Mathématiques appliquée à l'informatique

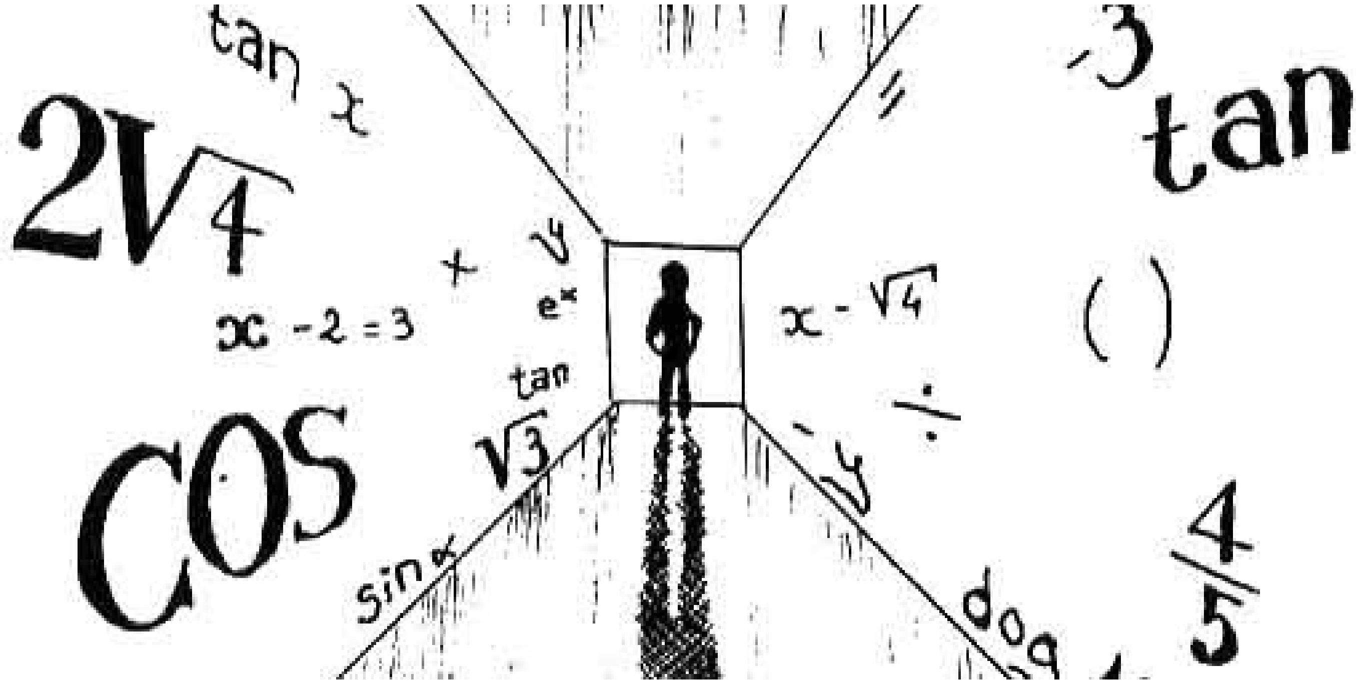
Enseignant : Mr Lerat Sébastien

Août-Septembre 2020

Table de Matières

Chapitre 1

Mathématiques Théorie



1.1 Matrices Théories

1.1.1 Les propriétés

A) Linéarité

si on multiplie une matrice par λ, le déterminant est multiplié par λ^n et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par $\lambda = det(A) * \lambda^n$

$det(A + B) \neq det(A) + det(B)$?

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

det(A)=ab et det(B)=cd

Conclusion :

$C = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix}$
$det(C) = (a + c) * (b + d)$

$\lambda^n \neq$ linéaire
λ^n est exponentielle

B) Déterminant et transposée

Det(A) = det(A), les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$det(A) = \sum_{o\varepsilon s} \varepsilon(o^{-1}), ...$

$det(T_a) = \sum_{o\varepsilon s} \varepsilon(o^1), ...$

C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit det(AB) = det(A) * det(B)

$\varphi_a(x_1, ..., x_n) = det(\varphi_c)(A * 1, ..., A * N))$

D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différents de 0.

$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

1.1.2 Calcul du déterminants 2*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplications croisée des 2 ensembles
Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

det(A) = (1*3) - (2*4)

det(A) = (3-8)

det(A) = (-5)

S = -5

1.1.3 Calcul du déterminants 4*4 ou n*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3
L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{2-(1*2)} & \textbf{3-(2*2)} & \textbf{0-(2*3)} & \textbf{1-(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{(2-2)} & \textbf{3-4} & \textbf{(0-6)} & \textbf{1-0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4
L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{3-(3*1)} & \textbf{0-(3*2)} & \textbf{1-(3*3)} & \textbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{3-3} & \textbf{0-6} & \textbf{1-9} & \textbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...
Exmples :

1.1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \textbf{0} & \textbf{-4} & \textbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \textbf{0} & \textbf{4} & \textbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Suppérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 24 \end{pmatrix}$$

1*(-1)*(-4)*24=**96**
S= det(A) = **96**

1.1.5 Autres Méthode

Elimination en matrice 3*3

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{0} & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * (\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix})$$

Création de la matrice de signe

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2*2

$$A = $$
$$1 * ($$
$$+ (-1) * (\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix})$$
$$- (-2) * (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix})$$
$$+ 3 * (\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix})$$

)

Mise en équation

$A = 1 * ($
$+ (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1))$
$- (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1))$
$+ 3 * ((1 * 8) - (6 * 6))$
$)$

$A = 1 * ($
$+ (-1) * ((12) - (8))$
$- (-2) * ((2) - (6))$
$+ 3 * ((8) - (36))$
$)$

$A = 1 * ($
$(-1 * 4)$
$(2 * (-4))$
$(3 * (-28))$
$)$

4−(−8)−(−84)=**96**

S= det(A) = **96**

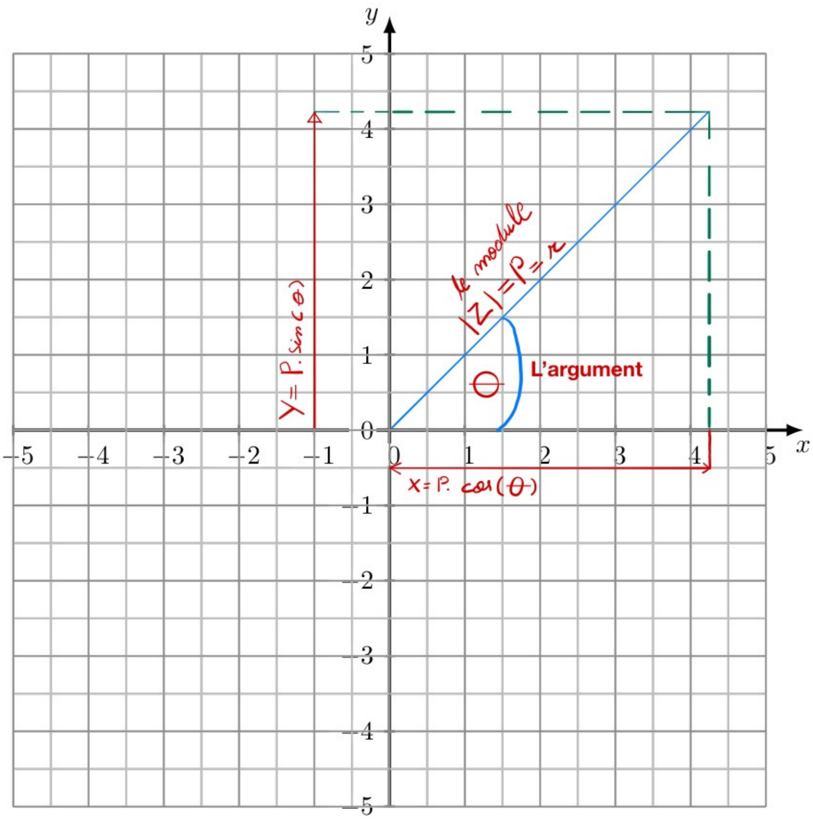
1.2 Nombres Complexes Théorie

1.2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module :

le module noté $|Z|$ est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ($\sqrt{a^2 + b^2}$).

Représentation Géographique



Démonstration :

$|Z| = \rho cos(\theta) + \rho sin(\theta) * i$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2 cos(\theta)^2 + \rho^2 sin(\theta)^2)$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2 cos(\theta)^2 + sin(\theta)) * i$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2)$
$|Z| = \rho$

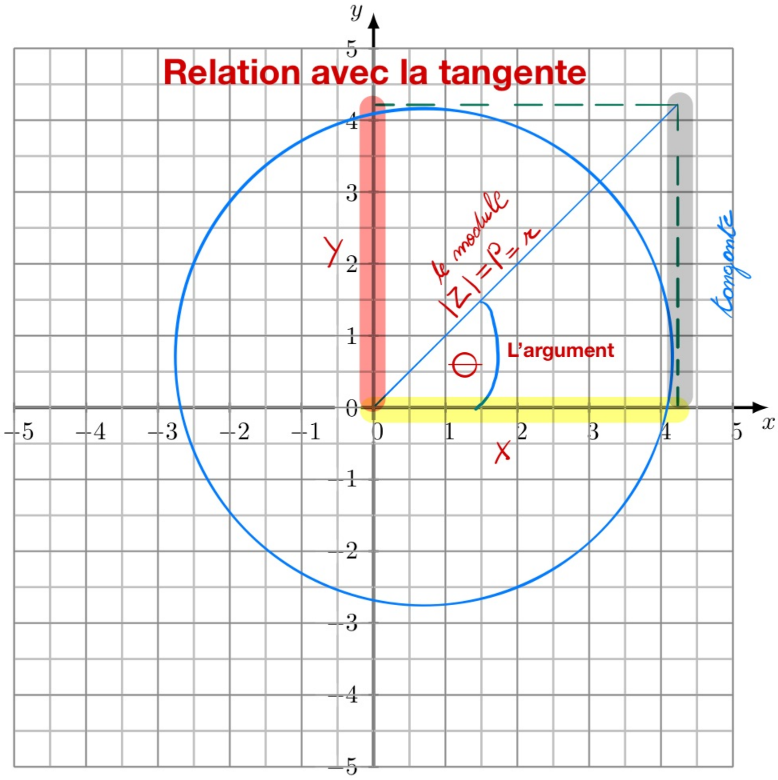
ρ est le module et θ est l'argument
$Z = P(cos(\theta) + sin(\theta) * i)$ ou $Z = P(cis(\theta))$

1.2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$\rho = \sqrt(x^2 + y^2)$

Démonstration Géométriquement θ

Nous pouvons voir que θ est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangeante au cercle de rayon X.



$X = \rho * cos(\theta)$ $Y = \rho * sin(\theta)$

Démonstration Algébriquement θ

$\frac{Y}{X} = \frac{\rho * sin(\theta)}{\rho * cos(\theta)}$
$\frac{Y}{X} = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$
$\frac{Y}{X} = \text{tg}(\theta)$

Conclusion :

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$

1.3 Chaptire 3 : Logique

1.3.1 Logique propositionnelle

Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux :

1) Principe d'identité : A=A

2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose $\neg$A et A

3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister A ou $\neg$A

1.3.2 Proposition

C'est un énoncé, une phrase simple :
ex : Ceci est une vidéos => Vrai ou Faux

En logique propositionnelle les propositions ne peuvent qu'être vrai ou fausse

exemple de proposition :
2+2 => Vrai ou Faux
Le mur est blanc => Vrai ou Faux

1.3.3 L'implication

Si j'ai une proposition A alors B

Exemple :
Une paire de chaussure => j'ai 2 chaussures
Une paire de chaussure implique que j'ai 2 chaussures
A=>B : Faux (une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes)
Si A est vrai alors B est vrai
si B est vrai alors A n'est pas forcément vrai

1.3.4 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.
A=B : vrai
Si A est vrai alors B est vrai
si B est vrai alors A est vrai

1.3.5 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois
Tautologie : toujours vrai
prédicats : Pour tout il existe

1.3.6 Tableau priorités logique

Opérateur	Logic	priorités	Associativités .
<=>	Equalité	1	gauche
=>	Implications	2	droite
V	OU	3	gauche
$\wedge$	ET	4	gauche
$\neg$	NON	5	gauche

1.3.7 Tautologie

P	$\neg$ P	P V $\neg$P
T	T	$\perp$
$\perp$	T	T

1.3.8 Changement de forme

Commutativité :
pvq = qvp
$p \wedge q = q \wedge p$

Associativités :
(pvq)vr = pv(qvr)
$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

Distributivités :
$pv(q \wedge r) = (pvq) \wedge (pvr)$
$pv(qvr) = (p \wedge q)v(p \wedge r)$

De Morgans :
a v $b = \neg a * \neg b$
$a*b = \neg a + \neg b$
$(p \wedge q) = \neg p$ v $\neg q$
$(pvq) = \neg(\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \wedge q) = (p$ v $q)$
$(A \wedge \neg B)$ V $(\neg A$ V $(C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A$ V $(C \wedge A))$

Forme disjonctive :
$(A \wedge B)$ V C
(A ET B) OU C

Forme conjonctive :
(A V B) $\wedge$ C
(A OU B) ET C

Transformation :
A=>B = $\neg$A v (A$\wedge$B)
A<=>B : = (A=>B)$\wedge$(B=>A)
(A=>B)$\wedge$(B=>A) = ($\neg$A v (A$\wedge$B)) $\wedge$ ($\neg$B v (B$\wedge$A))

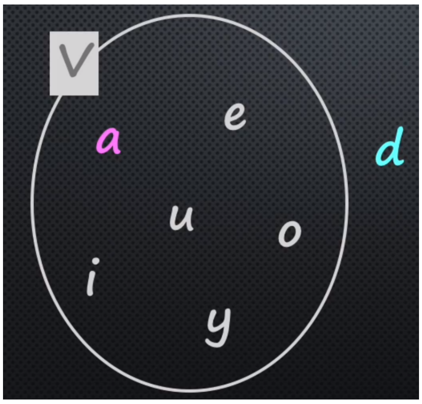
1.4 Théorie naïve des ensembles

1.4.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appellés éléments de cet ensemble.
un objet particulier appartient ($\in$) ou n'appartient pas ($\notin$) à un ensemble donné.

Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles : V={a,e,i,o,u,y}

a $\in$ V : a appartient à l'ensemble V
d $\notin$ V : d appartient à l'ensemble V

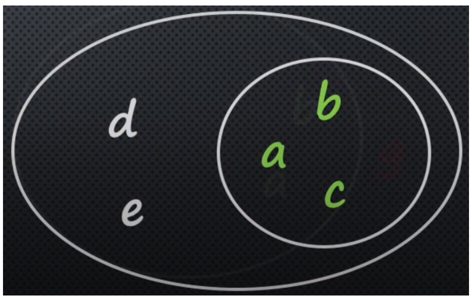


1.4.2 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté A=B), si tout les éléments de A appartient à B. Autrement dit (X$\in$A) et que (X$\in$B).

1.4.3 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté A$\subset$ B), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit (X$\subset$A) et que (X$\subset$B).



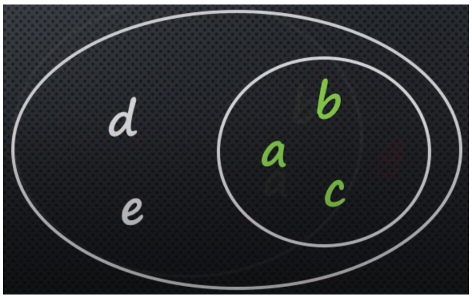
On peut dire que {a,b,g}$\in${a,b,d,e}

1.4.4 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A (A$\in$B)
- b. Anti-Symétrique : (A$\in$B) et (B$\in$A) => A=B
- c. Transitivité : (A$\in$B) et (B$\in$C) => (A$\in$C)

1.4.5 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté A⊂ B), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit (X⊂A) et que (X⊂B).



On peut dire que {a,b,g}∈{a,b,d,e}

1.4.6 Opération d'union (∪)

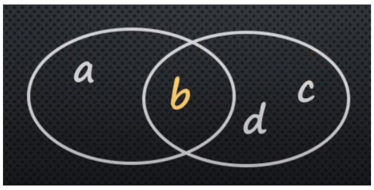
1) L'union de 2 ensembles
A= {a,e} et B = {b,c,d}

C = A ∪ B = {a,e,b,c,d}

1.4.7 Opération d'intersection (∩)

2) L'intersection de 2 ensembles

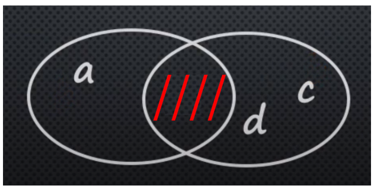
Soient A et B deux ensembles, on appelle (A∩B) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B
A= {a,b} et B = {b,c,d}



C = A ∩ B = {b}

1.4.8 L'ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles.
Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



C = A ∩ B = {b}

1.4.9 La cardinalité

Soit A un ensemble, Si A possède exactement N éléments (n $\in \mathbb{N}$), A est un ensemble fini de cardinalité N. Noté $|A|$ = n

$|1, 2, 3| = 3$
$|\oslash| = 0$
$|\{\oslash\}| = 1$

1.4.10 Identité

A $\cup$ A = A
A $\cap$ A = A

1.4.11 Commutativité

A $\cap$ B = B $\cap$ A
A $\cup$ B = B $\cup$ A

1.4.12 Associativité

A $\cap$ (B $\cap$ C) = (A $\cap$ B) $\cap$ C
A $\cup$ (B $\cup$ C) = (A $\cup$ B) $\cup$ C

1.4.13 Distributivité

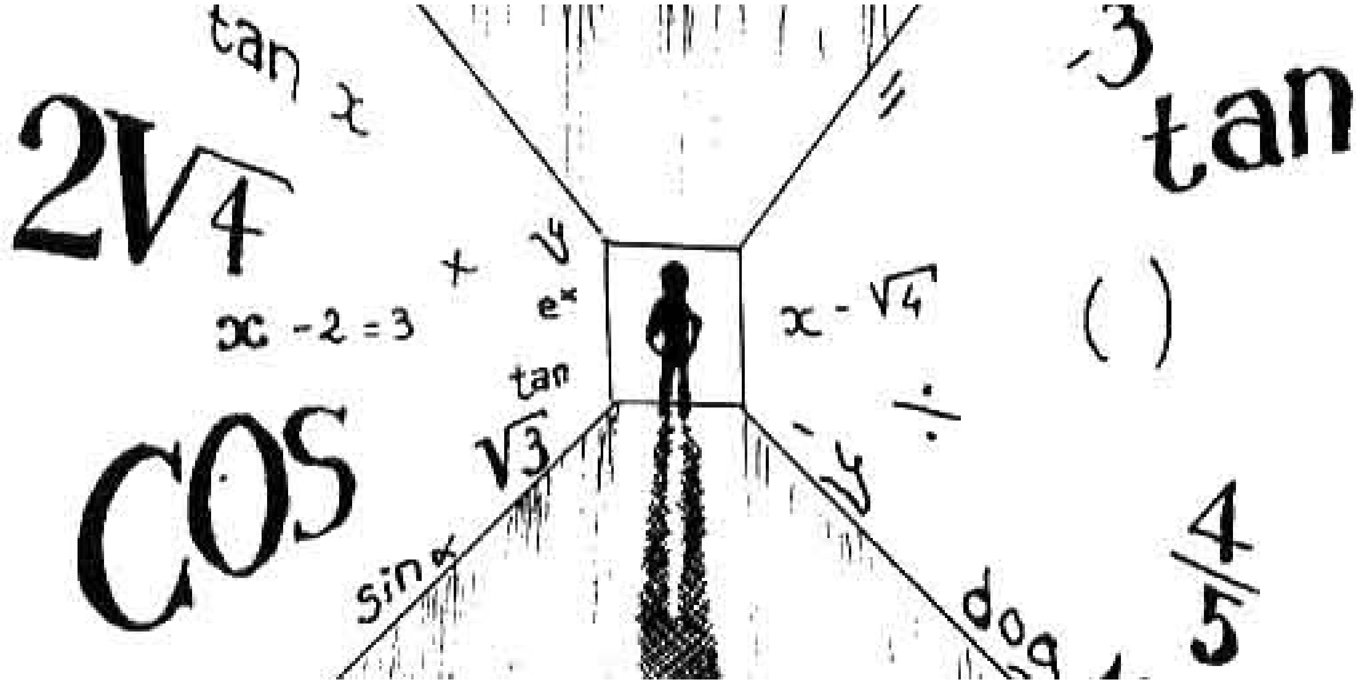
A $\cap$ (B $\cup$ C) = (A $\cap$ B) $\cup$ (A $\cap$ C)
A $\cup$ (B $\cap$ C) = (A $\cup$ B) $\cap$ (A $\cup$ C)

1.4.14 De Morgans

$\neg$(A $\cup$ B) = $\neg$A $\cap$ $\neg$B)
$\neg$(A $\cap$ B) = $\neg$A $\cup$ $\neg$B)

Chapitre 2

Mathématiques Exercices



2.1 Exercice Matrices

2.1.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A) Calculer B*C

B) Calculer la trace de A

C) Calculer la transposée de B

D) Calculer 2,5*C

E) Calculer $B^t + C$

F) Calculer le déterminants de A

G) Exercices d'examens

H) Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)

2.1.2 Résolution des exercices

A) Calculer B*C

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix}$$

$$S = B * C = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \mathbf{2} & 3 & 0 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & 0 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice A = 0+2+0+2 = 4
S = 4

C) Calculer la transposée de la matrice B

La transposée de la matrice est d'intervertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S = B^t ou C

D) Calculer 2,5*C

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix}$$

$$S = 2,5 * C = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : $B^t = C =$ C+C ou 2*C

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix}$$

S = B^t +C = 2*C = C+C =

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3
L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{2-(1*2)} & \textbf{3-(2*2)} & \textbf{0-(2*3)} & \textbf{1-(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{(2-2)} & \textbf{3-4} & \textbf{(0-6)} & \textbf{1-0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4
L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}(3*1)} & \mathbf{0\text{-}(3*2)} & \mathbf{1\text{-}(3*3)} & \mathbf{2\text{-}(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}3} & \mathbf{0\text{-}6} & \mathbf{1\text{-}9} & \mathbf{2\text{-}0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{\text{-}1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{\text{-}1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{\text{-}4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{\text{-}1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{\text{-}4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{\text{-}4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Suppérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

1*(-1)*(-4)*24=**96**
S= det(A) = **96**

H) Déplacement 3D

R=10u
H=300l où L=40cm + hauteur du casier
P=$((\frac{3}{5}) * R < R)$
$\theta = 0$
Z= $R + (\frac{B}{100} * R) = R + (\frac{2}{100}) * R = 20cm$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (cos(45) - sin(45) & 0 \\ sin(45) - cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 7 : Rotation -45° :

$$\begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Cos(45) - sin(45) & 0 \\ +Sin(45)Cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 8 : Retour à 0 :

$$\begin{pmatrix} X_8 \\ Y_8 \\ Z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15l \end{pmatrix}$$

2.2 Nombres Complexes Exercices

2.2.1 Exercices : Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes :

- a. $x^2+1=0$
- b. $3x^2+7=0$
- c. $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d. $-x^2-3x=3$
- e. $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f. $x^4 +15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de :

- a. -11-8i
- b. -0.3333i + 1
- c. $cos(\omega t) + sin(\omega t)i$

3) Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a. 0
- b. -6+i
- c. i^2
- d. $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme a+bi :

- a. (4-8i)-(3+2i)
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c. $(7 - 2i)(5 + 6i)$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$

5) Exprimer sous forme Polaire :

- a. 3-$\sqrt{(}3i)$
- b. -1+1i

6) Exprimer sous forme cartésienne :

- a. 4cos(45) + sin(45)i
- b. $5cis(\frac{\pi}{3})$

7) Trouver la solution de :

- a. 4cis(45°)+5cis($\frac{\pi}{3}$)
- b. 4cis(45°)*5cis($\frac{\pi}{3}$)

2.2.2 Résoudre les équations suivantes :

A. x^2+1=0

x^2+1-1=0-1
x^2= -1
x=$\sqrt{-1}$
S = x=i

B. 3x^2+7=0

3x^2+7-7=0-7

$\frac{3x^2}{3}$= $\frac{-7}{3}$

x^2 = $\frac{-7}{3}$
$\sqrt{x^2}$ = $\sqrt{\frac{7}{3} * -1}$
$\sqrt{x^2}$ = $\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\sqrt{-1}$
S = $\sqrt{x^2}$ = $\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\sqrt{-1}$

C. $\frac{x^2}{2}$ -x = -2

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{x}{1}$ = - $\frac{2}{1}$

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{2x}{2}$ = - $\frac{4}{2}$

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{2x}{2}$ = - $\frac{4}{2}$

x^2 - 2x = -4
x^2 - 2x + 4 = (-4)+4
x^2 - 2x + 4 = 0

$\frac{-2+-\sqrt{(-2)^2-4*1*4}}{2*1}$

$\frac{-2+-\sqrt{4-16}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{-12}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{4*(-3)}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{(2)^2*(-3)}}{2}$
S= -1 +- 1 $\sqrt{-3}$

D. -x^2-3x=3

-x^2-3x -3=3-3
-x^2-3x -3=0

$\frac{-3+-\sqrt{(3)^2-4*1*3}}{2*1}$

$\frac{-3+-\sqrt{9-12}}{2}$
$\frac{-3+-\sqrt{-3}}{2}$
$\frac{-3+-\sqrt{3*(-1)}}{2}$
$\frac{-3+-\sqrt{3}*\sqrt{-1}}{2}$
$\frac{-3+-\sqrt{3}i}{2}$
S = -$\frac{3}{2}$ $+-\sqrt{\frac{3}{2}i}$

E. $x^3+7x^2+9x+63=0$

$x^2+(x+7)+9(x+7)=0$
$(x+7)*(x^2+9)=0$

Poser les CE pour que (x+7) ou (x^2+9) vaut 0

Résoudre pour (x+7)=0
x=-7
(x^2+9)=0
x^2=-9
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$
$x = 3\sqrt{-1}$
$x = 3i$

S= X vaut -7 ;3i

F. x^4 +15x^2=16

x^4+15x^2-16=0
Poser t = x^2
t^2+15t-16=0
t*(t+16)-(t+16)=0
(t+16)-(t-1)=0

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

(t+16)=0
t=-16
Restituer t=x^2
x^2=-16
$x = \sqrt{-16}$
$x = \sqrt{16 * (-1)}$
$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$
$x = 4\sqrt{-1}$
x=4i

t-1=0
t=1
Restituer t=x^2
x^2=1
$x = \sqrt{1}$
x=1

S= 1 ; 4i

2.2.3 Trouver le conjugués :

- a. -11-8i = -11+8i
- b. -0.3333i + 1 = 1+0.3333i
- c. $cos(\omega t) + sin(\omega t)i = cos(\omega t) - sin(\omega t)i$

2.2.4 Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a. 0 : $\mathbb{R}$=0 $\mathbb{I}$=0
- b. -6+i : $\mathbb{R}$=(-6) $\mathbb{I}$=1
- c. i^2 : $\mathbb{R}$=(-1) $\mathbb{I}$=0
- d. $\frac{1+i}{2}$: $\mathbb{R}$=($\frac{1}{2}$) $\mathbb{I}$=($\frac{1}{2}$)

2.2.5 Exprimer sous forme a+bi

- a. (4-8i)-(3+2i) : 1-10i
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$: $\frac{23-11i}{26}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$: 47+32i
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$: $\frac{9-13i}{125}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$: 2-$\frac{1}{2}i$

2.2.6 Exprimer sous forme polaire

a. 3-$\sqrt{3i}$

Calcul de l'arguments

$\theta = arctg(\frac{-\sqrt{3}}{3})$
$\theta = -30°$
$\theta = -30° + 360°$
$\theta = 330°$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$\rho = \sqrt{9+3}$
$\rho = \sqrt{12 => (12 = 4*3)}$
$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$
$\rho = 2\sqrt{3}$

Z=$\rho * cos(\theta) * sin(\theta) * i => \rho * cis(\theta)$
Z=$2\sqrt{3} * cis(330)°$

b. -1+1i

Calcul de l'arguments

$\theta = arctg(-\frac{1}{1})$
$\theta = -45°$
$\theta = -45° + 360°$
$\theta = 315°$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$
$\rho = \sqrt{2}$

Z=$\rho * cos(\theta) * sin(\theta) * i => \rho * cis(\theta)$
Z=$\sqrt{2} * cis(315°)$

2.2.7 Exprimer sous forme cartésienne

a. $4cos(45°) + sin(45°) * i$

Formules

$\rho = 4 * cis(45°)$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$|Z| = a + bi$

$\frac{Y}{X} = tg(45°)$
$\frac{Y}{X} = 1$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$
$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$
$\rho = x^2 + y^2 = 16$
Notes : $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$ donc Y=X

$\rho = 2x^2 = 16$ ou $2y^2 = 16$
$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$
$\rho = x^2 = 8$
$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8 = (2 * 4)}$
$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$
$\rho = x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2}$

x=y donc $x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2i}$

Conclusion :

$S = 4 * cis(45°) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2i}$

b. $5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Formules

$\rho = 5$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$|Z| = a + bi$

$\theta = tg(\frac{\pi}{3})$
$\theta = \sqrt(3)$

$x = \rho * cos(\sqrt{3}) => cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$
$y = \rho * sin(\sqrt{3}) => sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
$y = 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conclusion :

Z= a+bi
$S = Z = \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3i}}{2}$

2.2.8 Trouver la solution

$a.4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$
$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * cos(45° - 60°))}$
$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * cos(-15°))}$
$\rho = \sqrt{41 + 40 * cos(-15°))}$
$\rho = \sqrt{81 * 0.965}$
$\rho = \sqrt{79.637}$
$\rho = 8.9239$

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) + 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) + 5 * cos(60°)})$

$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2})})$

$\theta = arctg(1, 343)$

$\theta = 53, 338°$

$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338°)$

$b.4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2(cos(45° + \theta_2) + i * sin(45° + \theta_2))}$

$\rho = \sqrt{4 * 5(cos(45° + 60°) + i * sin(45° + 60°))}$

$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$

$\rho = \sqrt{25,7152}$

$\rho = 5,07$

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) + 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) + 5 * cos(60°)})$

$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2})})$

$\theta = arctg(1,343)$

$\theta = 53,338°$

$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338°)$

2.3 Logique propositionnelle exercices

2.3.1 Enoncé Exercices

1) Déterminer la véracité

P1 = 1+1=2
P2 = 1>5
P3 = 1+1=3

- a. P_1 v P_3
- b. P_2 => P_1
- c. P_3 => (p_1 v P_3)

2) Construire la Table de vérité de p_1 <=> P_2 => P_3

2.3.2 Déterminer la véracité

a. P_1 v P_3 = T
1 OU 1 = 1

b. P_2 => P_1
¬ P_2 v ($P_2 \wedge P_1$)
¬ 0 v (0 ∧ 1)
1 v (0)
1 OU 0 = 1
S = P_2 => P_1 = T

c. P_3 => ($p_1 v p_3$)
¬ P_3 v ($p_3 \wedge$ (p_1 v p_3))
p_3=0
p_1 =1 ou insertion
¬ 0 v (0 ∧ (1 v 0))
1 v (1 ∧ 0)
1 v 0 = T
1 OU 0 = 1
S= P_3 => ($p_1 v p_3$) = T

2.3.3 Construire la table de vérité

p_1 <=> P_2 => P_3

P_2 => P_3
¬ P_2 v ($p_2 \wedge p_3$)
¬ 0 v (0 ∧ 0)
1 v 0 = T
1 OU 0 = 1

P_1	P_2	P_3	P_2 => P_3
T	$\perp$	$\perp$	T

2.4 Théorie naïve des ensembles Exercices

2.4.1 Enoncé d'exercices

- a. Soit A={pi,2,e} et B={-1, 5} Calculer $|A \times B|$
- b. Soit P | A U B | A ={3,4,5} B={1,2,3}
- c. Soit A={π, 2, e} et B={-1,5} Calculer $|AUB|$

2.4.2 Résolution

A) Calculer $A \times B$

A*B = { (pi,-1),(pi,5), (2,-1),(2,5), (e,-1),(e,5) }

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {π}, {2}, {e}, {-1}, {5}}

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{π,2}, {2,e}, {e,-1}, {-1,5}, {5,π}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{π,2,e}, {2,e,-1}, {e,-1,5}, {-1,5,π}, {5,π,2}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{π,2,e,-1}, {2,e,-1,5}, {e,-1,5,π}, {-1,5,π,2}, {5,π,2,e}}

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{π,2,e,-1,5}}

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 6 + (3*5) +1 = 22

P | A U B | = 22

S=22

B) Soit P | A U B | A ={3,4,5} B={1,2,3}

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {3}, {4}, {5}, {1}, {2}, {3}}

Total des ensembles =7

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{3,4}, {4,5}, {5,1}, {1,2}, {2,3}, {3,3}}

Total des ensembles =6

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{3,4,5}, {4,5,1}, {5,1,2}, {1,2,3}, {2,3,3}, {3,3,4}}

Total des ensembles =6

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{3,4,5,1}, {4,5,1,2}, {5,1,2,3}, {1,2,3,3}, {2,3,3,4}, {3,3,4,5}}

Total des ensembles =6

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{3,4,5,1,2}, {4,5,1,2,3}, {5,1,2,3,3}, {1,2,3,3,4}, {2,3,3,4,5}, {3,3,4,5,1}}

Total des ensembles =6

6) Union des 2 ensembles a 6 membres

P(A) = {{3,4,5,1,2,3}}

Total des ensembles =1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 7 + (4*6) +1 = 32

P | A U B | = 32

S=32

c) Soit A={π, 2, e} et B={-1,5} Calculer $|AUB|$
1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {π}, {2}, {e}, {-1}, {5}}

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{π,2}, {2,e}, {e,-1}, {-1,5}, {5,π}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{π,2,e}, {2,e,-1}, {e,-1,5}, {-1,5,π}, {5,π,2}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{π,2,e,-1}, {2,e,-1,5}, {e,-1,5,π}, {-1,5,π,2}, {5,π,2,e}}

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{π,2,e,-1,5}}

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 6 + (3*5) +1 = 22

P | A U B | = 22

S=22

2.5 Nombre Entiers Exercices

2.5.1 Exemple Modulo

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que
(a+b) mod m = ((a mod m)+(b mod m)) mod m

Sélectionnez une réponse :

- ☐ a. Vrai
- ☐ b. Faux

(8+15) mod 3 = ((8 mod 3)+(15 mod 3)) mod 3
(23) mod 3 = (2+0) mod 3
2 = 2
VRAI

2.6 Relation Binaire Exercices

2.6.1 Produit Cartésiens

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A (A∈B)
- b. Anti-Symétrique : (A∈B) et (B∈A) => A=B
- c. Transitivité : (A∈B) et (B∈C) => (A∈C)

2.6.2 Exercices Examen

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est un multiple de b $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symètrique
- ☐ e. R est symètrique

Test de la symétrie

A=2 B=4
A est multipe de B : 2*4 VRAI
B est multipe de A : 4*2 FAUX

il faut que A et B soit vrai pour qu'il soit symétrique

R est réflexif car $a \in N, b \in N$

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est > b }

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symètrique
- ☐ e. R est symètrique

Test de la symétrie

A est plus grand que B => VRAI
B est plus grand que A => FAUX
il faut que A et B soit vrai

R n'est Symètrique pas car A=1 B=2
R est anti-symétrique $aest > b$

R est réflexif car $a \in N, b \in N$
R n'est pas transitif car a est > b et a ≠ b

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ b est divisible a }

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symètrique
- ☐ e. R est symètrique

Test de la symétrie

A est divisible par B => VRAI
B est divisible par A => VRAI
il faut que A et B soit vrai

R est symétrique car b est divisible a B=2 A=1

Test de la transitivité

B=2 A=2 Z=A
A est divisible par B => VRAI
B est divisible par A => VRAI

A=B 2=2
B=A 2=2
alors A=Z 2=2

Chapitre 3

Exemple d'examen

3.1 Q1 : Calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A) Simplification de la matrice

$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ 9 & 9,5 & -9,5 & \mathbf{b} \\ 4 & 8 & 16 & \mathbf{32} \end{pmatrix}$$

B) Swap des zeros

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

C) Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9.5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} -5 * \begin{pmatrix} 9 & -9.5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} +6 * \begin{pmatrix} 9 & 9.5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

D) Calcul des déterminants 2*2

8*(

1*((9,5*16)-(8*-9,5))

-5*((9*16)-(4*-9,5))

+6*((9*8)-(4*9,5))

)

E) Simplification des calculs

8*(

1*(152 – (-76))

-5*(144 – (-38))

+6*(72 – 38)

)

F) Mise en équation et résolution

8*(228 -5*(182) + 6*(34))

8*(228 - 910 + 204)

8*(228 + 204 - 910)

8*(432 - 910)

8*(-478) = -3824

det(A) = -3824

3.2 Q2 : Calcul nombre complex

Que doit valoir a pour que l'argument soit 135° quand b=-5, c=4 et d=11

$\frac{a+bi}{c+di}$

A) Utilisation de la formule division cartésienne

$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2}$ *i

B) Remplacement dans la formule

$\frac{(a_1*4)-((-5)*(-11))}{4^2+(-11)^2} + \frac{((-5)*4)-(a_1*(-11))}{4^2+(-11)^2}$ *i

$\frac{4a_1-55}{16+121} + \frac{((-20)-((-11)a_1)}{16+121}$ *i

$\frac{4a_1-55}{137} + \frac{((-20)-(-11a_1)}{137}$ *i

$\frac{4a_1-55}{137} + \frac{11a_1-20}{137}$ *i

C) On calcule a par rapport à θ

Notes : Nous avons découvert la valeur de X et de Y :

$\theta = arctg\frac{Y}{X}$

$X = \frac{4a-55}{137}$

$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$

Remplacement de X et Y

$\theta = arctg(\frac{\frac{55+(11a-20)i}{137}}{\frac{4a-55}{137}})$

Notes : Diviser une fraction par une fraction c'est égale à la muiltiplier par l'inverse

Ex : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$

$\theta = arctg((\frac{55+(11a-20)}{137}) * (\frac{137}{4a-55}))$

$tg(\theta) = (\frac{55+(11a-20)}{137}) * (\frac{137}{4a-55})$

$tg(\theta) = (\frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55})$

$tg(135) = (\frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55})$

$-1 = (\frac{-2685+1507a}{548a-55})$

D) Déterminer l'intervale définis

$-1 = (\frac{-2685+1507a}{548a-55})$, $a \neq \frac{55}{548}$

E) Simplifier l'équation

$(-1) * (548a - 55) = (548a - 55) * (\frac{-2685+1507a}{548a-55})$

$-(548a - 55) = -2685 + 1507a$

Notes : lorsqu'il y a un un - devant l'expression entre parenthèse, changer le signe de chaque terme de l'expression.

$-548a + 55 = -2685 + 1507a$

$-548a + 55 - 1507a = -2685 + 1507a - 1507a$

$-548a - 1507a + 55 - 55 = -2685 + 1507a - 55$

$-548a - 1507a = -2685 - 55$

$-2055a = -2740$

$-\frac{2055a}{2055} = -\frac{2740}{2055}$

$\frac{2055a}{2055} = \frac{2740}{2055}$

$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$

F) Vérifier si la solution est dans l'intervale définis

$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$

G) Solution

$S = \frac{4}{3}$

H) Restituer a=$\frac{4}{3}$

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$

$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$

$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$

$X = \frac{4a-55}{137}$
$X = -0,362$

$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$
$Y = 0,362$

$tg(\theta) = -\frac{0,362}{0,362}$

$tg(\theta) = -1$

H) Démontrer que $tg(\theta)$ = -1

$tg(\theta) = -1$

$tg(135) = -1$

$135° - 180° = -45°$

$tg(-45) = -1$

I) Conclusion :

tg(-45) = -1 et - $\frac{0{,}362}{0{,}362}$ = -1

et a = $\frac{4}{3}$

S = $\frac{4}{3}$

3.3 Q3 : Transformer en forme conjonctive

(A ∧¬ B) V ($C \implies a$)

A) Simplifier l'implications

(A ∧¬ B) V (¬ A V (C ∧ A))

B) Utilisation du théorème De Morgan

$a + b = \neg a * \neg b$

¬ (A ∧¬ B) ∧ ¬ (¬ A V (A ∧ C))

C) Simplification des parenthèse

(¬A ∧ B) ∧ (A V (A ∧ C))

S= (NEG(A) ET B) ET (A OU (NEG(A) ET NEG(C))

3.4 Q4 : Théorie des ensembles naïfs

A) Soit A={pi,2,e} et B={-1, 5} Calculer $|A \times B|$

1) Calculer $A \times B$

A*B = { (pi,-1),(pi,5), (2,-1),(2,5), (e,-1),(e,5) }

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {π}, {2}, {e}, {-1}, {5}}

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{π,2}, {2,e}, {e,-1}, {-1,5}, {5,π}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{π,2,e}, {2,e,-1}, {e,-1,5}, {-1,5,π}, {5,π,2}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{π,2,e,-1}, {2,e,-1,5}, {e,-1,5,π}, {-1,5,π,2}, {5,π,2,e}}

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{π,2,e,-1,5}}

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 6 + (3*5) +1 = 22

P | A U B | = 22

S=22

3.5 Q5 : Induction forte/faibles

Notez que l'induction faible est égale à l'induction forte. Néanmoins il est plus naturel de démontrer les propriétés soit avec de l'induction simple,soit avec la forte comme réalisé durant le cours. Il vous est demandé de choisir entre les deux fonction de l'énoncé.

Soit n un nombre naturel, que faut-il pour démontrer que 10^{n-1} est un multiple de 9 ?

Veuillez choisir au moins une réponse : (Cochez ce qui est vrai)

- ☐ On peut utiliser l'induction faible ou forte
- ☐ Il faut au moins 3 cas de base
- ☐ il faut utiliser l'induction forte
- ☐ il faut au moins un unique cas de base
- ☐ il faut au moins 2 cas de base

3.6 Q6 : Nombre entiers

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que

(a+b) mod m = ((a mod m)+(b mod m)) mod m

a) Développement de l'égalité

(a+b) mod m = ((a+b) mod m) mod m
(8+10) mod 2 = ((8 mod 2)+(10 mod 2)) mod 2
(18) mod 2 = (0+0) mod 2
0 = (0) mod 2
0 = 0

Sélectionnez une réponse :

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

3.7 Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau

Listing 3.1 – Python algorithme

```
def Apply(array, value, start=None, res=0):

        if(start is None):
            start = len(array)-1

        if(start <0):
            return res

        if(array[start] == value):
            return Apply(array, value, start-1, res+1)

return Apply(array, value, start-1, res)
```

cochez ce qui est vrai concernant la complexités (au moins une réponse)

- ☐ a. $\theta(1)$
- ☐ b. $o(n^2)$
- ☐ c. $O(log(n))$
- ☐ d. $o(log(n))$
- ☐ e. $\theta(log(n))$
- ☐ f. $o(n)$
- ☐ g. $o(1)$
- ☐ h. $O(1)$
- ☐ i. $o(nlog(n))$
- ☐ j. $O(nlog(n))$
- ☐ k. $\theta(n)$
- ☐ l. $\theta(n^2)$
- ☐ m. $O(n^2)$
- ☐ n. $O(n)$
- ☐ o. $\theta(nlog(n))$

3.8 Q8 : Ensemble Naturels

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
R=(a,b), a $\in$ N, b $\in$ N et a est un multiple de b

cochez ce qui est vrai concernant R. (au moins une réponse)

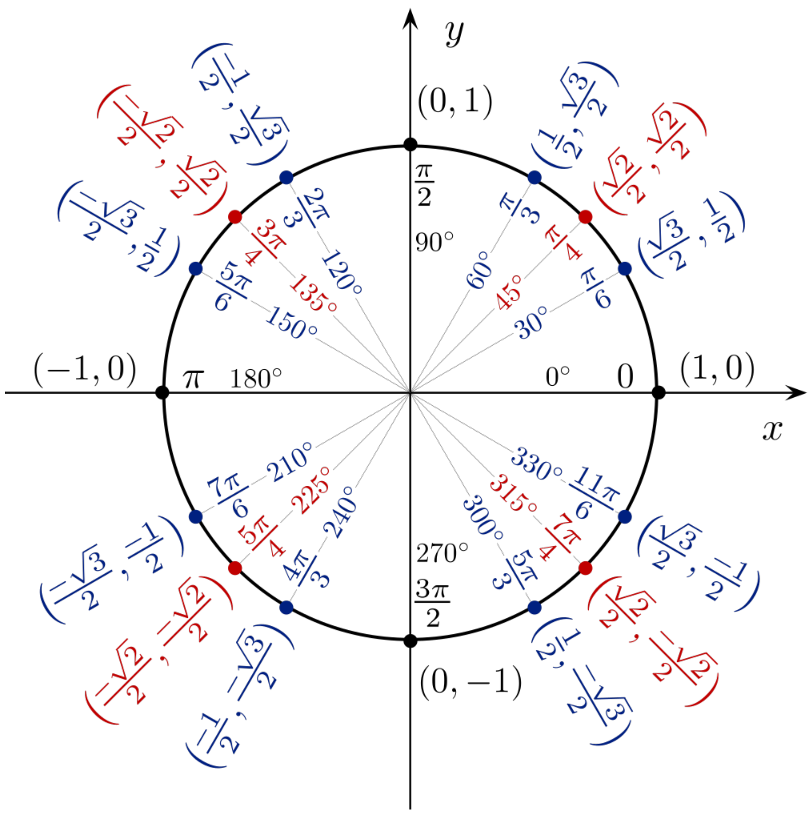
- ☐ R est transitif
- ☐ Aucune réponse
- ☐ R est réflexif
- ☐ R est anti-symètrique
- ☐ R est symètrique

Chapitre 4

Formules

4.1 Tableau Trigonométrique

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotan	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



4.2 NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne

$X = \rho * cos(\theta)$
$Y = \rho * sin(\theta)$
$Z = x + yi$
Notes : $cis = cos(\theta) * sin(\theta) * i$

4.3 Addition de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) + (a+di)

(a_1+a_2) + (b_1+b_2) *i

4.4 Soustraction de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) - (a+di)

(a_1-a_2) + (b_1-b_2) *i

4.5 Multilication de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) * (a+di)

(a_1*a_2) - (b_1*b_2) + ((a_1 * b_2) + (b_1*a_2)) *i

4.6 Division de nombres complex (cartésien)

Exemple : $\frac{(a+bi)}{(a+di)}$

$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2}$ + $\frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2}$ *i

4.7 NB Complex : Forme cartésienne vers polaire

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$\frac{Y}{X} = tg(\theta)$

4.8 Addition de nombres complex (Polaire)

Exemple : $4 * cis(45°) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

4.9 Soustraction de nombres complex (Polaire)

Exemple : $4 * cis(45°) - 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

4.10 Multilication de nombres complex (Polaire)

Exemple : $4 * cis(45°) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

c1*c2 = ρ_1*ρ_2 *(cos(θ_1 + θ_2) + i * sin(θ_1 + θ_2))

4.11 Division de nombres complex (Polaire)

Exemple : $\frac{(a+bi)}{(c+di)}$

$\frac{c1}{c2} = \frac{r1}{r2} * cos(\theta_1 + \theta_2) + i * sin(\theta_1 - \theta_2)$

Notes : Selon l'énoncé et les préférences de chacun il est conseillé de transformer en forme polaire ou cartésien, afin de pouvoir appliquer les formules ci-dessus.

4.12 Logique propositionnelle

De Morgans :
a v b= ¬a * ¬b
a*b= ¬a + ¬b
(p∧q) = ¬p v ¬q
(pvq) = ¬ (¬p ∧ ¬q)
¬(p∧q) = (p v q)
(A ∧¬ B) V (¬ A V (C ∧ A)) = ¬(A ∧¬ B) ∧ ¬(¬ A V (C ∧ A))

Forme disjonctive :
(A ∧ B) V C
(A ET B) OU C

Forme conjonctive :
(A V B) ∧ C
(A OU B) ET C

Transformation :
A=>B = ¬A v (A∧B)
A<=>B : = (A=>B)∧(B=>A)
(A=>B)∧(B=>A) = (¬A v (A∧B)) ∧ (¬B v (B∧A))