T-PMTH-402 – Math. appliquées à l'info.
Chapitre 5 - Induction

Jean-Sébastien Lerat
Jean-Sebastien.Lerat@heh.be

HEH.be Sciences et technologies

Haute École en Hainaut

2019-2020

Plan

Introduction

Induction

L'**induction** est permet de définir des éléments ou propriété par récurrence.

Cas de base : prouve que la démonstration est vérifiée sur les premières valeurs possibles.

Cas général : prouve que la démonstration est vraie pour le cas général en s'appuyant sur le(s) cas de base.

Plan

Induction faible

Objectif

Prouvez qu'une propriété P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Cas de base $P(0)$.

Cas général prouvez que $\forall n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vrai, alors $P(n+1)$ est vrai.

Induction faible

Exemple d'induction faible

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0, \sum_{i \in N}^{i=n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas de base $n = 1,\ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

Cas général On suppose que

$$n-1 \in \mathbb{N}, n-1 > 0, \sum_{i \in N}^{i=n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$

est vrai pour $n-1$. Prouvons que c'est vrai pour n :

$\underline{n\ :}\ \underbrace{\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}}_{\text{par hypothèse}} + n$

Induction faible

Exemple d'induction faible

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0, \sum_{i \in N}^{i=n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas de base $n = 1, \; \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

Cas général On suppose que

$$n-1 \in \mathbb{N}, n-1 > 0, \sum_{i \in N}^{i=n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$

est vrai pour $n-1$. Prouvons que c'est vrai pour n :

$$\underline{n:} \underbrace{\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}}_{\text{par hypothèse}} + n \; = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2}$$

Induction faible

Exemple d'induction faible

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0, \sum_{i \in N}^{i=n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas de base $n = 1, \ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

Cas général On suppose que

$$n-1 \in \mathbb{N}, n-1 > 0, \sum_{i \in N}^{i=n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$

est vrai pour $n-1$. Prouvons que c'est vrai pour n :

$$\underline{n :} \ \underbrace{\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}}_{\text{par hypothèse}} + n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n + 2n}{2}$$

Induction faible

Exemple d'induction faible

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0, \sum_{i \in N}^{i=n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas de base $n = 1,\ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

Cas général On suppose que

$$n-1 \in \mathbb{N}, n-1 > 0, \sum_{i \in N}^{i=n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$

est vrai pour $n-1$. Prouvons que c'est vrai pour n :

$$\underline{n:}\ \underbrace{\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}}_{\text{par hypothèse}} + n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n+2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2}$$

Induction faible

Exemple d'induction faible

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 0, \sum_{i \in N}^{i=n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cas de base $n = 1,\ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$

Cas général On suppose que

$$n-1 \in \mathbb{N}, n-1 > 0, \sum_{i \in N}^{i=n-1} = \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}$$

est vrai pour $n-1$. Prouvons que c'est vrai pour n :

$$\underline{n:}\ \underbrace{\frac{(n-1)((n-1)+1)}{2}}_{\text{par hypothèse}} + n = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{(n+1)n + 2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Plan

Induction forte

Objectif

Prouvez qu'une propriété P est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

Cas de base $P(0)$.

Cas général Sous l'hypothèse que $P(0), \ldots, P(n)$ soient vraies, prouvez que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vrai.

Induction forte

Exemple d'induction forte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Cas de base $n = 0,\ n = 0\ \times 2^0 = 0 \times 1 = 0$

Cas général On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i, \qquad a_j \in \{0, 1\}$$

est vrai pour n.

$\underline{k > n :}$

- si k est pair alors $k = \frac{k}{2} + \frac{k}{2}$, or $\frac{k}{2} < k$ car $\frac{k}{2} \in \mathbb{N}$

Induction forte

Exemple d'induction forte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Cas de base $n = 0$, $n = 0 \ \times 2^0 = 0 \times 1 = 0$

Cas général On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i, \qquad a_j \in \{0, 1\}$$

est vrai pour n.

$\underline{k > n :}$

- si k est pair alors Par hypothèse, $\forall n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i$

  en particulier $\frac{k}{2} = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i$,

Induction forte

Exemple d'induction forte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Cas de base $n = 0,\ n = 0\ \times 2^0 = 0 \times 1 = 0$

Cas général On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i, \qquad a_j \in \{0, 1\}$$

est vrai pour n.

$\underline{k > n :}$

- si k est pair alors Par hypothèse, $\forall n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i$

  en particulier $\frac{k}{2} = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i$, $\frac{k}{2} + \frac{k}{2} = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i + \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i$

Induction forte

Exemple d'induction forte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Cas de base $n = 0$, $n = 0 \ \times 2^0 = 0 \times 1 = 0$

Cas général On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i, \qquad a_j \in \{0, 1\}$$

est vrai pour n.

$\underline{k > n:}$

- si k est pair alors $\frac{k}{2} + \frac{k}{2} = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i + \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i$

$$= 2 \times \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i = \sum_{j \in \mathbb{N}}^{j=d+1} a_j 2^j$$

Induction forte

Exemple d'induction forte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i, \qquad a_i \in \{0, 1\}$$

Cas de base $n = 0$, $n = 0 \ \times 2^0 = 0 \times 1 = 0$

Cas général On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < k, n = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_i 2^i, \qquad a_j \in \{0, 1\}$$

est vrai pour n.

<u>$k > n$:</u>

- si k est impair $k - 1$ est pair donc prouvé précédemment.
  $$(k-1)+1 = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i\right) + 1 = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i\right) + 2^0 = \sum_{i \in \mathbb{N}}^{i=d} a_j 2^i$$
  de $k - 1$ à k, a_0 passe de 0 à 1 (pair à impair)

Plan

Induction généralisée

Objectif

Utiliser le principe d'induction sur tous les types d'ensemble.

Pour cela, il faut définir le type d'objets à l'aide d'un schéma d'induction.

Schéma d'induction

Un **schéma d'induction** $\left(\overbrace{B}^{\textbf{Ensemble de base}}, \underbrace{R}_{\textbf{Ensemble de règles}}\right)$ définit un ensemble E s'il est construit comme :

1. $\forall e \in B, e \in E$
2. $\forall r \in R$, si $e_1, \ldots, e_n \in E$ et $e_1, \ldots, e_n \to e$, ([a]) alors $e \in E$.

a. Peut être vu comme une fonction $r(e_1, \ldots, e_n)$

Induction généralisée

Schéma d'induction

Un **schéma d'induction** ($\overbrace{B}^{\textbf{Ensemble de base}}$, $\underbrace{R}_{\textbf{Ensemble de règles}}$) définit un ensemble E s'il est construit comme :

1. $\forall e \in B, e \in E$
2. $\forall r \in R$, si $e_1, \ldots, e_n \in E$ et $e_1, \ldots, e_n \to e$, ([a]) alors $e \in E$.

a. Peut être vu comme une fonction $r(e_1, \ldots, e_n)$

Induction de $\mathbb{N}, E = \mathbb{N}$

E	B	R
$\mathbb{N}$	• $B = \{0\}$ • $B_1 = \{0\}$ • $B_2 = \{0, 1, p\}$, p est premier	$R : n \to n + 1$ $R_1 : n \to 2n$ $n \to 2n + 1$ $R_2 : n, m \to nm$

Plan

Exercices

Prouvez par induction :

1. a) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, dans $\mathbb{N}$

   b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, dans $\mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n < n!$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 3
5. $\forall n \in \{m \in \mathbb{N} | m \geq 2\}$, n est le produit de nombres premiers

Soit le schéma d'induction (B, R) où $B = \{\epsilon\}$ et R contient les règles suivantes :

$$u, v \to uavb$$

$$u, v \to ubva$$

Montrez que

1. le schéma permet d'engendrer les mots de formes $x\mathbf{a}y\mathbf{b}$
2. le schéma engendre exactement les mots ayant autant de **a** que de **b**
3. il y a deux manières d'engendrer **baba**

Solution

Prouvez par induction :

1. a) $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$, dans $\mathbb{N}$

Induction faible, cas de base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0}(2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (0+1)^2 = 1^2 = 1$$

Cas général n : sous l'hypothèse de $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1) = (n-1+1)^2 = n^2$:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)}_{\text{par hypothèse d'induction}} + (2n+1) = n^2 + (2n+1) =$$

$$(n+1)(n+1) = (n+1)^2$$

Solution

Prouvez par induction :

1. b) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, dans $\mathbb{N}$

Induction faible, cas de base $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} 2^k = 2^0 = 1 \Leftrightarrow 2^{0+1} - 1 = 2^1 - 1 = 1$$

Cas général n : sous l'hypothèse de $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^{(n-1)+1} - 1 = 2^n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k}_{\text{par hypothèse d'induction}} + 2^n = (2^n - 1) + 2^n = 2 \times 2^n - 1 =$$

$$2^1 \times 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$$

Solution

Prouvez par induction :

2. $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$

   Cas de base 0 : $0 < 1$,

   Cas de base 1 : $1 < 2$.

   Cas général n :

$$\overbrace{n - 1 < 2^{n-1}}_{\text{par hypothèse d'induction faible}}$$

   Lorsque l'on ajoute 1 de chaque côté de l'inégalité, elle est préservée :

$$n - 1 + 1 < 2^{n-1} + 1, \qquad \text{somme d'entiers positifs}$$

   Montrons que $2^{n-1} + 1 < 2^n$ et par transitivité $n - 1 + 1 (= n)$ sera $< 2^n$. Nous savons que

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &\leq 2^{n-1} && (1) \\ 1 &< 2^{n-1} \qquad \text{car } n \geq 2 \text{ sinon cas de base} && (2) \end{aligned}$$

   En sommant les inégalités (1) et (2) (sens préservé car somme d'entiers positifs) on obtient :

   $2^{n-1} + 1 < 2^{n-1} + 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} + 1 < 2 \times 2^{n-1} \Leftrightarrow 2^{n-1} + 1 < 2^n$

Solution

Prouvez par induction :

3. $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 2^n < n!$
   Cas de base 4 : $2^4 < 4! \Leftrightarrow 16 < 24.$
   Cas général n : $\underbrace{2^{n-1} < (n-1)!}_{\text{par hypothèse d'induction faible}}$
   On veut montrer que pour n, la propriété est vérifié. Nous savons qu'en multipliant par 2, la propriété de $n-1$ est toujours valide car multiplication entière > 0 :

$$2^{n-1} \times 2 < (n-1)! \times 2, \qquad \text{car multiplication par un entier positif}$$

   Or $2^{n-1} \times 2 = 2^{n-1+1} = 2^n$ et $(n-1)! \times 2 < (n-1)! \times n$ car $n \geq 4$ et $4 > 2$. Or $(n-1)! \times n = n!$ d'où :

$$2^n < n!$$

Solution

Prouvez par induction :

4. $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ est divisible par 3
   Cas de base 0 : $0^3 - 0 = 0$ div. par 3.
   Cas de base 1 : $1^3 - 1 = 0$ div. par 3.
   Cas de base 2 : $2^3 - 2 = 6$ div. par 3.
   Notons que $n^3 - n = n[(n-1)(n+1)]$
   Cas général n :
   Par hypothèse $n-1$, $(n-1)^3 - (n-1)$ est divisible par 3.
   $\Rightarrow (n-1)[((n-1)-1)((n-1)+1)] = (n-1)[(n-2)(n)]$
   $\Rightarrow$ Soit $n-2$, soit $n-1$, soit n est divisible par 3.
   - **si** n **est divisible par** 3 alors $n^3 - n = n[(n-1)(n+1)]$ est divisible par 3 car multiple d'un multiple de 3.
   - **si** $n-1$ **est divisible par** 3 alors divisible par 3 (même raison)
   - **si** $n-2$ **est divisible par** 3 alors tout multiple de 3 additionné à $n-2$ est divisible par 3 car multiple de 3. En particulier $n-2+3$ est divisible par 3. Or $n-2+3 = n+1$ donc $n+1$ est divisible par 3, ce qui implique que $n^3 - n = n[(n-1)(n+1)]$

Solution

Prouvez par induction :

5. $\forall n > 1, n \in \mathbb{N}, n$ est le produit de nombres premiers
   Cas de base 2 : $2 = 1 \times 2$.
   Hypothèse d'induction forte, cas général n :
   Si n est divisible par q, alors n est de la forme $n = p \times q$

   - Soit $q < n$ alors $p < n$ car division/multiplication entière. Par hypothèse d'induction forte, on sait que p et q sont décomposables en un produit de nombres premiers :

$$p = \prod_{i \ premier} i, q = \prod_{j \ premier} j$$

   alors $n = p \times q = \prod_{i \ premier} i \prod_{j \ premier} j$

   - Soit $q = n$ et n n'est pas divisible par un nombre plus petit que lui-même. Alors n est de la forme $n = 1 \times n$ où n est premier (non divisible par un autre nombre).

Solution

Soit le schéma d'induction (B, R) où $B = \{\epsilon\}$ et R contient les règles suivantes :

$$u, v \to uavb$$

$$u, v \to ubva$$

Montrez que

1. le schéma permet d'engendrer les mots de formes $x\mathbf{a}y\mathbf{b}$ règle 1
2. le schéma engendre exactement les mots ayant autant de **a** que de **b** B contient le mot vide ϵ. Le mot de base ne se compose donc d'aucun a et d'aucun b. La règle 1 ajoute exactement un a et un b tout comme la règle 2. Il est possible de montrer par récurrence que le nombre de $a =$ nombre de b.
3. il y a deux manières d'engendrer **baba** Prenons $u = \epsilon$ et $v = \epsilon$, $u, v \in B$.
   1. $mot_1 = \epsilon, \epsilon \to \epsilon a \epsilon b = ab$
      $u = \epsilon, v = mot_1,$ $mot_2 = \epsilon, ab \to \epsilon b\ ab\ a = baba$
   2. $mot_1 = \epsilon, \epsilon \to \epsilon b \epsilon a = ba$
      $u = mot_1, v = \epsilon,$ $mot_2 = ba, \epsilon \to ba\ b\ \epsilon\ a = baba$