

Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

Août-Septembre 2020

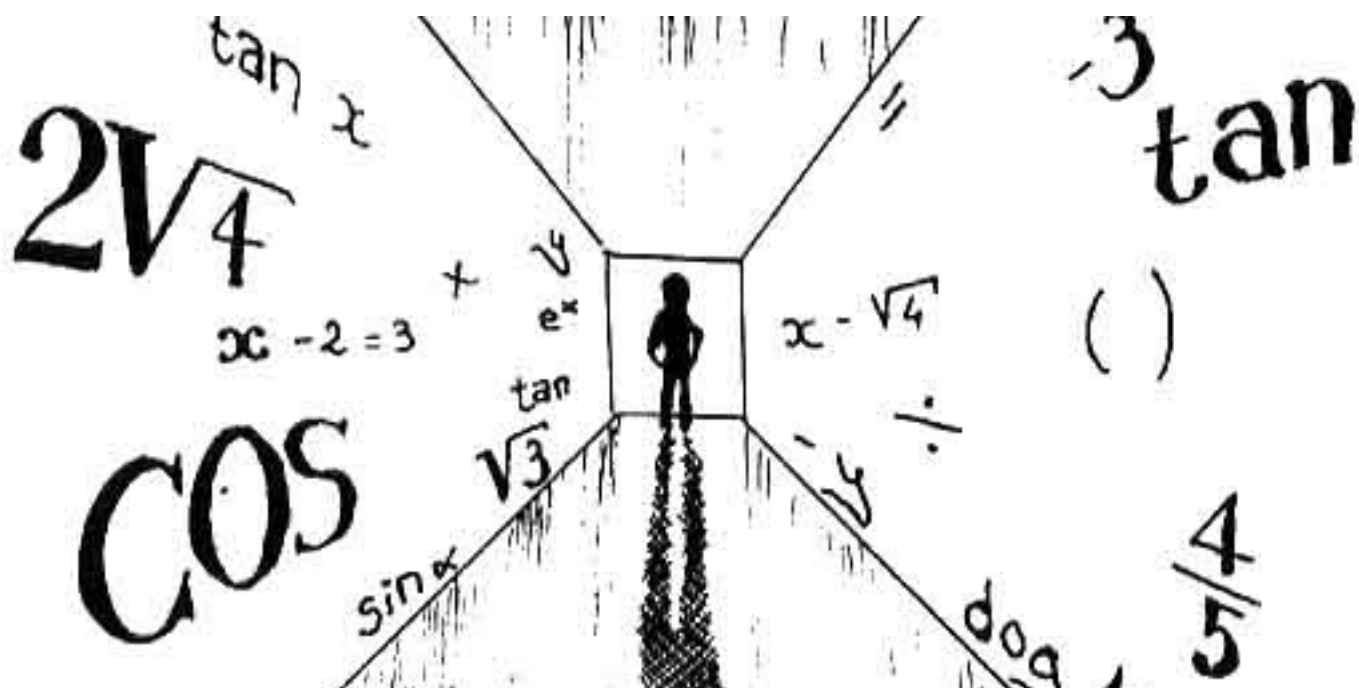
Table de Matières

1	Matrices Théories	5
1.1	Les propriétés	5
1.2	Calcul du déterminants 2×2	6
1.3	Calcul du déterminants 4×4 ou $n \times n$	6
1.4	Méthode Elimination de Gauss	7
1.5	Autres Méthodes	8
2	Nombres Complexes	10
2.1	Conversion polaire - cartésienne	10
2.2	Conversion Cartésienne - Polaire	11
2.3	Conversion cartésienne/polaire - exponentielle	12
2.4	Conversion exponentielle - polaire/cartésienne	13
2.5	Nombres Complexes addition	14
2.6	Nombres Complexes soustraction	15
2.7	Nombres Complexes multiplication	16
2.8	Nombres Complexes division	17
3	Logique propositionnelle	18
3.1	Proposition	18
3.2	L'implication	18
3.3	L'équivalence	19
3.4	Vocabulaire	19
3.5	Tableau priorités logique	19
3.6	Implication	19
3.7	Equivalence	19
3.8	Changement de forme	20
4	Théorie naïve des ensembles	21
4.1	Définition	21
4.2	Relation d'inclusion	21
4.3	Propriété de l'inclusion	21
4.4	Relation d'égalité	22
4.5	Opération d'union (\cup)	22
4.6	Opération d'intersection (\cap)	22
4.7	Ensemble vide	22
4.8	Cardinalité	23
4.9	Identité	23
4.10	Commutativité	23
4.11	Associativité	23
4.12	Distributivité	23
4.13	De Morgans	23
5	Nombre Entiers Théorie	24
5.1	Modulo	24
5.2	Transformation	24
5.3	PGCD	25
5.4	PPCM	25

6	Matrices Exercices	27
6.1	Enoncés des exercices	27
6.2	Résolution des exercices	28
7	Nombres Complexes Exercices	36
7.1	Enoncés	36
7.2	Résoudre les équations suivantes	38
7.3	Trouver le conjugués	41
7.4	Identifier \mathbb{R} \mathbb{I}	41
7.5	Exprimer sous forme $a+bi$	41
7.6	Exprimer sous forme polaire	44
7.7	Exprimer sous forme cartésienne	45
7.8	Trouver la solution	47
7.9	changement de forme (exp)	49
7.10	Recherche valeurs (exponentielle)	50
8	Logique propositionnelle exercices	51
8.1	Enoncé Exercices	51
8.2	Déterminer la véracité	52
8.3	Construire la table de vérité	52
8.4	Prouver l'équivalence	52
8.5	Déterminer la véracité	53
8.6	Théorie naïve des ensembles Exercices	55
8.6.1	Enoncé d'exercices	55
8.6.2	Résolution	55
9	Nombre Entiers Exercices	58
9.1	Exercices Modulo	58
9.2	Exercices PPCM-PGCD	58
9.3	Exercices changement de base	59
9.4	Relation Binaire Exercices	69
9.4.1	Exercices Examen	69
10	Exemple d'examen	72
10.1	Q1 : Calcul du déterminant de la matrice	72
10.2	Q2 : Calcul nombre complex	74
10.3	Q3 : Transformer en forme conjonctive	78
10.4	Q4 : Théorie des ensembles naïfs	78
10.5	Q5 : Induction forte/faibles	80
10.6	Q6 : Nombre entiers	81
10.7	Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau	82
10.8	Q8 : Ensemble Naturels	84
11	Formules	85
11.1	Tableau Trigonometrique	85
11.2	NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne	86
11.3	Addition de nombres complex (cartésien)	86
11.4	Soustraction de nombres complex (cartésien)	86
11.5	Multilication de nombres complex (cartésien)	86
11.6	Division de nombres complex (cartésien)	86
11.7	NB Complex : Forme cartésienne vers polaire	87

11.8	Addition de nombres complex (Polaire)	87
11.9	Soustraction de nombres complex (Polaire)	87
11.10	Multilication de nombres complex (Polaire)	87
11.11	Division de nombres complex (Polaire)	87
11.12	Logique propositionnelle	88
11.13	Algorithmique symbole	88

Mathématiques Théories



Chapitre 1: Matrices Théories

1.1 Les propriétés

A) Linéarité

si on multiplie une matrice par λ , le déterminant est multiplié par λ^n et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par $\lambda = \det(A) * \lambda^n$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)?$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ab \quad \det(B) = cd$$

Conclusion :

$$C = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = (a+c) * (b+d)$$

$\lambda^n \neq$ linéaire

λ^n est exponentielle

B) Déterminant et transposée

$\det(A) = \det(A^T)$, les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\varphi_a(x_1, \dots, x_n) = \det(\varphi_c)(A * 1, \dots, A * N)$$

D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différents de 0.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

1.2 Calcul du déterminants 2*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplication croisée des 2 ensembles

Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1*3) - (2*4)$$

$$\det(A) = (3-8)$$

$$\det(A) = (-5)$$

$$S = -5$$

1.3 Calcul du déterminants 4*4 ou n*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

$$L3 - (2*L1) = L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2-(1*2) & 3-(2*2) & 0-(2*3) & 1-(2*0) \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ (2-2) & 3-4 & (0-6) & 1-0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

$$L4 - (3*L1) = L4$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3-(3*1) & 0-(3*2) & 1-(3*3) & 2-(3*0) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3-3 & 0-6 & 1-9 & 2-0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...

1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3-1*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L4 = L4 - 6 * L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L4 - (-1) * L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$1 * (-1) * (-4) * 24 = 96$$

$$S = \det(A) = 96$$

1.5 Autres Méthodes

Elimination en matrice 3*3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2*2

$$A = 1 * ((-1) * \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}) - (-2) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix})$$

Mise en équation

$$\begin{aligned} A = & 1 * (\\ & + (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1)) \\ & - (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1)) \\ & + 3 * ((1 * 8) - (6 * 6)) \\ &) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * (\\ & + (-1) * ((12) - (8)) \\ & - (-2) * ((2) - (6)) \\ & + 3 * ((8) - (36)) \\ &) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * ((-1 * 4) \\ & (2 * (-4)) \\ & (3 * (-28)) \\ &) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 - (-8) - (-84) &= \mathbf{96} \\ S = \det(A) &= \mathbf{96} \end{aligned}$$

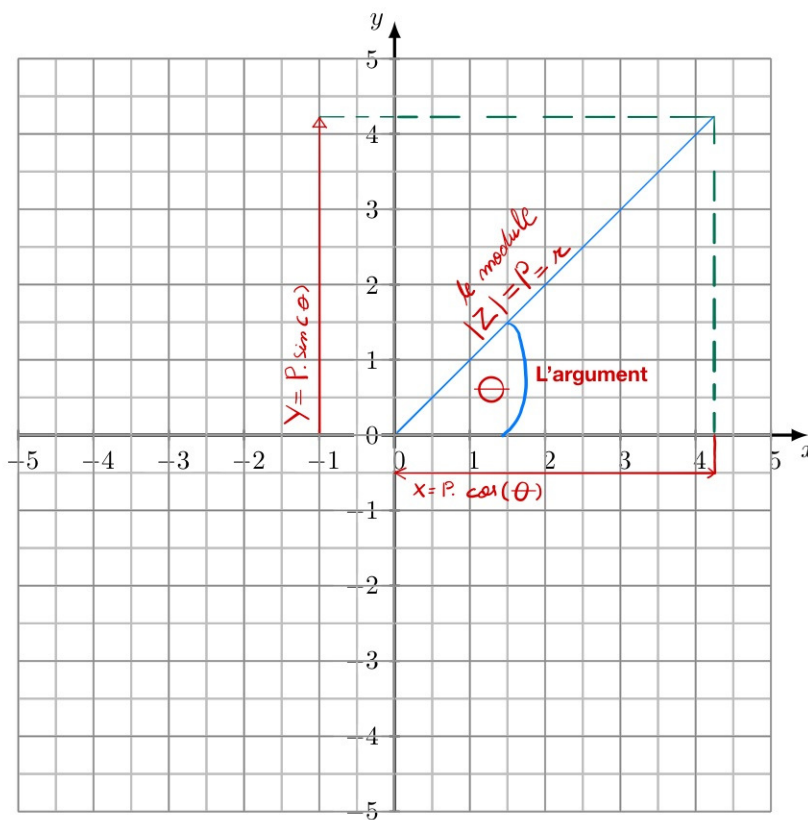
Chapitre 2: Nombres Complexes

2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module

le module noté $|Z|$ est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ($\sqrt{a^2 + b^2}$).

Représentation Géographique



Démonstration

$$\begin{aligned} |Z| &= \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2)} \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta))} * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2)} \\ |Z| &= \rho \end{aligned}$$

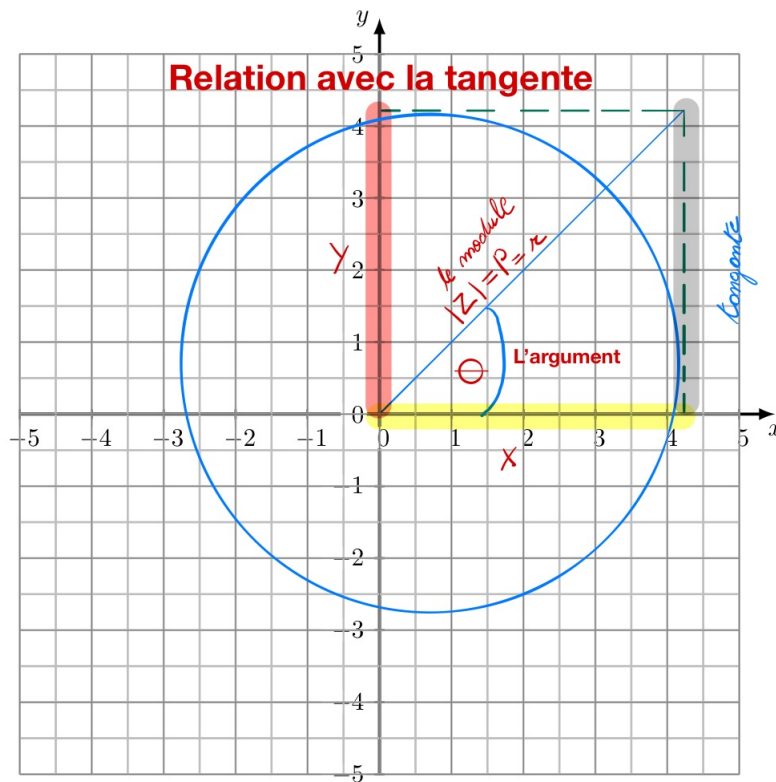
ρ est le module et θ est l'argument
 $Z = P(\cos(\theta) + \sin(\theta) * i)$ ou $Z = P(cis(\theta))$

2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration Géométriquement

Nous pouvons voir que θ est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangente au cercle de rayon X.



$$X = \rho * \cos(\theta) \quad Y = \rho * \sin(\theta)$$

Démonstration Algébriquement

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= \frac{\rho * \sin(\theta)}{\rho * \cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \text{tg}(\theta) \end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{aligned} \theta &= \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \\ \text{tg}(\theta) &= \frac{Y}{X} \end{aligned}$$

2.3 Conversion cartésienne/polaire - exponentielle

tout nombre complexes peut s'écrire sous la formes : $\rho * e^{i\theta}$

Ecriture cartésienne

$$1 + \sqrt{3}i = x + yi$$

Etape 1 : Trouver ρ (calcul du module)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3}$$

$$\rho = \sqrt{4} \Rightarrow 2^2$$

$$\rho = 2$$

Etape 2 : Trouver θ (calcul de l'argument)

$$\theta = \text{artg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{6}$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\pi}{6}$$

Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle

$$2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

2.4 Conversion exponentielle - polaire/cartésienne

Ecriture exponentielle

$$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$$

Simplification

$$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$$

$$e^1 + e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$e * cis\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$e * \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$e * \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i * \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$e * (0 + i * 1)$$

$$e * i$$

2.5 Nombres Complexes addition

$$(4 * cis(45^\circ)) + (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1 \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 \cos(45^\circ - 60^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{41 + 40 * 0,96592582628}$$

$$\rho = \sqrt{79,6370330512}$$

$$\rho = 8,923958373457376$$

Calcul de l'argument

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 \sin(\theta_1) + \rho_2 \sin(\theta_2)}{\rho_1 \cos(\theta_1) + \rho_2 \cos(\theta_2)}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{4 \sin(45^\circ) + 5 \sin(60^\circ)}{4 \cos(45^\circ) + 5 \cos(60^\circ)}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{1}{2}}\right)$$

$$\theta = \arctg(1.3434647741399612)$$

$$\theta = \arctg(53.3380661^\circ)$$

Solution

$$|Z| = 8,923 cis(53.338^\circ)$$

2.6 Nombres Complexes soustraction

$$(4 * cis(45^\circ)) - (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$$

Calcul du modules

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - \frac{\pi}{3})}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 40 * \cos(45^\circ - 60^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * 0,965925826}$$

$$\rho = \sqrt{79,637033052}$$

$$\rho = 8,923958374$$

Calcul de l'argument

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) - \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) - \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{4 * \sin(45^\circ) - 5 * \sin(\frac{\pi}{3})}{4 * \cos(45^\circ) - 5 * \cos(\frac{\pi}{3})}\right)$$

$$tg(\theta) = \frac{4 * \sin(45^\circ) - 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) - 5 * \cos(60^\circ)}$$

$$tg(\theta) = \frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{1}{2} - 5 * \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$tg(\theta) = \frac{2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}}$$

$$tg(\theta) = \frac{\frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2}}{\frac{4 - 5\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg(\theta) = \frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{4 - 5\sqrt{3}}$$

$$tg(\theta) = -\frac{(4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) * (4\sqrt{2} - 5\sqrt{3})}{59}$$

$$tg(\theta) = -\frac{(16\sqrt{2} + 20\sqrt{6} - 20\sqrt{3} - 75)}{59}$$

$$tg(\theta) = 0,644471$$

$$tg(\theta) = 36,93^\circ$$

Solution

$$|Z| = 8,923958374 * cis(36,93^\circ)$$

2.7 Nombres Complexes multiplication

$$(4 * cis(45^\circ)) * (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$$

$$|Z| = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i * (\sin(\theta_1 + \theta_2)))$$

$$|Z| = (\rho_1 \rho_2) * cis(\theta_1 + \theta_2)$$

Calcul du modules

$$\rho = \rho_1 \rho_2$$

$$\rho = 4 * 5$$

$$\rho = 20$$

Calcul de l'argument

$$\theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$\theta = 45^\circ + \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = 45^\circ + 60^\circ$$

$$\theta = 105^\circ$$

Solution

$$|Z| = 20 * cis(105^\circ)$$

2.8 Nombres Complexes division

$$\frac{(4 * cis(45^\circ))}{(5 * cis(\frac{\pi}{3}))}$$

$$|Z| = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) * cis(\theta_1 - \theta_2)$$

Calcul du modules

$$\rho = \frac{4}{5}$$

Calcul de l'argument

$$\theta = 45^\circ - \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = 45^\circ - 60^\circ$$

$$\theta = -15^\circ$$

Solution

$$|Z| = \frac{4}{5} * cis(-15^\circ)$$

Chapitre 3: Logique propositionnelle

Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux

- 1) Principe d'identité : $A=A$
- 2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose $\neg A$ et A
- 3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister A ou $\neg A$

3.1 Proposition

En logique propositionnelle les propositions, énoncés, phrases, ne peuvent qu'être vrai ou fausse

Exemple

$2+2 \Rightarrow$ Vrai ou Faux

Le mur est blanc \Rightarrow Vrai ou Faux

3.2 L'implication

Si j'ai une proposition A alors B

Exemple

Une paire de chaussure (implique que " \Rightarrow ") j'ai 2 chaussures

une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes

$A \Rightarrow B$: Faux

Si A est vrai alors B est vrai

Si B est vrai alors A n'est pas forcément vrai

3.3 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.

$A=B$: vrai

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A est vrai

3.4 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois

Tautologie : toujours vrai

prédicats : Pour tout il existe

3.5 Tableau priorités logique

Opérateur	Logique	priorités	Associativités
$<=>$	Égalité	1	gauche
$=>$	Implications	2	droite
\vee	OU	3	gauche
\wedge	ET	4	gauche
\neg	NON	5	gauche

3.6 Implication

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	T
\perp	\perp	T

3.7 Equivalence

P	Q	$P <=> Q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	\perp
\perp	\perp	T

3.8 Changement de forme

Commutativité

$$p \vee q = q \vee p$$
$$p \wedge q = q \wedge p$$

Associativités

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$
$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

Distributivités

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$
$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

De Morgans

$$a \vee b = \neg a \wedge \neg b$$
$$a \wedge b = \neg a \vee \neg b$$
$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$
$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$
$$\neg(p \wedge q) = (p \vee q)$$
$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive

$$(A \wedge B) \vee C$$
$$(A \vee B) \wedge C$$

Forme conjonctive

$$(A \vee B) \wedge C$$
$$(A \wedge B) \vee C$$

Transformation

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$
$$A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

Chapitre 4: Théorie naïve des ensembles

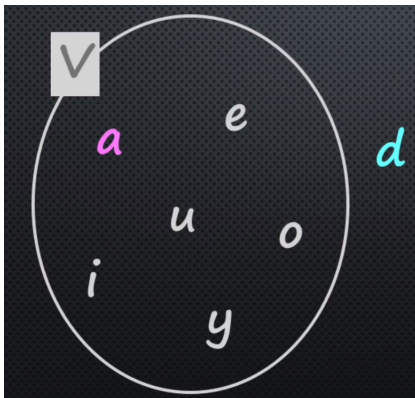
4.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appelés éléments de cet ensemble.
un objet particulier appartient (\in) ou n'appartient pas (\notin) à un ensemble donné.

Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles : $V = \{a, e, i, o, u, y\}$

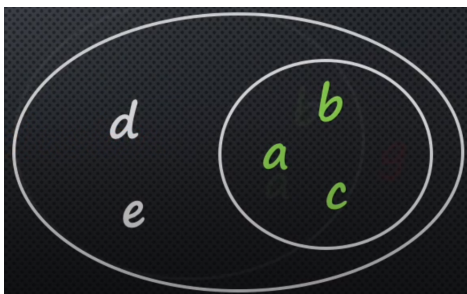
$a \in V$: a appartient à l'ensemble V

$d \notin V$: d n'appartient pas à l'ensemble V



4.2 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté $A \subset B$), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit ($X \subset A$) et que ($X \subset B$).



On peut dire que $\{a, b, c\} \subset \{a, b, d, e\}$

4.3 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A ($A \subset A$)
- b. Anti-Symétrique : ($A \subset B$) et ($B \subset A$) $\Rightarrow A = B$
- c. Transitivité : ($A \subset B$) et ($B \subset C$) $\Rightarrow A \subset C$

4.4 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté $A=B$), si tout les éléments de A appartient à B. Autrement dit ($X \in A$) et que ($X \in B$).

4.5 Opération d'union (\cup)

1) L'union de 2 ensembles

$$A = \{a, e\} \text{ et } B = \{b, c, d\}$$

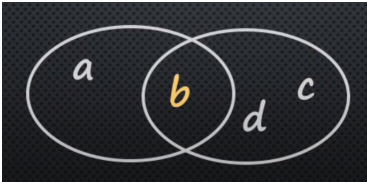
$$C = A \cup B = \{a, e, b, c, d\}$$

4.6 Opération d'intersection (\cap)

Intersection de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles, on appelle ($A \cap B$) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B.

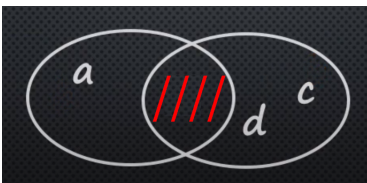
$$A = \{a, b\} \text{ et } B = \{b, c, d\}$$



$$C = A \cap B = \{b\}$$

4.7 Ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles. Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



$$C = A \cap B = \{\emptyset\}$$

4.8 Cardinalité

Soit A un ensemble, Si A possède exactement N éléments ($n \in \mathbb{N}$), A est un ensemble fini de cardinalité N.

Noté $|A| = n$

$$|1, 2, 3| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

4.9 Identité

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

4.10 Commutativité

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

4.11 Associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

4.12 Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4.13 De Morgans

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

Chapitre 5: Nombre Entiers Théorie

5.1 Modulo

Le modulo est le reste de la division entière de A par B.

Modulo exemple

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

$$(8+15) \bmod 3 = ((8 \bmod 3) + (15 \bmod 3)) \bmod 3$$

$$(23) \bmod 3 = (2+0) \bmod 3$$

$$2 = 2$$

5.2 Transformation

Il faudra tester les un après les autres les nombre premier par ordre croissant.

(2,3,5,7,11,13,17)

exemple de la décomposition

tout nombre se finissant par 0 est divisible par 2

$$17640/2$$

$$8820/2$$

$$4410/2$$

$$735/3 \Rightarrow 7+3+5 = 15 \text{ et } 15 \text{ est divisible par } 3$$

$$245/5 \Rightarrow 2+4+5 = 11 \text{ mais } 245 \text{ est divisible par } 5$$

$$49/7$$

$$7/7$$

$$1$$

$$17640 = 2*2*2*3*3*3*5*7*7 \text{ ou } 2^3 * 3^2 * 5 * 7^2$$

$$411600/2$$

$$205800/2$$

$$102900/2$$

$$51450/2$$

$$25725/3 \Rightarrow 2+5+7+2+5 = 21 \text{ et } 21 \text{ est divisible par } 3$$

$$8575/5 \Rightarrow 8+5+7+5 = 25 \text{ et } 25 \text{ est divisible par } 5$$

$$1715/5 \Rightarrow \text{est divisible par } 5$$

$$343/7 \Rightarrow 343=7^4 \text{ est divisible par } 7$$

$$49/7$$

$$7/7$$

$$1$$

$$411600 = 2*2*2*2*5*5*7*7*7 \text{ ou } 2^4 * 3 * 5^2 * 7^3$$

5.3 PGCD

il faut toujours prendre l'exposant le plus petit pour être sûr de pouvoir être divisible par les 2 nombres.

$$17640 = 2^3 * 3^2 * 5 * 7^2$$

$$411600 = 2^4 * 3 * 5^2 * 7^3$$

$$\text{PGCD} = 2^3 * 3 * 5 * 7^2 = \mathbf{5880}$$

5.4 PPCM

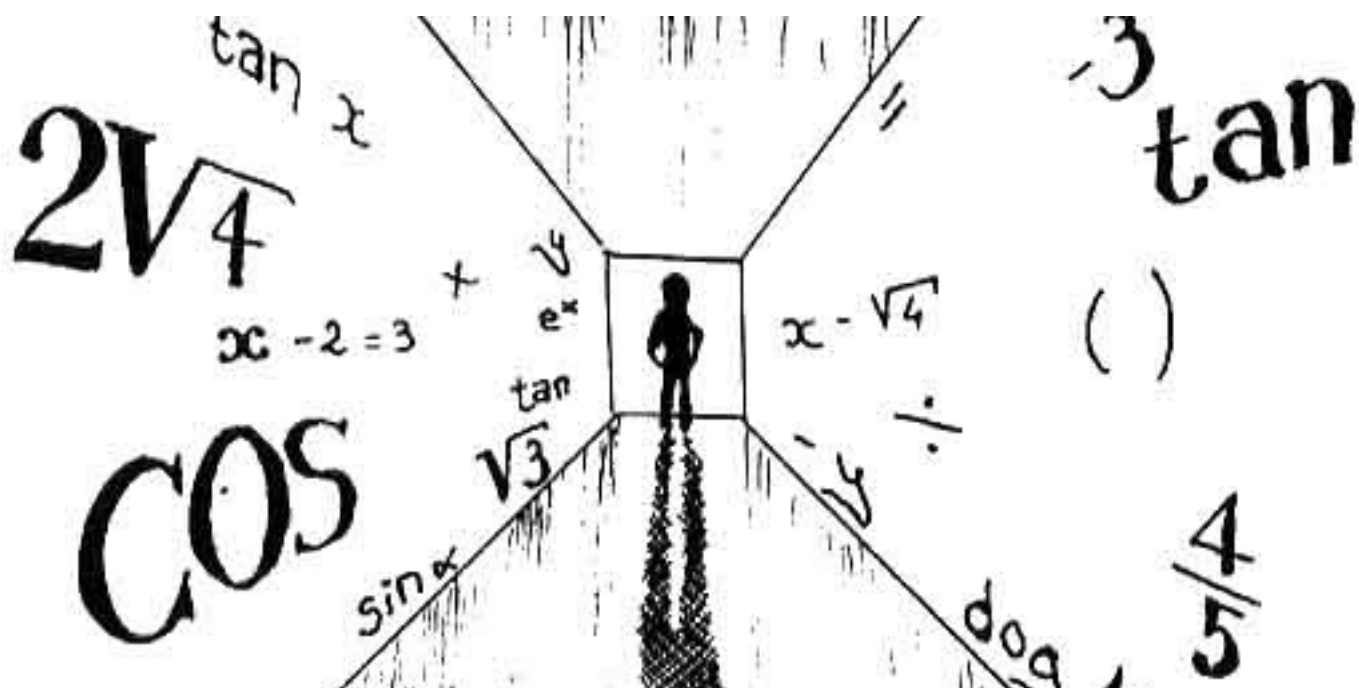
il faut toujours prendre l'exposant le plus grand pour être sûr qu'il soit un multiple des 2 nombres.

$$17640 = 2^3 * 3^2 * 5 * 7^2$$

$$411600 = 2^4 * 3 * 5^2 * 7^3$$

$$\text{PPCM} = 2^4 * 3^2 * 5^2 * 7^3 = \mathbf{1\ 234\ 800}$$

Mathématiques Exercices



Chapitre 6: Matrices Exercices

6.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- A) Calculer $B \cdot C$
- B) Calculer la trace de A
- C) Calculer la transposée de B
- D) Calculer $2,5 \cdot C$
- E) Calculer $B^t + C$
- F) Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)
- G) Calculer le déterminants de A
- H) Exercices prépartion examen (déterminant)
- I) Exercices prépartion examen (déterminant)
- J) Exercices prépartion examen (déterminant)
- K) Exercices prépartion examen (déterminant)

6.2 Résolution des exercices

A) Calculer B*C

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale. La trace de la matrice A = 0+2+0+2 = 4

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

C) Calculer la transposée de la matrice B La transposée de la matrice est d'invertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

D) Calculer 2,5*C

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : $B^t + C = 2*C = C+C$

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Déplacement 3D

R=10u H=300l où L=40cm + hauteur du casier

$$P = \left(\left(\frac{3}{5}\right) * R < R\right)$$

$$\theta = 0 \quad Z = R + \left(\frac{B}{100} * R\right) = R + \left(\frac{2}{100}\right) * R = 20cm$$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left(\frac{R}{2} + \frac{B}{100}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos(45) - \sin(45)) & 0 \\ \sin(45) - \cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{R}{2} + \frac{B}{100}\right) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2-(1*2) & 3-(2*2) & 0-(2*3) & 1-(2*0) \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2-2 & 3-4 & 0-6 & 1-0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3-(3*1) & 0-(3*2) & 1-(3*3) & 2-(3*0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3-3 & 0-6 & 1-9 & 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3-1*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L4 = L4-6*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L4-(-1)*L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

$$1*(-1)*(-4)*24=\mathbf{96}$$

$$S= \det(A) = \mathbf{96}$$

H) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 3*3

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices 2*2

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

Calcul du déterminant des sous matrices

$$8 * (\\ 1 * ((9,5 * 16) - (8 * -9,5)) \\ - 5 * ((9 * 16) - (4 * -9,5)) \\ + 6 * ((9 * 8) - (4 * 9,5)))$$

Simplification des calculs

$$8 * (1 * (152 - (-76)) \\ - 5 * (144 - (-38)) \\ + 6 * (72 - 38))$$

Mise en équation et résolution

$$8 * (228 - 5 * (182) + 6 * (34)) \\ 8 * (228 - 910 + 204) \\ 8 * (228 + 204 - 910) \\ 8 * (432 - 910) \\ 8 * (-478) = -3824$$

$$\det(A) = \mathbf{-3824}$$

I) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 1337 \\ b & 42 \\ c & 8086 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer la multiplication

$$\begin{pmatrix} a * 2 + 1337 * 4 & a * 5 + 1337 * 0 & a * 6 + 1337 * 4 \\ b * 2 + 42 * 4 & b * 5 + 42 * 0 & b * 6 + 42 * 4 \\ c * 2 + 8086 * 4 & c * 5 + 8086 * 0 & c * 6 + 8086 * 4 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 3 * 2 + 1337 * 4 & 3 * 5 & 3 * 6 + 1337 * 4 \\ 10 * 2 + 42 * 4 & 10 * 5 & 10 * 6 + 42 * 4 \\ 5 * 2 + 8086 * 4 & 5 * 5 & 5 * 6 + 8086 * 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5354 & 15 & 5366 \\ 188 & 50 & 228 \\ 32354 & 25 & 32374 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des matrices 2*2

$$+5354 * \begin{pmatrix} 50 & 228 \\ 25 & 32374 \end{pmatrix} - 15 * \begin{pmatrix} 188 & 228 \\ 32354 & 32374 \end{pmatrix} + 5366 * \begin{pmatrix} 188 & 50 \\ 32354 & 25 \end{pmatrix}$$

$$+5354 * ((50 * 32374) - (228 * 25))$$

$$-15 * ((188 * 32374) - (32354 * 228))$$

$$+5366 * ((188 * 25) - (32354 * 50))$$

$$+5354 * ((1618700) - (5700))$$

$$-15 * ((6086312) - (7376712))$$

$$+5366 * ((4700) - (1617700))$$

$$8\ 636\ 002\ 000 + 19\ 356\ 000 - 8\ 655\ 358\ 000$$

$$8\ 655\ 358\ 000 - 8\ 655\ 358\ 000 = \mathbf{0}$$

J) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -40 & 0 & -1 \\ -b & -80 & -1 & -2 \\ -c & -62 & -2 & 0 \\ -d & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Réalisation de l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a & 5-40 & 6 & 7-1 \\ -b & -80 & -1 & 8-2 \\ 9-c & 9,5-62 & -9,5-2 & b \\ 4-d & 8 & 16-1 & 32-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ -10 & -80 & -1 & 6 \\ 4 & -52,5 & -11,5 & 10 \\ 2 & 8 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Méthodes du pivot de Gauss

$$L2 = L2 - (-5) * L1 = (0 \ -255 \ -31 \ 36)$$

$$L3 = L3 - (-2) * L1 = (0 \ -122,5 \ 0,5 \ 22)$$

$$L4 = L4 - (-1) * L1 = (0 \ 43 \ 9 \ 24)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ 0 & -255 & 29 & 36 \\ 0 & -122,5 & 0,5 & 22 \\ 0 & 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des sous matrices 2*2

$$-2 * \begin{pmatrix} -255 & 29 & 36 \\ -122,5 & 0,5 & 22 \\ 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$-2 * (+(-255) * \begin{pmatrix} 0,5 & 22 \\ 9 & 24 \end{pmatrix} (-29) * \begin{pmatrix} 122,5 & 22 \\ 43 & 24 \end{pmatrix} (36) * \begin{pmatrix} 122,5 & 0,5 \\ 43 & 9 \end{pmatrix})$$

$$-2 * (-255 * (12-198) -29 * ((-2940) - (946)) +36 * ((-1102,5) - 21,5))$$

$$47430 + 112694 - 40464 = 119660$$

K) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 5 & 1 \\ c & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'addition

$$\begin{pmatrix} a+4 & 2+5 & 6 \\ b+4 & 5 & 1+4 \\ c+a & 6+b & 2+c \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Calcul du déterminant

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$+7 * \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} - 7 * \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$+7 * ((5*7) - (16*5))$$

$$-7 * ((14*7) - (8*5))$$

$$+6 * ((14*16) - (8*5))$$

$$+7 * (-45) - 15 * (58) + 6 * (184)$$

$$1104 - 406 - 315 = 383$$

Chapitre 7: Nombres Complexes Exercices

7.1 Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes

- a. $x^2+1=0$
- b. $3x^2+7=0$
- c. $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d. $-x^2-3x=3$
- e. $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f. $x^4 + 15x^2 = 16$

2) Trouver le conjugués de

- a. $-11-8i$
- b. $-0.3333i + 1$
- c. $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i$

3) Identifier \mathbb{R} \mathbb{I}

- a. 0
- b. $-6+i$
- c. i^2
- d. $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme $a+bi$

- a. $(4-8i)-(3+2i)$
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$
- f. $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

- g. $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$
- h. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$
- i. Nombre de modules 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
- j. Nombre de modules 3 et d'argument $\frac{-\pi}{8}$

5) Exprimer sous forme Polaire

- a. $3 - \sqrt{3}i$
- b. $-1 + i$

6) Exprimer sous forme cartésienne

- a. $4\cos(45) + \sin(45)i$
- b. $5\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

7) Trouver la solution de

- a. $4\text{cis}(45^\circ) + 5\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$
- b. $4\text{cis}(45^\circ) * 5\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

8) changer de formes

- a. $6 * \text{cis}(30^\circ)$ en forme exp
- b. $e^{1 + \frac{\pi}{2} * i}$
- c. $1 + \sqrt{3}i$ en forme exp

8) donner la valeur de

- a. module de $3e^{\frac{\pi}{4} * i}$
- b. argument de $3e^{\frac{\pi}{4} * i}$
- c. $\text{Re}(2e^{-\pi * i})$
- c. $I(2e^{-\pi * i})$

7.2 Résoudre les équations suivantes

A. $x^2 + 1 = 0$

$$x^2 + 1 - 1 = 0 - 1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$S = x = i$$

B. $3x^2 + 7 = 0$

$$3x^2 + 7 - 7 = 0 - 7$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$x^2 = \frac{-7}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3} * -1}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

$$S = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

C. $\frac{x^2}{2} - x = -2$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} = -\frac{2}{1}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$x^2 - 2x = -4$$

$$x^2 - 2x + 4 = (-4) + 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 4}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 * (-3)}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 * (-3)}}{2}$$

$$S = -1 \pm 1 \sqrt{-3}$$

$$\mathbf{D. -x^2-3x = 3}$$

$$-x^2-3x-3 = 3-3$$

$$-x^2-3x-3 = 0$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{(3)^2-4*1*3}}{2*1}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{9-12}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{3*(-1)}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{3*\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\frac{-3+ -\sqrt{3i}}{2} = -\frac{3}{2} + -\sqrt{\frac{3}{2}i}$$

$$\mathbf{E. x^3+7x^2+9x+63 = 0}$$

$$x^2+(x+7)+9(x+7)=0$$

$$(x+7)*(x^2+9)=0$$

Poser les CE pour que (x+7) ou (x²+9) vaut 0

Résoudre pour (x+7)=0

$$x=-7$$

$$(x^2+9)=0$$

$$x^2=-9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$$

$$x = 3\sqrt{-1}$$

$$x = 3i$$

S= X vaut -7 ;3i

$$\mathbf{F.} \ x^4 + 15x^2 = 16$$

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\text{Poser } t = x^2$$

$$t^2 + 15t - 16 = 0$$

$$t(t+16) - (t+16) = 0$$

$$(t+16)(t-1) = 0$$

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

- $t+16=0$

- $t-1=0$

$$(t+16) = 0$$

$$t = (-16)$$

$$\text{Restituer } t=x^2$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \sqrt{-16}$$

$$x = \sqrt{16 * (-1)}$$

$$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$$

$$x = 4\sqrt{-1}$$

$$x=4i$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$\text{Restituer } t=x^2$$

$$x^2=1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x=1$$

$$S = 1 ; 4i$$

7.3 Trouver le conjugués

- a. $-11-8i = -11+8i$
- b. $-0.3333i + 1 = 1+0.3333i$
- c. $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i = \cos(\omega t) - \sin(\omega t)i$

7.4 Identifier \mathbb{R} \mathbb{I}

- a. $0 : \mathbb{R}=0 \mathbb{I}=0$
- b. $-6+i : \mathbb{R}=(-6) \mathbb{I}=1$
- c. $i^2 : \mathbb{R}=(-1) \mathbb{I}=0$
- d. $\frac{1+i}{2} : \mathbb{R}=(\frac{1}{2}) \mathbb{I}=(\frac{1}{2})$

7.5 Exprimer sous forme $a+bi$

- a. $(4-8i)-(3+2i) : 1-10i$
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i} : \frac{23-11i}{26}$
- c. $(7-2i)(5+6i) : 47+32i$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3} : \frac{9-13i}{125}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)} : 2-\frac{1}{2}i$

f. $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

Etape 1 : Binomes conjugués

$$\frac{3+6i}{(3-4i)} * \frac{3+4i}{(3+4i)} = \frac{9+12i+18i+24i^2}{9-16i^2}$$

Etape 2 : Par définition $i^2 = (-1)$

$$\frac{9+30i+(24*(-1))}{9-16*(-1)} = \frac{9+30i+(-24)}{9-(-16)}$$

$$\frac{9+(-24)+30i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25}$$

Etape 3 : Factoriser

$$\frac{5*(-3+6i)}{5*5} = \frac{(-3+6i)}{5}$$

Etape 4 : Exprimer sous la forme $a+bi$

$$\frac{-3}{5} + \frac{6i}{5}$$

$$g. \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$$

Etape 1 : utilisation de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} * i\right) - \frac{3}{5} + \frac{6}{5} * i$$

Etape 2 : Mise au même dénominateur

$$\left(\frac{1}{25} + \frac{6}{25} * i\right) - \frac{9}{25} * (-1) - \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$$

$$\left(\frac{-23}{25} + \frac{6}{25} * i\right) + \frac{6}{5}i$$

$$\frac{-23}{25} + \frac{36}{25}i$$

$$h. \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

Etape 1 : Réduire au même dénominateur $(1-i)*(1+i)$

$$\frac{(1+i)*(2+5i)+(1-i)*(2-5i)}{(1-i)*(1+i)}$$

Etape 2 : Distributivités

$$\frac{2+2i+5i+5i^2+2-2i-5i+5i^2}{1-i+i-i^2}$$

$$\frac{4+10i^2}{1-i^2}$$

Etape 3 : Par définition $i^2 = -1$

$$\frac{4+(10*(-1))}{1-(1*(-1))}$$

$$\frac{4-10}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

i. Nombre de modules 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

$$|Z| = 2 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$X = \rho * \cos(\theta) \Rightarrow X = 2 * \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta) \Rightarrow Y = 2 * \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$X = 2 * \frac{1}{2} = 1$$

$$Y = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Exprimer sous la forme $a+bi$

$$S = 1 + \sqrt{\frac{6}{2}}i = 1 + \sqrt{3}i$$

j. Nombre de modules 3 et d'argument $\frac{-\pi}{8}$

DEMANDER EXPLICATION

7.6 Exprimer sous forme polaire

a. $3 - \sqrt{3}i$

Calcul de l'argument

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta = -30^\circ$$

$$\theta = -30^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 330^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{9 + 3}$$

$$\rho = \sqrt{12} \Rightarrow (12 = 4 * 3)$$

$$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$$

$$\rho = 2\sqrt{3}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \operatorname{cis}(\theta)$$

$$Z = 2\sqrt{3} * \operatorname{cis}(330)^\circ$$

b. $-1 + i$

Calcul de l'argument

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{1}\right)$$

$$\theta = -45^\circ$$

$$\theta = -45^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 315^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \operatorname{cis}(\theta)$$

$$Z = \sqrt{2} * \operatorname{cis}(315)^\circ$$

7.7 Exprimer sous forme cartésienne

a. $4\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) * i$

Formules

$$\rho = 4 * \cos(45^\circ)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$|Z| = a + bi$$

$$\frac{Y}{X} = \tan(45^\circ)$$

$$\frac{Y}{X} = 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$$

$$\rho = x^2 + y^2 = 16$$

Notes : $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$ donc $Y=X$

$$\rho = 2x^2 = 16 \text{ ou } 2y^2 = 16$$

$$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$$

$$\rho = x^2 = 8$$

$$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8} = (2 * 4)$$

$$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$$

$$\rho = x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}$$

$x=y$ donc $x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2}i$

Conclusion

$$S = 4 * \cos(45^\circ) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

b. $5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Formules

$$\rho = 5$$

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$|Z| = a + bi$$

$$\theta = tg(\frac{\pi}{3})$$

$$\theta = \sqrt{(3)}$$

$$x = \rho * cos(\sqrt{3}) => cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$$

$$y = \rho * sin(\sqrt{3}) => sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y = 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Conclusion

$$Z = a + bi$$

$$S = Z = \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

7.8 Trouver la solution

$$4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - 60^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * \cos(-15^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{41 + 40 * \cos(-15^\circ)}$$

$$\rho = \sqrt{81 * 0.965}$$

$$\rho = \sqrt{79.637}$$

$$\rho = 8.9239$$

Calcul de l'argument

$$\theta = \arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = \arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = \arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = \arctg(\frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{1}{2}})$$

$$\theta = \arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

$$b.4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2 (\cos(45^\circ + \theta_2) + i * \sin(45^\circ + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5 (\cos(45^\circ + 60^\circ) + i * \sin(45^\circ + 60^\circ))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

Calcul de l'argument

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

7.9 changement de forme (exp)

a. $6 * cis(30^\circ)$ en forme exp

$$\rho * cis(\theta) = \rho * e^{\theta i}$$

$$6cis(30^\circ) = 6e^{30^\circ i} = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$S = 6e^{\frac{\pi}{6}i}$$

b. $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

Mettre sous la forme $a + bi$

$$e^1 + e^{\frac{\pi}{2}i}$$

Calculer $e * cis(\frac{\pi}{2})$

$$e * (\cos(\frac{\pi}{2}) + i * \sin(\frac{\pi}{2}))$$

$$e * (0 + 1i)$$

$$S = e * i$$

c. $1 + \sqrt{3}i$ en forme exp

Etape 1 : Trouver ρ (calcul du module)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$$

$$\rho = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{2^2}$$

$$\rho = 2$$

Etape 2 : Trouver θ (calcul de l'argument)

$$tg(\theta) = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$tg(\theta) = (\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{6}$$

Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle

$$\rho * cis(\theta) = \rho * e^{i\theta} = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

7.10 Recherche valeurs (exponentielle)

a. module de $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$

formule générique $\rho * e^{\theta i}$ et le module est ρ

$$\rho = 3$$

b. argument de $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$

formule générique $\rho * e^{\theta i}$ et l'argument est θ

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

c. $\text{Re}(2e^{-\pi*i})$

Trouver la partie Réelle (x)

$$\text{Re}(2e^{-\pi*i}) = \text{Re}(-2\text{cis}(\pi))$$

$$\text{Re}(-2\text{cis}(\pi)) = \text{Re}(-2(\cos(\pi) + i * \sin(\pi)))$$

$$X = \rho * \cos(\theta)$$

$$X = -2 * \cos(\pi)$$

$$X = -2 * (-1) = 2$$

d. $I(2e^{-\pi*i})$

Trouver la partie Imaginaire (y)

$$I(2e^{-\pi*i}) = 2\text{cis}(-\pi)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta)$$

$$Y = 2 * \sin(-\pi)$$

$$Y = 2 * 0 = 0$$

Chapitre 8: Logique propositionnelle exercices

8.1 Enoncé Exercices

$$P_1 = (1+1=2) \quad P_2 = (1>5) \quad P_3 = (1+1=3)$$

1) Déterminer la véracité

- a. $P_1 \vee P_3$
- b. $P_2 \Rightarrow P_1$
- c. $P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$

2) Construire la Table de vérité de $P_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$

3) Prouver l'équivalence

- a. $P \vee P \Leftrightarrow P$
- b. $P \wedge P \Leftrightarrow P$
- c. $P \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

4) Déterminer la véracité

Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ le domaine des prédicats (liste exhaustive des prédicats). Vérifiez la véracité de

- a) $\exists x, (x + 3 = 5)$
- b) $\exists x, (x + 1 = 15)$
- c) $\forall x, (x < 4)$
- d) $\forall x, (x + 10 < 25)$
- e) $\forall x, ((x > 6) \Rightarrow (x < 2))$
- f) $\exists x, ((x^2 = 121) \wedge (x > 0))$

Soient $x, i \in A$, $P(x_i, x_j)$ (toutes valeurs possibles), vérifiez les tautologies

8.2 Déterminer la véracité

P_1	P_2	P_3	$P_1 \vee P_3$	$P_2 \Rightarrow P_1$	$(P_1 \vee P_3)$	$P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$
T	\perp	\perp	T	T	T	T

8.3 Construire la table de vérité

$$P_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$$

P_1	P_2	P_3	$P_2 \Rightarrow P_3$	$P_1 \Leftrightarrow (P_2 \Rightarrow P_3)$
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

8.4 Prouver l'équivalence

a. $P \vee P \Leftrightarrow P$

P	$P \vee P$	$P \Leftrightarrow P \vee P$
0	0	0
1	1	1

b. $P \wedge P \Leftrightarrow P$

P	$P \wedge P$	$P \Leftrightarrow P \wedge P$
0	0	0
1	1	1

c. $P \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

utilisation de la distributivités

$$P \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$$(p \vee r) \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

8.5 Déterminer la véracité

a) $\exists x, (x + 3 = 5)$

$$x+3=5$$

$$x=5-3$$

$$x=2$$

$x=2$, il existe bien un x appartenant à A

b) $\exists x, (x + 1 = 15)$

$$x+1=15$$

$$x=14$$

Il n'existe pas de x compris dans A , car 14 n'est pas compris dans A

c) $\forall x, (x < 4)$

$1 < 4$	T
$2 < 4$	T
$3 < 4$	T
$4 < 4$	\perp
$5 < 4$	\perp

$x=4$ ou $x=5$ n'est pas inférieure à 4, donc tout x n'est pas inférieure à 4

d) $\forall x, (x + 10 < 25)$

$(1 + 10 < 25)$	T
$(2 + 10 < 25)$	T
$(3 + 10 < 25)$	T
$(4 + 10 < 25)$	T
$(5 + 10 < 25)$	T

$$x+10 = 25$$

$$x = 15$$

Tout x appartenant à A , ou $x+10$ est toujours inférieure à 25.

De plus $x \geq 15$ n'appartient pas à A .

e) $\forall x, ((x > 6) \Rightarrow (x < 2))$

x	$A = (x > 6)$	$B = (x < 2)$	$A \Rightarrow B$
1	\perp	\perp	T
2	\perp	\perp	T
3	\perp	\perp	T
4	\perp	\perp	T
5	\perp	\perp	T

Quand quelques chose de chose de faux est impliqué, le résultat est toujours vrai.

$$\perp \Rightarrow T \Leftrightarrow T$$

$$\perp \Rightarrow \perp \Leftrightarrow T$$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	T
\perp	\perp	T

f) $\exists x, ((x^2 = 121) \wedge (x > 0))$

$$x^2 = 121$$

$$x = 11$$

x n'appartient pas à A, $x > \forall x$ appartenant à A

$\forall x$ appartenant à A > 0

$$\perp \wedge T = T$$

x	$A = (x^2 = 121)$	$B = (x > 0)$	$A \wedge B$
1	\perp	T	T
2	\perp	T	T
3	\perp	T	T
4	\perp	T	T
5	\perp	T	T

8.6 Théorie naïve des ensembles Exercices

8.6.1 Enoncé d'exercices

- a. Soit $A=\{\pi, 2, e\}$ et $B=\{-1, 5\}$ Calculer $|A \times B|$
- b. Soit $P \mid A \cup B \mid A = \{3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3\}$
- c. Soit $A=\{\pi, 2, e\}$ et $B=\{-1, 5\}$ Calculer $|A \cup B|$

8.6.2 Résolution

A) Calculer $A \times B$

$$A * B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

$$|P(A * B)| = 6$$

B) Soit $P \mid A \cup B \mid A = \{3,4,5\} \mid B = \{1,2,3\}$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Total des ensembles = 7

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}\}$$

Total des ensembles = 6

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5\}, \{4,5,1\}, \{5,1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,3\}, \{3,3,4\}\}$$

Total des ensembles = 6

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1\}, \{4,5,1,2\}, \{5,1,2,3\}, \{1,2,3,3\}, \{2,3,3,4\}, \{3,3,4,5\}\}$$

Total des ensembles = 6

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1,2\}, \{4,5,1,2,3\}, \{5,1,2,3,3\}, \{1,2,3,3,4\}, \{2,3,3,4,5\}, \{3,3,4,5,1\}\}$$

Total des ensembles = 6

6) Union des 2 ensembles a 6 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1,2,3\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

La somme de la cardinalité des sous ensembles = $7 + (4 \cdot 6) + 1 = 32$

$$P \mid A \cup B \mid = 32$$

$$S=32$$

c) Soit $A = \{\pi, 2, e\}$ et $B = \{-1, 5\}$ Calculer $|A \cup B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

$$\text{La somme de la cardinalité des sous ensembles} = 6 + (3 \cdot 5) + 1 = 22$$

$$P(A \cup B) = 22$$

$$S = 22$$

Chapitre 9: Nombre Entiers Exercices

9.1 Exercices Modulo

- 1. Prouver que si $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$, alors 1 divise a et a divise 0.
- 2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, prouvez que si $a|b$ et $b|a$ alors $a = b$ ou $a = -b$.
- 3. Déterminez le quotient et le reste de 111 divisé par 11 ; 123 par 7 ; 777 divisé par 21 ; 1434 divisé par 13 et 1025 divisé par 15.
- 4. Calculez $7 \bmod 5$; $789 \bmod 5672$; $77 \bmod 11$; $55 \bmod 7$; $72 \bmod 13$
- 5. Soient $a, b, n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 2$, $m \geq 2$ et $n|m$.
Prouvez que si $a \equiv_m b$ alors $a \equiv_n b$.
- 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez que si n est impair alors $n^2 \equiv_2 1$.
- 7. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$.
Prouvez que si $a \equiv_m b$ et $c \equiv_m d$ alors $(a + c) \equiv_m (b + d)$ et $(ac) \equiv_m (bd)$.
- 8. Dédurre de l'exercice précédent que :
 $(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$
 $(ab) \bmod m = ((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$
- 9. Prouvez que les deux égalités suivantes sont fausses :
 $(a + b) \bmod m = (a \bmod m) + (b \bmod m)$
 $(ab) \bmod m = (a \bmod m)(b \bmod m)$

9.2 Exercices PPCM-PGCD

- 1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. Prouvez que si $p|mn$ alors $p|m$ ou $p|n$. Ce résultat est-il toujours vrai si p n'est pas premier ?
- 2. Déterminez lesquels de ces nombres sont premiers : 21, 71, 111 et 143.
- 3. Décomposez les nombres suivants en facteurs premiers : 88, 124, 289 et 402.
- 4. Calculez $\text{pgcd}(15, 36)$, $\text{ppcm}(21, 49)$, $\text{pgcd}(121, 125)$ et $\text{ppcm}(31, 81)$.
- 5. Prouvez que le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6.
- 6. Écrire en notation binaire les nombres suivants : 7, 9, 11, 31 et 65.
- 7. Écrire en notation hexadécimale les nombres suivants : 13, 31 et 65.

9.3 Exercices changement de base

- 1. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au décimal : A0B1 et F 0A02.
- 2. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au binaire : ABBA et FACE .
- 3. Convertir les entiers suivants du binaire en hexadécimal : 11111011 et 10011101.
- 4. Prouvez qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses digits en décimal est divisible par 3.
- 5. Trouvez l'inverse de 5 modulo 11 ainsi que l'inverse de 3 modulo 7.
- 6. Prouvez que $2^{240} \bmod 11 = 1$

1. Prouver que si $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$, alors 1 divise a et a divise 0

Cela peut s'écrire simplement : soit a un naturel $> 0 \Rightarrow \frac{1}{a}$ et $\frac{a}{0}$

première partie

$$\frac{1}{a} \Leftrightarrow a = 1 * x \text{ (par définition)}$$

$$\frac{a}{0} \Leftrightarrow 0 = a * x \text{ (par définition)}$$

deuxième partie

il faut donc lorsque a est posé, trouver un x et un y qui vérifie les expressions suivantes :

Soit $a > 0$, on sait que a un naturel, prenons $x=a$
on a bien $a = 1 * a$, ce qui vérifie $\frac{1}{a}$

Soit $a > 0$, on sait que a un naturel, prenons $y=0$
on a bien $0 = a * 0$, ce qui vérifie $\frac{a}{0}$

2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, prouvez que si $a|b$ et $b|a$ alors $a=b$ ou $a=-b$

soit a, b un entier positif ou négatif, si $a|b$ et $b|a \Rightarrow a=b$ ou $a=-b$

première partie

$$\frac{a}{b} \Leftrightarrow b = a * x \text{ (par définition)}$$

$$\frac{b}{a} \Leftrightarrow a = b * y \text{ (par définition)}$$

deuxième partie

il faut donc lorsque a est posé, trouver un x et un y qui vérifie les expressions suivantes :

Soit $b \neq 0$, on sait que b un entier positif ou négatif, prenons $x=1$

$$b = a * 1$$

$$b=a \Leftrightarrow a=b$$

ce qui vérifie l'expressions $a=b$

Soit $a \neq 0$, on sait que a un entier positif ou négatif, prenons $y=-1$

$$a = b * -1$$

$$a=-b$$

ce qui vérifie l'expressions $a=-b$

3. Déterminez le quotient et le reste de 111 divisé par 11 ; 123 par 7 ; 777 divisé par 21 ; 1434 divisé par 13 et 1025 divisé par 15.

$$\frac{111}{11} \text{ Q}=10 \text{ R}=1$$

$$\frac{123}{16} \text{ Q}=17 \text{ R}=4$$

$$\frac{777}{21} \text{ Q}=37 \text{ R}=0$$

$$\frac{1437}{13} \text{ Q}=110 \text{ R}=7$$

$$\frac{1025}{15} \text{ Q}=68 \text{ R}=5$$

4. Calculez $7 \bmod 5$; $789 \bmod 5672$; $77 \bmod 11$; $55 \bmod 7$; $72 \bmod 13$

$$7 \bmod 5 = 2$$

$$789 \bmod 5672 = 789$$

$$77 \bmod 11 = 0$$

$$55 \bmod 7 = 6$$

$$72 \bmod 13 = 7$$

5. Soient $a, b, n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq 2$, $m \geq 2$ et $n \mid m$. Prouvez que si $a \equiv_m b$ alors $a \equiv_n b$

$$a = b + k*n \text{ (par définition)}$$

$$\frac{a=k*n+b}{c=l*n+b}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez que si n est impair alors $n^2 \equiv_2 1$

$$\text{impair} = 2x + 1 \text{ (par définition)}$$

$$n^2 = (2x+1)^2 = 4x^2 + 2*2x*1 + 1^2$$

$$4x^2 + 4x + 1$$

$$4x^2 \text{ est pair}$$

$$4x \text{ est pair}$$

$$1 \text{ est impair}$$

$$\text{PAIR} + \text{PAIR} + \text{IMPAIR} = \text{IMPAIR}$$

7. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$. Prouvez que si

$a \equiv_m b$ et $c \equiv_m d$ alors $(a + c) \equiv_m (b + d)$ et $(ac) \equiv_m (bd)$

$a = b + k \cdot m$ (par définition)

première expression

$$(a + c) \equiv_m (b + d)$$

$$(a + c) = (m \cdot k + b) + (m \cdot l + d)$$

$$m \cdot k + (b + d)$$

$$(b + d) + m \cdot k$$

on peut dire que $y = k$ et $x = (b + d)$, ce qui vérifie l'expression : $a = x + m \cdot y$

deuxième expression

$$(ac) \equiv_m (bd)$$

$$(ac) = (mk + b) \cdot (ml + d)$$

$$(bd) + m \cdot (mkl + ld + bl)$$

on peut dire que $y = (mkl + ld + bl)$ et $x = b \cdot d$, ce qui vérifie l'expression : $x + m \cdot y$

8. Déduire de l'exercice précédent que

$$(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$
$$(ab) \bmod m = ((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$$

$$a \equiv_m b \iff a = b + m \cdot k$$

$$(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$

première partie

$$(a + b) \bmod m$$
$$(2b) \bmod m$$

deuxième partie

$$((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$
$$((b + mk) \bmod m) (b \bmod m) \bmod m$$

$$(b + mk) \bmod m = b$$
$$(b + (b \bmod m)) \bmod m$$

$$(b \bmod m) = b$$
$$(b + b) \bmod m$$
$$(2b) \bmod m$$

Conclusion La première partie == la deuxième partie => OK

$$(ab) \bmod m = ((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$$

première partie

$$(ab) \bmod m$$
$$((mk + b) b) \bmod m$$
$$(mkb + b^2) \bmod m$$
$$b^2 \bmod m$$

deuxième partie

$$((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$$

$$(a \bmod m) = b$$
$$(b \bmod m) = b$$

$$(b \cdot b) \bmod m$$
$$(b^2) \bmod m$$

Conclusion La première partie == la deuxième partie => OK

9. Prouvez que les deux égalités suivantes sont fausses

$$(a + b) \bmod m = (a \bmod m) + (b \bmod m)$$

$$(ab) \bmod m = (a \bmod m)(b \bmod m)$$

$$(a + b) \bmod m = (a \bmod m) + (b \bmod m)$$

première partie

$$(a+b) \bmod m$$

$$(b+b) \bmod m$$

$$(2b) \bmod m$$

deuxième partie

$$((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$

$$((b + mk) \bmod m) (b \bmod m)) \bmod m$$

$$(b + mk) \bmod m = b$$

$$(b + (b \bmod m)) \bmod m$$

$$(b \bmod m) = b$$

$$(b + b) = 2b$$

Conclusion : la première parties est différentes de la deuxième ($2b \neq 2b \bmod m$)

$$(ab) \bmod m = (a \bmod m)(b \bmod m)$$

première partie

$$(ab) \bmod m$$

$$((mk + b) b) \bmod m$$

$$(mkb + b^2) \bmod m$$

$$b^2 \bmod m$$

deuxième partie

$$((a \bmod m)(b \bmod m)) \bmod m$$

$$(a \bmod m) = b$$

$$(b \bmod m) = b$$

$$(b*b) = b^2$$

Conclusion : la première parties est différentes de la deuxième ($b^2 \bmod m \neq b^2$)

1. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. Prouvez que si $p|mn$ alors $p|m$ ou $p|n$.
Ce résultat est-il toujours vrai si p n'est pas premier ?

2. Déterminez lesquels de ces nombres sont premiers : 21, 71, 111 et 143

- a) 21 est divisible par 3, 7, 21 \Rightarrow NON
- b) 71 est divisible par 71, 1 \Rightarrow OUI
- c) 111 est divisible par 3, 111, 1 \Rightarrow NON
- d) 143 est divisible par 143, 11, 1 \Rightarrow NON

3. Décomposez les nombres suivants en facteurs premiers : 88, 124, 289 et 402

- a) $88 = 2^3 \cdot 11$
- b) $124 = 2^2 \cdot 31$
- c) $289 = 17^2$
- d) $402 = 2 \cdot 3 \cdot 67$

4. Calculez $\text{pgcd}(15, 36)$, $\text{ppcm}(21, 49)$, $\text{pgcd}(121, 125)$ et $\text{ppcm}(31, 81)$

A) $\text{pgcd}(15, 36)$
 $15 = 3 \cdot 5$ $36 = 2^2 \cdot 3^2$
 $\text{pgcd}(15, 36) = 3$

b) $\text{ppcm}(21, 49)$
 $21 = 3 \cdot 7$ $49 = 7^2$
 $\text{ppcm}(21, 49) = 147$

c) $\text{pgcd}(121, 125)$
 $121 = 11^2$ $125 = 5^3$
 $\text{pgcd}(121, 125) = 1$

d) $\text{ppcm}(31, 81)$
 $31 = 31$ $81 = 3^4$
 $\text{ppcm}(31, 81) = 31 \cdot 81 = 2511$

5. Prouvez que le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6.

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\frac{6n^3 + 18n^2 + 12n}{6}$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

il faut qu'il est la forme $6 \cdot n$ ou $2 \cdot 3 \cdot n$

Divisible par 2

Si n est pair alors n^3 est pair sinon il est impair.

$2n^2$ est pair, ce qui donne un nombre pair

Divisible par 3

Montrer que $n^3 + 3n^2 + 2n$ est divisible par 3 :

Soit $\frac{n}{3}$ Sinon il manque 1 ou 2 unités.

Donc $n+1$ ou $n+2$ sera divisible par 3 d'où leur produit est divisible par 3.

6. Écrire en notation binaire les nombres suivants : 7, 9, 11, 31 et 65

$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0111$$

$$9 = 2^3 + 2^0 = 1001$$

$$11 = 2^6 + 2^0 = 1001$$

$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0001\ 1111$$

$$65 = 2^6 + 2^0 = 0010\ 0001$$

7. Écrire en notation hexadécimale les nombres suivants : 13, 31 et 65

$$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1101 = D$$

$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0001\ 1111 = 1F$$

$$65 = 2^6 + 2^0 = 0010\ 0001 = 41$$

1. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au décimal : A0B1 et F0A02

$$A0B1 = 10\ 0\ 11\ 1$$

$$F0A02 = 15\ 0\ 10\ 0\ 2$$

2. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au binaire : ABBA et FACE

$$ABBA = 1010\ 1011\ 1011\ 1010$$

$$FACE = 1111\ 1010\ 1100\ 1110$$

3. Convertir les entiers suivants du binaire en hexadécimal : 11111011 et 10011101

$$1111\ 1011 = FB$$

$$1001\ 1101 = 9D$$

4. Prouvez qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses digits en décimal est divisible par 3

5. Trouvez l'inverse de 5 modulo 11 ainsi que l'inverse de 3 modulo 7

$$5 \text{ modulo } 11 = 2 \text{ et } 11-2 = 9$$

$$3 \text{ modulo } 7 = 2 \text{ et } 7-2 = 5$$

6. Prouvez que $2^{240} \bmod 11 = 1$

$$2^{240} = 2^{2*2*2*2*15}$$

$$((((b^2)^2)^2) \bmod 11)^{15}$$

$$b^{15} \bmod 11$$

Prenons $b=9$

$$9^{15} \bmod 11$$

$$(9 * (9^{15})) \bmod 11$$

$$(9 * ((9^2)^{14})) \bmod 11$$

$$(9 * ((9^2 \bmod 11)^7) \bmod 11) \bmod 11$$

$$9^2 \bmod 11 = 4$$

$$(9 * (4 * (4^6 \bmod 11) \bmod 11) \bmod 11)$$

$$(9 * (4 * ((4^2 \bmod 11)^3 \bmod 11) \bmod 11) \bmod 11)$$

$$4^2 \bmod 11 = 5$$

$$(9 * (4 * (5^3 \bmod 11) \bmod 11) \bmod 11)$$

$$(9 * (4 * (5^3 \bmod 11) \bmod 11) \bmod 11)$$

$$5^3 \bmod 11 = 4$$

$$(9 * (4 * 4 \bmod 11) \bmod 11)$$

$$(9 * (16 \bmod 11) \bmod 11)$$

$$(9 * 5) \bmod 11$$

$$(45) \bmod 11 = 1$$

9.4 Relation Binaire Exercices

- a. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$
- b. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$
- c. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible a}\}$

9.4.1 Exercices Examen

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symétrique
- ☐ e. R est symétrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI

b multiple de b = VRAI

R est réflexif

Test de la symétrie \Rightarrow Exemple (a=2 ou b=6)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = FAUX

R n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie \Rightarrow (a=b) Exemple (a=3 ou b=3)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = VRAI

R est anti-symétrique

Test de Transitivité \Rightarrow (a=b) Exemple (a=3 ou b=9 Z=18)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?

a est dans la table de 18 ? \Rightarrow VRAI

R est transitif

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symétrique
- ☐ e. R est symétrique

Test de la réflexivité

A est plus grand que A \Rightarrow FAUX

B est plus grand que B \Rightarrow FAUX

il faut que A et B soit vrai

Test de la symétrie

A est plus grand que B \Rightarrow VRAI

B est plus grand que A \Rightarrow FAUX

il faut que A et B soit vrai

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symétrique pas car $A=1$ $B=2$

R est anti-symétrique $a \text{ est } > b$ car $a \neq b$

Test de la transitivité

Si A est $>$ B et que B est $>$ Z est-ce que $a > Z$?

R est transitif car A est $>$ Z

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible } a\}$$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif

□ d. R est anti-symétrique

□ e. R est symétrique

Test de la réflexivité

A est divisible par A \Rightarrow VRAI

B est divisible par B \Rightarrow VRAI

R est réflexif

Test de la symétrie

A est divisible par B \Rightarrow VRAI

B est divisible par A \Rightarrow FAUX

il faut que A et B soit vrai

R n'est pas symétrique

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symétrique pas car A=1 B=2

R est anti-symétrique $a > b$ car $a \neq b$

Test de la transitivité

Si A est divisible par B et que B est divisible par Z est-ce que a divisible par Z?

R est transitif car A est divisible par Z

Chapitre 10: Exemple d'examen

10.1 Q1 : Calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A) Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

B) Swap des zeros

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

C) Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

D) Calcul des déterminants 2*2

$$\begin{aligned} &8*(\\ &1*((9,5*16)-(8*-9,5)) \\ &-5*((9*16)-(4*-9,5)) \\ &+6*((9*8)-(4*9,5)) \\ &) \end{aligned}$$

E) Simplification des calculs

$$\begin{aligned} &8*(\\ &1*(152 - (-76)) \\ &-5*(144 - (-38)) \\ &+6*(72 - 38) \\ &) \end{aligned}$$

F) Mise en équation et résolution

$$\begin{aligned} &8*(228 -5*(182) + 6*(34)) \\ &8*(228 - 910 + 204) \\ &8*(228 + 204 - 910) \\ &8*(432 - 910) \\ &8*(-478) = -3824 \\ &\det(A) = -3824 \end{aligned}$$

10.2 Q2 : Calcul nombre complexe

Que doit valoir a pour que l'argument soit 135° quand $b=-5$, $c=4$ et $d=11$

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

A) Utilisation de la formule division cartésienne

$$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} *i$$

B) Remplacement dans la formule

$$\frac{(a_1*4)-((-5)*(-11))}{4^2+(-11)^2} + \frac{((-5)*4)-(a_1*(-11))}{4^2+(-11)^2} *i$$

$$\frac{4a_1-55}{16+121} + \frac{((-20)-((-11)a_1)}{16+121} *i$$

$$\frac{4a_1-55}{137} + \frac{((-20)-(-11a_1)}{137} *i$$

$$\frac{4a_1-55}{137} + \frac{11a_1-20}{137} *i$$

C) On calcule a par rapport à θ

Notes : Nous avons découvert la valeur de X et de Y :

$$\theta = \arctg \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

Remplacement de X et Y

$$\theta = \arctg\left(\frac{55+(11a-20)i}{\frac{4a-55}{137}}\right)$$

Notes : Diviser une fraction par une fraction c'est égale à la multiplier par l'inverse

$$\text{Ex : } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

$$\theta = \arctg\left(\left(\frac{55+(11a-20)}{137}\right) * \left(\frac{137}{4a-55}\right)\right)$$

$$\text{tg}(\theta) = \left(\frac{55+(11a-20)}{137}\right) * \left(\frac{137}{4a-55}\right)$$

$$\text{tg}(\theta) = \left(\frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55}\right)$$

$$tg(135) = \left(\frac{55 + (11a - 20) * 137}{137 * 4a - 55} \right)$$

$$-1 = \left(\frac{-2685 + 1507a}{548a - 55} \right)$$

D) Déterminer l'intervale définis

$$-1 = \left(\frac{-2685 + 1507a}{548a - 55} \right)$$

$$a \neq \frac{55}{548}$$

E) Simplifier l'équation

$$(-1) * (548a - 55) = (548a - 55) * \left(\frac{-2685 + 1507a}{548a - 55} \right)$$

$$-(548a - 55) = -2685 + 1507a$$

Notes : lorsqu'il y a un un - devant l'expression entre parenthèse, changer le signe de chaque terme de l'expression.

$$-548a + 55 = -2685 + 1507a$$

$$-548a + 55 - 1507a = -2685 + 1507a - 1507a$$

$$-548a - 1507a + 55 - 55 = -2685 + 1507a - 55$$

$$-548a - 1507a = -2685 - 55$$

$$-2055a = -2740$$

$$-\frac{2055a}{2055} = -\frac{2740}{2055}$$

$$\frac{2055a}{2055} = \frac{2740}{2055}$$

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

F) Vérifier si la solution est dans l'intervale définis

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

G) Solution

$$S = \frac{4}{3}$$

H) Restituer $a = \frac{4}{3}$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$X = -0,362$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

$$Y = 0,362$$

$$tg(\theta) = -\frac{0,362}{0,362}$$

$$tg(\theta) = -1$$

H) Démontrer que $tg(\theta) = -1$

$$tg(\theta) = -1$$

$$tg(135) = -1$$

$$135^\circ - 180^\circ = -45^\circ$$

$$tg(-45) = -1$$

I) Conclusion :

$$\operatorname{tg}(-45) = -1 \text{ et } -\frac{0,362}{0,362} = -1$$

$$\text{et } a = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{4}{3}$$

10.3 Q3 : Transformer en forme conjonctive

$$(A \wedge \neg B) \vee (C \implies a)$$

A) Simplifier l'implications

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg C \vee (A \wedge C))$$

B) Utilisation du théorème De Morgan

$$a + b = \neg a * \neg b$$

$$\neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg (\neg C \vee (A \wedge C))$$

C) Simplification des parenthèse

$$(\neg A \wedge B) \wedge (C \vee (\neg A \wedge \neg C))$$

$$S = (\text{NEG}(A) \text{ ET } B) \text{ ET } (C \text{ OU } (\text{NEG}(A) \text{ ET } \text{NEG}(C)))$$

10.4 Q4 : Théorie des ensembles naïfs

A) Soit $A = \{\pi, 2, e\}$ et $B = \{-1, 5\}$ Calculer $|A \times B|$

1) Calculer $A \times B$

$$A * B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = $6 + (3 \cdot 5) + 1 = 22$

$$P | A \cup B | = 22$$

$$S=22$$

10.5 Q5 : Induction forte/faibles

Notez que l'induction faible est égale à l'induction forte. Néanmoins il est plus naturel de démontrer les propriétés soit avec de l'induction simple, soit avec la forte comme réalisé durant le cours. Il vous est demandé de choisir entre les deux fonction de l'énoncé.

Soit n un nombre naturel, que faut-il pour démontrer que 10^{n-1} est un multiple de 9 ?

Veuillez choisir au moins une réponse : (Cochez ce qui est vrai)

- ☐ On peut utiliser l'induction faible ou forte
- ☐ Il faut au moins 3 cas de base
- ☐ il faut utiliser l'induction forte
- ☐ il faut au moins un unique cas de base
- ☐ il faut au moins 2 cas de base

9,18,27,36,45,..., $n = 10^{n-1}$

Cas de base $n=1$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 10^{1-1}$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 10^0$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 1$

[X] On peut utiliser l'induction faible ou forte

[X] Il faut au moins 3 cas de bases

10.6 Q6 : Nombre entiers

Soient a, b et m des nombre naturels. Est-ce que $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

Sélectionnez une réponse :

☐ Vrai

☐ Faux

Choisir un pair(a) et un impair(b) et tester au moins 2 fois

a) Développement de l'égalité

$$(a+b) \bmod m = ((a+b) \bmod m) \bmod m$$

$$(8+10) \bmod 2 = ((8 \bmod 2) + (10 \bmod 2)) \bmod 2$$

$$(18) \bmod 2 = (0+0) \bmod 2$$

$$0 = (0) \bmod 2$$

$$0 = 0$$

b) Développement de l'égalité

$$(a+b) \bmod m = ((a+b) \bmod m) \bmod m$$

$$(8+15) \bmod 4 = ((8 \bmod 4) + (15 \bmod 4)) \bmod 4$$

$$(8+15) \bmod 4 = ((0) + (15-12) \bmod 4)$$

$$(23) \bmod 4 = (3) \bmod 4$$

$$23 - (4*5) = 3$$

$$3 = 3$$

Conclusion c'est [X] Vrai

10.7 Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau

Listing 10.1 – Python algorithme

```
def Apply(array, value, start=None, res=0):  
    if(start is None):  
        start = len(array)-1  
  
    if(start < 0):  
        return res  
  
    if(array[start] == value):  
        return Apply(array, value, start-1, res+1)  
  
    return Apply(array, value, start-1, res)
```

cochez ce qui est vrai concernant la complexités (au moins une réponse)

- ☐ a. $\theta(1)$
- ☐ b. $o(n^2)$
- ☐ c. $O(\log(n))$
- ☐ d. $o(\log(n))$
- ☐ e. $\theta(\log(n))$
- ☐ f. $o(n)$
- ☐ g. $o(1)$
- ☐ h. $O(1)$
- ☐ i. $o(n\log(n))$
- ☐ j. $O(n\log(n))$
- ☐ k. $\theta(n)$
- ☐ l. $\theta(n^2)$
- ☐ m. $O(n^2)$
- ☐ n. $O(n)$
- ☐ o. $\theta(n\log(n))$

g. $o(1) \Rightarrow$ Meilleur des cas

c. $O(n) \Rightarrow$ Cas Moyen

e. $\theta(n) \Rightarrow$ Pire des cas

10.8 Q8 : Ensemble Naturels

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$R=(a,b)$, $a \in N$, $b \in N$ et a est un multiple de b

cochez ce qui est vrai concernant R . (au moins une réponse)

- ☐ R est transitif
- ☐ Aucune réponse
- ☐ R est réflexif
- ☐ R est anti-symétrique
- ☐ R est symétrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI

b multiple de b = VRAI

R est réflexif

Test de la symétrie \Rightarrow Exemple ($a=2$ ou $b=6$)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = FAUX

R n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie \Rightarrow ($a=b$) Exemple ($a=3$ ou $b=3$)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = VRAI

R est anti-symétrique

Test de Transitivité \Rightarrow ($a=b$) Exemple ($a=3$ ou $b=9$ $Z=18$)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?

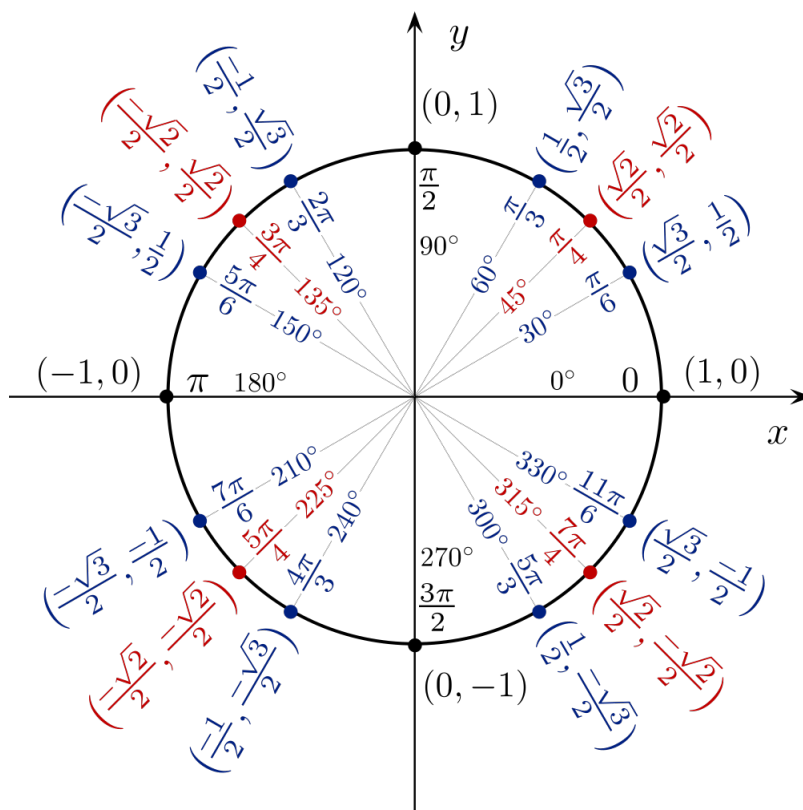
a est dans la table de 18? \Rightarrow VRAI

R est transitif

Chapitre 11: Formules

11.1 Tableau Trigonométrique

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\neq
cotan	\neq	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



11.2 NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne

$$X = \rho * \cos(\theta)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta)$$

$$Z = x + yi$$

$$\text{Notes : } cis = \cos(\theta) * \sin(\theta) * i$$

11.3 Addition de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) + (a+di)$$

$$(a_1+a_2) + (b_1+b_2) * i$$

11.4 Soustraction de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) - (a+di)$$

$$(a_1-a_2) + (b_1-b_2) * i$$

11.5 Multilication de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) * (a+di)$$

$$(a_1*a_2) - (b_1*b_2) + ((a_1 * b_2) + (b_1*a_2)) * i$$

11.6 Division de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } \frac{(a+bi)}{(a+di)}$$

$$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} * i$$

11.7 NB Complex : Forme cartésienne vers polaire

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \frac{y}{x} &= \operatorname{tg}(\theta)\end{aligned}$$

11.8 Addition de nombres complex (Polaire)

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

11.9 Soustraction de nombres complex (Polaire)

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) - 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

11.10 Multilication de nombres complex (Polaire)

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45^\circ) * 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$c1 * c2 = \rho_1 * \rho_2 * (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i * \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

11.11 Division de nombres complex (Polaire)

$$\text{Exemple : } \frac{(a+bi)}{(c+di)}$$

$$\frac{c1}{c2} = \frac{r1}{r2} * \cos(\theta_1 + \theta_2) + i * \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Notes : Selon l'énoncé et les préférences de chacun il est conseillé de transformer en forme polaire ou cartésien, afin de pouvoir appliquer les formules ci-dessus.

11.12 Logique propositionnelle

De Morgans :

$$a \vee b = \neg a * \neg b$$

$$a * b = \neg a + \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p \vee \neg q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \text{ ET } B) \text{ OU } C$$

Forme conjonctive

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \text{ OU } B) \text{ ET } C$$

Transformation :

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

11.13 Algorithmique symbole

o = meilleur des cas

O = Pire des cas

θ = Cas moyen

Θ = Meilleur des cas, cas moyen, pire des cas