номера N_1 все члены подпоследовательности x_{k_n} лежат в $\dfrac{\varepsilon}{2}$-окрестности точки A.
   (e) Начиная с некоторого номера N_2 все члены последовательности отстоят друг от друга не более, чем на $\dfrac{\varepsilon}{2}$ (так как $\{x_n\}$ фундаментальна).
   (f) Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n > N \ x_n \in U_\varepsilon(A) \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Пример. Докажем с помошью критерия Коши, что $\{x_n\} = \{\sin(n)\}$ расходится.

1. Предоложим, что $\{x_n\}$ фундаментальная. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N \ \ |\sin(m) - \sin(n)| < \varepsilon$.

2. Пусть $m = n+2$, тогда $|2\sin(1)\cos(n+1)| < \varepsilon \implies |\cos(n+1)| < \dfrac{\varepsilon}{2\sin(1)} \implies \{\cos(n)\}$ — бесконечно малая последовательность.

3. $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1) \implies \sin(n) = \dfrac{\cos(n)\cos(1) - \cos(n+1)}{\sin(1)} \implies \{\sin(n)\}$ — бесконечно малая последовательность.

4. $\begin{cases} \sin(n) \to 0 & \text{при } n \to \infty \\ \cos(n) \to 0 & \text{при } n \to \infty \end{cases} \implies$ противоречие $\left(\cos(n) = \sqrt{1 - \sin^2(n)}\right)$.

2 Предел функции по Гейне

Пусть функция f определена на X, и a — предельная точка X.

Определение 2 – Предел по Коши

Число b называется пределом функции f при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

Определение 3 – Предел функции по Гейне

Число b называется пределом функции f при $x \to a$, если $\forall$ последовательности аргументов $\{x_n\}$, сходящейся к a $(x_n \neq a)$ последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b.

Теорема 2

Определения 2 и 3 эквивалентны.

Пример. Легко проверить при помощи определения по Гейне, что $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} \cos(n)$.

3 Критерий Коши для функций

Определение 4

Говорят, что $f(x)$ удовлетворяет в точке a условию Коши, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x', x'' : |x' - a| < \delta,\ |x'' - a| < \delta \implies |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Теорема 3 – Критерий Коши для функций

$\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \iff f(x)$ удовлетворяет условию Коши.

Доказательство.

1. Необходимость.
   (a) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \implies |f(x) - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (b) $|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - b) + (b - f(x''))| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
2. Достаточность на лекции не доказывалась.

4 Теоремы о непрерывных функциях

Теорема 4

$f(x)$ непрерывна в точке $a \implies f(x)$ ограничена в $U(a)$.

Замечание: доказательство вытекает непосредственно из определения непрерывности функции.

Теорема 5 – 1-ая теорема Вейерштрасса

Непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке.