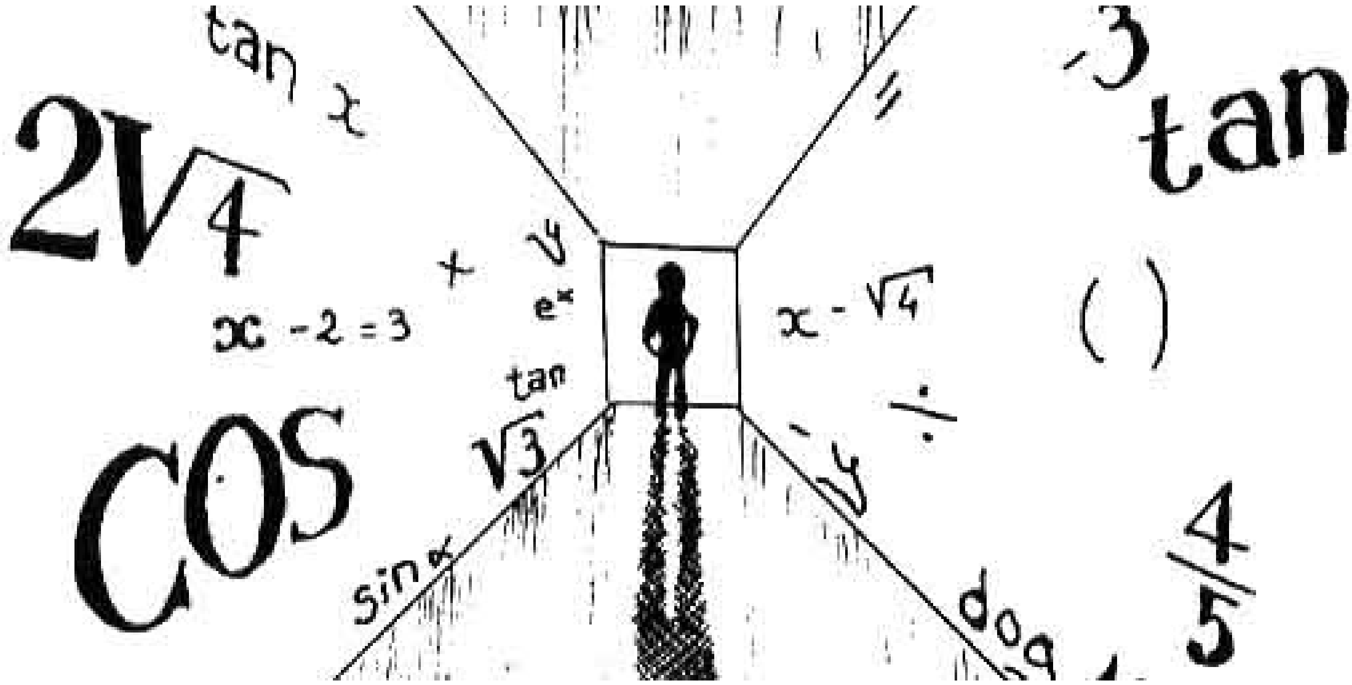
Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

Août-Septembre 2020

Table de Matières

Mathématiques Théories



Chapitre 1: Matrices Théories

1.1 Les propriétés

A) Linéarité

si on multiplie une matrice par λ, le déterminant est multiplié par λ^n et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par $\lambda = det(A) * \lambda^n$

$det(A + B) \neq det(A) + det(B)?$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$det(A) = abetdet(B) = cd$

Conclusion :

$C = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$

$det(C) = (a + c) * (b + d)$

$\lambda^n \neq$ linéaire
λ^n est exponentielle

B) Déterminant et transposée

Det(A) = det(A), les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$det(A) = \sum_{o\varepsilon s} \varepsilon(o^{-1}), ...$

$det(T_a) = \sum_{o\varepsilon s} \varepsilon(o^1), ...$

C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit det(AB) = det(A) * det(B)

$\varphi_a(x_1, ..., x_n) = det(\varphi_c)(A * 1, ..., A * N))$

D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différents de 0.

$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

1.2 Calcul du déterminants 2*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplications croisée des 2 ensembles
Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

det(A) = (1*3) - (2*4)

det(A) = (3-8)

det(A) = (-5)

S = -5

1.3 Calcul du déterminants 4*4 ou n*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3
L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2\text{-}(1*2)} & \mathbf{3\text{-}(2*2)} & \mathbf{0\text{-}(2*3)} & \mathbf{1\text{-}(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{(2-2)} & \textbf{3-4} & \textbf{(0-6)} & \textbf{1-0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4
L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{3-(3*1)} & \textbf{0-(3*2)} & \textbf{1-(3*3)} & \textbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{3-3} & \textbf{0-6} & \textbf{1-9} & \textbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...

1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \textbf{0} & \textbf{-4} & \textbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \textbf{0} & \textbf{4} & \textbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \textbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \textbf{-4} & 4 \\ \textbf{0} & \textbf{0} & \textbf{0} & \textbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Suppérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \textbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{0} & \textbf{0} & -4 & 4 \\ \textbf{0} & \textbf{0} & \textbf{0} & 24 \end{pmatrix}$$

1*(-1)*(-4)*24=**96**
S= det(A) = **96**

1.5 Autres Méthode

Elimination en matrice 3*3

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & \textbf{2} & \textbf{3} & \textbf{0} \\ \textbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{0} & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{0} & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * (\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2*2

$$A = 1 * ((-1) * (\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}) - (-2) * (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}) + 3 * (\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}))$$

Mise en équation

$A = 1 * ($
$+ (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1))$
$- (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1))$
$+ 3 * ((1 * 8) - (6 * 6))$
$)$

$A = 1 * ($
$+ (-1) * ((12) - (8))$
$- (-2) * ((2) - (6))$
$+ 3 * ((8) - (36))$
$)$

$A = 1 * ((-1 * 4)$
$(2 * (-4))$
$(3 * (-28))$
$)$

4−(−8)−(−84)=**96**
S= det(A) = **96**

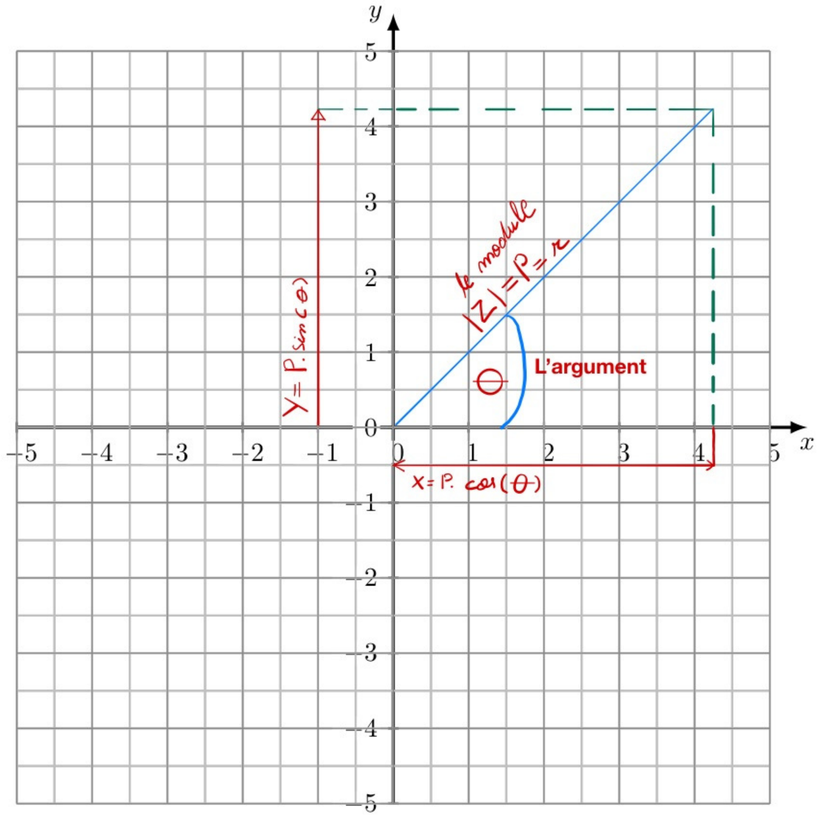
Chapitre 2: Nombres Complexes

2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module

le module noté $|Z|$ est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ($\sqrt{a^2 + b^2}$).

Représentation Géographique



Démonstration

$|Z| = \rho cos(\theta) + \rho sin(\theta) * i$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2 cos(\theta)^2 + \rho^2 sin(\theta)^2)$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2 cos(\theta)^2 + sin(\theta)) * i$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2)$
$|Z| = \rho$

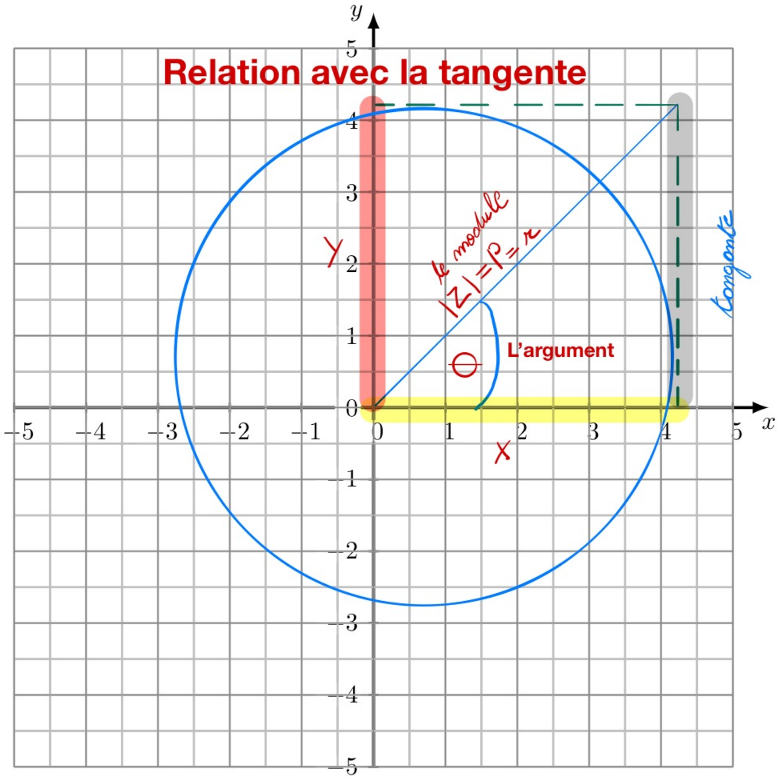
ρ est le module et θ est l'argument
$Z = P(cos(\theta) + sin(\theta) * i)$ ou $Z = P(cis(\theta))$

2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Démonstration Géométriquement

Nous pouvons voir que θ est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangeante au cercle de rayon X.



$X = \rho * cos(\theta)$ $Y = \rho * sin(\theta)$

Démonstration Algébriquement

$\frac{Y}{X} = \frac{\rho * sin(\theta)}{\rho * cos(\theta)}$
$\frac{Y}{X} = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$
$\frac{Y}{X} = \mathrm{tg}(\theta)$

Conclusion

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$

2.3 Conversion cartésienne/polaire - exponentielle

tout nombre complexes peut s'écrire sous la formes : $\rho * e^{i\theta}$

Ecriture cartésienne

$1 + \sqrt{3}i$ = x + yi

Etape 1 : Trouver ρ (calcul du module)

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$\rho = \sqrt{1 + 3}$

$\rho = \sqrt{4 => 2^2}$

$\rho = 2$

Etape 2 : Trouver θ (calcul de l'argument)

$\theta = artg(\frac{y}{x})$

$\theta = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})$

$tg(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$tg(\theta) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}$

$tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3})$ ou $artg(\frac{\pi}{6})$

$tg(\theta) = \frac{\pi}{6}$

Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle

$2e^{\frac{\pi}{6}i}$

2.4 Conversion exponentielle - polaire/cartésienne

Ecriture exponentielle

$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

Simplification

$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

$e^1 + e^{\frac{\pi}{2}i}$

$e * cis(\frac{\pi}{2})$

$e * (cos(\frac{\pi}{2}) + i * sin(\frac{\pi}{2}))$

$e * (cos(\frac{\pi}{2}) + i * sin(\frac{\pi}{2}))$

$e * (0 + i * 1)$

$e * i$

2.5 Nombre Complexes addition

$(4 * cis(45°)) + (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2 cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5cos(45° - 60°)}$

$\rho = \sqrt{41 + 40 * 0,96592582628}$

$\rho = \sqrt{79,6370330512}$

$\rho = 8,923958373457376$

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 sin(\theta_1) + \rho_2 sin(\theta_2)}{\rho_1 cos(\theta_1) + \rho_2 cos(\theta_2)})$

$\theta = arctg(\frac{4sin(45°) + 5sin(60°)}{4cos(45°) + 5cos(60°)})$

$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2}) + 5\frac{1}{2}})$

$\theta = arctg(1.3434647741399612)$

$\theta = arctg(53.3380661°)$

Solution

$|Z| = 8,923cis(53.338°)$

2.6 Nombre Complexes soustraction

$(4 * cis(45°)) - (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$

Calcul du modules

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * cos(45° - \frac{\pi}{3})}$

$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 40 * cos(45° - 60°)}$

$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * 0,965925826}$

$\rho = \sqrt{79,637033052}$

$\rho = 8,923958374$

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) - \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) - \rho_2 * cos(\theta_2)})$

$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) - 5 * sin(\frac{\pi}{3})}{4 * cos(45°) - 5 * cos(\frac{\pi}{3})})$

$tg(\theta) = \frac{4 * sin(45°) - 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) - 5 * cos(60°)}$

$tg(\theta) = \frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{1}{2} - 5 * \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$tg(\theta) = \frac{2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}}$

$tg(\theta) = \frac{\frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2}}{\frac{4 - 5\sqrt{3}}{2}}$

$tg(\theta) = \frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{4 - 5\sqrt{3}}$

$tg(\theta) = -\frac{(4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) * (4\sqrt{2} - 5\sqrt{3})}{59}$

$tg(\theta) = -\frac{(16\sqrt{2} + 20\sqrt{6} - 20\sqrt{3} - 75)}{59}$

$tg(\theta) = 0,644471$

$tg(\theta) = 36,93°$

Solution

$|Z| = 8,923958374 * cis(36,93°)$

2.7 Nombre Complexes multiplication

$(4 * cis(45°)) * (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$

$|Z| = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + i * (sin(\theta_1 + \theta_2)))$

$|Z| = (\rho_1\rho_2) * cis(\theta_1 + \theta_2)$

Calcul du modules

$\rho = \rho_1\rho_2$

$\rho = 4 * 5$

$\rho = 20$

Calcul de l'argument

$\theta = \theta_1 + \theta_2$

$\theta = 45° + \frac{\pi}{3}$

$\theta = 45° + 60°$

$\theta = 105°$

Solution

$|Z| = 20 * cis(105°)$

2.8 Nombre Complexes division

$\frac{(4*cis(45°))}{(5*cis(\frac{\pi}{3}))}$

$|Z| = (\frac{\rho_1}{\rho_2}) * cis(\theta_1 - \theta_2)$

Calcul du modules

$\rho = \frac{4}{5}$

Calcul de l'argument

$\theta = 45° - \frac{\pi}{3}$

$\theta = 45° - 60°$

$\theta = -15°$

Solution

$|Z| = \frac{4}{5} * cis(-15°)$

Chapitre 3: Chaptire 3 : Logique

3.1 Logique propositionnelle

Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux :

1) Principe d'identité : A=A

2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose ¬A et A

3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister A ou ¬A

3.1.1 Proposition

C'est un énoncé, une phrase simple :
ex : Ceci est une vidéos => Vrai ou Faux

En logique propositionnelle les propositions ne peuvent qu'être vrai ou fausse

exemple de proposition :
2+2 => Vrai ou Faux
Le mur est blanc => Vrai ou Faux

3.1.2 L'implication

Si j'ai une proposition A alors B

Exemple :
Une paire de chaussure => j'ai 2 chaussures
Une paire de chaussure implique que j'ai 2 chaussures
A=>B : Faux (une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes)
Si A est vrai alors B est vrai
si B est vrai alors A n'est pas forcément vrai

3.1.3 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.
A=B : vrai
Si A est vrai alors B est vrai
si B est vrai alors A est vrai

3.1.4 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois
Tautologie : toujours vrai
prédicats : Pour tout il existe

3.1.5 Tableau priorités logique

Opérateur	Logic	priorités	Associativités .
<=>	Equalité	1	gauche
=>	Implications	2	droite
V	OU	3	gauche
∧	ET	4	gauche
¬	NON	5	gauche

3.1.6 Tautologie

P	¬ P	P V ¬P
T	T	⊥
⊥	T	T

3.1.7 Changement de forme

Commutativité :
pvq = qvp
p∧q = q∧p

Associativités :
(pvq)vr = pv(qvr)
(p∧q)∧r = p∧(q∧r)

Distributivités :
pv(q∧r) = (pvq)∧(pvr)
pv(qvr) = (p∧q)v(p∧r)

De Morgans :
a v b= ¬a * ¬b
a*b= ¬a + ¬b
(p∧q) = ¬p v ¬q
(pvq) = ¬ (¬p ∧ ¬q)
¬(p∧q) = (p v q)
(A ∧¬ B) V (¬ A V (C ∧ A)) = ¬(A ∧¬ B) ∧ ¬(¬ A V (C ∧ A))

Forme disjonctive :

$(A \wedge B)$ V C
(A ET B) OU C

Forme conjonctive :
(A V B) $\wedge$ C
(A OU B) ET C

Transformation :
A=>B = $\neg$A v (A$\wedge$B)
A<=>B : = (A=>B)$\wedge$(B=>A)
(A=>B)$\wedge$(B=>A) = ($\neg$A v (A$\wedge$B)) $\wedge$ ($\neg$B v (B$\wedge$A))

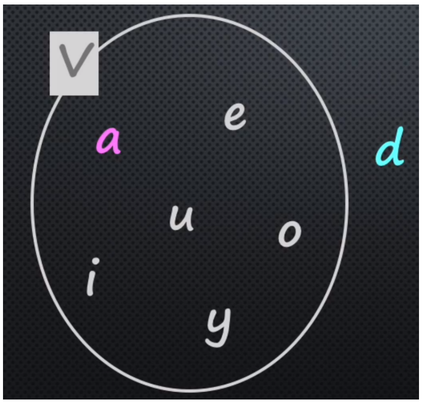
3.2 Théorie naïve des ensembles

3.2.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appellés éléments de cet ensemble.
un objet particulier appartient ($\in$) ou n'appartient pas ($\notin$) à un ensemble donné.

Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles : V={a,e,i,o,u,y}

a $\in$ V : a appartient à l'ensemble V
d $\notin$ V : d appartient à l'ensemble V

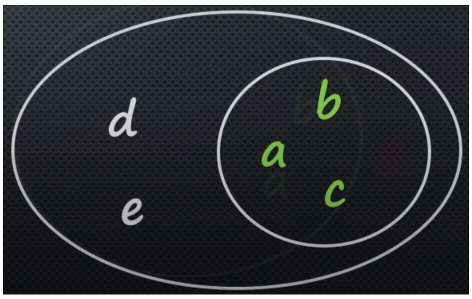


3.2.2 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté A=B), si tout les éléments de A appartient à B.
Autrement dit (X$\in$A) et que (X$\in$B).

3.2.3 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté A$\subset$ B), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit (X$\subset$A) et que (X$\subset$B).



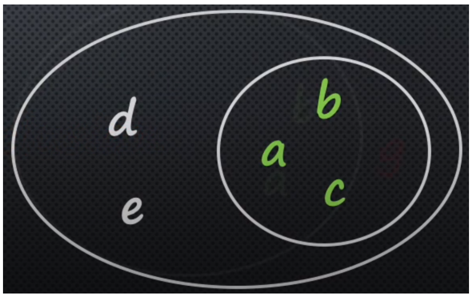
On peut dire que {a,b,g}$\in${a,b,d,e}

3.2.4 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A (A$\in$B)
- b. Anti-Symétrique : (A$\in$B) et (B$\in$A) => A=B
- c. Transitivité : (A$\in$B) et (B$\in$C) => (A$\in$C)

3.2.5 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté A⊂ B), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit (X⊂A) et que (X⊂B).



On peut dire que {a,b,g}∈{a,b,d,e}

3.2.6 Opération d'union (∪)

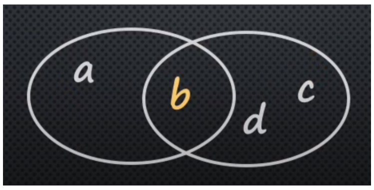
1) L'union de 2 ensembles
A= {a,e} et B = {b,c,d}

C = A ∪ B = {a,e,b,c,d}

3.2.7 Opération d'intersection (∩)

2) L'intersection de 2 ensembles

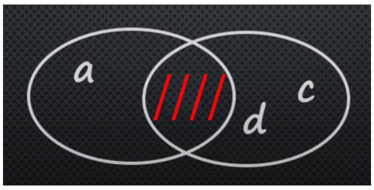
Soient A et B deux ensembles, on appelle (A∩B) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B
A= {a,b} et B = {b,c,d}



C = A ∩ B = {b}

3.2.8 L'ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles.
Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



$C = A \cap B = \{b\}$

3.2.9 La cardinalité

Soit A un ensemble, Si A possède exactement N éléments ($n \in \mathbb{N}$), A est un ensemble fini de cardinalité N.
Noté $|A|$ = n

$|1, 2, 3| = 3$
$|\oslash| = 0$
$|\{\oslash\}| = 1$

3.2.10 Identité

$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

3.2.11 Commutativité

$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

3.2.12 Associativité

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

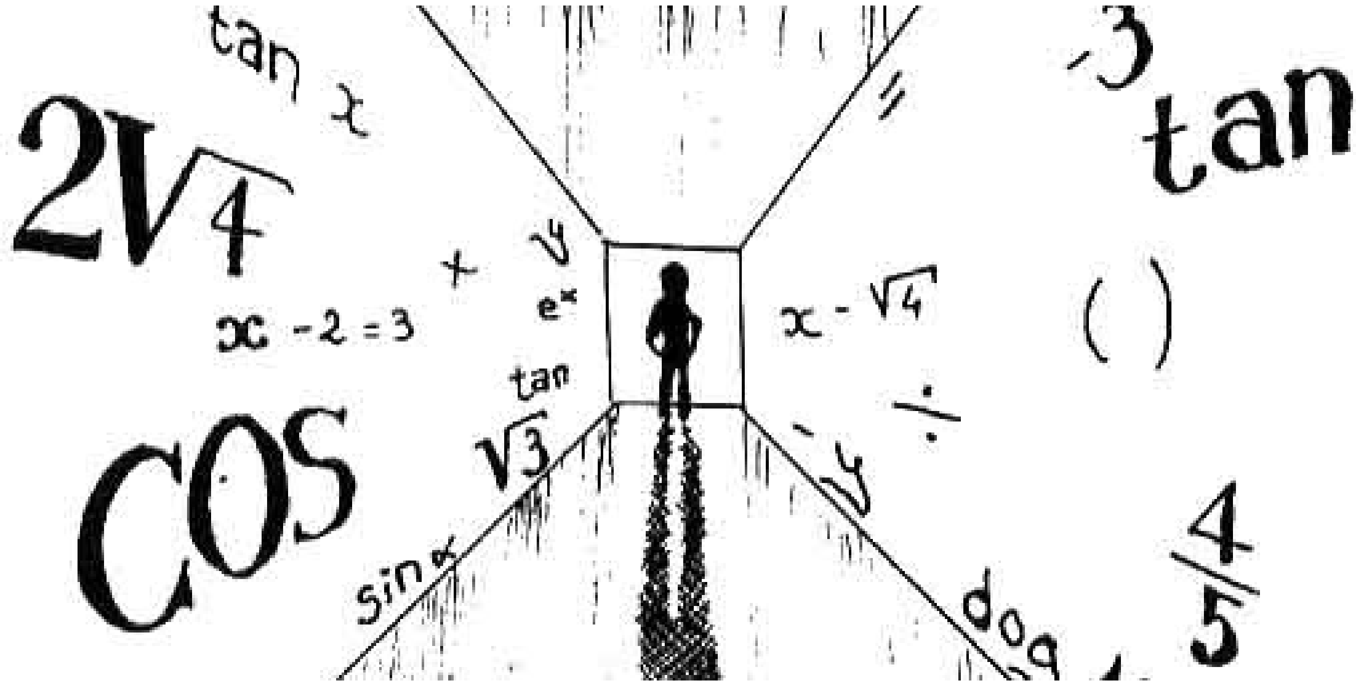
3.2.13 Distributivité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3.2.14 De Morgans

$\neg(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \neg\mathrm{A} \cap \neg\mathrm{B})$
$\neg(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \neg\mathrm{A} \cup \neg\mathrm{B})$

Mathématiques Exercices



3.3 Exercice Matrices

3.3.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A) **Calculer B*C**

B) **Calculer la trace de A**

C) **Calculer la transposée de B**

D) **Calculer 2,5*C**

E) **Calculer** $B^t + C$

F) **Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)**

G) **Calculer le déterminants de A**

H) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

I) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

J) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

K) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

3.3.2 Résolution des exercices

A) Calculer B*C

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale. La trace de la matrice A = 0+2+0+2 = 4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \mathbf{2} & 3 & 0 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & 0 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

C) Calculer la transposée de la matrice B La transposée de la matrice est d'intervertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

D) Calculer 2,5*C

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t +C = 2*C = C+C

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Déplacement 3D

R=10u H=300l où L=40cm + hauteur du casier
P=$((\frac{3}{5}) * R < R)$
$\theta = 0$ Z= $R + (\frac{B}{100} * R) = R + (\frac{2}{100}) * R = 20cm$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (cos(45) - sin(45) & 0 \\ sin(45) - cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3
L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2\text{-}(1*2)} & \mathbf{3\text{-}(2*2)} & \mathbf{0\text{-}(2*3)} & \mathbf{1\text{-}(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2\text{-}2} & \mathbf{3\text{-}4} & \mathbf{0\text{-}6} & \mathbf{1\text{-}0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4
L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}(3*1)} & \mathbf{0\text{-}(3*2)} & \mathbf{1\text{-}(3*3)} & \mathbf{2\text{-}(3*0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}3} & \mathbf{0\text{-}6} & \mathbf{1\text{-}9} & \mathbf{2\text{-}0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Suppérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

1*(-1)*(-4)*24=**96**

S= det(A) = **96**

H) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Simplification de la matrice

$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ 9 & 9,5 & -9,5 & \mathbf{b} \\ 4 & 8 & 16 & \mathbf{32} \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 3*3

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices 2*2

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9.5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} -5 * \begin{pmatrix} 9 & -9.5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} +6 * \begin{pmatrix} 9 & 9.5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \ )$$

Calcul du déterminant des sous matrices

8*(
1*((9,5*16)-(8*-9,5))
-5*((9*16)-(4*-9,5))
+6*((9*8)-(4*9,5)))

Simplification des calculs

8*(1*(152 – (-76))
-5*(144 – (-38))
+6*(72 – 38))

Mise en équation et résolution

8*(228 -5*(182) + 6*(34))
8*(228 - 910 + 204)
8*(228 + 204 - 910)
8*(432 - 910)
8*(-478) = -3824

det(A) = **-3824**

I) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 1337 \\ b & 42 \\ c & 8086 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer la multiplication

$$\begin{pmatrix} a*2+1337*4 & a*5+1337*0 & a*6+1337*4 \\ b*2+42*4 & b*5+42*0 & b*6+42*4 \\ c*2+8086*4 & c*5+8086*0 & c*6+8086*4 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 3*2+1337*4 & 3*5 & 3*6+1337*4 \\ 10*2+42*4 & 10*5 & 10*6+42*4 \\ 5*2+8086*4 & 5*5 & 5*6+8086*4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5354 & 15 & 5366 \\ 188 & 50 & 228 \\ 32354 & 25 & 32374 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des matrices 2*2

$$+5354*(\begin{pmatrix} 50 & 228 \\ 25 & 32374 \end{pmatrix}) -15*(\begin{pmatrix} 188 & 228 \\ 32354 & 32374 \end{pmatrix}) +5366*(\begin{pmatrix} 188 & 50 \\ 32354 & 25 \end{pmatrix})$$

+5354 *((50*32374) - (228*25))

-15 *((188*32374) - (32354*228))

+5366 *((188*25) - (32354*50))

+5354 *((1618700) - (5700))

-15 *((6086312) - (7376712))

+5366 *((4700) - (1617700))

8 636 002 000 + 19 356 000 - 8 655 358 000

8 655 358 000 - 8 655 358 000 = **0**

J) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} +(-1)* \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -40 & 0 & -1 \\ -b & -80 & -1 & -2 \\ -c & -62 & -2 & 0 \\ -d & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Réalisation de l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a & 5-40 & 6 & 7-1 \\ -b & -80 & -1 & 8-2 \\ 9-c & 9.5-62 & -9.5-2 & b \\ 4-d & 8 & 16-1 & 32-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ -10 & -80 & -1 & 6 \\ 4 & -52.5 & -11.5 & 10 \\ 2 & 8 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Méthodes du pivot de Gauss

L2 = L2-(-5)*L1=(0 -255 -31 36)
L3 = L3-(-2)*L1=(0 -122.5 0.5 22)
L4 = L4-(-1)*L1=(0 43 9 24)

$$\begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ 0 & -255 & 29 & 36 \\ 0 & -122.5 & 0.5 & 22 \\ 0 & 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des sous matrice 2*2

$$-2* \begin{pmatrix} -255 & 29 & 36 \\ -122.5 & 0.5 & 22 \\ 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

-2*($+(-255)* \begin{pmatrix} 0.5 & 22 \\ 9 & 24 \end{pmatrix} (-29)* \begin{pmatrix} 122.5 & 22 \\ 43 & 24 \end{pmatrix} (36)* \begin{pmatrix} 122.5 & 0.5 \\ 43 & 9 \end{pmatrix}$)

-2 *(-255* (12-198) -29* ((-2940) - (946)) +36* ((-1102.5) - 21.5))
47430 + 112694 - 40464= 119660

K) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 5 & 1 \\ c & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'addition

$$\begin{pmatrix} a+4 & 2+5 & 6 \\ b+4 & 5 & 1+4 \\ c+a & 6+b & 2+c \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Calcul du déterminant

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$+7*(\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}) \; -7*(\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}) \; +6*(\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix})$$

+7 *((5*7) - (16*5))

-7 *((14*7) - (8*5))

+6 *((14*16) - (8*5))

+7 *(-45) -15 *(58) + 6 *(184)

1104-406-315 = 383

3.4 Nombres Complexes Exercices

3.4.1 Exercices : Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes

- a. $x^2+1=0$
- b. $3x^2+7=0$
- c. $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d. $-x^2-3x=3$
- e. $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f. $x^4 + 15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de

- a. -11-8i
- b. -0.3333i + 1
- c. $cos(\omega t) + sin(\omega t)i$

3) Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a. 0
- b. -6+i
- c. i^2
- d. $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme a+bi

- a. (4-8i)-(3+2i)
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$
- f. $\frac{3+6i}{(3-4i)}$
- g. $(\frac{1+i}{2-i})^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$
- h. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

- i. Nombre de modules 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
- j. Nombre de modules 3 et d'argument $\frac{-\pi}{8}$

5) Exprimer sous forme Polaire

- a. 3-$\sqrt(3i)$
- b. -1+1i

6) Exprimer sous forme cartésienne

- a. 4cos(45) + sin(45)i
- b. $5cis(\frac{\pi}{3})$

7) Trouver la solution de

- a. 4cis(45°)+5cis($\frac{\pi}{3}$)
- b. 4cis(45°)*5cis($\frac{\pi}{3}$)

8) Déterminer le module et l'argument

- a. $e^{e^{ia}}$ et $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

3.4.2 Résoudre les équations suivantes :

A. $x^2+1 = 0$

x^2+1-1=0-1
x^2= -1
x=$\sqrt{-1}$
S = x=i

B. $3x^2+7 = 0$

$3x^2$+7-7=0-7

$\frac{3x^2}{3}$= $\frac{-7}{3}$

x^2 = $\frac{-7}{3}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3} * -1}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\ \sqrt{-1}$
S = $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\ \sqrt{-1}$

C. $\frac{x^2}{2}$ -x = -2

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{x}{1}$ = - $\frac{2}{1}$

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{2x}{2}$ = - $\frac{4}{2}$

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{2x}{2}$ = - $\frac{4}{2}$

x^2 - 2x = -4
x^2 - 2x + 4 = (-4)+4
x^2 - 2x + 4 = 0

$\frac{-2+-\sqrt{(-2)^2-4*1*4}}{2*1}$
$\frac{-2+-\sqrt{4-16}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{-12}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{4*(-3)}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{(2)^2*(-3)}}{2}$
S= -1 +- 1 $\sqrt{-3}$

D. -x^2-3x = 3

-x^2-3x -3 = 3-3
-x^2-3x -3 = 0

$\frac{-3+-\sqrt{(3)^2-4*1*3}}{2*1}$

$\frac{-3+-\sqrt{9-12}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{-3}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{3*(-1)}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{3}*\sqrt{-1}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{3}i}{2}$ = -$\frac{3}{2} + -\sqrt{\frac{3}{2}i}$

E. x^3+7x^2+9x+63 = 0

x^2+(x+7)+9(x+7)=0

(x+7)*(x^2+9)=0

Poser les CE pour que (x+7) ou (x^2+9) vaut 0

Résoudre pour (x+7)=0

x=-7

(x^2+9)=0

x^2=-9

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$

$x = 3\sqrt{-1}$

$x = 3i$

S= X vaut -7 ;3i

F. x^4 +15x² = 16

x^4+15x^2-16=0

Poser t = x^2

t^2+15t-16=0

t*(t+16)-(t+16) = 0

(t+16)*(t-1)=0

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

- t+16=0
- t-1=0

(t+16) = 0

t = (-16)

Restituer t=x^2

x^2=-16

$x = \sqrt{-16}$

$x = \sqrt{16 * (-1)}$

$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$

$x = 4\sqrt{-1}$

x=4i

t-1=0
t=1

Restituer t=x^2

x^2=1
$x = \sqrt{1}$
x=1

S = 1 ; 4i

3.4.3 Trouver le conjugués :

- a. -11-8i = -11+8i
- b. -0.3333i + 1 = 1+0.3333i
- c. $cos(\omega t) + sin(\omega t)i = cos(\omega t) - sin(\omega t)i$

3.4.4 Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a. 0 : $\mathbb{R}$=0 $\mathbb{I}$=0
- b. -6+i : $\mathbb{R}$=(-6) $\mathbb{I}$=1
- c. i^2 : $\mathbb{R}$=(-1) $\mathbb{I}$=0
- d. $\frac{1+i}{2}$: $\mathbb{R}$=($\frac{1}{2}$) $\mathbb{I}$=($\frac{1}{2}$)

3.4.5 Exprimer sous forme a+bi

- a. (4-8i)-(3+2i) : 1-10i
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$: $\frac{23-11i}{26}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$: 47+32i
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$: $\frac{9-13i}{125}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$: 2-$\frac{1}{2}i$

f. $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

Etape 1 : Binomes conjugués

$$\frac{3+6i}{(3-4i)} * \frac{3+4i}{(3+4i)} = \frac{9+12i+18i+24i^2}{9-16i^2}$$

Etape 2 : Par définition $i^2 = (-1)$

$$\frac{9+30i+(24*(-1)}{9-16*(-1)} = \frac{9+30i+(-24)}{9-(-16)}$$

$$\frac{9+(-24)+30i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25}$$

Etape 3 : Factoriser

$$\frac{5*(-3+6i)}{5*5} = \frac{(-3+6i)}{5}$$

Etape 4 : Exprimer sous la forme a+bi

$$\frac{-3}{5} + \frac{6i}{5}$$

g. $(\frac{1+i}{2-i})^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

Etape 1 : utilisation de $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} * i)$ - $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} * i$

Etape 2 : Mise au même dénominateur

$(\frac{1}{25} + \frac{6}{25} * i)$ - $\frac{9}{25} * (-1)$ - $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

$(\frac{-23}{25} + \frac{6}{25} * i) + \frac{6}{5}i$

$\frac{-23}{25} + \frac{36}{25}i$

h. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

Etape 1 : Réduire au même dénominateur (1-i)*(1+i)

$\frac{(1+i)*(2+5i)+(1-i)*(2-5i)}{(1-i)*(1+i)}$

Etape 2 : Distributivités

$\frac{2+2i+5i+5i^2+2-2i-5i+5i^2}{1-i+i-i^2}$

$\frac{4+10i^2}{1-i^2}$

Etape 3 : Par définition $i^2 = -1$

$\frac{4+(10*(-1))}{1-(1*(-1))}$

$\frac{4-10}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

i. Nombre de modules 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

$|Z| = 2 * cis(\frac{\pi}{3})$

$X = \rho * cos(\theta) => X = 2 * cos(\frac{\pi}{3})$
$Y = \rho * sin(\theta) => Y = 2 * sin(\frac{\pi}{3})$

$X = 2 * \frac{1}{2} = 1$
$Y = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$

Exprimer sous la forme a+bi

$S = 1 + \sqrt{\frac{6}{2}}i = 1 + \sqrt{3}i$

j. Nombre de modules 3 et d'argument $\frac{-\pi}{8}$

DEMANDER EXPLICATION

3.4.6 Exprimer sous forme polaire

a. 3-$\sqrt{3i}$

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(\frac{-\sqrt{3}}{3})$
$\theta = -30°$
$\theta = -30° + 360°$
$\theta = 330°$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$\rho = \sqrt{9+3}$
$\rho = \sqrt{12 => (12 = 4*3)}$
$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$
$\rho = 2\sqrt{3}$

Z=$\rho * cos(\theta) * sin(\theta) * i => \rho * cis(\theta)$

Z=$2\sqrt{3} * cis(330)°$

b. -1+1i

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(-\frac{1}{1})$
$\theta = -45°$
$\theta = -45° + 360°$
$\theta = 315°$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$
$\rho = \sqrt{2}$

Z=$\rho * cos(\theta) * sin(\theta) * i => \rho * cis(\theta)$

Z=$\sqrt{2} * cis(315°)$

3.4.7 Exprimer sous forme cartésienne

a. $4cos(45°) + sin(45°) * i$

Formules
$\rho = 4 * cis(45°)$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$|Z| = a + bi$

$\frac{Y}{X} = tg(45°)$
$\frac{Y}{X} = 1$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$
$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$
$\rho = x^2 + y^2 = 16$

Notes : $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$ donc Y=X

$\rho = 2x^2 = 16$ ou $2y^2 = 16$
$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$
$\rho = x^2 = 8$
$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8 = (2 * 4)}$
$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$
$\rho = x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2}$

x=y donc $x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2i}$

Conclusion

$S = 4 * cis(45°) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2i}$

b. $5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Formules

$\rho = 5$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$|Z| = a + bi$

$\theta = tg(\frac{\pi}{3})$
$\theta = \sqrt(3)$

$x = \rho * cos(\sqrt{3}) => cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$
$y = \rho * sin(\sqrt{3}) => sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
$y = 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conclusion

Z= a+bi

$S = Z = \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3i}}{2}$

3.4.8 Trouver la solution

$a.4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * cos(45° - 60°))}$$

$$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * cos(-15°))}$$

$$\rho = \sqrt{41 + 40 * cos(-15°))}$$

$$\rho = \sqrt{81 * 0.965}$$

$$\rho = \sqrt{79.637}$$

$$\rho = 8.9239$$

Calcul de l'argument

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) + 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) + 5 * cos(60°)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2})})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338°$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338°)$$

$b.4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2(cos(45° + \theta_2) + i * sin(45° + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5(cos(45° + 60°) + i * sin(45° + 60°))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

Calcul de l'argument

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) + 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) + 5 * cos(60°)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2})})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338°$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338°)$$

3.4.9 Déterminer le module et l'argument

a. $e^{e^{ia}}$ et $e^{i\theta} + e^{2i\theta}$

DEMANDE AIDE

3.5 Logique propositionnelle exercices

3.5.1 Enoncé Exercices

1) Déterminer la véracité

P1 = 1+1=2
P2 = 1>5
P3 = 1+1=3

- a. P_1 v P_3
- b. P_2 => P_1
- c. P_3 => (p_1 v P_3)

2) Construire la Table de vérité de p_1 <=> P_2 => P_3

3.5.2 Déterminer la véracité

a. P_1 v P_3 = T
1 OU 1 = 1

b. P_2 => P_1
¬ P_2 v ($P_2 \wedge P_1$)
¬ 0 v (0 ∧ 1)
1 v (0)
1 OU 0 = 1
S = P_2 => P_1 = T

c. P_3 => ($p_1 v p_3$)
¬ P_3 v ($p_3 \wedge$ (p_1 v p_3))
p_3=0
p_1 =1 ou insertion
¬ 0 v (0 ∧ (1 v 0))
1 v (1 ∧ 0)
1 v 0 = T
1 OU 0 = 1
S= P_3 => ($p_1 v p_3$) = T

3.5.3 Construire la table de vérité

p_1 <=> P_2 => P_3

$P_2 => P_3$
$\neg$ P_2 v $(p_2 \wedge p_3)$
$\neg$ 0 v $(0 \wedge 0)$
1 v 0 = T
1 OU 0 = 1

P_1	P_2	P_3	$P_2 => P_3$
T	$\perp$	$\perp$	T

3.6 Théorie naïve des ensembles Exercices

3.6.1 Enoncé d'exercices

- a. Soit A={pi,2,e} et B={-1, 5} Calculer $|A \times B|$
- b. Soit P | A U B | A ={3,4,5} B={1,2,3}
- c. Soit A={π, 2, e} et B={-1,5} Calculer $|AUB|$

3.6.2 Résolution

A) Calculer $A \times B$

A*B = { (pi,-1),(pi,5), (2,-1),(2,5), (e,-1),(e,5) }

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {π}, {2}, {e}, {-1}, {5}}

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{π,2}, {2,e}, {e,-1}, {-1,5}, {5,π}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{π,2,e}, {2,e,-1}, {e,-1,5}, {-1,5,π}, {5,π,2}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{π,2,e,-1}, {2,e,-1,5}, {e,-1,5,π}, {-1,5,π,2}, {5,π,2,e}}

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{π,2,e,-1,5}}

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 6 + (3*5) +1 = 22

P | A U B | = 22

S=22

B) Soit P | A U B | A ={3,4,5} B={1,2,3}

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {3}, {4}, {5}, {1}, {2}, {3}}

Total des ensembles =7

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{3,4}, {4,5}, {5,1}, {1,2}, {2,3}, {3,3}}

Total des ensembles =6

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{3,4,5}, {4,5,1}, {5,1,2}, {1,2,3}, {2,3,3}, {3,3,4}}

Total des ensembles =6

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{3,4,5,1}, {4,5,1,2}, {5,1,2,3}, {1,2,3,3}, {2,3,3,4}, {3,3,4,5}}

Total des ensembles =6

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{3,4,5,1,2}, {4,5,1,2,3}, {5,1,2,3,3}, {1,2,3,3,4}, {2,3,3,4,5}, {3,3,4,5,1}}

Total des ensembles =6

6) Union des 2 ensembles a 6 membres

P(A) = {{3,4,5,1,2,3}}

Total des ensembles =1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 7 + (4*6) +1 = 32

P | A U B | = 32

S=32

c) Soit A={π, 2, e} et B={-1,5} Calculer $|AUB|$
1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {π}, {2}, {e}, {-1}, {5}}

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{π,2}, {2,e}, {e,-1}, {-1,5}, {5,π}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{π,2,e}, {2,e,-1}, {e,-1,5}, {-1,5,π}, {5,π,2}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{π,2,e,-1}, {2,e,-1,5}, {e,-1,5,π}, {-1,5,π,2}, {5,π,2,e}}

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{π,2,e,-1,5}}

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 6 + (3*5) +1 = 22

P | A U B | = 22

S=22

3.7 Nombre Entiers Exercices

3.7.1 Exemple Modulo

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que
(a+b) mod m = ((a mod m)+(b mod m)) mod m

Sélectionnez une réponse :

- ☐ a. Vrai
- ☐ b. Faux

(8+15) mod 3 = ((8 mod 3)+(15 mod 3)) mod 3
(23) mod 3 = (2+0) mod 3
2 = 2
VRAI

3.8 Relation Binaire Exercices

- a. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est un multiple de b $\}$
- b. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est $>$ b $\}$
- c. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ b est divisible a $\}$

3.8.1 Exercices Examen

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est un multiple de b $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symètrique
- ☐ e. R est symètrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI
b multiple de b = VRAI
R est réflexif

Test de la symétrie => Exemple (a=2 ou b=6)

a multiple de b = VRAI
b multiple de a = FAUX
R est n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie => (a=b) Exemple (a=3 ou b=3)

a multiple de b = VRAI
b multiple de a = VRAI
R est est anti-symétrique

Test de Transitivité => (a=b) Exemple (a=3 ou b=9 Z=18)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?
a est dans la table de 18 ? => VRAI
R est transitif

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est $>$ b $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

☐ a. R est transitif

☐ b. Aucune réponse

☐ c. R est réflexif

☐ d. R est anti-symètrique

☐ e. R est symètrique

Test de la réfléxivité

A est plus grand que A => FAUX
B est plus grand que B => FAUX
il faut que A et B soit vrai

Test de la symétrie

A est plus grand que B => VRAI
B est plus grand que A => FAUX
il faut que A et B soit vrai

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symètrique pas car A=1 B=2
R est anti-symétrique $aest > b$ car a $\neq$ b

Test de la transitivité

Si A est $>$ B et que B est $>$ Z est-ce que a $>$ Z ?
R est transitif car A est $>$ Z

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ b est divisible a $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

☐ a. R est transitif

☐ b. Aucune réponse

☐ c. R est réflexif

☐ d. R est anti-symètrique

☐ e. R est symètrique

Test de la réfléxivité

A est divisible par A => VRAI
B est divisible par B => VRAI
R est réflexif

Test de la symétrie

A est divisible par B => VRAI
B est divisible par A => FAUX
il faut que A et B soit vrai
R n'est pas symétrique

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symètrique pas car A=1 B=2
R est anti-symétrique $aest > b$ car a $\neq$ b

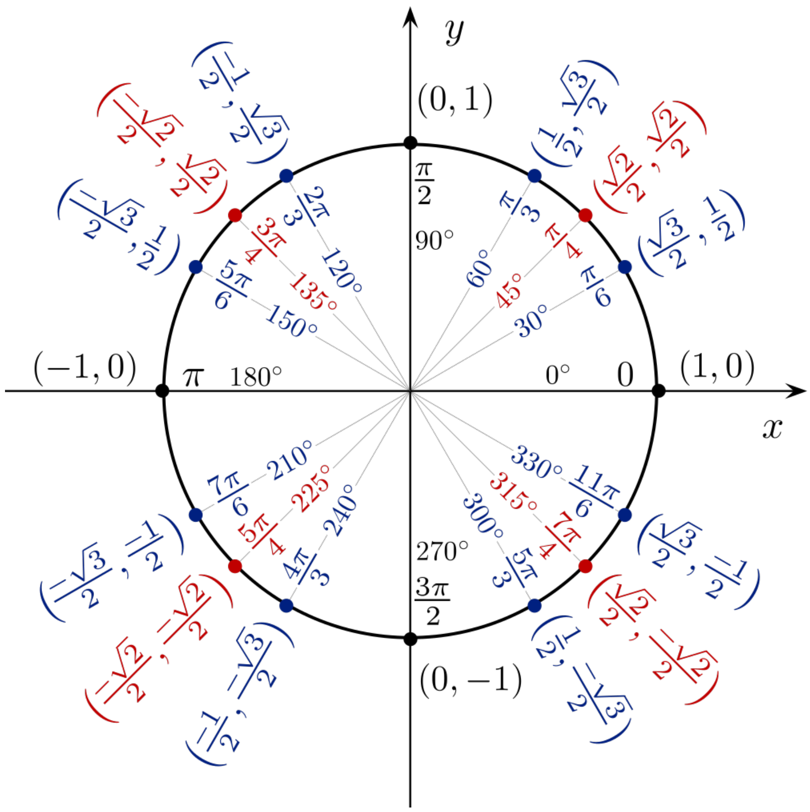
Test de la transitivité

Si A est divisible par B et que B est divisible par Z est-ce que a divisible par Z ?
R est transitif car A est divisible par Z

Chapitre 4: Formules

4.1 Tableau Trigonométrique

Degree	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotan	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



4.2 NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne

$X = \rho * cos(\theta)$
$Y = \rho * sin(\theta)$
$Z = x + yi$
Notes : $cis = cos(\theta) * sin(\theta) * i$

4.3 Addition de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) + (a+di)

(a_1+a_2) + (b_1+b_2) *i

4.4 Soustraction de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) - (a+di)

(a_1-a_2) + (b_1-b_2) *i

4.5 Multilication de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) * (a+di)

(a_1*a_2) - (b_1*b_2) + ((a_1 * b_2) + (b_1*a_2)) *i

4.6 Division de nombres complex (cartésien)

Exemple : $\frac{(a+bi)}{(a+di)}$

$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2}$ *i

4.7 NB Complex : Forme cartésienne vers polaire

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$\frac{Y}{X} = tg(\theta)$

4.8 Addition de nombres complex (Polaire)

$Exemple : 4 * cis(45°) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

4.9 Soustraction de nombres complex (Polaire)

$Exemple : 4 * cis(45°) - 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

4.10 Multilication de nombres complex (Polaire)

$Exemple : 4 * cis(45°) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

c1*c2 = ρ_1*ρ_2 *(cos(θ_1 + θ_2) + i * sin(θ_1 + θ_2))

4.11 Division de nombres complex (Polaire)

$Exemple : \frac{(a+bi)}{(c+di)}$

$\frac{c1}{c2} = \frac{r1}{r2} * cos(\theta_1 + \theta_2) + i * sin(\theta_1 - \theta_2)$

Notes : Selon l'énoncé et les préférences de chacun il est conseillé de transformer en forme polaire ou cartésien,
afin de pouvoir appliquer les formules ci-dessus.

4.12 Logique propositionnelle

De Morgans :
a v b= ¬a * ¬b
a*b= ¬a + ¬b
(p∧q) = ¬p v ¬q
(pvq) = ¬ (¬p ∧ ¬q)
¬(p∧q) = (p v q)
(A ∧¬ B) V (¬ A V (C ∧ A)) = ¬(A ∧¬ B) ∧ ¬(¬ A V (C ∧ A))

Forme disjonctive
(A ∧ B) V C
(A ET B) OU C

Forme conjonctive
(A V B) ∧ C
(A OU B) ET C

Transformation :
A=>B = ¬A v (A∧B)
A<=>B = (A=>B)∧(B=>A)
(A=>B)∧(B=>A) = (¬A v (A∧B)) ∧ (¬B v (B∧A))

4.13 Algorithmique symbole

o = meilleur des cas

O = Pire des cas

θ = Cas moyen

Θ = Meilleur des cas, cas moyen, pire des cas