Лекция 11

5 ноября 2024

Дифференцируемость функции

Определение 1

Приращение аргумента $\Delta x(h)$ — это величина $(x+h)-x=h$.
Приращение функции $\Delta f(x;h)$ — это величина $f(x+h)-f(x)$.

Положим $\Delta x = \Delta x(h),\ \Delta y = \Delta f(x, \Delta x)$. Введем функцию

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} - f'(x) \tag{1}$$

$\alpha(\Delta x)$ определена при всех $\Delta x \neq 0$ и бесконечно мала при $x \to 0$, поэтому будем полагать, что $\alpha(0)=0$.
Выразим из 1 Δy при $\Delta x \neq 0$:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{2}$$

Определение 2

Функция называется дифференцируемой в точке x, если её приращение можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

То есть если слагаемое $f'(x)\Delta x$ в 2 линейно относительно Δx.

Утверждение 1

Функция дифференцируема в точке $x_0 \iff \exists f'(x_0)$.

Замечание: данное обстоятельство справедливо только для функций одной переменной.

Теорема 1 – Необходимое условие дифференцируемости

Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $a \implies f(x)$ непрерывна в a.

Доказательство.
Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке a. Требуется доказать, что $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

1. Пусть $x-a=\Delta x \iff x = a+\Delta x$, тогда $\Delta x \to 0$ при $x \to a$.
2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a+\Delta x) = f(a) \iff \lim\limits_{\Delta x\to 0} (f(a+\Delta x)-f(a)) = 0$.
3. Требуется доказать, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.
4. По условию функция дифференцируема в точке $a \implies \Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x) \implies \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.
5. Последнее равенство из пункта 4 называется разностной формой условия непрерывности.

Замечание: существуют непрерывные и недифференцируемые в точке функции (например, функция Вейерштрасса).

Дифференциал функции

Определение 3

Дифференциалом (обозначается как dy) функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется выражение $f'(x_0)\Delta x$.

Замечание: если производная отлична от нуля, то и дифференциал отличен от нуля.

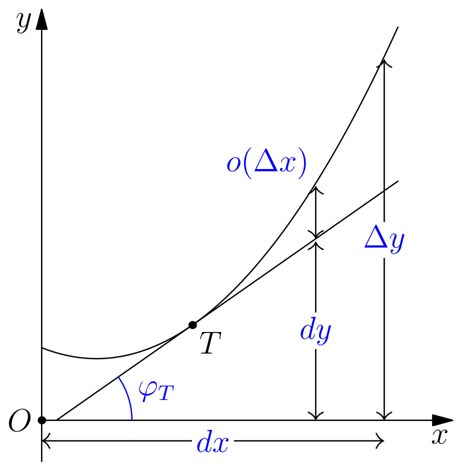
Определение 4

Дифференциалом (обозначается как dx) независимой переменной x называется приращение этой переменной.

Замечание: если x — независимая переменная, то производная функция в точке x равна $\dfrac{dy}{dx}$.

Пример 1. $y = \sin(x) \implies dy = \cos(x) \cdot dx$, $d\ \sin(x)\Big|_{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{dx}{2}$.

Геометрический смысл дифференциала



Дифференциал является наилучшим линейным приближением приращения функции.
Формула линеаризации функции: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.