

# Лекция 3

17 сентября 2024

Формула оценивания (всего 2 КР и 1 коллоквиум):  $0.15(\text{КР1}) + 0.15(\text{КР2}) + 0.15(\text{Коллоквиум}) + 0.1(\text{Активность}) + 0.45(\text{оценка за экзамен})$ .

## 1 Модуль вещественного числа

### Определение 1 – Модуль вещественного числа

Если дано вещественное число  $x$ , то  $|x|$  определяется следующим образом:  $|x| = \begin{cases} x & \text{если } x > 0 \\ 0 & \text{если } x = 0 \\ -x & \text{если } x < 0 \end{cases}$

### Определение 2

Расстоянием между действительными числами  $x$  и  $y$  называется  $|x - y|$ .

### Утверждение 0

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$  справедливо, что  $|x - y| \leq |y - z| + |z - x|$ .

Замечание: равенство выполняется только когда все три числа либо неотрицательны, либо неположительны.

### Утверждение 0

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  справедливо, что  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

Доказательство.

1.  $\begin{cases} 0 \leq y \\ 0 \leq x \end{cases} \implies \begin{cases} |x + y| = x + y \\ |x| = x \\ |y| = y \end{cases} \implies |x + y| = x + y = |x| + |y|.$
2.  $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} |x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \\ |x| = -x \\ |y| = -y \end{cases} \implies |x + y| = (-x) + (-y) = |x| + |y|.$
3.  $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x < x + y \leq 0 \implies |x + y| < |x| \\ 0 \leq x + y < y \implies |x + y| < |y| \end{cases} \implies |x + y| < |x| + |y|.$

Замечание: для  $n$  произвольных действительных чисел имеет место равенство  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$  (доказывается по индукции).

## 2 Предел функции

### Определение 3

Пусть  $X$  и  $Y$  — некоторые числовые множества. Если  $\forall x \in X \mapsto !y \in Y$  (то есть каждому  $x$  из  $X$  ставится в соответствие единственный  $y$  из  $Y$ ), то говорят, что на множестве  $X$  определена числовая функция  $y = y(x)$ .

- Множество  $X$  называется областью определения функции (обозначается как  $D(f)$ ).
- Переменная  $x$  называется аргументом функции.
- Число  $y$ , соответствующее данному  $x$ , называется частным значением функции.
- Совокупность  $\{y\}$  всех частных значений функции называется областью значений (обозначается как  $E(f)$ ).

### Определение 4

График функции — это множество вида  $\{M(x, f(x)), x \in X\}$  (в прямоугольной системе координат).

Замечание:  $\exists$  функции, графики которых нельзя изобразить:  $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{I} \end{cases}$  (функция Дирихле).

### Определение 5

Функция  $f(x)$  называется ограниченной сверху (снизу) на множестве  $K$ , если  $\exists M \in K$  ( $m \in K$ ) :  $\forall x \in X \ f(x) \leq M$  ( $f(x) \geq m$ ). При этом число  $M$  называется верхней гранью (а число  $m$  — нижней гранью) функции  $f(x)$  на множестве  $K$ .

### Определение 6 – Ограниченность I

Функция  $f(x)$  называется ограниченной на множестве  $K$ , если  $\exists M, m \in K : \forall x \in X : m \leq f(x) \leq M$ .

### Определение 7 – Ограниченность II

Функция  $f(x)$  называется ограниченной на множестве  $K$ , если  $\exists A \in K > 0 : \forall x \in X \ |f(x)| \leq A$ .

Домашнее задание: доказать, что определение 7 эквивалентно определению 6.

### Определение 8

Наименьшая из верхних граней, ограничивающих сверху функцию  $f(x)$ , называется ее точной верхней гранью (обозначается как  $\sup_X f(x)$ ). Можно сказать, что  $\sup_X f(x) = \sup \{y\}$ .

Замечание: можно дать аналогичное определение для точней нижней грани.

**Утверждение 0**

Число  $M = \sup_X f(x)$ , если

1.  $\forall x \in X : f(x) \leq M$  (то есть число  $M$  — это одна из верхних граней).
2.  $\forall \widetilde{M} < M \exists \widetilde{x} \in X : f(\widetilde{x}) > \widetilde{M}$  (то есть число  $M$  — наименьшая из верхних граней).

Домашнее задание 1: сформулировать аналогичное определение для точной нижней грани.

Домашнее задание 2: пользуясь правилом построения отрицаний сформулировать определение

1. неограниченной сверху функции.
2. неограниченной снизу функции.
3. неограниченной функции.

Замечание: ограниченная функция может не принимать значение, равное какой-либо её точной грани.

**Пример:**  $y = \sin x$ . Возьмем  $D(y) = \{x : 0 < x \leq \frac{\pi}{2}\} \implies \sup\{\sin x\} = 1 \in \{y\}$ .  $\inf\{\sin x\} = 0 \notin \{y\}$ .

### 3 Определение предела функции

**Определение 9**

Число  $A$  называется предельной точкой некоторого числового множества  $X$ , если в любой (сколь угодно малой) проколотой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$  содержатся точки из множества  $X$ .

**Пример 1:**  $X = \{x : a < x < b\}$ , любая точка такого интервала (а также точки  $a$  и  $b$ ) является предельной точкой  $X$ .

**Пример 2:** Множество  $\mathbb{R}$  не имеет ни одной предельной точки.

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $X$ . Пусть  $A$  — предельная точка множества  $X$ .

**Определение 10 – Определение предела по Коши**

Число  $B$  называется пределом функции  $f(x)$  в точке  $a$  (при  $x \rightarrow a$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D(f) : 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - B| < \varepsilon$$

Замечание 1: выражение <предел функции  $f(x)$  в точке  $a$  равен  $B$ > обозначается как  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$ .

Замечание 2:  $|f(x) - B| < \varepsilon \iff b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$ .

**Утверждение 0**

Функция в данной точке может иметь не более одного предела.

**Утверждение 0**

Если функция  $f(x)$  имеет в данной точке предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство.

Следует непосредственно из определения предела.

**Пример 1:** Докажем, что если  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = c = const$ , то  $\forall a \in \mathbb{R} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ .  $\forall \varepsilon > 0$  возьмем любое  $\delta > 0$ , тогда  $|f(x) - c| \equiv 0 < \varepsilon$ .

**Пример 2:**  $f(x) = \begin{cases} b & \text{если } x \neq a \\ c \neq b & \text{если } x = a \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

**Пример 3:**  $f(x) = \begin{cases} b & \text{если } x \neq a \\ \text{не определена} & \text{если } x = a \end{cases} \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ .

Замечание 1: во всех примерах  $\forall \varepsilon > 0$  можно взять любое  $\delta$  (то есть  $\delta$  не зависит от  $\varepsilon$ ).

Замечание 2: если в определении предела убрать неравенство  $0 < |x - a| < \delta$ , то есть потребовать выполнение неравенства  $|f(x) - B| < \varepsilon$  для всех значений аргумента из  $\delta$ -окрестности точки  $a$  (включая саму точку  $a$ , при условии, что она принадлежит области определения функции), то

- ответ в примере 3 не изменится, поскольку  $x = a$  не является значением аргумента функции.
- ответ в примере 2 изменится. А именно, предел у функции  $f(x)$  не будет существовать, так как при  $x = a$  неравенство  $|f(x) - B| < \varepsilon$  принимает вид  $|c - b| < \varepsilon$ . Данное неравенство не выполняется, если взять  $\varepsilon < |c - b|$ .

**Пример 4:** докажем, что если  $f(x) = x$ , то  $\forall a \in \mathbb{R} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon : \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta = \varepsilon \implies |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$ .

**Пример 5:** Докажем, что  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  не имеет предела в точке 0 ( $x = 0$  — предельная точка области определения, поэтому вопрос о существовании предела является корректным).

1. Предположим, что  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = B$ .

2. Возьмем  $\varepsilon = 1 \implies \exists \delta > 0 : |\sin \frac{1}{x} - B| < 1$  при  $0 < |x| < \delta$ .

3. Возьмем  $x_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ ,  $x_2 = \frac{1}{\frac{-\pi}{2} + 2\pi n}$  ( $0 < |x_1|, |x_2| < \delta$ ).

4. Заметим, что  $\left| \sin \frac{1}{x_1} - b \right| = |1 - b| < 1$ ,  $\left| \sin \frac{1}{x_2} - b \right| = |-1 - b| < 1$  и система  $\begin{cases} |1 - b| < 1 \\ |-1 - b| = |1 + b| < 1 \end{cases}$  неразрешима в действительных числах  $\implies f(x) = \sin \frac{1}{x}$  не имеет предела в точке 0.