Лекция 18

17 декабря 2024

Теорема 1 – Коши

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$

1. определены и непрерывны на $[a, b]$.
2. дифференцируемы в (a, b).
3. $\forall x \in (a, b) : g'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a, b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.
2. $F(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $F(a) = F(b) = f(a) \implies$ для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля.
3. $\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0 \iff f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0 \iff \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Следствие 1: если положить $g(x) = x$, то $g(a) = a,\ g(b) = b,\ g'(c) = 1 \implies f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (формула Лашранжа).

Утверждение 1 – Формула конечных приращений

Возьмем $b = x_0 + \Delta x,\ a = x_0,\ \xi \in [a, b]$. Тогда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\Delta x$, $\xi = x_0 + (\xi - x_0) = x_0 + \Theta\Delta x$, где $0 < \Theta < 1 \implies$

$$\Delta f\Big|_{x_0} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta\Delta x)\Delta x$$

.

Теорема 2

Пусть дана $f : \mathbb{R} \supseteq E \to \mathbb{R}$. $(f \in D(E)) \land (\forall x \in E\ f'(x) = 0) \implies f(x) = const$.

Доказательство.

1. Пусть x_0 — фиксированная точка, а x — произвольная точка из E.

2. По формуле Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = 0$, так как $f'(c) = 0$.

3. Получим, что $\forall x \in E\ f(x) = f(x_0) = const$.

Теорема 3 – Необходимое и достаточное условие монотонности

$(f : E \to \mathbb{R}$ не убывает на E$) \wedge (f \in D(E)) \iff \forall x \in E\ f'(x) \geq 0$

Доказательство.

1. (1) $\Longleftarrow$ (2)
   (a) Рассмотрим $x_1, x_2 \in E : x_2 > x_1$.
   (b) По формуле Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. $f'(\xi) \geq 0\ \wedge\ x_2 > x_1 \implies f(x_2) - f(x_2) \geq 0$.
2. (1) $\implies$ (2)
   (a) Предположим, что $\exists c \in E : f'(c) < 0$. Тогда по теореме 4 функция в точке c убывает $\iff \exists U(c) : f(x) < f(c)$ при $x > c$ и $f(x) > f(c)$ при $x < c$.
   (b) Первое из неравенств противоречит условию неубывания $f(x)$. Получено противоречие.

Замечание: для строго возрастания достаточно, но не необходимо, чтобы $f'(x) > 0$.

Утверждение 2

Функция возрастает в точке $c \;\not\Longrightarrow\;$ функция возрастает в $U(c)$

Пример. $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{если } x \neq 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \end{cases}$ $f'(0) = 1$, но f не возрастает ни в какой окрестности нуля.

Утверждение 3

$f(x)$ возрастает на некотором интервале $\iff$ $f(x)$ возрастает в каждой точке этого интервала

Теорема 4 – Достаточное условие равномерной непрерывности

$f : E \to \mathbb{R}$ имеет на E ограниченную производную $\implies$ $f(x)$ равномерно непрерывна на E.

Доказательство.

1. Пусть $|f'(x)| \leq M\ \forall x \in E$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$.
2. $\forall x', x'' : |x'' - x'| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M} \implies |f(x'') - f(x')| = |f'(\xi)(x'' - x')| \leq M\,|x'' - x'| < M\delta < \varepsilon$

Теорема 5 – Правило Лопиталя

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$ и выполнены следующие условия:

1. $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a$.
2. $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\dot{U}(a)$.
3. $\forall x \in \dot{U}(a)\ g'(x) \neq 0$
4. $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Тогда

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство.

1. Положим $f(a) = g(a) = 0$. В результате f и g станут непрерывными в $U(a)$.
2. Пусть $x \neq a$ — произвольная точка из $U(a)$. По формуле Коши $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, где $\xi \in (a, x)$.
3. $f(a) = g(a) = 0 \implies \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \implies \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (так как $\xi \to a$).