

V04

\bar{x}_n - будора

$$p(x) = a \{(-1, 1) \setminus \{0\}\} + b \{0\} + b \{2\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-1}^1 a dx + 2b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a + 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} - a$$

$$a = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} - 0$$

Замеча:

$$p(0, x) = 0 \{(-1, 1) \setminus \{0\}\} + \left(\frac{1}{2} - 0\right) \{0\} + \left(\frac{1}{2} - 0\right) \{2\}$$

~~М.р. 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2, 0, 1/2~~

$$0 > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} - 0 > 0, \text{ но } 0 \in (0, \frac{1}{2})$$

ОММ (Минус - перенос)

$$L_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(0, x) dx = \cancel{0 \int x dx} + \cancel{0 \left(\frac{1}{2} - 0\right)} + 2 \left(\frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= 1 - 2 \cdot 0$$

$$L_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(0, x) dx = 0 \int x^2 dx + 4 \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 0 \left(\frac{1}{2} - 0\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0 + 2 - 0 = 2 - \frac{10}{3} \cdot 0 \rightarrow$$

$$D[\xi] = \mu_2 = L_2 - L_1^2 = 2 - \frac{10}{3} \Theta - 1 + 4\Theta - 4\Theta^2 = 1 + \frac{2}{3} \Theta - 4\Theta^2$$

$$L_1 = \bar{L}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$$

$$1 - 2\Theta = \bar{x} \Rightarrow \bar{\Theta}_1 = \frac{1 - \bar{x}}{2}$$

Выводим на несмещенность:

$$\begin{aligned} M[\bar{\Theta}_1] &= M\left[\frac{1 - \bar{x}}{2}\right] = M\left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}\right] = \\ &= \frac{1}{2} - M\left[\frac{\bar{x}}{2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} M[\bar{x}] = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [1 - 2\Theta] = \Theta \quad \bullet \text{ несмещ.} \end{aligned}$$

Выводим на состоятельность:

$$\begin{aligned} D[\bar{\Theta}_1] &= D\left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{2}\right] = D\left[\frac{\bar{x}}{2}\right] = \frac{1}{4} D[\bar{x}] = \\ &= \frac{1}{4n} D[\xi] = \frac{1}{4n} \left(1 + \frac{2}{3} \Theta - 4\Theta^2\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \\ &\quad \bullet \text{ состоят.} \end{aligned}$$

Эффективность:

а) Регулярность модели

1) непрерывность

$$2) \int \frac{\partial}{\partial \Theta} p(\Theta, x) = 0$$

$$\int_{-1}^1 1 dx + (-1) + (-1) = 2 - 2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad I(\theta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 p(x, \theta) dx = \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\theta} \right)^2 \theta dx + \frac{\frac{1}{2} - \theta}{\left(\frac{1}{2} - \theta \right)^2} + \frac{\frac{1}{2} - \theta}{\left(\frac{1}{2} - \theta \right)^2} = \\
 &= \frac{2}{\theta} + 2 \cdot \frac{1}{1-\theta} = \frac{2}{\theta(1-2\theta)} > 0
 \end{aligned}$$

$I(\theta) > 0$, кепр. \Rightarrow модель регулярна

б) Регулярность оценки

$\Phi[\tilde{\theta}_1]$ огранич. на \forall компакте из $(0, \frac{1}{2})$



Лемма Крамера-Рао

$$\Phi[\tilde{\theta}_1] \geq \frac{1}{n I(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$$\frac{1 + \frac{1}{2}\theta - 4\theta^2}{4n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

Ничего сказать не можем

(Возможно скажет Бхаттачарья)

↓ ОМП

ОМП (Рассел - красавчик)

$$L(x, \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i, \theta)$$

Выборка \bar{x}_n , m раз повторившись
или $\{0\}$ или $\{2\}$ в сумме, тогда

$$L(\theta) = \theta^{n-m} \left(\frac{1}{2} - \theta\right)^m$$

$$\ln L(\theta) = (n-m) \ln \theta + m \ln \left(\frac{1}{2} - \theta\right)$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n-m}{\theta} + \frac{-m}{\frac{1}{2} - \theta} =$$

$$= \frac{(n-m)(\frac{1}{2} - \theta) - m\theta}{\theta(\frac{1}{2} - \theta)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2} - n\theta - \frac{m}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{2} - \frac{m}{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m}{n}$$

$$\hat{\theta} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{d^2 \ln L(\theta)}{d \theta^2} = \frac{m-n}{\theta^2} + (-1)^3 \frac{m}{(\frac{1}{2} - \theta)^2} =$$

$$= \frac{(m-n)(\frac{1}{2} - \theta)^2 - m\theta^2}{\theta^2(\frac{1}{2} - \theta)^2} = \frac{m(\frac{1}{4} - \theta) - n(\frac{1}{2} - \theta)^2}{\theta^2(\frac{1}{2} - \theta)^2} =$$

$$= \frac{n(\frac{m}{n}(\frac{1}{4} - \theta) - (\frac{1}{2} - \theta)^2)}{\theta^2(\frac{1}{2} - \theta)^2} = \frac{n((1-2\theta)(\frac{1}{4} - \theta) - (\frac{1}{2} - \theta)^2)}{\theta^2(\frac{1}{2} - \theta)^2}$$

$$= \frac{n(-\frac{\theta}{2} + \theta^2)}{\theta^2(\frac{1}{2} - \theta)^2} < 0 \text{ на } (0, \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{m}{n}$$

Исследуем на несмещенность:

$$\begin{aligned} M[\tilde{\theta}_2] &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} M[V] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (2\theta)^{-\rho} \\ &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \theta \right) = \theta \quad \cdot \text{несмещ.} \end{aligned}$$

Исследуем на состоятельность:

$$\begin{aligned} D[\tilde{\theta}_2] &= D\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} V\right] = \frac{1}{4} D[V] = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\rho(1-\rho)}{n} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2\theta(1-2\theta)}{n} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{(1-2\theta)(2\theta)}{n} \right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$(D[\tilde{\theta}_2] = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}) \quad \cdot \text{сходятся.}$$

Эффективность:

а) Регулярность модели \checkmark

б) Регулярность оценки

$D[\tilde{\theta}_2]$ огранич. на \forall компакте из $(0, \frac{1}{2})$



Критерий Крамера-Рао

$$D[\tilde{\theta}_2] \geq \frac{1}{n I(\theta)} = \frac{\theta(1-2\theta)}{2n}$$

$$\frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \geq \frac{\theta(1-2\theta)}{2n} \Rightarrow \tilde{\theta}_2 \text{ эффективна}$$

[! эффектив. оценка $\Rightarrow \tilde{\theta}_1$ не эффектив.