Лекция 10

5 ноября 2024

Основные асимптотические формулы при $x \to 0$:

1. $\sin(x) = x + o(x)$
2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
3. $\tan(x) = x + o(x)$
4. $\log_a(x) = \frac{x}{\ln(a)} + o(x)$
5. $a^x = 1 + x \cdot \ln(a) + o(x)$
6. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$

Производные и дифференциал

Определение 1

Пусть

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Тогда эта величина называется производной функции $f(x)$ и обозначается $f'(x)$.

Пример 1. $f(x) = const \implies f' = \lim\limits_{\Delta \to 0} \frac{c-c}{\Delta x} = 0.$

Пример 2. $f(x) = x^n \implies f' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1} \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = nx^{n-1}.$

Пример 3. $f(x) = \sin(x) \implies f' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos\left(\frac{\Delta x}{2} + x\right) = \cos(x).$

Пример 4. $f(x) = \log_a x \implies f' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x\ln(a)}.$

Односторонние производные

Определение 2

Пусть

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Тогда эта величина называется правосторонней производной функции $f(x)$ и обозначается $f'_+(x)$.

Замечание: аналогично определяется левосторонняя производная $f'_-(x)$.

Утверждение 1

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 существует $\iff \exists f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

Пример 1. $f(x) = |x|$. $f' = \begin{cases} 1 & \text{если } x > 0 \\ -1 & \text{если } x \leq 0 \end{cases} \implies f'_+(0) \neq f'_-(0) \implies \nexists f'(0)$.

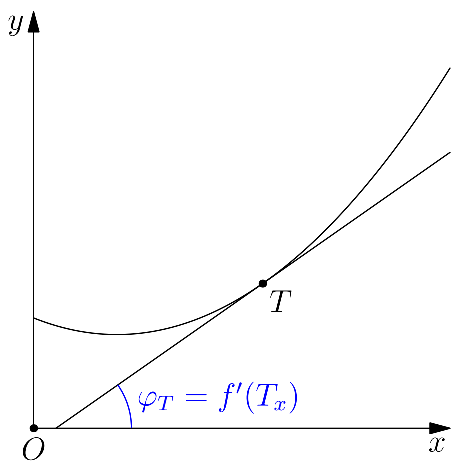
Определение 3 – Частная производная

Пусть дана функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Пусть

$$\exists \lim_{h_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i - h_i, \ldots, x_m) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m)}{h_i} = a_i(x)$$

Тогда эта величина называется частной производной функции $f(x)$ в точке $x = (x_1, \ldots, x_m)$ по переменной x_i и обозначается как $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Геометрический смысл производной



Теорема 1

$\exists f'(x_0) \implies$ график $f(x)$ имеет касательную в точке x_0, причем угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$.

Утверждение 2

Уравнение касательной к графку функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид $y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$.