T-PMTH-402 – Math. appliquées à l'info.
Chapitre 8 - Relations binaires

Jean-Sébastien Lerat
Jean-Sebastien.Lerat@heh.be

HEH.be Sciences et technologies

Haute École en Hainaut

2019-2020

Plan

Relation binaire

Relation binaire

Soient A, B deux ensembles. Une **relation binaire** entre A et B est un sous-ensemble de $A \times B$.

Notation : $R \subseteq A \times B$, R est une relation, a est en relation avec b.

$$(a, b) \in R \rightsquigarrow aRb$$

$$(a, b) \notin R \rightsquigarrow a\not{R}b$$

Exemple

$A = \{$Étudiants de bloc 3 en bachelier$\}$
$B = \{$Cours à options$\}$
$(a, b) \in R$ si et seulement si l'étudiant a choisit le cours b

Plan

Relation réflexive

Relation réflexive

Une relation R sur A est dite **réflexive** si et seulement si $\forall a \in A, aRa$.

Exemple

Si $A = \mathbb{N}$, $R = \{(n, n+1) | n \in A, n+1 \in A\}$
$R_= = \{(x, y) \in A^2 | x = y\}$
$R_\geq = \{(x, y) \in A^2 | x \geq y\}$

$=$ est réflexive $\forall a \in A, a = a$
$\geq$ est réflexive $\forall a \in A, a \geq a$, en particulier $a = a$

Contre-exemple

$R_< = \{(x, y) \in A^2 | x < y\}$

Relation symétrique

Relation symétrique

Une relation R sur A est dite **symétrique** si et seulement si $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$.

Exemple

Si $A = \mathbb{N}$, $R = \{(n, n+1) | n \in A, n+1 \in A\}$
$R_= = \{(x, y) \in A^2 | x = y\}$
$R_=$ est symétrique car $\forall a, b \in A, ((a = b) \to (b = a))$

Contre-exemple

$$\neg(\forall a, b \in A \quad aRb \Rightarrow bRa) \Leftrightarrow \neg\left[\forall a, b \in A \quad ((\neg aRb) \vee bRa)\right]$$
$$\Leftrightarrow \exists a, b \in A \quad aRb \wedge (\neg bRa)$$
$$\Leftrightarrow \exists a, b \in A \quad aRb \wedge b \not R a$$

Avec $R_\geq = \{(x, y) \in A^2 | x > y\}$
Si $a = 1, b = 2$ alors $1 \geq 2, 2 \not\geq 1$

Propriété

Soit A un ensemble, R une relation binaire sur A. $\underbrace{\text{R est symétrique}}_{A}$

$\underbrace{\text{si et seulement si}}_{\Leftrightarrow}$ $\underbrace{\forall a, b \qquad aRb \Leftrightarrow bRa}_{B}$

$A \Rightarrow B$ $(x \Rightarrow y) \Longrightarrow (x \Rightarrow y \wedge y \Rightarrow x)$

$$x = aRb, y = bRa$$

$B \Rightarrow A$ $\forall a \forall b, aRb \Rightarrow bRa$ par définition

$\forall b \forall a, bRa \Rightarrow aRb$

$\forall a \forall b, bRa \Rightarrow aRb$

Relation anti-symétrique

Relation anti-symétrique

Une relation R sur A est dite **anti-symétrique** si et seulement si $\forall a, b \in A, ((aRb) \wedge (bRa)) \Rightarrow a = b$.

Exemple

Si $A = \mathbb{N}$ $R_= = \{(a, b) \in A^2 | a = b\}$
$R_\geq = \{(a, b) \in A^2 | a \geq b\}$
$R_<$ est anti-symétrique car $\nexists a, b \in \mathbb{N}$ tel que $a < b$ et $b < a$
(idée : $\perp \Rightarrow \ldots \iff \top$)

Contre-exemple

$R_\neq = \{(a, b) \in A^2 | a \neq b\}$
car $\exists a = 1 \in A, \exists b = 2 \in A, aRb = (1, 2) \in R, bRa = (2, 1) \in R$ mais $1 \neq 2$

Relation transitive

Relation transitive

Une relation R sur A est dite **transitive** si et seulement si $\forall a, b, c \in A, (aRb) \wedge (bRc) \Rightarrow aRc$.

Exemple

$A = \mathbb{N}$ $R_{=}$, $R_{<}$, $R_{>}$, $R_{\geq}$, $R_{\neq}$

Contre-exemple

$R_{\neq} = \{(a, b) \in A^2 | a \neq b\}$
$\exists a = 1 \in A, b = 2 \in A, c = 1 \in A, aRb = (1, 2) \in R, bRc = (2, 1) \in R.$
On vérifie donc bien la condition $aRb \wedge bRa$ mais on a pas $aRc = (1, 1) \in R$
On a une situation de la forme $\top \Rightarrow \bot$

Plan

Opérateurs ensemblistes

Toute relation R sur deux ensembles A et B, est un sous-ensemble.

$\Rightarrow$ R est un ensemble

Les opérateurs $\cup$, $\cap$ et le complémentaire sont définis.

Inverse

Inverse

Soit R une relation sur A. La relation **inverse** de R, notée R^{-1} est définie par $R^{-1} = \{(b, a) \in A^2, (a, b) \in R\}$

Propriété : R est symétrique $\iff R = R^{-1}$

Composition

Composition

Soient A,B et C trois ensembles $R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$.

$$R_2 \circ R_1 \{(a,c) | \exists b \in B \qquad aR_1 b \wedge bR_2 c\}$$

Exemple

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{x,y,z\} \qquad C = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

$R_1 = \{(1,x),(2,y),(3,z)\}$
$R_2 = \{(x,\alpha),(x,\beta),(x,\gamma),(y,\gamma),(z,\beta)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,\alpha),(1,\beta),(1,\gamma),(2,\gamma),(3,\beta)\}$

Notation : $R^n = \underbrace{R \circ \ldots \circ R}_{n}$

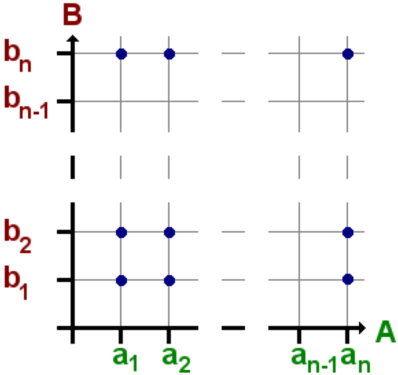
Propriété : R est transitive $\iff R^n \subseteq R, n \geq 1$

Plan

Représentation en matrice

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$
$B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

$$R \subseteq A \times B$$



Représentation en matrice

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$
$B = \{b_1, \dots, b_n\}$

$$R \subseteq A \times B$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$$

La matrice M_R $(n \times m)$ à cœfficients dans $\{0, 1\}$ est la représentation matricielle de la relation R.

$$M_R(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représentation en graphe

La relation $R \subseteq A \times A$ est représentable par un graphe G où les sommets correspondent aux éléments de A et les arrêtes correspondent aux éléments de R.

Réflexivité il y a un cycle sur chaque sommet.

Symétrie si $\exists$ une flèche de a à b, alors il existe une flèche de b à a.

Plan

Exercices – 1/2

1. Soient $B = \{0, 1, 2, 3\}$ et $A = B \cup \{4\}$. Écrivez explicitement R
   a) $R = \{(a, b), a \in A, b \in B | a = b\}$
   b) $R = \{(a, b), a \in A, b \in B | a < b\}$
   c) $R = \{(a, b), a \in A, b \in B | pgcd(a, b) = 1\}$
   d) $R = \{(a, b), a \in A, b \in B | ppcm(a, b) = 2\}$
   e) $R = \{(a, b), a \in A, b \in B | a \text{ divise } b\}$

2. Déterminez si les relations suivantes, définies sur un ensemble de personnes, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives :
   a) $(a, b) \in R_1$ si et seulement si a est strictement plus grand que b
   b) $(a, b) \in R_2$ si et seulement si a et b sont nés le même jour.
   c) $(a, b) \in R_3$ si et seulement si a a le même prénom que b
   d) $(a, b) \in R_4$ si et seulement si a et b ont un grand parent commun.

Solutions – 1/2

1. Soient $B = \{0, 1, 2, 3\}$ et $A = B \cup \{4\}$. Écrivez explicitement R
   a) $R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
   b) $R = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$
   c) $R = \{(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 3)\}$
   d) $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
   e) $R = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 3), (4, 0)\}$

2. Déterminez si les relations suivantes, définies sur un ensemble de personnes, sont réflexives, symétriques, antisymétriques et/ou transitives :
   a) non réflexive, non symétrique, anti-symétrique, transitive
   b) réflexive, symétrique, non anti-symétrique, transitive
   c) réflexive, symétrique, non anti-symétrique, transitive
   d) réflexive, symétrique, non anti-symétrique, non transitive

Exercices – 2/2

3. Déterminez si les relations suivantes, définies sur $\mathbb{Z}$, sont réflexives, symétriques, anti-symétriques et/ou transitives :
   a) $(a, b) \in R_1$ si et seulement si $a = b^2$
   b) $(a, b) \in R_2$ si et seulement si $a \bmod 7 = b$
   c) $(a, b) \in R_3$ si et seulement si $a + 1 = b$
   d) $(a, b) \in R_4$ si et seulement si $a \times b = 0$

4. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$ une relation sur A. Calculez R^2, R^3, R^4 et R^5. En déduire R^n pour $n \geq 1$. Représentez R, R^2 par un graphe et R^3 par une matrice.

5. Prouvez que si R est une relation réflexive (resp. symétrique) alors $R^n (n \geq 1)$ est également réflexive (resp. symétrique).

Solution – Exercice 3

3. Déterminez si les relations suivantes, définies sur $\mathbb{Z}$, sont réflexives, symétriques, anti-symétriques et/ou transitives :
   a) non réflexive, non symétrique, anti-symétrique, non-transitive (16, 4, 2)
   b) non réflexive, non symétrique, anti-symétrique, transitive
   c) non réflexive, non symétrique, anti-symétrique, non transitive
   d) non réflexive, symétrique, non anti-symétrique, non-transitive ((2,0), (0,1), (2,1))

Solution – Exercice 4 – 1/2

$A = \{1,2,3,4,5\}$ et $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$

$$
\begin{aligned}
R_1 &= R \\
R_2 &= R^1 \circ R = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,1),(5,2)\} \\
R_3 &= R^2 \circ R = \{(1,4),(2,5),(3,1),(4,2),(5,3)\} \\
R_4 &= R^3 \circ R = \{(1,5),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)\} \\
R_5 &= R^4 \circ R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}
\end{aligned}
$$

J'en déduis que $R^n = R^{n-1 \bmod 5} + 1$. Montrons le par induction faible.

Cas de base :

1. $n = 1$, $R^{(0 \bmod 5)+1} = R^1$
2. $n = 2$, $R^{(1 \bmod 5)+1} = R^2$
3. $n = 3$, $R^{(2 \bmod 5)+1} = R^3$
4. $n = 4$, $R^{(3 \bmod 5)+1} = R^4$
5. $n = 5$, $R^{(4 \bmod 5)+1} = R^5$

Solution – Exercice 4 – 2/2

$A = \{1,2,3,4,5\}$ et $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$
Hypothèse d'induction faible : je suppose que $R^{n-1} = R^{((n-1)-1 \bmod 5)+1}$,
montrons que c'est également vrai pour R^n :

$$R^n = R^{(n-1 \bmod 5)+1}$$

5 cas de figure :

Si $n-1 \bmod 5 = 0$ on sait que $R^{n-1} = R^{(n-2 \bmod 5)+1} = R^{4+1} = R^5$
Or $R^n = R^{n-1} \circ R$ par définition.
Puisque $R^{n-1} = R^5$, $R^n = R^5 \circ R$.
Calculons $R^5 \circ R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\} \Leftrightarrow R^1$
On a donc bien $R^n = R^1 \Leftrightarrow R^{(n-1 \bmod 5)+1} = R^{0+1} = R^1$

Si $n-1 \bmod 5 = 1$ De manière similaire, $R^{n-1} = R^1, R^n = R^1 \circ R = R^2$
(voir cas de base). $R^n = R^2 \Leftrightarrow R^{(n-1 \bmod 5)+1} = R^{1+1} = R^2$

Si $n-1 \bmod 5 = 2$ De manière similaire, $R^{n-1} = R^2, R^n = R^2 \circ R = R^3$
(voir cas de base). $R^n = R^3 \Leftrightarrow R^{(n-1 \bmod 5)+1} = R^{2+1} = R^3$

Si $n-1 \bmod 5 = 3$ De manière similaire, $R^{n-1} = R^3, R^n = R^3 \circ R = R^4$
(voir cas de base). $R^n = R^4 \Leftrightarrow R^{(n-1 \bmod 5)+1} = R^{3+1} = R^4$

Si $n-1 \bmod 5 = 4$ De manière similaire, $R^{n-1} = R^4, R^n = R^4 \circ R = R^5$
(voir cas de base). $R^n = R^5 \Leftrightarrow R^{(n-1 \bmod 5)+1} = R^{4+1} = R^5$