Лекция 13

26 ноября 2024

Замечание: утверждение «функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0» принято обозначать как $f(x) \in D(x_0)$.

Теорема 1 – Инвариантности формы первого дифференциала

$g(t) \in D(t_0) \wedge g(t_0) = x_0 \wedge f(x) \in D(x_0) \implies f \circ g \in D(t_0)$, причем $(f \circ g)'_t(t_0) = f'_x(x_0) \cdot g'_t(t_0)$.

Доказательство.

1. Так как $f(x) \in D(x_0)$, $f(x) - f(x_0) = f'_x(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.
2. $o(x - x_0) = (x - x_0)o(1) = (x - x_0)\alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to x_0$. Доопределим $\alpha(x_0) = 0$.
3. Так как $g(t) \in D(t_0)$, $g(t) - g(t_0) = g'_t(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0)$ при $t \to t_0$.
4. $f(g(t)) - f(g(t_0)) = f'_x(x_0) \cdot (g(t) - g(t_0)) + (g(t) - g(t_0)) \cdot \alpha(g(t))$.
5. $f(g(t)) - f(g(t_0)) = f'_x(x_0) \cdot g'_t(t_0) \cdot (t - t_0) + f'_x(x_0) \cdot o(t - t_0) + g'_t(t_0) \cdot (t - t_0) \cdot \alpha(g(t)) + o(t - t_0) \cdot \alpha(g(t))$.
6. $f(g(t)) - f(g(t_0)) = f'_x(x_0) \cdot g'_x(t_0) \cdot (t - t_0) + o(t - t_0)$.
7. $g(t) \to g(t_0) = x_0 \implies \alpha(g(t)) = o(1)$.
8. По теореме о пределе композиции $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(g(t)) = \alpha\left(\lim\limits_{t \to t_0} g(t)\right) = 0$, ч.т.д.

Следствие 1: $d(f(g)) = f'_x \cdot g'_t \cdot dt$.

Следствие 2:

1. Пусть некоторая функция $y(t(x))$ задана параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, причем $x(t)$ является возрастающей и непрерывной в $U(t_0)$; $x, y \in D(t_0)$; $x'(t) \neq 0$ и $x(t_0) = x_0$.
2. Тогда $y \in D(x_0)$ и $y'_x(x_0) = (y \circ t)'(x_0) = y'_t(t_0) \cdot t'_x(x_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.

Производные высших порядков

Определение 1

Пусть $f(x) \in D(U(x_0)) \wedge f'(x) \in D(x_0)$. Тогда второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

$$f''(x) = (f'(x))'\Big|_{x = x_0}$$

.

Следствие: по индукции можно определить производную n-ого порядка ($f^{(n)}(x)$ — производная от $f^{(n-1)}(x)$).

Замечание: говорят, что функция выпукла вверх в точке x_0, если $f''(x_0) < 0$, вниз — если $f''(x_0) > 0$. Точки, в которых $f''(x) = 0$ называются точками перегиба.

Пример 1. $f(x) = x^\alpha \implies f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$

Пример 2. $f(x) = a^x \implies f^{(n)}(x) = \ln^n(a)a^x$

Пример 3. $f(x) = \sin(x) \implies f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

Пример 4. $f(x) = \cos(x) \implies f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$

Утверждение 1

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные первого порядка, то

1. $(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$.
2. $(u(x) \cdot v(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$ (формула Лейбница).

Замечание: считается, что $f^{(0)}(x)$ — это сама функция $f(x)$.

Пример. $f(x) = x^2 e^{3x} \implies f^{(10)}(x) = 3^{10} e^{3x} x^2 + 2\binom{1}{10} 3^9 e^{3x} x + 2\binom{2}{10} 3^8 e^{3x} + \ldots = 3^9 e^{3x}(3x^2 + 20x + 30)$.