№ 4

$\overline{x}_n$ - выборка

$$\rho(x) = a\{(-1,1)\setminus\{0\}\} + b\{0\} + b\{2\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x) = \int_{-1}^{1} a\,dx + 2b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a + 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} - a$$

$$a = \Theta \Rightarrow b = \frac{1}{2} - \Theta$$

Замена:

$$\rho(\Theta, x) = \Theta\{(-1,1)\setminus\{0\}\} + \left(\frac{1}{2} - \Theta\right)\{0\} + \left(\frac{1}{2} - \Theta\right)\{2\}$$

Т.к. ~~...~~

$\Theta > 0$ и $\frac{1}{2} - \Theta > 0$, то $\Theta \in (0, \frac{1}{2})$

ОММ (Пирсон - легенда)

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\rho(\Theta, x)\,dx = \cancel{\Theta\int_{-1}^{1} x\,dx} + \cancel{0\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)} + 2\left(\frac{1}{2} - \Theta\right) =$$

$$= 1 - 2\Theta$$

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(\Theta, x)\,dx = \Theta\int_{-1}^{1} x^2\,dx + 4\left(\frac{1}{2} - \Theta\right) + 0^2\left(\frac{1}{2} - \Theta\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\Theta + 2 - 4\Theta = 2 - \frac{10}{3}\Theta \longrightarrow$$

$D[\xi] = \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 2 - \frac{10}{3}\theta -$
$- 1 + 4\theta \cancel{+} 4\theta^2 = 1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2$

$\alpha_1 = \overline{\alpha}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}$

$1 - 2\theta = \overline{x} \Rightarrow \underline{\tilde{\theta}_1 = \frac{1-\overline{x}}{2}}$

Исследуем на несмещенность:

$M[\tilde{\theta}_1] = M[\frac{1-\overline{x}}{2}] = M[\frac{1}{2} - \frac{\overline{x}}{2}] =$
$= \frac{1}{2} - M[\frac{\overline{x}}{2}] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}M[\overline{x}] =$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}[1 - 2\theta] = \theta$ • несмещ.

Исследуем на состоятельность:

$D[\tilde{\theta}_1] = D[\frac{1}{2} - \frac{\overline{x}}{2}] = D[\frac{\overline{x}}{2}] = \frac{1}{4}D[\overline{x}] =$
$= \frac{1}{4n}D[\xi] = \frac{1}{4n}(1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2) \to 0,\ n \to \infty$

• состоят.

Эффективность:

а) Регулярность модели

1) непр. дифф.

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\theta} p(\theta, x) = 0$

$\int_{-1}^{1} 1\,dx + (-1) + (-1) = 2 - 2 = 0$

3) $I(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p(\theta, x)}{\partial \theta} \right)^2 p(x, \theta)\, dx =$

$= \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{1}{\theta} \right)^2 \theta\, dx + \frac{\frac{1}{2} - \theta}{(\frac{1}{2} - \theta)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \theta}{(\frac{1}{2} - \theta)^2} =$

$= \frac{2}{\theta} + 2 \cdot \frac{1}{1-\theta} = \frac{2}{\theta(1-2\theta)} > 0$

$I(\theta) > 0$, непр. => модель регулярна

б) Регулярность оценки

$D[\tilde{\theta}_1]$ огранич. на $\forall$ компакте из $(0, \frac{1}{2})$

$\Big\downarrow$

Нер-во Крамера-Рао.

$D[\tilde{\theta}_1] \geq \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$

$\frac{1 + \frac{2}{3}\theta - 4\theta^2}{4n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$

Ничего сказать не можем

(Возможно скажет Бхаттачарья)

$\Big\downarrow$ ОМП

ОМП (Фишер - красавчик)

$$L(x, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \Theta)$$

Выборка $\vec{x}_n$, m раз встретились $\{0\}$ или $\{2\}$ в серии, тогда

$$L(\Theta) = \Theta^{n-m} \left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^m$$

$$\ln L(\Theta) = (n-m) \ln \Theta + m \ln\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(\Theta)}{\partial \Theta} = \frac{n-m}{\Theta} + \frac{(-m)}{\frac{1}{2} - \Theta} =$$

$$= \frac{(n-m)\left(\frac{1}{2} - \Theta\right) - m\Theta}{\Theta \left(\frac{1}{2} - \Theta\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} - n\Theta - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow \Theta = \frac{1}{2} - \frac{m}{2n} =$$

$$= \underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu} \qquad \left(\nu = \frac{m}{n}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L(\Theta)}{\partial \Theta^2} = \frac{m-n}{\Theta^2} + \frac{m}{\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2}(-1)^3 =$$

$$= \frac{(m-n)\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2 - m\Theta^2}{\Theta^2\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2} = \frac{m\left(\frac{1}{4} - \Theta\right) - \overbrace{n\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2}^{\geq 0}}{\Theta^2\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2} \leq$$

$$\leq \frac{m\left(\frac{1}{4} - \Theta\right)}{\underbrace{\Theta^2\left(\frac{1}{2} - \Theta\right)^2}_{> 0}} < 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\Theta}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu$$

Исследуем на несмещенность:

$$M[\tilde{\Theta}_2] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} M[\nu] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\overbrace{2b}^{p}) =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \Theta\right) = \Theta$$ • несмещ.

Исследуем на состоятельность:

$$D[\tilde{\Theta}_2] = D\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\nu\right] = \frac{1}{4} D[\nu] =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{p(1-p)}{n}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2b(1-2b)}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(1-2\Theta)(2\Theta)}{n}\right) \to 0,\ n \to \infty$$

$$\left(D[\tilde{\Theta}_2] = \frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n}\right)$$ • состоят.

Эффективность:

а) Регулярность модели ✓

б) Регулярность оценки

$D[\tilde{\Theta}_2]$ огранич. на $\forall$ компакте из $(0, \frac{1}{2})$

$\Downarrow$

<u>Нер-во Крамера-Рао</u>

$$D[\tilde{\Theta}_2] \geq \frac{1}{nI(\Theta)} = \frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n}$$

$$\frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n} \geq \frac{\Theta(1-2\Theta)}{2n} \Rightarrow \tilde{\Theta}_2$$ эффективная

$\exists!$ эфф. оценка $\Rightarrow \tilde{\Theta}_1$ не эффект.