T-PMTH-402 – Math. appliquées à l'info.
Chapitre 3 - Logique

Jean-Sébastien Lerat
Jean-Sebastien.Lerat@heh.be

Sciences et technologies

Haute École en Hainaut

2019-2020

Plan

Introduction

La logique est l'étude des règles formelles que doit respecter toute argumentation correcte.

Origine Grèce antique, enseignement du discours et de la rhétorique.

Objectif formaliser les règles de *déduction* (inférence).

Syllogisme

1. Tous les hommes sont mortels
2. or x est un homme
3. donc x est mortel.

Si 1 et 2 sont vrais, les règles de la logique assurent que 3 est vrai.

Plan

Logique propositionnelle

La logique propositionnelle est un système de logique où l'argumentation est démontrée à l'aide de propositions. Ces propositions sont définies sur base de propositions atomiques combinées à l'aide de connecteurs logiques.

Proposition atomique

Une **proposition atomique** est une phrase déclarative qui est soit vrai soit fausse.

Exemples

Mons est en Belgique	Vrai
$1 + 2 = 5$	Faux

Contre exemples

Quelle heure est-il ?	est une phrase interrogative
$x + 1 = 3$	dépend de la valeur de x

Syntaxe et sémantique

propositions notées à l'aide de minuscules

constantes $\top$ signifie vrai, $\bot$ signifie faux.

connecteurs logiques $\Rightarrow$ implication, $\Leftrightarrow$, équivalence, $\wedge$ et logique, $\vee$ ou logique, $\neg$ négation et les parenthèses.

Syntaxe et sémantique

propositions notées à l'aide de minuscules

constantes $\top$ signifie vrai, $\bot$ signifie faux.

connecteurs logiques $\Rightarrow$ implication, $\Leftrightarrow$, équivalence, $\wedge$ et logique, $\vee$ ou logique, $\neg$ négation et les parenthèses.

Une formule propositionnelle *phi* suit la sémantique (sous la forme *Backus–Naur* (BNF)) suivante :

$$
\begin{aligned}
\phi &= \top \\
\phi &= \bot \\
\phi &= \phi_1 \vee \phi_2 \\
\phi &= \phi_1 \wedge \phi_2 \\
\phi &= \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \\
\phi &= \phi_1 \Leftrightarrow \phi_2 \\
\phi &= \neg\phi_1
\end{aligned}
$$

où ϕ_i est une proposition.

Syntaxe et sémantique

propositions notées à l'aide de minuscules

constantes $\top$ signifie vrai, $\bot$ signifie faux.

connecteurs logiques $\Rightarrow$ implication, $\Leftrightarrow$, équivalence, $\wedge$ et logique, $\vee$ ou logique, $\neg$ négation et les parenthèses.

Exemple de proposition

$p \Rightarrow (q \wedge r)$ p implique r et q, ou si p est vrai, alors q et r sont vrais.

$\neg(p \wedge q)$ il est faux que p et q soient simultanément vrais.

Sémantique – Ambiguïtés

Comment interpréter ces propositions

$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ $(\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3$ ou $\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \phi_3)$

$\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \Rightarrow \phi_3$ $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) \Rightarrow \phi_3$ ou $\phi_1 \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow \phi_3)$

1. précédence

Sémantique – Ambiguïtés

Comment interpréter ces propositions

$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ $(\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3$ ou $\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \phi_3)$

$\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \Rightarrow \phi_3$ $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) \Rightarrow \phi_3$ ou $\phi_1 \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow \phi_3)$

Solution : priorités et parenthèsage comme en programmation.

Soient deux opérateurs $\circ, \diamond$ qui sont respectivement de priorité[1] $p_\circ, p_\diamond$.

- Si $p_\circ > p_\diamond$ $\phi_1 \circ \phi_2 \diamond \phi_3$ est équivalent à $(\phi_1 \circ \phi_2) \diamond \phi_3$
- Si $p_\circ < p_\diamond$ $\phi_1 \circ \phi_2 \diamond \phi_3$ est équivalent à $\phi_1 \circ (\phi_2 \diamond \phi_3)$

Si $p_\circ = p_\diamond$ mais associatif gauche $\phi_1 \circ \phi_2 \diamond \phi_3$ est équivalent à $(\phi_1 \circ \phi_2) \diamond \phi_3$

1. précédence

Sémantique – Ambiguïtés

Comment interpréter ces propositions

$\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ $(\phi_1 \wedge \phi_2) \wedge \phi_3$ ou $\phi_1 \wedge (\phi_2 \wedge \phi_3)$

$\phi_1 \Rightarrow \phi_2 \Rightarrow \phi_3$ $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) \Rightarrow \phi_3$ ou $\phi_1 \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow \phi_3)$

Solution : priorités et parenthèsage comme en programmation.

Soient deux opérateurs $\circ, \diamond$ qui sont respectivement de priorité[1] $p_\circ, p_\diamond$.

Si $p_\circ > p_\diamond$ $\phi_1 \circ \phi_2 \diamond \phi_3$ est équivalent à $(\phi_1 \circ \phi_2) \diamond \phi_3$

Si $p_\circ < p_\diamond$ $\phi_1 \circ \phi_2 \diamond \phi_3$ est équivalent à $\phi_1 \circ (\phi_2 \diamond \phi_3)$

Si $p_\circ = p_\diamond$ mais associatif gauche $\phi_1 \circ \phi_2 \diamond \phi_3$ est équivalent à $(\phi_1 \circ \phi_2) \diamond \phi_3$

Exemple sur les nombres

$2 \times 3/4$ est équivalent à $(2 \times 3)/4$

1. précédence

Sémantique – Précédence

Opérateur	Priorité	Associativité
$\Leftrightarrow$	1	gauche
$\Rightarrow$	2	droite
$\vee$	3	gauche
$\wedge$	4	gauche
$\neg$	5	gauche

Sémantique – Précédence

Opérateur	Priorité	Associativité
$\Leftrightarrow$	1	gauche
$\Rightarrow$	2	droite
$\vee$	3	gauche
$\wedge$	4	gauche
$\neg$	5	gauche

Exemple d'application des priorités

$\neg a \wedge b \Rightarrow c$ est équivalent à $((\neg a) \wedge b) \Rightarrow c$

Tautologie

Tautologie

Une tautologie est une proposition qui est toujours vraie.

Exemple de tautologie

$$p \vee \neg p$$

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$

Formes normales

Forme normale conjonctive

Une formule est **en forme normale conjonctive** (FNC) si et seulement si c'est une conjonction (et logique) de propositions p atomiques, de la forme :

$$\bigwedge_i \left(\bigvee_j \left(\begin{array}{ll} p_{i,j} & \text{quand } p_{i,j} \text{ est vrai} \\ \neg p_{i,j} & \text{quand } p_{i,j} \text{ est faux} \end{array} \right) \right)$$

Forme normale disjonctive

Une formule est **en forme normale disjonctive** (FND) si et seulement si c'est une disjonction (ou logique) de propositions p atomiques, de la forme :

$$\bigvee_i \left(\bigwedge_j \left(\begin{array}{ll} p_{i,j} & \text{quand } p_{i,j} \text{ est vrai} \\ \neg p_{i,j} & \text{quand } p_{i,j} \text{ est faux} \end{array} \right) \right)$$

Formes normales

Forme normale conjonctive

Une formule est **en forme normale conjonctive** (FNC) si et seulement si c'est une conjonction (et logique) de propositions p atomiques

Forme normale disjonctive

Une formule est **en forme normale disjonctive** (FND) si et seulement si c'est une disjonction (ou logique) de propositions p atomiques

Exemple de formes normales

FNC $p \wedge (q \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee r)$

FND $p \vee (q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge r)$

Changement de forme

$$p \Leftrightarrow p \vee \bot$$
$$\top \Leftrightarrow p \vee \top$$
$$p \Leftrightarrow p \wedge \top$$
$$\bot \Leftrightarrow p \wedge \bot$$
$$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$$
$$\top \Leftrightarrow p \vee (\neg p)$$
$$\bot \Leftrightarrow p \wedge (\neg p)$$

Commutativité

- $p \vee q = q \vee p$
- $p \wedge q = q \wedge p$

Associativité

- $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Distributivité

- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Loi de De Morgan

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Changement de forme – exercices

Démontrez l'équivalence à l'aide d'une table de vérité :

- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
- $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Plan

Logique prédicats

La logique des prédicats, ou logique du premier ordre, est un système de logique qui étend la logique propositionnelle à l'aide de prédicats.

Prédicat

Un **prédicat** est une proposition paramétrés sous forme de fonction

$$P(x_1 \times \ldots \times x_n) : X_1 \times \ldots \times X_n \to \{\top, \bot\}$$

Faiblesse de la logique propositionnelle

Certains étudiants assistent à tous les cours	Vrai
Aucun étudiant assiste à un cours non intéressant	Faux
Dans toute salle d'examen, **il y a un** étudiant qui, s'il échoue, alors **tout le monde** échoue.	

$\Rightarrow$ Impossibilité d'exprimer les quantités.

Syntaxe et sémantique

Quantificateur $\forall$ « pour tout », $\exists$ « il existe ».

Propositions paramétrables par une lettre majuscule.

Variables correspondent à des propositions, lettres minuscules.

$=$ spécifie que le terme de gauche est égal au terme de droite.

La priorité des propositions paramétrables est la plus élevées et sont associatives gauches.

Les quantificateurs ont une *portée* sur toute la suite de la proposition. Lorsque la proposition est parenthésée, la portée reste au sein des parenthèses et ont la même priorité que la négation.

Exemple sous la logique des prédicats

- $\forall x, \exists y (G(x, y) = c \wedge G(y, x) = c)$
- $\forall x \neg (F(x) = c)$

Plan

Exercices – 1/3

Soient les propositions atomiques suivantes :

$$p_1 \equiv 1 + 1 = 2 \qquad p_2 \equiv 1 > 5 \qquad p_3 \equiv 1 + 1 = 3$$

1. Déterminez la véracité de
   a) $p_1 \vee p_3$
   b) $p_2 \Rightarrow p_1$
   c) $p_3 \Rightarrow (p_1 \vee p_2)$
2. Construire la table de vérité de $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Rightarrow p_3$
3. Prouvez les équivalences
   a) $p \vee p \Leftrightarrow p$
   b) $p \wedge p \Leftrightarrow p$
   c) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Le symbole $\equiv$ signifie « est définit comme »

Exercices – 1/3

Soient les propositions atomiques suivantes :

$$p_1 \equiv 1 + 1 = 2 \qquad p_2 \equiv 1 > 5 \qquad p_3 \equiv 1 + 1 = 3$$

1. Déterminez la véracité de
   a) $p_1 \vee p_3$ $\top$
   b) $p_2 \Rightarrow p_1$ $\top$
   c) $p_3 \Rightarrow (p_1 \vee p_2)$ $\top$
2. Construire la table de vérité de $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Rightarrow p_3$

p_1	p_2	p_3	$p2 \Rightarrow p_3$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

3. Prouvez les équivalences Voir slide changement de forme
   a) $p \vee p \Leftrightarrow p$ Si $p = \top$: $\top \vee \top \Rightarrow \top = \top \Rightarrow \top$ ($\top$), sinon $\bot \vee \bot \Rightarrow \bot$ ($\bot \Rightarrow \top$ est $\top$)
   b) $p \wedge p \Leftrightarrow p$ Si $p = \top$: $\top \wedge \top \Rightarrow \top = \top \Rightarrow \top$ ($\top$), sinon $\bot \wedge \bot \Rightarrow \bot$ ($\bot \Rightarrow \top$ est $\top$)
   c) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ par distributivité on a $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) = ((p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercices – 2/3

1. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ le domaine des prédicats (liste exhaustive des prédicats). Vérifiez la véracité de
   a) $\exists x, (x + 3 = 5)$
   b) $\exists x, (x + 1 = 15)$
   c) $\forall x, (x < 4)$
   d) $\forall x, (x + 10 < 25)$
   e) $\forall x, ((x > 6) \Rightarrow (x < 2))$
   f) $\exists x, ((x^2 = 121) \wedge (x > 0))$
2. Soient $x_i \in A, P(x_i, x_j)$ (toutes valeurs possibles), vérifiez les tautologies suivantes :
   a) $\forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \Leftrightarrow \exists x_2 \forall x_1 P(x_1, x_2)$
   b) $\exists x_1, \forall x_2 P(x_1, x_2) \Rightarrow \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$
   c) $\forall x, P(x) \Rightarrow \exists x, P(x)$
3. Lorsque les prédicats sont dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, vérifiez :
   a) $\forall x, \exists y, (y < x)$
   b) $\forall x_1, \forall x_2((x_1 < x_2) \Rightarrow \exists y(x_1 < y < x_2))$
   c) $\exists x, (x^2 = 2)$
   d) $\exists x, (x^2 + 1 = 0)$

Solution – 2/3

1. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ le domaine des prédicats (liste exhaustive des prédicats). Vérifiez la véracité de
   a) $\exists x, (x + 3 = 5)$ Oui, $x = 2, x \in A, 2 + 3 = 5$
   b) $\exists x, (x + 1 = 15)$ $1 + 1 \neq 15$, $2 + 1 \neq 15$, $3 + 1 \neq 15$, $4 + 1 \neq 15$ et $5 + 1 \neq 15$
   c) $\forall x, (x < 4)$, Non, $x = 4, x \in A, 4 \not< 4$
   d) $\forall x, (x + 10 < 25)$ Oui, $1 + 10 < 25$, $2 + 10 < 25$, $3 + 10 < 25$, $4 + 10 < 25$ et $5 + 10 < 25$
   e) $\forall x, ((x > 6) \Rightarrow (x < 2))$ Vrai car $\forall x \in A, x < 6$ et $\perp \Rightarrow p$ est toujours vrai
   f) $\exists x, ((x^2 = 121) \wedge (x > 0))$ Non, le seul x tel que $x^2 = 121$ est vrai est $x = 11, x \notin A$. $\perp \wedge \top$ est $\perp$

Solution – 2/3

2. Soient $x_i \in A, P(x_i, x_j)$ (toutes valeurs possibles), vérifiez les tautologies suivantes :
   a) $\forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \Leftrightarrow \exists x_2 \forall x_1 P(x_1, x_2)$ « Faux »
   b) $\exists x_1, \forall x_2 P(x_1, x_2) \Rightarrow \forall x_2 \exists x_1 P(x_1, x_2)$ « Vrai »
   c) $\forall x, P(x) \Rightarrow \exists x, P(x)$ « Vrai »
3. Lorsque les prédicats sont dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, vérifiez :
   a) $\forall x, \exists y, (y < x)$ $\mathbb{N} = \bot$, $\mathbb{Z} = \top$, $\mathbb{Q} = \top$ et $\mathbb{R} = \top$
   b) $\forall x_1, \forall x_2((x_1 < x_2) \Rightarrow \exists y(x_1 < y < x_2))$ $\mathbb{N} = \bot$, $\mathbb{Z} = \bot$, $\mathbb{Q} = \top$ et $\mathbb{R} = \top$
   c) $\exists x, (x^2 = 2)$ $\mathbb{N} = \bot$, $\mathbb{Z} = \bot$, $\mathbb{Q} = \bot$ et $\mathbb{R} = \top$
   d) $\exists x, (x^2 + 1 = 0)$ $\mathbb{N} = \bot$, $\mathbb{Z} = \bot$, $\mathbb{Q} = \bot$ et $\mathbb{R} = \bot$

Exercices – 3/3

1. Soient $P(x) = x$ est un multiple de 2 et $Q(x) = x$ est un multiple de 4 les deux prédicats de domaine $\mathbb{N}$
   a) $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$
   b) $\forall x, (Q(x) \Rightarrow P(x))$
   c) $\exists x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$
   d) $\neg(\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)))$
2. Soit $\mathbb{R}$ le domaine des prédicats. Trouvez des formules de la logique des prédicats ne faisant pas apparaître de quantificateurs ($\forall$, $\exists$) équivalentes aux formules suivantes :
   a) $\exists x, ax + b = 0$
   b) $(a \neq 0) \wedge (\exists x, ax^2 + bx + c = 0)$

   où a, b et c sont dans $\mathbb{R}$.

Exercices – 3/3

1. Soient $P(x) = x$ est un multiple de 2 et $Q(x) = x$ est un multiple de 4 les deux prédicats de domaine $\mathbb{N}$
   a) $\forall x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ Faux car $\exists n(n = 2)$, $P(2) = \top \not\Rightarrow Q(2) = \bot$
   b) $\forall x, (Q(x) \Rightarrow P(x))$ $\forall x$,
      - Si $\neg Q(x)$ alors $Q(x) \Rightarrow P(x)$ est vrai
      - Sinon $x \bmod 4 = 0$, or $4 \bmod 2 = 0 \Rightarrow x \bmod 2 \Rightarrow (Q(x) \Rightarrow P(x))$

   c) $\exists x, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ Vrai, prenons $x = 4$, $P(4) = \top$, $Q(4) = \top$. $P(4) \Rightarrow Q(4)$.
   d) $\neg(\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x)))$ Pour montrer que $\forall x(P(x) \Rightarrow \neg Q(x))$ est faux, il faut $\exists x, (P(x) \Rightarrow \neg\neg Q(x)) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$ cfr. solution précédente
2. Soit $\mathbb{R}$ le domaine des prédicats. Trouvez des formules de la logique des prédicats ne faisant pas apparaître de quantificateurs ($\forall$, $\exists$) équivalentes aux formules suivantes :
   a) $\exists x, ax + b = 0$ $a \neq 0 \wedge b = 0$ (si $b = 0$ alors $x = 0$, sinon $x = -\underbrace{\frac{b}{a}}_{a \neq 0}$)
   b) $(a \neq 0) \wedge (\exists x, ax^2 + bx + c = 0)$ $(a \neq 0) \vee (b^2 - 4ac \geq 0)$

   où a, b et c sont dans $\mathbb{R}$.