

# Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

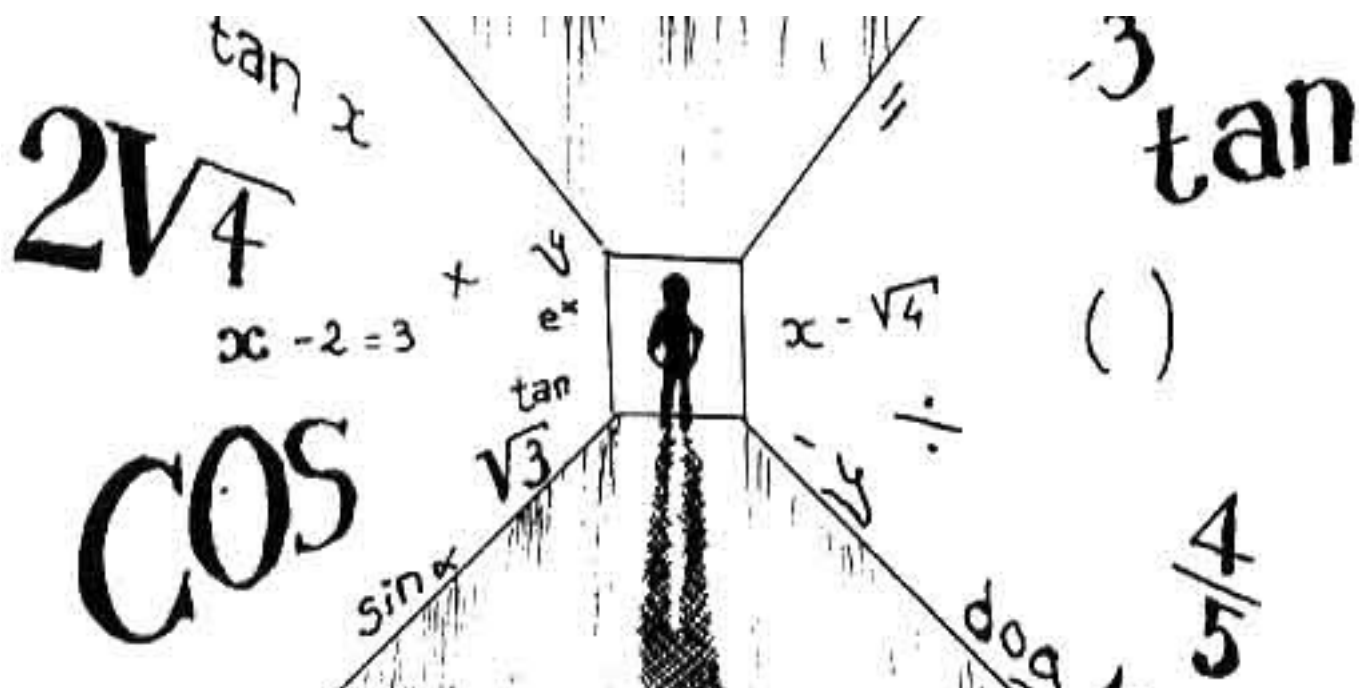
Août-Septembre 2020

# Table de Matières

<b>1</b>	<b>Matrices Théories</b>	<b>4</b>
1.1	Les propriétés . . . . .	4
1.2	Calcul du déterminants $2 \times 2$ . . . . .	5
1.3	Calcul du déterminants $4 \times 4$ ou $n \times n$ . . . . .	5
1.4	Méthode Elimination de Gauss . . . . .	6
1.5	Autres Méthodes . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Nombres Complexes</b>	<b>9</b>
2.1	Conversion polaire - cartésienne . . . . .	9
2.2	Conversion Cartésienne - Polaire . . . . .	10
2.3	Conversion cartésienne/polaire - exponentielle . . . . .	11
2.4	Conversion exponentielle - polaire/cartésienne . . . . .	12
2.5	Nombres Complexes addition . . . . .	13
2.6	Nombres Complexes soustraction . . . . .	14
2.7	Nombres Complexes multiplication . . . . .	15
2.8	Nombres Complexes division . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Logique propositionnelle</b>	<b>17</b>
3.1	Proposition . . . . .	17
3.2	L'implication . . . . .	17
3.3	L'équivalence . . . . .	18
3.4	Vocabulaire . . . . .	18
3.5	Tableau priorités logique . . . . .	18
3.6	Tautologie . . . . .	18
3.7	Changement de forme . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Théorie naïve des ensembles</b>	<b>20</b>
4.1	Définition . . . . .	20
4.2	Relation d'inclusion . . . . .	20
4.3	Propriété de l'inclusion . . . . .	20
4.4	Relation d'égalité . . . . .	21
4.5	Opération d'union ( $\cup$ ) . . . . .	21
4.6	Opération d'intersection ( $\cap$ ) . . . . .	21
4.7	Ensemble vide . . . . .	21
4.8	Cardinalité . . . . .	22
4.9	Identité . . . . .	22
4.10	Commutativité . . . . .	22
4.11	Associativité . . . . .	22
4.12	Distributivité . . . . .	22
4.13	De Morgans . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Matrices Exercices</b>	<b>24</b>
5.1	Enoncés des exercices . . . . .	24
5.2	Résolution des exercices . . . . .	25
<b>6</b>	<b>Nombres Complexes Exercices</b>	<b>33</b>
6.1	Enoncés . . . . .	33
6.2	Résoudre les équations suivantes . . . . .	35

6.3	Trouver le conjugués . . . . .	38
6.4	Identifier $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$ . . . . .	38
6.5	Exprimer sous forme $a+bi$ . . . . .	38
6.6	Exprimer sous forme polaire . . . . .	41
6.7	Exprimer sous forme cartésienne . . . . .	42
6.8	Trouver la solution . . . . .	44
6.9	changement de forme (exp) . . . . .	46
6.10	Recherche valeurs (exp) . . . . .	47
<b>7</b>	<b>Logique propositionnelle exercices</b>	<b>48</b>
7.1	Enoncé Exercices . . . . .	48
7.2	Déterminer la véracité . . . . .	48
7.3	Construire la table de vérité . . . . .	49
7.4	Théorie naïve des ensembles Exercices . . . . .	50
7.4.1	Enoncé d'exercices . . . . .	50
7.4.2	Résolution . . . . .	50
7.5	Nombre Entiers Exercices . . . . .	54
7.5.1	Exemple Modulo . . . . .	54
7.6	Relation Binaire Exercices . . . . .	55
7.6.1	Exercices Examen . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Formules</b>	<b>58</b>
8.1	Tableau Trigonométrique . . . . .	58
8.2	NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne . . . . .	59
8.3	Addition de nombres complex (cartésien) . . . . .	59
8.4	Soustraction de nombres complex (cartésien) . . . . .	59
8.5	Multilication de nombres complex (cartésien) . . . . .	59
8.6	Division de nombres complex (cartésien) . . . . .	59
8.7	NB Complex : Forme cartésienne vers polaire . . . . .	60
8.8	Addition de nombres complex (Polaire) . . . . .	60
8.9	Soustraction de nombres complex (Polaire) . . . . .	60
8.10	Multilication de nombres complex (Polaire) . . . . .	60
8.11	Division de nombres complex (Polaire) . . . . .	60
8.12	Logique propositionnelle . . . . .	61
8.13	Algorithmique symbole . . . . .	61

# Mathématiques Théories



# Chapitre 1: Matrices Théories

## 1.1 Les propriétés

### A) Linéarité

si on multiplie une matrice par  $\lambda$ , le déterminant est multiplié par  $\lambda^n$  et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par  $\lambda = \det(A) * \lambda^n$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)?$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ab \quad \det(B) = cd$$

Conclusion :

$$C = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = (a+c) * (b+d)$$

$\lambda^n \neq$  linéaire

$\lambda^n$  est exponentielle

### B) Déterminant et transposée

$\det(A) = \det(A^T)$ , les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

### C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit  $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\varphi_a(x_1, \dots, x_n) = \det(\varphi_c)(A * 1, \dots, A * N)$$

### D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différents de 0.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

## 1.2 Calcul du déterminants 2\*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2\*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplication croisée des 2 ensembles

Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1*3) - (2*4)$$

$$\det(A) = (3-8)$$

$$\det(A) = (-5)$$

$$S = -5$$

## 1.3 Calcul du déterminants 4\*4 ou n\*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n\*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

$$L3 - (2*L1) = L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2-(1*2) & 3-(2*2) & 0-(2*3) & 1-(2*0) \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{(2-2)} & \textbf{3-4} & \textbf{(0-6)} & \textbf{1-0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

$$L4 - (3*L1) = L4$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{3-(3*1)} & \textbf{0-(3*2)} & \textbf{1-(3*3)} & \textbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{3-3} & \textbf{0-6} & \textbf{1-9} & \textbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...

## 1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3-1*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \textbf{0} & \textbf{-4} & \textbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L4 = L4 - 6 * L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L4 - (-1) * L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$1 * (-1) * (-4) * 24 = 96$$

$$S = \det(A) = 96$$

## 1.5 Autres Méthodes

Elimination en matrice 3\*3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2\*2

$$A = 1 * ((-1) * \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}) - (-2) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix})$$



Mise en équation

$$\begin{aligned} A = & 1 * ( \\ & + (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1)) \\ & - (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1)) \\ & + 3 * ((1 * 8) - (6 * 6)) \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * ( \\ & + (-1) * ((12) - (8)) \\ & - (-2) * ((2) - (6)) \\ & + 3 * ((8) - (36)) \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * ((-1 * 4) \\ & (2 * (-4)) \\ & (3 * (-28)) \\ & ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4 - (-8) - (-84) = \mathbf{96} \\ S = \det(A) = & \mathbf{96} \end{aligned}$$

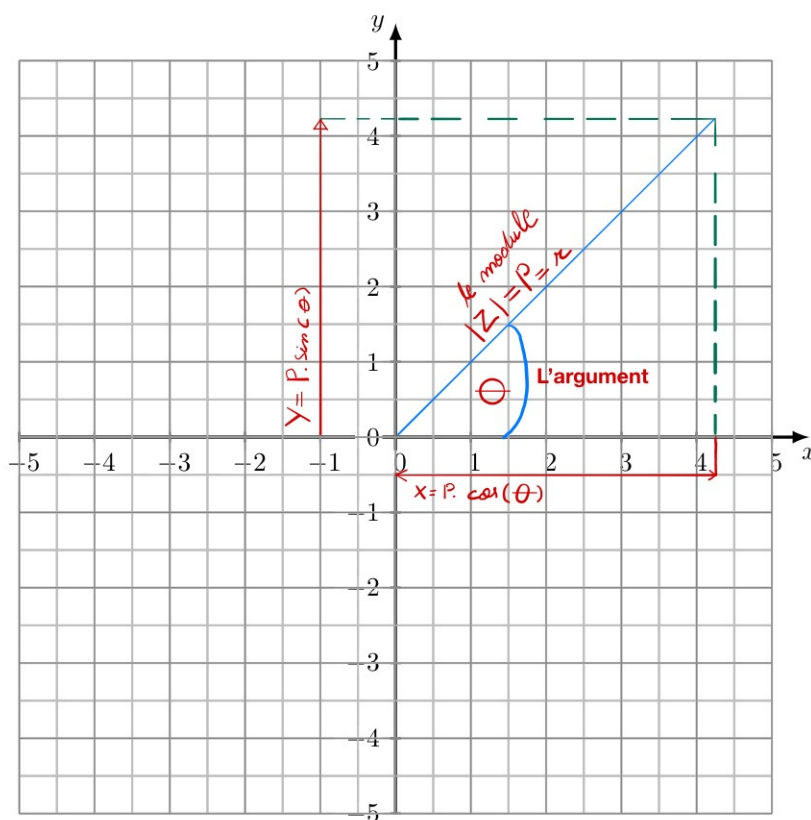
# Chapitre 2: Nombres Complexes

## 2.1 Conversion polaire - cartésienne

### Définition du module

le module noté  $|Z|$  est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ( $\sqrt{a^2 + b^2}$ ).

### Représentation Géographique



### Démonstration

$$\begin{aligned} |Z| &= \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2)} \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta))} * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2)} \\ |Z| &= \rho \end{aligned}$$

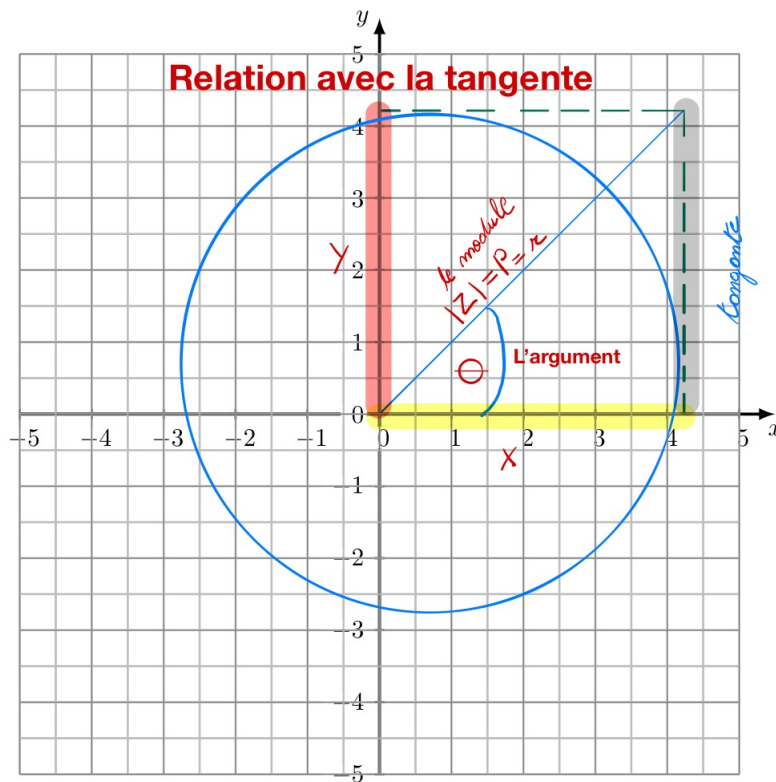
$\rho$  est le module et  $\theta$  est l'argument  
 $Z = P(\cos(\theta) + \sin(\theta) * i)$  ou  $Z = P(cis(\theta))$

## 2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### Démonstration Géométriquement

Nous pouvons voir que  $\theta$  est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangente au cercle de rayon X.



$$X = \rho * \cos(\theta) \quad Y = \rho * \sin(\theta)$$

### Démonstration Algébriquement

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= \frac{\rho * \sin(\theta)}{\rho * \cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \text{tg}(\theta) \end{aligned}$$

### Conclusion

$$\begin{aligned} \theta &= \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \\ \text{tg}(\theta) &= \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

## 2.3 Conversion cartésienne/polaire - exponentielle

tout nombre complexes peut s'écrire sous la formes :  $\rho * e^{i\theta}$

### Ecriture cartésienne

$$1 + \sqrt{3}i = x + yi$$

#### Etape 1 : Trouver $\rho$ (calcul du module)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3}$$

$$\rho = \sqrt{4} \Rightarrow 2^2$$

$$\rho = 2$$

#### Etape 2 : Trouver $\theta$ (calcul de l'argument)

$$\theta = \text{artg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{6}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\pi}{6}$$

#### Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle

$$2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

## 2.4 Conversion exponentielle - polaire/cartésienne

Ecriture exponentielle

$$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$$

Simplification

$$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^1 + e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e * cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e * \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$e * \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$e * (0 + i * 1)$$

$$e * i$$

## 2.5 Nombres Complexes addition

$$(4 * cis(45^\circ)) + (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$$

### Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 \cos(45^\circ - 60^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{41 + 40 * 0,96592582628}$$

$$\rho = \sqrt{79,6370330512}$$

$$\rho = 8,923958373457376$$

### Calcul de l'argument

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2)}{\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{4 \sin(45^\circ) + 5 \sin(60^\circ)}{4 \cos(45^\circ) + 5 \cos(60^\circ)}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{1}{2}}\right)$$

$$\theta = \arctg(1.3434647741399612)$$

$$\theta = \arctg(53.3380661^\circ)$$

### Solution

$$|Z| = 8,923 cis(53.338^\circ)$$

## 2.6 Nombres Complexes soustraction

$$(4 * cis(45^\circ)) - (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$$

Calcul du modules

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - \frac{\pi}{3})}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 40 * \cos(45^\circ - 60^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * 0,965925826}$$

$$\rho = \sqrt{79,637033052}$$

$$\rho = 8,923958374$$

Calcul de l'argument

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) - \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) - \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{4 * \sin(45^\circ) - 5 * \sin(\frac{\pi}{3})}{4 * \cos(45^\circ) - 5 * \cos(\frac{\pi}{3})}\right)$$

$$tg(\theta) = \frac{4 * \sin(45^\circ) - 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) - 5 * \cos(60^\circ)}$$

$$tg(\theta) = \frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{1}{2} - 5 * \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$tg(\theta) = \frac{2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

$$tg(\theta) = \frac{\frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2}}{\frac{4 - 5\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg(\theta) = \frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{4 - 5\sqrt{3}}$$

$$tg(\theta) = -\frac{(4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) * (4\sqrt{2} - 5\sqrt{3})}{59}$$

$$tg(\theta) = -\frac{(16\sqrt{2} + 20\sqrt{6} - 20\sqrt{3} - 75)}{59}$$

$$tg(\theta) = 0,644471$$

$$tg(\theta) = 36,93^\circ$$

Solution

$$|Z| = 8,923958374 * cis(36,93^\circ)$$

## 2.7 Nombres Complexes multiplication

$$(4 * cis(45^\circ)) * (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$$

$$|Z| = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i * (\sin(\theta_1 + \theta_2)))$$

$$|Z| = (\rho_1 \rho_2) * cis(\theta_1 + \theta_2)$$

### Calcul du modules

$$\rho = \rho_1 \rho_2$$

$$\rho = 4 * 5$$

$$\rho = 20$$

### Calcul de l'argument

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\theta = 45^\circ + \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = 45^\circ + 60^\circ$$

$$\theta = 105^\circ$$

### Solution

$$|Z| = 20 * cis(105^\circ)$$



## 2.8 Nombres Complexes division

$$\frac{(4 * cis(45^\circ))}{(5 * cis(\frac{\pi}{3}))}$$

$$|Z| = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) * cis(\theta_1 - \theta_2)$$

**Calcul du modules**

$$\rho = \frac{4}{5}$$

**Calcul de l'argument**

$$\theta = 45^\circ - \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = 45^\circ - 60^\circ$$

$$\theta = -15^\circ$$

**Solution**

$$|Z| = \frac{4}{5} * cis(-15^\circ)$$

# Chapitre 3: Logique propositionnelle

## Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux

- 1) Principe d'identité :  $A=A$
- 2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose  $\neg A$  et  $A$
- 3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister  $A$  ou  $\neg A$

## 3.1 Proposition

En logique propositionnelle les propositions, énoncés, phrases, ne peuvent qu'être vrai ou fausse

### Exemple

$2+2 \Rightarrow$  Vrai ou Faux

Le mur est blanc  $\Rightarrow$  Vrai ou Faux

## 3.2 L'implication

Si j'ai une proposition  $A$  alors  $B$

### Exemple

Une paire de chaussure ( implique que " $\Rightarrow$ " ) j'ai 2 chaussures

une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes

$A \Rightarrow B$  : Faux

Si  $A$  est vrai alors  $B$  est vrai

Si  $B$  est vrai alors  $A$  n'est pas forcément vrai

### 3.3 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.

$A=B$  : vrai

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A est vrai

### 3.4 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois

Tautologie : toujours vrai

prédicats : Pour tout il existe

### 3.5 Tableau priorités logique

Opérateur	Logique	priorités	Associativités
$<=>$	Égalité	1	gauche
$=>$	Implications	2	droite
$\vee$	OU	3	gauche
$\wedge$	ET	4	gauche
$\neg$	NON	5	gauche

### 3.6 Tautologie

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	T	$\perp$
$\perp$	T	T

## 3.7 Changement de forme

### Commutativité

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

### Associativités

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

### Distributivités

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \vee (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

### De Morgans

$$a \vee b = \neg a \wedge \neg b$$

$$a \wedge b = \neg a \vee \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (p \vee q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

### Forme disjonctive

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \text{ ET } B) \text{ OU } C$$

### Forme conjonctive

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \text{ OU } B) \text{ ET } C$$

### Transformation

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

# Chapitre 4: Théorie naïve des ensembles

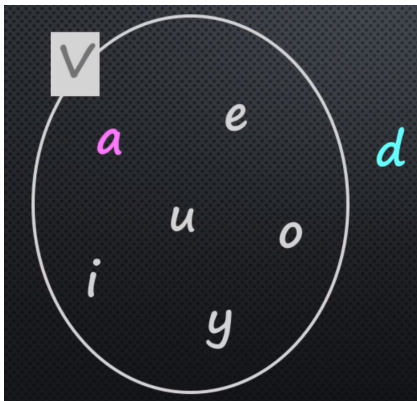
## 4.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appelés éléments de cet ensemble.  
un objet particulier appartient ( $\in$ ) ou n'appartient pas ( $\notin$ ) à un ensemble donné.

Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles :  $V = \{a, e, i, o, u, y\}$

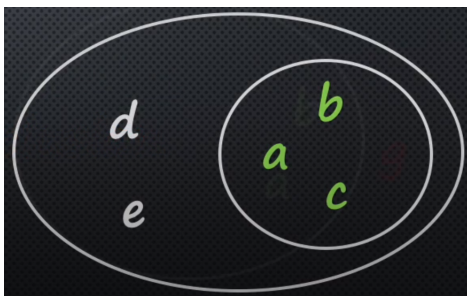
$a \in V$  : a appartient à l'ensemble V

$d \notin V$  : d n'appartient pas à l'ensemble V



## 4.2 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté  $A \subset B$ ), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit ( $X \subset A$ ) et que ( $X \subset B$ ).



On peut dire que  $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d, e\}$

## 4.3 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A ( $A \subset A$ )
- b. Anti-Symétrique : ( $A \subset B$ ) et ( $B \subset A$ )  $\Rightarrow A = B$
- c. Transitivité : ( $A \subset B$ ) et ( $B \subset C$ )  $\Rightarrow A \subset C$

## 4.4 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté  $A=B$ ), si tout les éléments de A appartient à B. Autrement dit ( $X \in A$ ) et que ( $X \in B$ ).

## 4.5 Opération d'union ( $\cup$ )

1) L'union de 2 ensembles

$A = \{a, e\}$  et  $B = \{b, c, d\}$

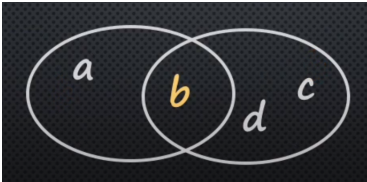
$C = A \cup B = \{a, e, b, c, d\}$

## 4.6 Opération d'intersection ( $\cap$ )

**Intersection de 2 ensembles**

Soient A et B deux ensembles, on appelle ( $A \cap B$ ) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B.

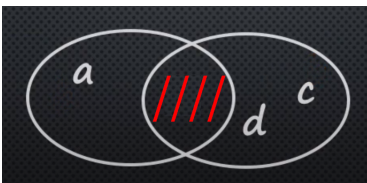
$A = \{a, b\}$  et  $B = \{b, c, d\}$



$C = A \cap B = \{b\}$

## 4.7 Ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles. Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



$C = A \cap B = \{b\}$

## 4.8 Cardinalité

Soit A un ensemble, Si A possède exactement N éléments ( $n \in \mathbb{N}$ ), A est un ensemble fini de cardinalité N.

Noté  $|A| = n$

$$|1, 2, 3| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

## 4.9 Identité

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

## 4.10 Commutativité

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

## 4.11 Associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

## 4.12 Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

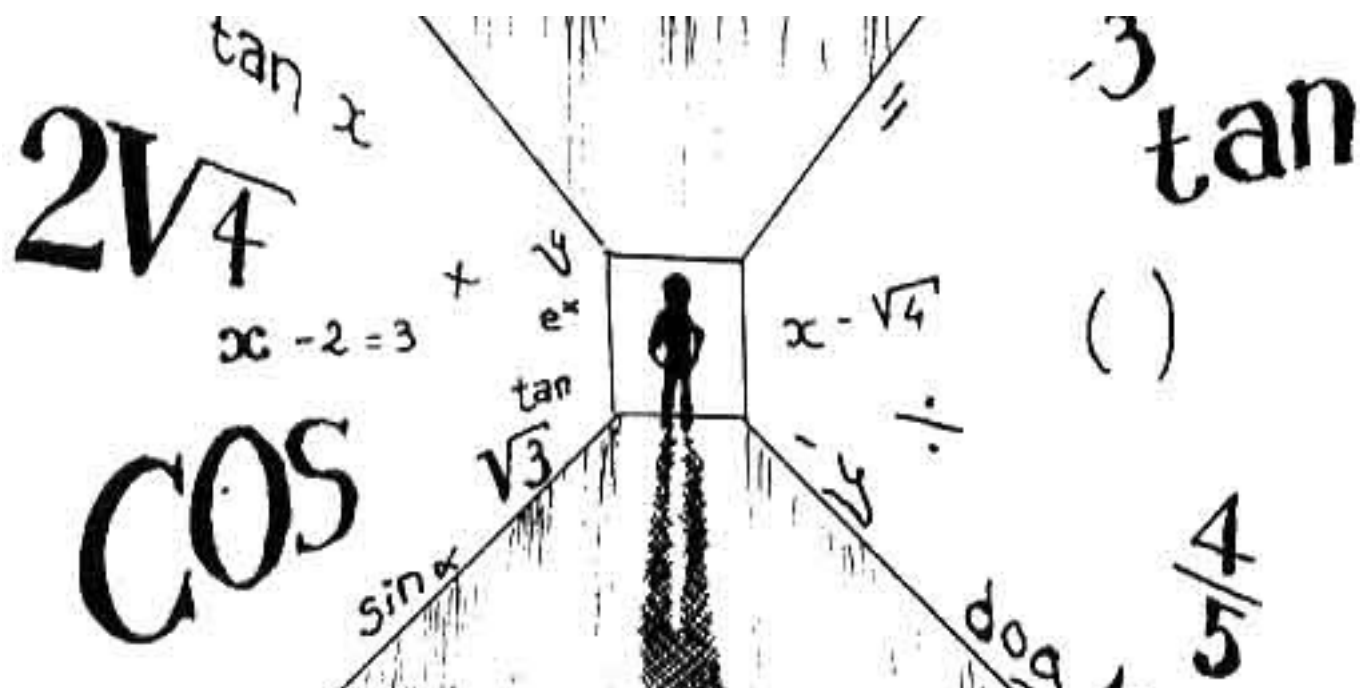
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

## 4.13 De Morgans

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

# Mathématiques Exercices





# Chapitre 5: Matrices Exercices

## 5.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- A) Calculer  $B \cdot C$
- B) Calculer la trace de A
- C) Calculer la transposée de B
- D) Calculer  $2,5 \cdot C$
- E) Calculer  $B^t + C$
- F) Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)
- G) Calculer le déterminants de A
- H) Exercices prépartion examen (déterminant)
- I) Exercices prépartion examen (déterminant)
- J) Exercices prépartion examen (déterminant)
- K) Exercices prépartion examen (déterminant)

## 5.2 Résolution des exercices

### A) Calculer B\*C

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

### B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale. La trace de la matrice A = 0+2+0+2 = 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

C) Calculer la transposée de la matrice B La transposée de la matrice est d'invertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes :  $B^t$  est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

### D) Calculer 2,5\*C

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

### E) Calculer $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes :  $B^t + C = 2*C = C+C$

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

## F) Déplacement 3D

R=10u H=300l où L=40cm + hauteur du casier

$$P = \left(\left(\frac{3}{5}\right) * R < R\right)$$

$$\theta = 0 \quad Z = R + \left(\frac{B}{100} * R\right) = R + \left(\frac{2}{100}\right) * R = 20cm$$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{R}{2} + \frac{B}{100}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos(45) - \sin(45)) & 0 \\ \sin(45) - \cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{R}{2} + \frac{B}{100}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### G) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

L3 - (2\*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2-(1*2) & 3-(2*2) & 0-(2*3) & 1-(2*0) \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2-2 & 3-4 & 0-6 & 1-0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

L4 - (3\*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3-(3*1) & 0-(3*2) & 1-(3*3) & 2-(3*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3-3 & 0-6 & 1-9 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3-1*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L4 = L4-6*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L4-(-1)*L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

$$1*(-1)*(-4)*24=\mathbf{96}$$

$$S= \det(A) = \mathbf{96}$$

## H) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 3\*3

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices 2\*2

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

Calcul du déterminant des sous matrices

$$\begin{aligned} & 8 * ( \\ & 1 * ((9,5 * 16) - (8 * -9,5)) \\ & - 5 * ((9 * 16) - (4 * -9,5)) \\ & + 6 * ((9 * 8) - (4 * 9,5)) ) \end{aligned}$$

Simplification des calculs

$$\begin{aligned} & 8 * (1 * (152 - (-76)) \\ & - 5 * (144 - (-38)) \\ & + 6 * (72 - 38)) \end{aligned}$$

Mise en équation et résolution

$$\begin{aligned} & 8 * (228 - 5 * (182) + 6 * (34)) \\ & 8 * (228 - 910 + 204) \\ & 8 * (228 + 204 - 910) \\ & 8 * (432 - 910) \\ & 8 * (-478) = -3824 \end{aligned}$$

$$\det(A) = \mathbf{-3824}$$

## I) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 1337 \\ b & 42 \\ c & 8086 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer la multiplication

$$\begin{pmatrix} a * 2 + 1337 * 4 & a * 5 + 1337 * 0 & a * 6 + 1337 * 4 \\ b * 2 + 42 * 4 & b * 5 + 42 * 0 & b * 6 + 42 * 4 \\ c * 2 + 8086 * 4 & c * 5 + 8086 * 0 & c * 6 + 8086 * 4 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 3 * 2 + 1337 * 4 & 3 * 5 & 3 * 6 + 1337 * 4 \\ 10 * 2 + 42 * 4 & 10 * 5 & 10 * 6 + 42 * 4 \\ 5 * 2 + 8086 * 4 & 5 * 5 & 5 * 6 + 8086 * 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5354 & 15 & 5366 \\ 188 & 50 & 228 \\ 32354 & 25 & 32374 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des matrices 2\*2

$$+5354 * \begin{pmatrix} 50 & 228 \\ 25 & 32374 \end{pmatrix} - 15 * \begin{pmatrix} 188 & 228 \\ 32354 & 32374 \end{pmatrix} + 5366 * \begin{pmatrix} 188 & 50 \\ 32354 & 25 \end{pmatrix}$$

$$+5354 * ((50 * 32374) - (228 * 25))$$

$$-15 * ((188 * 32374) - (32354 * 228))$$

$$+5366 * ((188 * 25) - (32354 * 50))$$

$$+5354 * ((1618700) - (5700))$$

$$-15 * ((6086312) - (7376712))$$

$$+5366 * ((4700) - (1617700))$$

$$8\ 636\ 002\ 000 + 19\ 356\ 000 - 8\ 655\ 358\ 000$$

$$8\ 655\ 358\ 000 - 8\ 655\ 358\ 000 = \mathbf{0}$$

## J) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -40 & 0 & -1 \\ -b & -80 & -1 & -2 \\ -c & -62 & -2 & 0 \\ -d & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Réalisation de l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a & 5-40 & 6 & 7-1 \\ -b & -80 & -1 & 8-2 \\ 9-c & 9,5-62 & -9,5-2 & b \\ 4-d & 8 & 16-1 & 32-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ -10 & -80 & -1 & 6 \\ 4 & -52,5 & -11,5 & 10 \\ 2 & 8 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Méthodes du pivot de Gauss

$$L2 = L2 - (-5) * L1 = (0 \ -255 \ -31 \ 36)$$

$$L3 = L3 - (-2) * L1 = (0 \ -122,5 \ 0,5 \ 22)$$

$$L4 = L4 - (-1) * L1 = (0 \ 43 \ 9 \ 24)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ 0 & -255 & 29 & 36 \\ 0 & -122,5 & 0,5 & 22 \\ 0 & 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des sous matrice 2\*2

$$-2 * \begin{pmatrix} -255 & 29 & 36 \\ -122,5 & 0,5 & 22 \\ 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$-2 * ( +(-255) * \begin{pmatrix} 0,5 & 22 \\ 9 & 24 \end{pmatrix} (-29) * \begin{pmatrix} 122,5 & 22 \\ 43 & 24 \end{pmatrix} (36) * \begin{pmatrix} 122,5 & 0,5 \\ 43 & 9 \end{pmatrix} )$$

$$-2 * ( -255 * (12-198) -29 * ((-2940) - (946)) +36 * ((-1102,5) - 21,5))$$

$$47430 + 112694 - 40464 = 119660$$



## K) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 5 & 1 \\ c & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'addition

$$\begin{pmatrix} a+4 & 2+5 & 6 \\ b+4 & 5 & 1+4 \\ c+a & 6+b & 2+c \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Calcul du déterminant

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$+7 * \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} - 7 * \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$+7 * ((5*7) - (16*5))$$

$$-7 * ((14*7) - (8*5))$$

$$+6 * ((14*16) - (8*5))$$

$$+7 * (-45) - 15 * (58) + 6 * (184)$$

$$1104 - 406 - 315 = 383$$

# Chapitre 6: Nombres Complexes Exercices

## 6.1 Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes

- a.  $x^2+1=0$
- b.  $3x^2+7=0$
- c.  $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d.  $-x^2-3x=3$
- e.  $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f.  $x^4 +15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de

- a.  $-11-8i$
- b.  $-0.3333i + 1$
- c.  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i$

3) Identifier  $\mathbb{R}$   $\mathbb{I}$

- a.  $0$
- b.  $-6+i$
- c.  $i^2$
- d.  $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme  $a+bi$

- a.  $(4-8i)-(3+2i)$
- b.  $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c.  $(7-2i)(5+6i)$
- d.  $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e.  $\frac{5+3i}{(2+2i)}$
- f.  $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

- g.  $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$
- h.  $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$
- i. Nombre de modules 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$
- j. Nombre de modules 3 et d'argument  $\frac{-\pi}{8}$

**5) Exprimer sous forme Polaire**

- a.  $3 - \sqrt{3}i$
- b.  $-1 + i$

**6) Exprimer sous forme cartésienne**

- a.  $4\cos(45) + \sin(45)i$
- b.  $5\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**7) Trouver la solution de**

- a.  $4\text{cis}(45^\circ) + 5\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- b.  $4\text{cis}(45^\circ) * 5\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

**8) changer de formes**

- a.  $6 * \text{cis}(30^\circ)$  en forme exp
- b.  $e^{1 + \frac{\pi}{2} * i}$
- c.  $1 + \sqrt{3}i$  en forme exp

**8) donner la valeur de**

- a. module de  $3e^{\frac{\pi}{4} * i}$
- b. argument de  $3e^{\frac{\pi}{4} * i}$
- c.  $\text{Re}(2e^{-\pi * i})$
- c.  $I(2e^{-\pi * i})$

## 6.2 Résoudre les équations suivantes

**A.  $x^2 + 1 = 0$**

$$x^2 + 1 - 1 = 0 - 1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$S = x = i$$

**B.  $3x^2 + 7 = 0$**

$$3x^2 + 7 - 7 = 0 - 7$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$x^2 = \frac{-7}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3} * -1}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

$$S = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

**C.  $\frac{x^2}{2} - x = -2$**

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} = -\frac{2}{1}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$x^2 - 2x = -4$$

$$x^2 - 2x + 4 = (-4) + 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 4}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 * (-3)}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 * (-3)}}{2}$$

$$S = -1 \pm 1 \sqrt{-3}$$

$$\mathbf{D. -x^2-3x = 3}$$

$$-x^2-3x-3 = 3-3$$

$$-x^2-3x-3 = 0$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{(3)^2-4*1*3}}{2*1}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{9-12}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{3*(-1)}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{3*\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{3i}}{2} = -\frac{3}{2} + -\sqrt{\frac{3}{2}i}$$

$$\mathbf{E. x^3+7x^2+9x+63 = 0}$$

$$x^2+(x+7)+9(x+7)=0$$

$$(x+7)*(x^2+9)=0$$

Poser les CE pour que (x+7) ou (x<sup>2</sup>+9) vaut 0

Résoudre pour (x+7)=0

$$x=-7$$

$$(x^2+9)=0$$

$$x^2=-9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$$

$$x = 3\sqrt{-1}$$

$$x = 3i$$

S= X vaut -7 ;3i

$$\mathbf{F.} \ x^4 + 15x^2 = 16$$

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\text{Poser } t = x^2$$

$$t^2 + 15t - 16 = 0$$

$$t(t+16) - (t+16) = 0$$

$$(t+16)(t-1) = 0$$

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

- $t+16=0$

- $t-1=0$

$$(t+16) = 0$$

$$t = (-16)$$

$$\text{Restituer } t=x^2$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \sqrt{-16}$$

$$x = \sqrt{16 * (-1)}$$

$$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$$

$$x = 4\sqrt{-1}$$

$$x=4i$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$\text{Restituer } t=x^2$$

$$x^2=1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x=1$$

$$S = 1 ; 4i$$

## 6.3 Trouver le conjugués

- a.  $-11-8i = -11+8i$
- b.  $-0.3333i + 1 = 1+0.3333i$
- c.  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i = \cos(\omega t) - \sin(\omega t)i$

## 6.4 Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a.  $0 : \mathbb{R}=0 \mathbb{I}=0$
- b.  $-6+i : \mathbb{R}=(-6) \mathbb{I}=1$
- c.  $i^2 : \mathbb{R}=(-1) \mathbb{I}=0$
- d.  $\frac{1+i}{2} : \mathbb{R}=(\frac{1}{2}) \mathbb{I}=(\frac{1}{2})$

## 6.5 Exprimer sous forme $a+bi$

- a.  $(4-8i)-(3+2i) : 1-10i$
- b.  $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i} : \frac{23-11i}{26}$
- c.  $(7-2i)(5+6i) : 47+32i$
- d.  $\frac{4}{(3+i)^3} : \frac{9-13i}{125}$
- e.  $\frac{5+3i}{(2+2i)} : 2-\frac{1}{2}i$

f.  $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

### Etape 1 : Binomes conjugués

$$\frac{3+6i}{(3-4i)} * \frac{3+4i}{(3+4i)} = \frac{9+12i+18i+24i^2}{9-16i^2}$$

### Etape 2 : Par définition $i^2 = (-1)$

$$\frac{9+30i+(24*(-1))}{9-16*(-1)} = \frac{9+30i+(-24)}{9-(-16)}$$

$$\frac{9+(-24)+30i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25}$$

### Etape 3 : Factoriser

$$\frac{5*(-3+6i)}{5*5} = \frac{(-3+6i)}{5}$$

### Etape 4 : Exprimer sous la forme $a+bi$

$$\frac{-3}{5} + \frac{6i}{5}$$

$$g. \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$$

**Etape 1 : utilisation de  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$**

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} * i\right) - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} * i$$

**Etape 2 : Mise au même dénominateur**

$$\left(\frac{1}{25} + \frac{6}{25} * i\right) - \frac{9}{25} * (-1) - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$$

$$\left(\frac{-23}{25} + \frac{6}{25} * i\right) + \frac{6}{5}i$$

$$\frac{-23}{25} + \frac{36}{25}i$$

$$h. \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

**Etape 1 : Réduire au même dénominateur  $(1-i)*(1+i)$**

$$\frac{(1+i)*(2+5i)+(1-i)*(2-5i)}{(1-i)*(1+i)}$$

**Etape 2 : Distributivités**

$$\frac{2+2i+5i+5i^2+2-2i-5i+5i^2}{1-i+i-i^2}$$

$$\frac{4+10i^2}{1-i^2}$$

**Etape 3 : Par définition  $i^2 = -1$**

$$\frac{4+(10*(-1))}{1-(1*(-1))}$$

$$\frac{4-10}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

**i. Nombre de modules 2 et d'argument  $\frac{\pi}{3}$**

$$|Z| = 2 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$X = \rho * \cos(\theta) \Rightarrow X = 2 * \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta) \Rightarrow Y = 2 * \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$X = 2 * \frac{1}{2} = 1$$

$$Y = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

**Exprimer sous la forme  $a+bi$**

$$S = 1 + \sqrt{\frac{6}{2}}i = 1 + \sqrt{3}i$$



j. Nombre de modules 3 et d'argument  $\frac{-\pi}{8}$

DEMANDER EXPLICATION

## 6.6 Exprimer sous forme polaire

a.  $3 - \sqrt{3}i$

**Calcul de l'argument**

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta = -30^\circ$$

$$\theta = -30^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 330^\circ$$

**Calcul du module**

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{9 + 3}$$

$$\rho = \sqrt{12} \Rightarrow (12 = 4 * 3)$$

$$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$$

$$\rho = 2\sqrt{3}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \operatorname{cis}(\theta)$$

$$Z = 2\sqrt{3} * \operatorname{cis}(330)^\circ$$

b.  $-1 + i$

**Calcul de l'argument**

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$\theta = -45^\circ$$

$$\theta = -45^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 315^\circ$$

**Calcul du module**

$$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \operatorname{cis}(\theta)$$

$$Z = \sqrt{2} * \operatorname{cis}(315)^\circ$$

## 6.7 Exprimer sous forme cartésienne

a.  $4\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) * i$

### Formules

$$\rho = 4 * \operatorname{cis}(45^\circ)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$|Z| = a + bi$$

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg}(45^\circ)$$

$$\frac{Y}{X} = 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$$

$$\rho = x^2 + y^2 = 16$$

Notes :  $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$  donc  $Y=X$

$$\rho = 2x^2 = 16 \text{ ou } 2y^2 = 16$$

$$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$$

$$\rho = x^2 = 8$$

$$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8} = (2 * 4)$$

$$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$$

$$\rho = x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}$$

$x=y$  donc  $x = 2\sqrt{2}$  et  $y = 2\sqrt{2}i$

### Conclusion

$$S = 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

b.  $5 * cis(\frac{\pi}{3})$

## Formules

$$\rho = 5$$

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$|Z| = a + bi$$

$$\theta = tg(\frac{\pi}{3})$$

$$\theta = \sqrt{(3)}$$

$$x = \rho * cos(\sqrt{3}) => cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$$

$$y = \rho * sin(\sqrt{3}) => sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}$$

## Conclusion

$$Z = a + bi$$

$$S = Z = \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

## 6.8 Trouver la solution

$$4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

**Calcul du module**

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - 60^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * \cos(-15^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{41 + 40 * \cos(-15^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{81 * 0.965}$$

$$\rho = \sqrt{79.637}$$

$$\rho = 8.9239$$

**Calcul de l'argument**

$$\theta = \arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = \arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = \arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = \arctg(\frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{1}{2}})$$

$$\theta = \arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

$$b.4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

### Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2 (\cos(45^\circ + \theta_2) + i * \sin(45^\circ + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5 (\cos(45^\circ + 60^\circ) + i * \sin(45^\circ + 60^\circ))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

### Calcul de l'argument

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

## 6.9 changement de forme (exp)

**a.**  $6 * cis(30^\circ)$  en forme exp

$$\rho * cis(\theta) = \rho * e^{\theta i}$$

$$6cis(30^\circ) = 6e^{30^\circ i} = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$S = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$$

**b.**  $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

Mettre sous la forme  $a + bi$

$$e^1 + e^{\frac{\pi}{2}i}$$

**Calculer**  $e * cis(\frac{\pi}{2})$

$$e * (\cos(\frac{\pi}{2}) + i * \sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$e * (0 + 1i)$$

$$S = e * i$$

**c.**  $1 + \sqrt{3}i$  en forme exp

**Etape 1 : Trouver  $\rho$  (calcul du module)**

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{2^2}$$

$$\rho = 2$$

**Etape 2 : Trouver  $\theta$  (calcul de l'argument)**

$$tg(\theta) = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$tg(\theta) = (\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{6}$$

**Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle**

$$\rho * cis(\theta) = \rho * e^{i\theta} = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

## 6.10 Recherche valeurs (exp)

a. module de  $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$

b. argument de  $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$

c.  $\text{Re}(2e^{-\pi*i})$

d.  $I(2e^{-\pi*i})$



# Chapitre 7: Logique propositionnelle exercices

## 7.1 Enoncé Exercices

1) Déterminer la véracité

$$P1 = 1+1=2$$

$$P2 = 1>5$$

$$P3 = 1+1=3$$

- a.  $P_1 \vee P_3$
- b.  $P_2 \Rightarrow P_1$
- c.  $P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$

2) Construire la Table de vérité de  $p_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$

## 7.2 Déterminer la véracité

a.  $P_1 \vee P_3 = T$

$$1 \text{ OU } 1 = 1$$

b.  $P_2 \Rightarrow P_1$

$$\neg P_2 \vee (P_2 \wedge P_1)$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge 1)$$

$$1 \vee (0)$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$$S = P_2 \Rightarrow P_1 = T$$

c.  $P_3 \Rightarrow (p_1 \vee p_3)$

$$\neg P_3 \vee (p_3 \wedge (p_1 \vee p_3))$$

$$p_3=0$$

$$p_1 = 1 \text{ ou insertion}$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge (1 \vee 0))$$

$$1 \vee (1 \wedge 0)$$

$$1 \vee 0 = T$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$$S = P_3 \Rightarrow (p_1 \vee p_3) = T$$

## 7.3 Construire la table de vérité

$$p_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$$

$$P_2 \Rightarrow P_3$$

$$\neg P_2 \vee (p_2 \wedge p_3)$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge 0)$$

$$1 \vee 0 = \text{T}$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_2 \Rightarrow P_3$
T	$\perp$	$\perp$	T

## 7.4 Théorie naïve des ensembles Exercices

### 7.4.1 Enoncé d'exercices

- a. Soit  $A=\{\pi, 2, e\}$  et  $B=\{-1, 5\}$  Calculer  $|A \times B|$
- b. Soit  $P \mid A \cup B \mid A=\{3, 4, 5\}$   $B=\{1, 2, 3\}$
- c. Soit  $A=\{\pi, 2, e\}$  et  $B=\{-1, 5\}$  Calculer  $|A \cup B|$

### 7.4.2 Résolution

A) Calculer  $A \times B$

$$A \times B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

2) Calculer la cardinalité de  $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de  $P(A)$  :

La somme de la cardinalité des sous ensembles =  $6 + (3 \cdot 5) + 1 = 22$

$$P(A \cup B) = 22$$

$$S=22$$

B) Soit  $P \mid A \cup B \mid A = \{3,4,5\} \mid B = \{1,2,3\}$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Total des ensembles = 7

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}\}$$

Total des ensembles = 6

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5\}, \{4,5,1\}, \{5,1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,3\}, \{3,3,4\}\}$$

Total des ensembles = 6

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1\}, \{4,5,1,2\}, \{5,1,2,3\}, \{1,2,3,3\}, \{2,3,3,4\}, \{3,3,4,5\}\}$$

Total des ensembles = 6

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1,2\}, \{4,5,1,2,3\}, \{5,1,2,3,3\}, \{1,2,3,3,4\}, \{2,3,3,4,5\}, \{3,3,4,5,1\}\}$$

Total des ensembles = 6

6) Union des 2 ensembles a 6 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1,2,3\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de  $P(A)$  :

$$\text{La somme de la cardinalité des sous ensembles} = 7 + (4 \cdot 6) + 1 = 32$$

$$P \mid A \cup B \mid = 32$$

$$S = 32$$

c) Soit  $A = \{\pi, 2, e\}$  et  $B = \{-1, 5\}$  Calculer  $|A \cup B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de  $P(A)$  :

La somme de la cardinalité des sous ensembles =  $6 + (3 \cdot 5) + 1 = 22$

$$P(A \cup B) = 22$$

$$S = 22$$

## 7.5 Nombre Entiers Exercices

### 7.5.1 Exemple Modulo

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que  
 $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

Sélectionnez une réponse :

☐ a. Vrai

☐ b. Faux

$$(8+15) \bmod 3 = ((8 \bmod 3) + (15 \bmod 3)) \bmod 3$$

$$(23) \bmod 3 = (2+0) \bmod 3$$

$$2 = 2$$

VRAI

## 7.6 Relation Binaire Exercices

- a.  $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$
- b.  $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$
- c.  $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible a}\}$

### 7.6.1 Exercices Examen

Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0

$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$  :

- ☐ a.  $R$  est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c.  $R$  est réflexif
- ☐ d.  $R$  est anti-symétrique
- ☐ e.  $R$  est symétrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI

b multiple de b = VRAI

$R$  est réflexif

Test de la symétrie  $\Rightarrow$  Exemple (a=2 ou b=6)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = FAUX

$R$  n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie  $\Rightarrow$  (a=b) Exemple (a=3 ou b=3)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = VRAI

$R$  est anti-symétrique

Test de Transitivité  $\Rightarrow$  (a=b) Exemple (a=3 ou b=9 Z=18)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?

a est dans la table de 18 ?  $\Rightarrow$  VRAI

$R$  est transitif



Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0

$$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$  :

- ☐ a.  $R$  est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c.  $R$  est réflexif
- ☐ d.  $R$  est anti-symétrique
- ☐ e.  $R$  est symétrique

Test de la réflexivité

A est plus grand que A  $\Rightarrow$  FAUX

B est plus grand que B  $\Rightarrow$  FAUX

il faut que A et B soit vrai

Test de la symétrie

A est plus grand que B  $\Rightarrow$  VRAI

B est plus grand que A  $\Rightarrow$  FAUX

il faut que A et B soit vrai

Test de l'anti-symétrie

$R$  n'est Symétrique pas car A=1 B=2

$R$  est anti-symétrique  $a \text{ est } > b$  car  $a \neq b$

Test de la transitivité

Si A est  $>$  B et que B est  $>$  Z est-ce que  $a > Z$  ?

$R$  est transitif car A est  $>$  Z

Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0

$$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible } a\}$$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$  :

- ☐ a.  $R$  est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c.  $R$  est réflexif

☐ d. R est anti-symétrique

☐ e. R est symétrique

Test de la réflexivité

A est divisible par A  $\Rightarrow$  VRAI

B est divisible par B  $\Rightarrow$  VRAI

R est réflexif

Test de la symétrie

A est divisible par B  $\Rightarrow$  VRAI

B est divisible par A  $\Rightarrow$  FAUX

il faut que A et B soit vrai

R n'est pas symétrique

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symétrique pas car A=1 B=2

R est anti-symétrique  $a \leq b$  car  $a \neq b$

Test de la transitivité

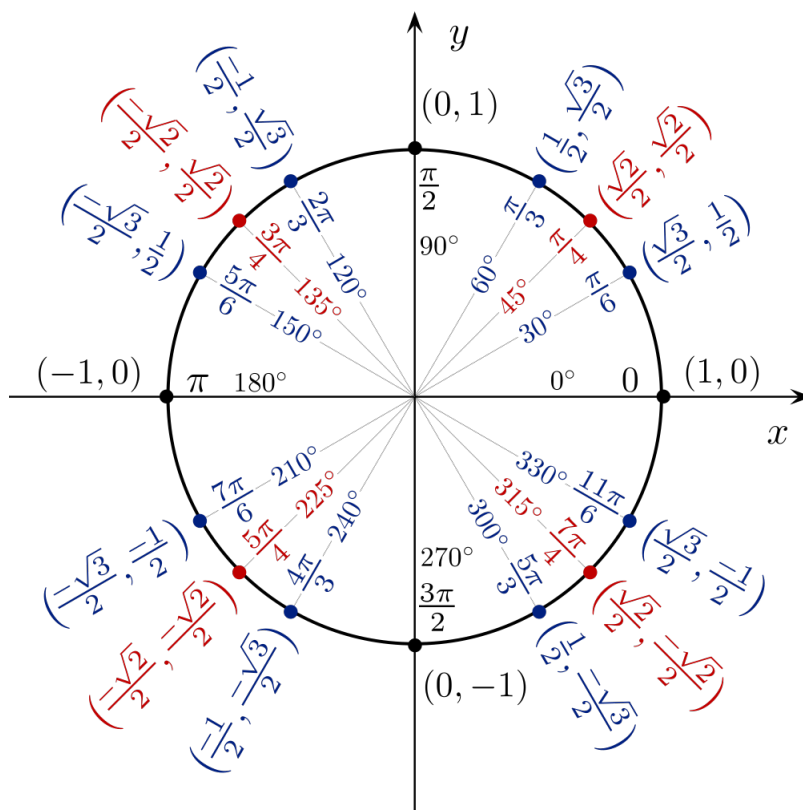
Si A est divisible par B et que B est divisible par Z est-ce que a divisible par Z?

R est transitif car A est divisible par Z

# Chapitre 8: Formules

## 8.1 Tableau Trigonométrique

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\#$
cotan	$\#$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



## 8.2 NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne

$$X = \rho * \cos(\theta)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta)$$

$$Z = x + yi$$

$$\text{Notes : } cis = \cos(\theta) * \sin(\theta) * i$$

## 8.3 Addition de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) + (a+di)$$

$$(a_1+a_2) + (b_1+b_2) * i$$

## 8.4 Soustraction de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) - (a+di)$$

$$(a_1-a_2) + (b_1-b_2) * i$$

## 8.5 Multilication de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) * (a+di)$$

$$(a_1*a_2) - (b_1*b_2) + ((a_1 * b_2) + (b_1*a_2)) * i$$

## 8.6 Division de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } \frac{(a+bi)}{(a+di)}$$

$$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} * i$$

## 8.7 NB Complex : Forme cartésienne vers polaire

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} &= tg(\theta)\end{aligned}$$

## 8.8 Addition de nombres complex (Polaire)

$$Exemple : 4 * cis(45^\circ) + 5 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

## 8.9 Soustraction de nombres complex (Polaire)

$$Exemple : 4 * cis(45^\circ) - 5 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

## 8.10 Multilication de nombres complex (Polaire)

$$Exemple : 4 * cis(45^\circ) * 5 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c1 * c2 = \rho_1 * \rho_2 * (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i * \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

## 8.11 Division de nombres complex (Polaire)

$$Exemple : \frac{(a+bi)}{(c+di)}$$

$$\frac{c1}{c2} = \frac{r1}{r2} * \cos(\theta_1 - \theta_2) + i * \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Notes : Selon l'énoncé et les préférences de chacun il est conseillé de transformer en forme polaire ou cartésien, afin de pouvoir appliquer les formules ci-dessus.

## 8.12 Logique propositionnelle

De Morgans :

$$a \vee b = \neg a * \neg b$$

$$a * b = \neg a + \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p \vee \neg q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \text{ ET } B) \text{ OU } C$$

Forme conjonctive

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \text{ OU } B) \text{ ET } C$$

Transformation :

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

## 8.13 Algorithmique symbole

$o$  = meilleur des cas

$O$  = Pire des cas

$\theta$  = Cas moyen

$\Theta$  = Meilleur des cas, cas moyen, pire des cas