

# Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

Août-Septembre 2020

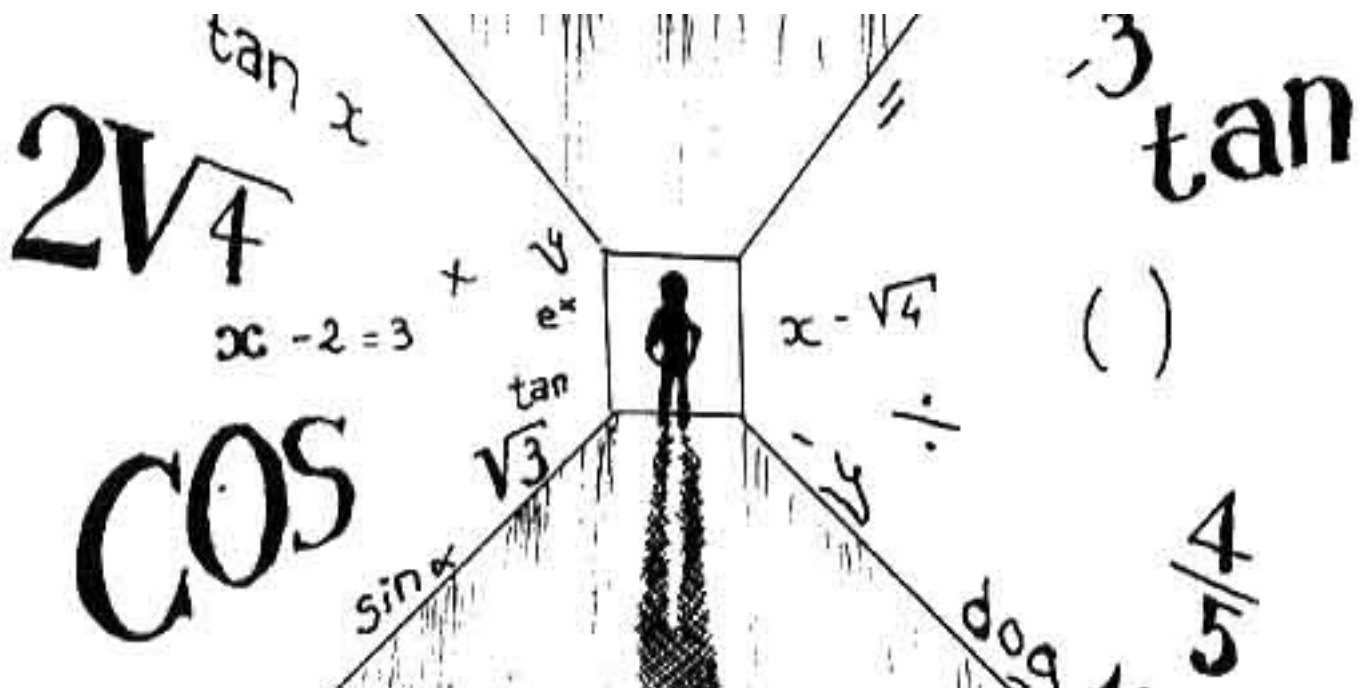
# Table de Matières

<b>1</b>	<b>Mathématiques Théorie</b>	<b>3</b>
1.1	Matrices Théories . . . . .	4
1.1.1	Les propriétés . . . . .	4
1.1.2	Calcul du déterminants $2 \times 2$ . . . . .	5
1.1.3	Calcul du déterminants $4 \times 4$ ou $n \times n$ . . . . .	5
1.1.4	Méthode Elimination de Gauss . . . . .	6
1.1.5	Autres Méthode . . . . .	7
1.2	Nombres Complexes Théorie . . . . .	9
1.2.1	Conversion polaire - cartésienne . . . . .	9
1.2.2	Conversion Cartésienne - Polaire . . . . .	10
1.3	Chaptire 3 : Logique . . . . .	11
1.3.1	Logique propositionnelle . . . . .	11
1.3.2	Proposition . . . . .	11
1.3.3	L'implication . . . . .	11
1.3.4	L'équivalence . . . . .	11
1.3.5	Vocabulaire . . . . .	11
1.3.6	Tableau priorités logique . . . . .	12
1.3.7	Tautologie . . . . .	12
1.3.8	Changement de forme . . . . .	12
1.4	Théorie naïve des ensembles . . . . .	13
1.4.1	Définition . . . . .	13
1.4.2	Relation d'égalité . . . . .	13
1.4.3	Relation d'inclusion . . . . .	13
1.4.4	Propriété de l'inclusion . . . . .	13
1.4.5	Relation d'inclusion . . . . .	14
1.4.6	Opération d'union ( $\cup$ ) . . . . .	14
1.4.7	Opération d'intersection ( $\cap$ ) . . . . .	14
1.4.8	L'ensemble vide . . . . .	14
1.4.9	La cardinalité . . . . .	15
1.4.10	Identité . . . . .	15
1.4.11	Commutativité . . . . .	15
1.4.12	Associativité . . . . .	15
1.4.13	Distributivité . . . . .	15
1.4.14	De Morgans . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Mathématiques Exercices</b>	<b>16</b>
2.1	Exercice Matrices . . . . .	17
2.1.1	Enoncés des exercices . . . . .	17
2.1.2	Résolution des exercices . . . . .	18
2.2	Nombres Complexes Exercices . . . . .	23
2.2.1	Exercices : Enoncés . . . . .	23
2.2.2	Résoudre les équations suivantes : . . . . .	24
2.2.3	Trouver le conjugués : . . . . .	26
2.2.4	Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$ . . . . .	26
2.2.5	Exprimer sous forme $a+bi$ . . . . .	26
2.2.6	Exprimer sous forme polaire . . . . .	26
2.2.7	Exprimer sous forme cartésienne . . . . .	27
2.2.8	Trouver la solution . . . . .	28
2.3	Logique propositionnelle exercices . . . . .	30

2.3.1	Déterminer la véracité . . . . .	30
2.3.2	Construire la table de vérité . . . . .	30
2.4	Théorie naïve des ensembles Exercices . . . . .	31
2.4.1	Exercices Examen . . . . .	31
2.5	Nombre Entiers Exercices . . . . .	32
2.5.1	Exemple Modulo . . . . .	32
2.6	Relation Binaire Exercices . . . . .	33
2.6.1	Produit Cartésiens . . . . .	33
2.6.2	Exercices Examen . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Exemple d'examen</b>	<b>35</b>
3.1	Q1 : Calcul du déterminant de la matrice . . . . .	35
3.2	Q2 : Calcul nombre complexe . . . . .	37
3.3	Q3 : Transformer en forme conjonctive . . . . .	40
3.4	Q4 : Théorie des ensembles naïfs . . . . .	40
3.5	Q5 : Induction forte/faibles . . . . .	41
3.6	Q6 : Nombre entiers . . . . .	41
3.7	Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau . . . . .	42
3.8	Q8 : Ensemble Naturels . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Formules</b>	<b>44</b>
4.1	Tableau Trigonométrie . . . . .	44
4.2	NB Complex : Cartésienne vers Polaire . . . . .	45
4.3	NB Complex : Polaire vers Cartésienne . . . . .	45
4.4	Addition de nombre complexe . . . . .	45
4.5	Soustraction de nombre complexe . . . . .	45
4.6	Multiplication de nombre complexe . . . . .	45
4.7	Division de nombre complexe . . . . .	46
4.8	Logique propositionnelle . . . . .	46

## Chapitre 1

## Mathématiques Théorie



## 1.1 Matrices Théories

### 1.1.1 Les propriétés

#### A) Linéarité

si on multiplie une matrice par  $\lambda$ , le déterminant est multiplié par  $\lambda^n$  et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par  $\lambda = \det(A) * \lambda^n$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)?$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ab \text{ et } \det(B) = cd$$

Conclusion :

$$C = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = (a+c) * (b+d)$$

$\lambda^n \neq$  linéaire

$\lambda^n$  est exponentielle

#### B) Déterminant et transposée

$\det(A) = \det(A^T)$ , les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$$\det(A) = \sum_{o \in s} \varepsilon(o^{-1}), \dots$$

$$\det(T_a) = \sum_{o \in s} \varepsilon(o^1), \dots$$

#### C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit  $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\varphi_a(x_1, \dots, x_n) = \det(\varphi_c)(A * 1, \dots, A * N)$$

#### D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différent de 0.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

### 1.1.2 Calcul du déterminants 2\*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2\*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplications croisée des 2 ensembles

Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1*3) - (2*4)$$

$$\det(A) = (3-8)$$

$$\det(A) = (-5)$$

$$S = -5$$

### 1.1.3 Calcul du déterminants 4\*4 ou n\*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n\*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

$$L3 - (2*L1) = L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2-(1*2)} & \mathbf{3-(2*2)} & \mathbf{0-(2*3)} & \mathbf{1-(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{(2-2)} & \mathbf{3-4} & \mathbf{(0-6)} & \mathbf{1-0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

L4 - (3\*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-(3*1)} & \mathbf{0-(3*2)} & \mathbf{1-(3*3)} & \mathbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-3} & \mathbf{0-6} & \mathbf{1-9} & \mathbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...

Exmples :

### 1.1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1\*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6\*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)\*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$1 * (-1) * (-4) * 24 = 96$$

$$S = \det(A) = 96$$

### 1.1.5 Autres Méthode

Elimination en matrice 3\*3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Création de la matrice de signe

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2\*2

$$A =$$

$$1 * \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+ 3 * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$



)

Mise en équation

$$\begin{aligned} A = & 1 * ( \\ & + (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1)) \\ & - (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1)) \\ & + 3 * ((1 * 8) - (6 * 6)) \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * ( \\ & + (-1) * ((12) - (8)) \\ & - (-2) * ((2) - (6)) \\ & + 3 * ((8) - (36)) \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * ( \\ & (-1 * 4) \\ & (2 * (-4)) \\ & (3 * (-28)) \\ & ) \end{aligned}$$

$$4 - (-8) - (-84) = \mathbf{96}$$

$$S = \det(A) = \mathbf{96}$$

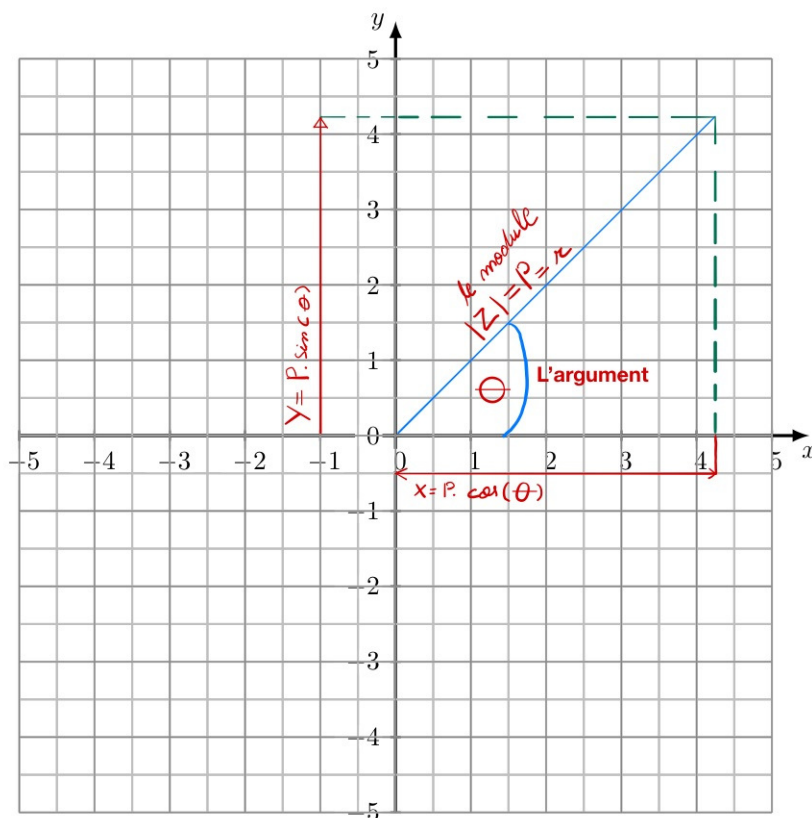
## 1.2 Nombres Complexes Théorie

### 1.2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module :

le module noté  $|Z|$  est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ( $\sqrt{a^2 + b^2}$ ).

Représentation Géographique



Démonstration :

$$\begin{aligned} |Z| &= \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2)} \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta))} * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2)} \\ |Z| &= \rho \end{aligned}$$

$\rho$  est le module et  $\theta$  est l'argument

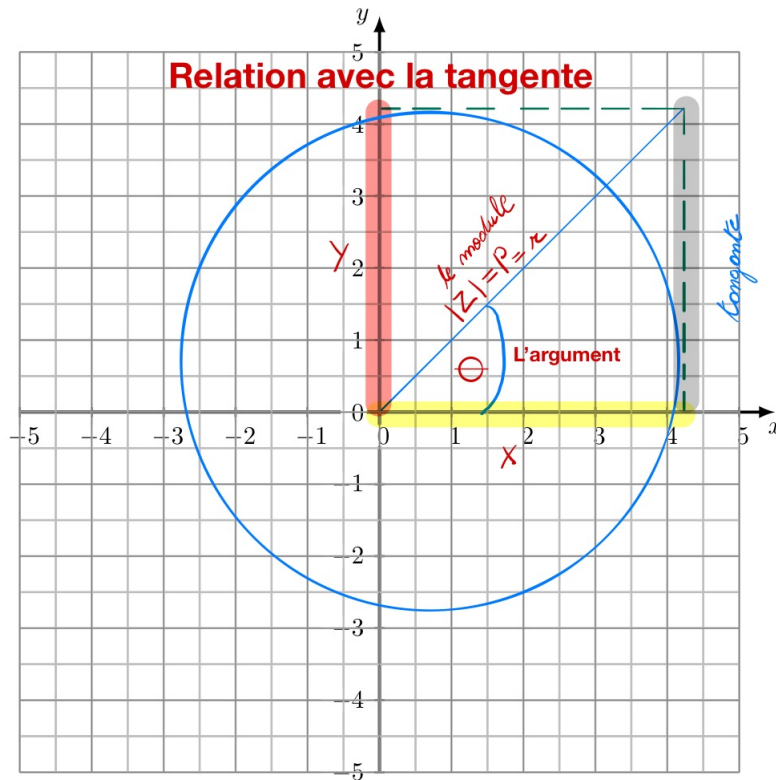
$$Z = P(\cos(\theta) + \sin(\theta) * i) \text{ ou } Z = P(\text{cis}(\theta))$$

### 1.2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration Géométriquement  $\theta$

Nous pouvons voir que  $\theta$  est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangente au cercle de rayon X.



$$X = \rho * \cos(\theta) \quad Y = \rho * \sin(\theta)$$

Démonstration Algébriquement  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= \frac{\rho * \sin(\theta)}{\rho * \cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \text{tg}(\theta) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

## 1.3 Chapitre 3 : Logique

### 1.3.1 Logique propositionnelle

Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux :

- 1) Principe d'identité :  $A=A$
- 2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose  $\neg A$  et  $A$
- 3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister  $A$  ou  $\neg A$

### 1.3.2 Proposition

C'est un énoncé, une phrase simple :

ex : Ceci est une vidéos  $\Rightarrow$  Vrai ou Faux

En logique propositionnelle les propositions ne peuvent qu'être vrai ou fausse

exemple de proposition :

$2+2 \Rightarrow$  Vrai ou Faux

Le mur est blanc  $\Rightarrow$  Vrai ou Faux

### 1.3.3 L'implication

Si j'ai une proposition A alors B

Exemple :

Une paire de chaussure  $\Rightarrow$  j'ai 2 chaussures

Une paire de chaussure implique que j'ai 2 chaussures

$A \Rightarrow B$  : Faux (une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes)

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A n'est pas forcément vrai

### 1.3.4 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.

$A=B$  : vrai

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A est vrai

### 1.3.5 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois

Tautologie : toujours vrai

prédicats : Pour tout il existe

### 1.3.6 Tableau priorités logique

Opérateur	Logic	priorités	Associativités .
$\leq$	Equalité	1	gauche
$\Rightarrow$	Implications	2	droite
$\vee$	OU	3	gauche
$\wedge$	ET	4	gauche
$\neg$	NON	5	gauche

### 1.3.7 Tautologie

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	T	$\perp$
$\perp$	T	T

### 1.3.8 Changement de forme

Commutativité :

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Associativités :

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

Distributivités :

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

De Morgans :

$$a \vee b = \neg a \wedge \neg b$$

$$a \wedge b = \neg a \vee \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (p \vee q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive :

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \text{ ET } B) \text{ OU } C$$

Forme conjonctive :

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \text{ OU } B) \text{ ET } C$$

Transformation :

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

## 1.4 Théorie naïve des ensembles

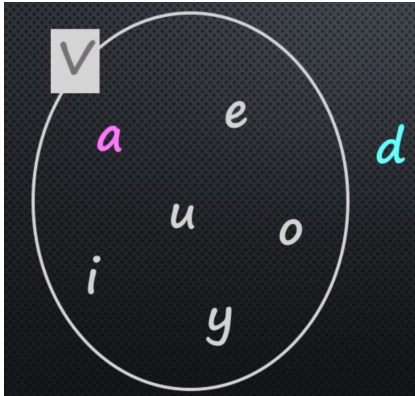
### 1.4.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appelés éléments de cet ensemble.  
un objet particulier appartient ( $\in$ ) ou n'appartient pas ( $\notin$ ) à un ensemble donné.

Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles :  $V = \{a, e, i, o, u, y\}$

$a \in V$  : a appartient à l'ensemble V

$d \notin V$  : d appartient à l'ensemble V

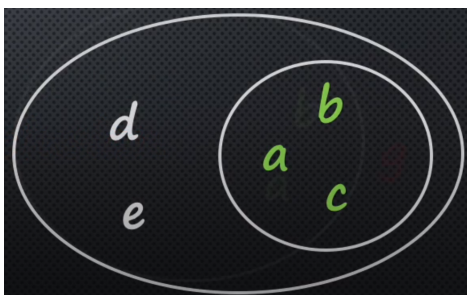


### 1.4.2 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté  $A=B$ ), si tout les éléments de A appartient à B. Autrement dit ( $X \in A$ ) et que ( $X \in B$ ).

### 1.4.3 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté  $A \subset B$ ), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit ( $X \subset A$ ) et que ( $X \subset B$ ).



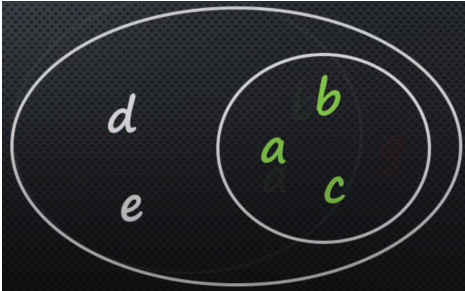
On peut dire que  $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d, e\}$

### 1.4.4 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A ( $A \subset A$ )
- b. Anti-Symétrique : ( $A \subset B$ ) et ( $B \subset A$ )  $\Rightarrow A=B$
- c. Transitivité : ( $A \subset B$ ) et ( $B \subset C$ )  $\Rightarrow (A \subset C)$

### 1.4.5 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté  $A \subset B$ ), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit ( $X \subset A$ ) et que ( $X \subset B$ ).



On peut dire que  $\{a,b,c\} \subset \{a,b,d,e\}$

### 1.4.6 Opération d'union ( $\cup$ )

1) L'union de 2 ensembles

$A = \{a,e\}$  et  $B = \{b,c,d\}$

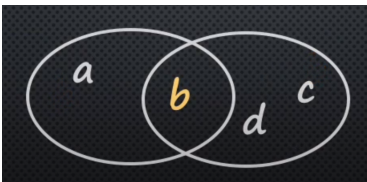
$C = A \cup B = \{a,e,b,c,d\}$

### 1.4.7 Opération d'intersection ( $\cap$ )

2) L'intersection de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles, on appelle ( $A \cap B$ ) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B

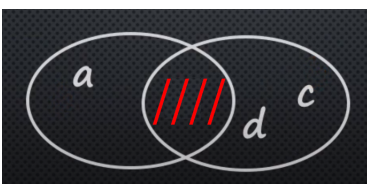
$A = \{a,b\}$  et  $B = \{b,c,d\}$



$C = A \cap B = \{b\}$

### 1.4.8 L'ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles. Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



$C = A \cap B = \{\}$

### 1.4.9 La cardinalité

Soit  $A$  un ensemble, Si  $A$  possède exactement  $N$  éléments ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $A$  est un ensemble fini de cardinalité  $N$ .  
Noté  $|A| = n$

$$|1, 2, 3| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

### 1.4.10 Identité

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

### 1.4.11 Commutativité

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

### 1.4.12 Associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

### 1.4.13 Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### 1.4.14 De Morgans

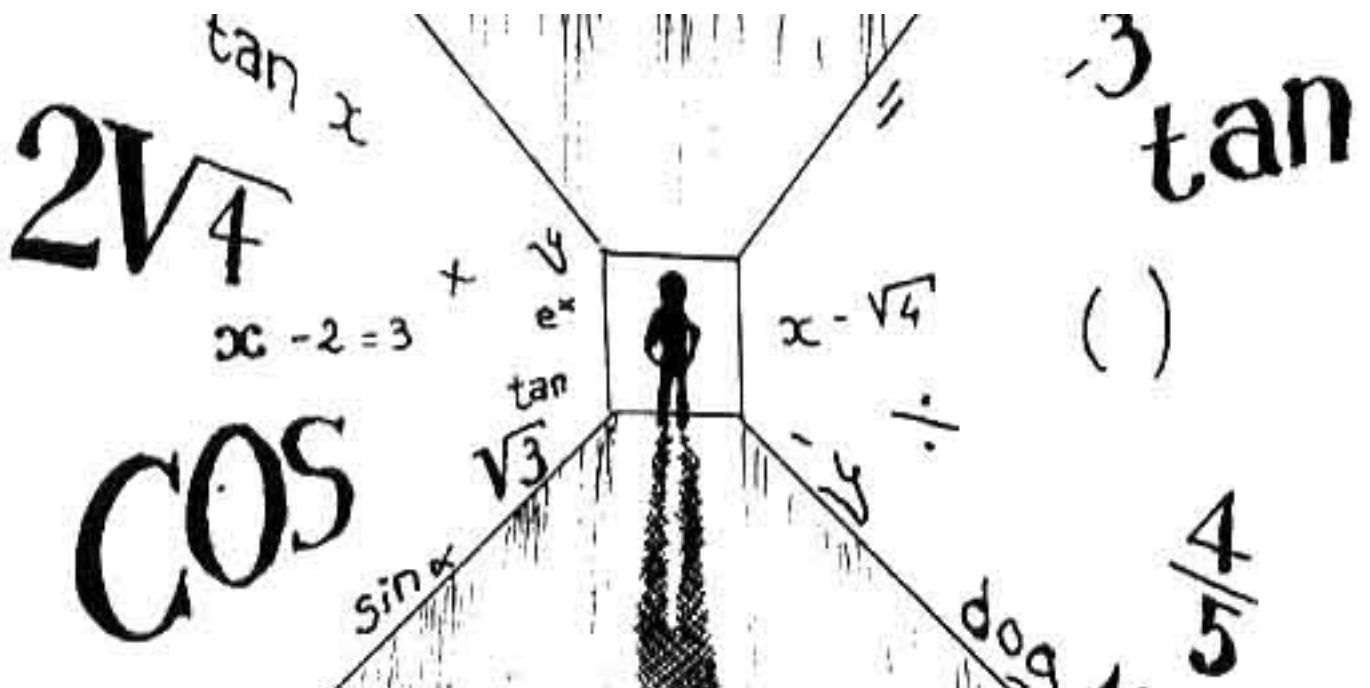
$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$



## Chapitre 2

## Mathématiques Exercices



## 2.1 Exercice Matrices

### 2.1.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- A) Calculer  $B \cdot C$
- B) Calculer la trace de A
- C) Calculer la transposée de B
- D) Calculer  $2,5 \cdot C$
- E) Calculer  $B^t + C$
- F) Calculer le déterminants de A
- G) Exercices d'examens
- H) Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)

## 2.1.2 Résolution des exercices

A) Calculer  $B * C$

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix}$$

$$S = B * C = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice A =  $0+2+0+2 = 4$   
 $S = 4$

C) Calculer la transposée de la matrice B

La transposée de la matrice est d'invertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes :  $B^t$  est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$S = B^t$  ou C

D) Calculer  $2,5 * C$

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix}$$

$$S = 2,5 * C = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer  $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes :  $B^t = C = C+C$  ou  $2*C$

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix}$$

$$S = B^t + C = 2*C = C+C =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

$$L3 - (2*L1) = L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2-(1*2)} & \mathbf{3-(2*2)} & \mathbf{0-(2*3)} & \mathbf{1-(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{(2-2)} & \mathbf{3-4} & \mathbf{(0-6)} & \mathbf{1-0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

$$L4 - (3*L1) = L4$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-(3*1)} & \mathbf{0-(3*2)} & \mathbf{1-(3*3)} & \mathbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-3} & \mathbf{0-6} & \mathbf{1-9} & \mathbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3-1*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L4 = L4-6*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L4-(-1)*L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

$$1*(-1)*(-4)*24=\mathbf{96}$$

$$S = \det(A) = \mathbf{96}$$

H) Déplacement 3D

$$R=10u$$

H=300l où L=40cm + hauteur du casier

$$P=((\frac{3}{5}) * R < R)$$

$$\theta = 0$$

$$Z= R + (\frac{B}{100} * R) = R + (\frac{2}{100}) * R = 20cm$$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos(45) - \sin(45)) & 0 \\ \sin(45) - \cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 7 : Rotation -45° :

$$\begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(45) - \sin(45) & 0 \\ +\sin(45)\cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 8 : Retour à 0 :

$$\begin{pmatrix} X_8 \\ Y_8 \\ Z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15l \end{pmatrix}$$

## 2.2 Nombres Complexes Exercices

### 2.2.1 Exercices : Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes :

- a.  $x^2+1=0$
- b.  $3x^2+7=0$
- c.  $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d.  $-x^2-3x=3$
- e.  $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f.  $x^4 + 15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de :

- a.  $-11-8i$
- b.  $-0.3333i + 1$
- c.  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i$

3) Identifier  $\mathbb{R}$   $\mathbb{I}$

- a. 0
- b.  $-6+i$
- c.  $i^2$
- d.  $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme  $a+bi$  :

- a.  $(4-8i)-(3+2i)$
- b.  $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c.  $(7-2i)(5+6i)$
- d.  $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e.  $\frac{5+3i}{(2+2i)}$

5) Exprimer sous forme Polaire :

- a.  $3-\sqrt{3}i$
- b.  $-1+1i$

6) Exprimer sous forme cartésienne :

- a.  $4\cos(45) + \sin(45)i$
- b.  $5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$

7) Trouver la solution de :

- a.  $4\text{cis}(45^\circ)+5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$
- b.  $4\text{cis}(45^\circ)*5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$



### 2.2.2 Résoudre les équations suivantes :

A.  $x^2+1=0$

$$x^2+1-1=0-1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$S = x = i$$

B.  $3x^2+7=0$

$$3x^2+7-7=0-7$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$x^2 = \frac{-7}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3} * -1}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

$$S = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

C.  $\frac{x^2}{2} - x = -2$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} = -\frac{2}{1}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$x^2 - 2x = -4$$

$$x^2 - 2x + 4 = (-4) + 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 4}}{2 * 1}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 * (-3)}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 * (-3)}}{2}$$

$$S = -1 \pm 1 \sqrt{-3}$$

D.  $-x^2-3x=3$

$$-x^2-3x-3=3-3$$

$$-x^2-3x-3=0$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 * 1 * 3}}{2 * 1}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3 * (-1)}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3 * \sqrt{-1}}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3i}}{2}$$

$$S = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}i}$$

$$E. x^3 + 7x^2 + 9x + 63 = 0$$

$$x^2 + (x+7) + 9(x+7) = 0$$

$$(x+7) * (x^2 + 9) = 0$$

Poser les CE pour que  $(x+7)$  ou  $(x^2+9)$  vaut 0

Résoudre pour  $(x+7)=0$

$$x = -7$$

$$(x^2 + 9) = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$$

$$x = 3\sqrt{-1}$$

$$x = 3i$$

$$S = X \text{ vaut } -7; 3i$$

$$F. x^4 + 15x^2 = 16$$

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\text{Poser } t = x^2$$

$$t^2 + 15t - 16 = 0$$

$$t * (t+16) - (t+16) = 0$$

$$(t+16) - (t-1) = 0$$

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

$$(t+16) = 0$$

$$t = -16$$

$$\text{Restituer } t = x^2$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \sqrt{-16}$$

$$x = \sqrt{16 * (-1)}$$

$$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$$

$$x = 4\sqrt{-1}$$

$$x = 4i$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$\text{Restituer } t = x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = 1$$

$$S = 1; 4i$$

### 2.2.3 Trouver le conjugués :

- a.  $-11-8i = -11+8i$
- b.  $-0.3333i + 1 = 1+0.3333i$
- c.  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i = \cos(\omega t) - \sin(\omega t)i$

### 2.2.4 Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a.  $0 : \mathbb{R}=0 \mathbb{I}=0$
- b.  $-6+i : \mathbb{R}=(-6) \mathbb{I}=1$
- c.  $i^2 : \mathbb{R}=(-1) \mathbb{I}=0$
- d.  $\frac{1+i}{2} : \mathbb{R}=(\frac{1}{2}) \mathbb{I}=(\frac{1}{2})$

### 2.2.5 Exprimer sous forme $a+bi$

- a.  $(4-8i)-(3+2i) : 1-10i$
- b.  $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i} : \frac{23-11i}{26}$
- c.  $(7-2i)(5+6i) : 47+32i$
- d.  $\frac{4}{(3+i)^3} : \frac{9-13i}{125}$
- e.  $\frac{5+3i}{(2+2i)} : 2-\frac{1}{2}i$

### 2.2.6 Exprimer sous forme polaire

a.  $3-\sqrt{3}i$

Calcul de l'arguments

$$\theta = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta = -30^\circ$$

$$\theta = -30^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 330^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{9+3}$$

$$\rho = \sqrt{12} \Rightarrow (12 = 4 * 3)$$

$$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$$

$$\rho = 2\sqrt{3}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) + \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \text{cis}(\theta)$$

$$Z = 2\sqrt{3} * \text{cis}(330)^\circ$$

b.  $-1+i$

Calcul de l'arguments

$$\theta = \arctg(-\frac{1}{1})$$

$$\theta = -45^\circ$$

$$\theta = -45^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 315^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \text{cis}(\theta)$$

$$Z = \sqrt{2} * \text{cis}(315^\circ)$$

### 2.2.7 Exprimer sous forme cartésienne

a.  $4\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) * i$

Formules

$$\rho = 4 * \text{cis}(45^\circ)$$

$$\theta = \arctg(\frac{Y}{X})$$

$$|Z| = a + bi$$

$$\frac{Y}{X} = \text{tg}(45^\circ)$$

$$\frac{Y}{X} = 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$$

$$\rho = x^2 + y^2 = 16$$

Notes :  $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$  donc  $Y=X$

$$\rho = 2x^2 = 16 \text{ ou } 2y^2 = 16$$

$$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$$

$$\rho = x^2 = 8$$

$$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8} = (2 * 4)$$

$$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$$

$$\rho = x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}$$

$$x=y \text{ donc } x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}i$$

Conclusion :

$$S = 4 * \text{cis}(45^\circ) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$b. 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

Formules

$$\begin{aligned}\rho &= 5 \\ \theta &= arctg(\frac{Y}{X}) \\ |Z| &= a + bi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= tg(\frac{\pi}{3}) \\ \theta &= \sqrt{(3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \rho * \cos(\sqrt{3}) => \cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \\ y &= \rho * \sin(\sqrt{3}) => \sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y &= 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}Z &= a+bi \\ S = Z &= \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

## 2.2.8 Trouver la solution

$$a. 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ \rho &= \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - 60^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{16 + 25 + 40 * \cos(-15^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{41 + 40 * \cos(-15^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{81 * 0.965} \\ \rho &= \sqrt{79.637} \\ \rho &= 8.9239\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= arctg(\frac{Y}{X}) \\ \theta &= arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})\end{aligned}$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

$$b. 4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2 (\cos(45^\circ + \theta_2) + i * \sin(45^\circ + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5 (\cos(45^\circ + 60^\circ) + i * \sin(45^\circ + 60^\circ))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

## 2.3 Logique propositionnelle exercices

### 2.3.1 Déterminer la véracité

$$P_1 = 1+1=2 \quad P_2 = 1+5 \quad P_3 = 1+1=3$$

- a.  $P_1 \vee P_3$
- b.  $P_2 \Rightarrow P_1$
- c.  $P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$

$$\text{a. } P_1 \vee P_3 = \text{T}$$

$$1 \text{ OU } 1 = 1$$

$$\text{b. } P_2 \Rightarrow P_1$$

$$\neg P_2 \vee (P_2 \wedge P_1)$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge 1)$$

$$1 \vee (0)$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$$S = P_2 \Rightarrow P_1 = \text{T}$$

$$\text{c. } P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$$

$$\neg P_3 \vee (P_3 \wedge (P_1 \vee P_3))$$

$$P_3=0$$

$$P_1=1 \text{ ou insertion}$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge (1 \vee 0))$$

$$1 \vee (1 \wedge 0)$$

$$1 \vee 0 = \text{T}$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$$S = P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3) = \text{T}$$

### 2.3.2 Construire la table de vérité

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$$

$$P_2 \Rightarrow P_3$$

$$\neg P_2 \vee (P_2 \wedge P_3)$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge 0)$$

$$1 \vee 0 = \text{T}$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_2 \Rightarrow P_3$
T	$\perp$	$\perp$	T

## 2.4 Théorie naïve des ensembles Exercices

### 2.4.1 Exercices Examen

A) Soit  $A=\{\pi, 2, e\}$  et  $B=\{-1, 5\}$  Calculer  $|A \times B|$

1) Calculer  $A \times B$

$$A \times B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

2) Calculer la cardinalité de  $|A \times B|$

$$|A| = 3 \quad |B| = 2$$

$$|A \times B| = |A| * |B| = 2 * 3 = 6$$

$S$  = la cardinalité est le nombre de sous-ensembles (6)

B) Soit  $P \mid A \cup B \mid A = \{3, 4, 5\}$   $B = \{1, 2, 3\}$

1) Union des 2 ensembles

$$P(A) = \{\{\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$$

2) Calcul de la cardinalité des ensembles

$$|P| = 8$$



## 2.5 Nombre Entiers Exercices

### 2.5.1 Exemple Modulo

Soient  $a, b$  et  $m$  des nombre naturels. Est-ce que  
 $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

Sélectionnez une réponse :

☐ a. Vrai

☐ b. Faux

$$(8+15) \bmod 3 = ((8 \bmod 3) + (15 \bmod 3)) \bmod 3$$

$$(23) \bmod 3 = (2+0) \bmod 3$$

$$2 = 2$$

VRAI

## 2.6 Relation Binaire Exercices

### 2.6.1 Produit Cartésien

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A ( $A \in B$ )
- b. Anti-Symétrique : ( $A \in B$ ) et ( $B \in A$ )  $\Rightarrow A=B$
- c. Transitivité : ( $A \in B$ ) et ( $B \in C$ )  $\Rightarrow (A \in C)$

### 2.6.2 Exercices Examen

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symétrique
- ☐ e. R est symétrique

Test de la symétrie

A=2 B=4

A est multiple de B :  $2 \nmid 4$  VRAI

B est multiple de A :  $4 \nmid 2$  FAUX

il faut que A et B soit vrai pour qu'il soit symétrique

R est réflexif car  $a \in N, b \in N$

Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0  
 $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$  :

- ☐ a.  $R$  est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c.  $R$  est réflexif
- ☐ d.  $R$  est anti-symétrique
- ☐ e.  $R$  est symétrique

Test de la symétrie

A est plus grand que B  $\Rightarrow$  VRAI  
B est plus grand que A  $\Rightarrow$  FAUX  
il faut que A et B soit vrai

$R$  n'est Symétrique pas car  $A=1$   $B=2$   
 $R$  est anti-symétrique  $a \text{ est } > b$

$R$  est réflexif car  $a \in N, b \in N$   
 $R$  n'est pas transitif car  $a \text{ est } > b$  et  $a \neq b$

Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0  
 $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible } a\}$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$  :

- ☐ a.  $R$  est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c.  $R$  est réflexif
- ☐ d.  $R$  est anti-symétrique
- ☐ e.  $R$  est symétrique

Test de la symétrie

A est divisible par B  $\Rightarrow$  VRAI  
B est divisible par A  $\Rightarrow$  VRAI  
il faut que A et B soit vrai

$R$  est symétrique car  $b$  est divisible  $a$   $B=2$   $A=1$

Test de la transitivité

$B=2$   $A=2$   $Z=A$   
A est divisible par B  $\Rightarrow$  VRAI  
B est divisible par A  $\Rightarrow$  VRAI

$A=B$   $2=2$   
 $B=A$   $2=2$   
alors  $A=Z$   $2=2$

## Chapitre 3

# Exemple d'examen

### 3.1 Q1 : Calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A) Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ et } 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

B) Swap des zeros

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

C) Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

D) Calcul des déterminants 2\*2

$$\begin{aligned} &8*( \\ &1*((9,5*16)-(8*-9,5)) \\ &-5*((9*16)-(4*-9,5)) \\ &+6*((9*8)-(4*9,5)) \\ &) \end{aligned}$$

E) Simplification des calculs

$$\begin{aligned} &8*( \\ &1*(152 - (-76)) \\ &-5*(144 - (-38)) \\ &+6*(72 - 38) \\ &) \end{aligned}$$

F) Mise en équation et résolution

$$8*( 228 -5*(182) + 6*(34))$$

$$8*( 228 - 910 + 204 )$$

$$8*( 228 + 204 - 910 )$$

$$8*( 432 - 910 )$$

$$8*( -478 ) = -3824$$

$$\det(A) = -3824$$

## 3.2 Q2 : Calcul nombre complexe

Que doit valoir  $a$  pour que l'argument soit  $135^\circ$  quand  $b=-5$ ,  $c=4$  et  $d=11$

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

A) Utilisation des Binomes conjugués

$$\frac{c}{b+i} * \frac{b-i}{b-i}$$

Notes : le binomes conjugués est toujours utilisé par le dénominateur.

$$\frac{(a-5i)*(4-11i)}{4+11i*(4-11i)} = \frac{4a-11ai-20i+55i^2}{16-121i^2}$$

B) Simplifications de la fraction

Notes : par définition  $i^2 = -1$

$$\frac{4a-11ai-20i+(55*(-1))}{16-(121*(-1))}$$

$$\frac{4a-11ai-20i+(-55)}{16-(-121)}$$

$$\frac{4a-11ai-20i-55}{16+121}$$

$$\frac{4a+(-11a-20)i-55}{137}$$

$$\frac{4a-55+(11a-20)i}{137}$$

$$\frac{4a-55}{137} + \frac{55+(11a-20)}{137} * i$$

C) On calcule  $a$  par rapport à  $\theta$

Notes : Nous avons découvert la valeur de  $X$  et de  $Y$  :

$$\theta = \arctg \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

Remplacement de  $X$  et  $Y$

$$\theta = \arctg \left( \frac{55+(11a-20)i}{\frac{4a-55}{137}} \right)$$

Notes : Diviser une fraction par une fraction c'est égale à la multiplier par l'inverse

$$\text{Ex : } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

$$\theta = \arctg \left( \left( \frac{55+(11a-20)}{137} \right) * \left( \frac{137}{4a-55} \right) \right)$$

$$tg(\theta) = \left( \frac{55+(11a-20)}{137} \right) * \left( \frac{137}{4a-55} \right)$$

$$tg(\theta) = \left( \frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55} \right)$$

$$tg(135) = \left( \frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55} \right)$$

$$-1 = \left( \frac{-2685+1507a}{548a-55} \right)$$

D) Déterminer l'intervalle définis

$$-1 = \left( \frac{-2685+1507a}{548a-55} \right), a \neq \frac{55}{548}$$

E) Simplifier l'équation

$$(-1) * (548a - 55) = (548a - 55) * \left( \frac{-2685+1507a}{548a-55} \right)$$

$$-(548a - 55) = -2685 + 1507a$$

Notes : lorsqu'il y a un un - devant l'expression entre parenthèse, changer le signe de chaque terme de l'expression.

$$-548a + 55 = -2685 + 1507a$$

$$-548a + 55 - 1507a = -2685 + 1507a - 1507a$$

$$-548a - 1507a + 55 - 55 = -2685 + 1507a - 55$$

$$-548a - 1507a = -2685 - 55$$

$$-2055a = -2740$$

$$-\frac{2055a}{2055} = -\frac{2740}{2055}$$

$$\frac{2055a}{2055} = \frac{2740}{2055}$$

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

F) Vérifier si la solution est dans l'intervalle définis

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

G) Solution

$$S = \frac{4}{3}$$

H) Restituer a= $\frac{4}{3}$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$X = -0,362$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

$$Y = 0,362$$

$$tg(\theta) = -\frac{0,362}{0,362}$$

$$tg(\theta) = -1$$

H) Démontrer que  $tg(\theta) = -1$

$$tg(\theta) = -1$$

$$tg(135) = -1$$

$$135^\circ - 180^\circ = -45^\circ$$

$$tg(-45) = -1$$

I) Conclusion :

$$tg(-45) = -1 \text{ et } -\frac{0,362}{0,362} = -1$$

$$\text{et } a = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{4}{3}$$



### 3.3 Q3 : Transformer en forme conjonctive

$$(A \wedge \neg B) \vee (C \implies a)$$

A) Simplifier l'implications

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A))$$

B) Utilisation du théorème De Morgan

$$a + b = \neg a * \neg b$$

$$\neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg (\neg A \vee (A \wedge C))$$

C) Simplification des parenthèse

$$(\neg A \wedge B) \wedge (A \vee (A \wedge C))$$

$$S = (\text{NEG}(A) \text{ ET } B) \text{ ET } (A \text{ OU } (\text{NEG}(A) \text{ ET } \text{NEG}(C)))$$

### 3.4 Q4 : Théorie des ensembles naïfs

A) Soit  $A = \{\pi, 2, e\}$  et  $B = \{-1, 5\}$  Calculer  $|A \times B|$

1) Calculer  $A \times B$

$$A * B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

2) Calculer la cardinalité de  $|A \times B|$

$$|A| = 3 \quad |B| = 2$$

$$|A \times B| = |A| * |B| = 2 * 3 = 6$$

S = la cardinalité est le nombre de sous-ensembles (6)

B) Soit  $P \mid A \cup B \mid A = \{3, 4, 5\}$   $B = \{1, 2, 3\}$

1) Union des 2 ensembles

$$P(A) = \{\{\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$$

2) Calcul de la cardinalité des ensembles

$$|P| = 8$$

### 3.5 Q5 : Induction forte/faibles

Notez que l'induction faible est égale à l'induction forte. Néanmoins il est plus naturel de démontrer les propriétés soit avec de l'induction simple, soit avec la forte comme réalisé durant le cours. Il vous est demandé de choisir entre les deux fonction de l'énoncé.

Soit  $n$  un nombre naturel, que faut-il pour démontrer que  $10^{n-1}$  est un multiple de 9 ?

Veillez choisir au moins une réponse : (Cochez ce qui est vrai)

- ☐ On peut utiliser l'induction faible ou forte
- ☐ Il faut au moins 3 cas de base
- ☐ il faut utiliser l'induction forte
- ☐ il faut au moins un unique cas de base
- ☐ il faut au moins 2 cas de base

### 3.6 Q6 : Nombre entiers

Soient  $a, b$  et  $m$  des nombre naturels. Est-ce que  
 $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

a) Développement de l'égalité

$$\begin{aligned}(a+b) \bmod m &= ((a+b) \bmod m) \bmod m \\(8+10) \bmod 2 &= ((8 \bmod 2) + (10 \bmod 2)) \bmod 2 \\(18) \bmod 2 &= (0+0) \bmod 2 \\0 &= (0) \bmod 2 \\0 &= 0\end{aligned}$$

Sélectionnez une réponse :

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

### 3.7 Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau

Listing 3.1 – Python algorithme

```
def Apply(array , value , start=None , res=0):  
    if (start is None):  
        start = len(array)-1  
  
    if (start <0):  
        return res  
  
    if (array[start] == value):  
        return Apply(array , value , start -1, res+1)  
  
return Apply(array , value , start -1, res)
```

cochez ce qui est vrai concernant la complexités (au moins une réponse)

- ☐ a.  $\theta(1)$
- ☐ b.  $o(n^2)$
- ☐ c.  $O(\log(n))$
- ☐ d.  $o(\log(n))$
- ☐ e.  $\theta(\log(n))$
- ☐ f.  $o(n)$
- ☐ g.  $o(1)$
- ☐ h.  $O(1)$
- ☐ i.  $o(n\log(n))$
- ☐ j.  $O(n\log(n))$
- ☐ k.  $\theta(n)$
- ☐ l.  $\theta(n^2)$
- ☐ m.  $O(n^2)$
- ☐ n.  $O(n)$
- ☐ o.  $\theta(n\log(n))$

### 3.8 Q8 : Ensemble Naturels

Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0

$R=(a,b)$ ,  $a \in N$ ,  $b \in N$  et  $a$  est un multiple de  $b$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$ . (au moins une réponse)

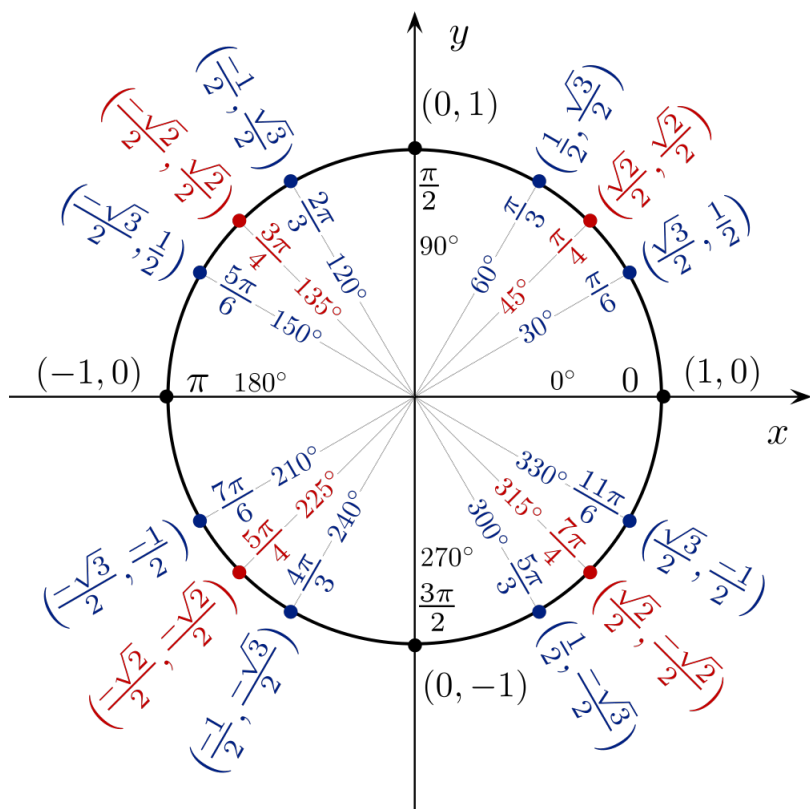
- ☐  $R$  est transitif
- ☐ Aucune réponse
- ☐  $R$  est réflexif
- ☐  $R$  est anti-symétrique
- ☐  $R$  est symétrique

# Chapitre 4

## Formules

### 4.1 Tableau Trigonométrique

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotan	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



## 4.2 NB Complex : Cartésienne vers Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg}(\theta)$$

## 4.3 NB Complex : Polaire vers Cartésienne

$$X = \rho * \cos(\theta)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta)$$

$$Z = x + yi$$

$$\text{Notes : } \operatorname{cis} = \cos(\theta) * \sin(\theta) * i$$

## 4.4 Addition de nombre complex

$$\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

## 4.5 Soustraction de nombre complex

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

## 4.6 Multilication de nombre complex

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

## 4.7 Division de nombre complex

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow tg = \frac{\sin}{\cos}$$

$$Exemple : 4 * cis(45^\circ) + 5 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

## 4.8 Logique propositionnelle

De Morgans :

$$a \vee b = \neg a * \neg b$$

$$a * b = \neg a + \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (p \vee q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive :

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \vee B) \vee C$$

Forme conjonctive :

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \vee B) \wedge C$$

Transformation :

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B : = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$