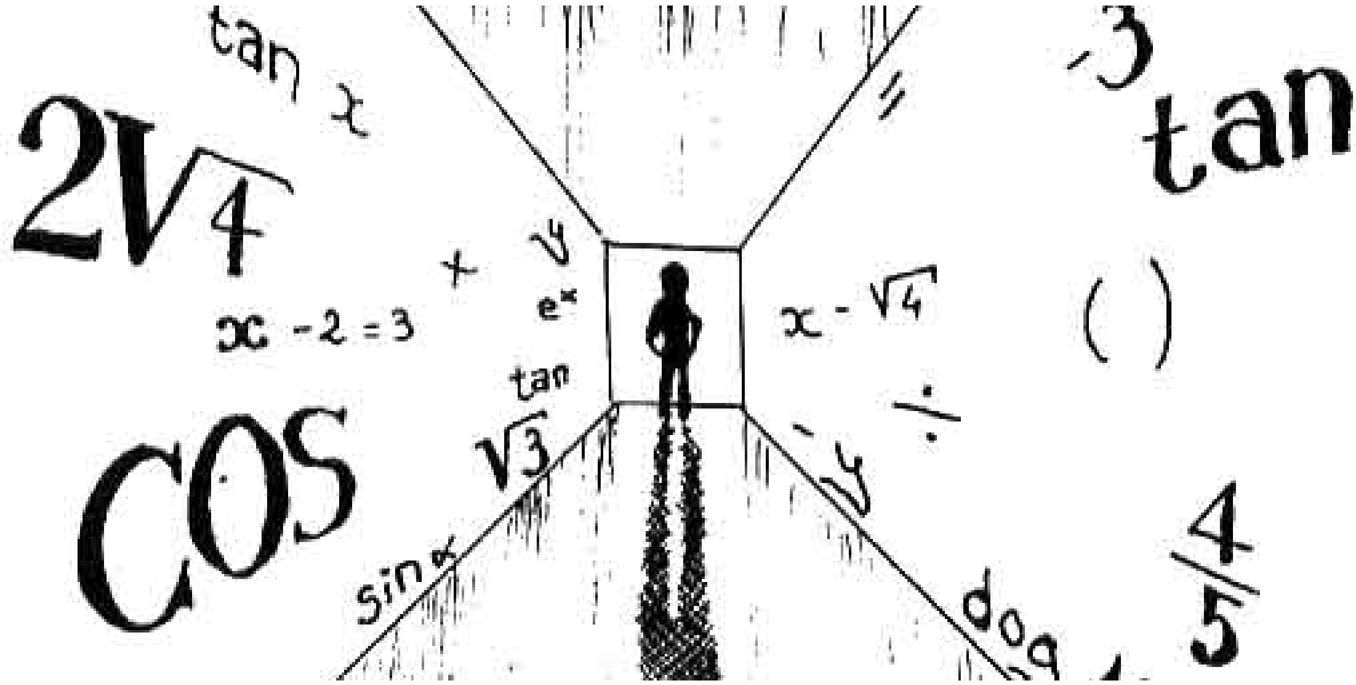
Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

Août-Septembre 2020

Table de Matières

Mathématiques Théories



Chapitre 1: Matrices Théories

1.1 Les propriétés

A) Linéarité

si on multiplie une matrice par λ, le déterminant est multiplié par λ^n et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par $\lambda = det(A) * \lambda^n$

$det(A + B) \neq det(A) + det(B)$?

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$det(A) = abetdet(B) = cd$

Conclusion :

$C = \begin{pmatrix} a + c & 0 \\ 0 & b + d \end{pmatrix}$

$det(C) = (a + c) * (b + d)$

$\lambda^n \neq$ linéaire
λ^n est exponentielle

B) Déterminant et transposée

Det(A) = det(A), les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$det(A) = \sum_{o\varepsilon s} \varepsilon(o^{-1}), ...$

$det(T_a) = \sum_{o\varepsilon s} \varepsilon(o^1), ...$

C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit det(AB) = det(A) * det(B)

$\varphi_a(x_1, ..., x_n) = det(\varphi_c)(A * 1, ..., A * N))$

D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différents de 0.

$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

1.2 Calcul du déterminants 2*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplications croisée des 2 ensembles
Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

det(A) = (1*3) - (2*4)

det(A) = (3-8)

det(A) = (-5)

S = -5

1.3 Calcul du déterminants 4*4 ou n*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Inversion de L1 avec L2

$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3
L3 - (2*L1) = L3

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2\text{-}(1*2)} & \mathbf{3\text{-}(2*2)} & \mathbf{0\text{-}(2*3)} & \mathbf{1\text{-}(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{(2\text{-}2)} & \mathbf{3\text{-}4} & \mathbf{(0\text{-}6)} & \mathbf{1\text{-}0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4
L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}(3*1)} & \mathbf{0\text{-}(3*2)} & \mathbf{1\text{-}(3*3)} & \mathbf{2\text{-}(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}3} & \mathbf{0\text{-}6} & \mathbf{1\text{-}9} & \mathbf{2\text{-}0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...

1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{\text{-}1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{\text{-}1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{\text{-}4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \textbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \textbf{0} & \textbf{4} & \textbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \textbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \textbf{-4} & 4 \\ \textbf{0} & \textbf{0} & \textbf{0} & \textbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Suppérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \textbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{0} & \textbf{0} & -4 & 4 \\ \textbf{0} & \textbf{0} & \textbf{0} & 24 \end{pmatrix}$$

1*(-1)*(-4)*24=**96**
S= det(A) = **96**

1.5 Autres Méthodes

Elimination en matrice 3*3

$$A = \begin{pmatrix} \textbf{1} & \textbf{2} & \textbf{3} & \textbf{0} \\ \textbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \textbf{0} & -1 & -6 & 1 \\ \textbf{0} & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * (\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2*2

$$A = 1 * ((-1) * (\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}) - (-2) * (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}) + 3 * (\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}))$$

Mise en équation

$A = 1 * ($
$+ (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1))$
$- (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1))$
$+ 3 * ((1 * 8) - (6 * 6))$
$)$

$A = 1 * ($
$+ (-1) * ((12) - (8))$
$- (-2) * ((2) - (6))$
$+ 3 * ((8) - (36))$
$)$

$A = 1 * ((-1 * 4)$
$(2 * (-4))$
$(3 * (-28))$
$)$

4−(−8)−(−84)=**96**
S= det(A) = **96**

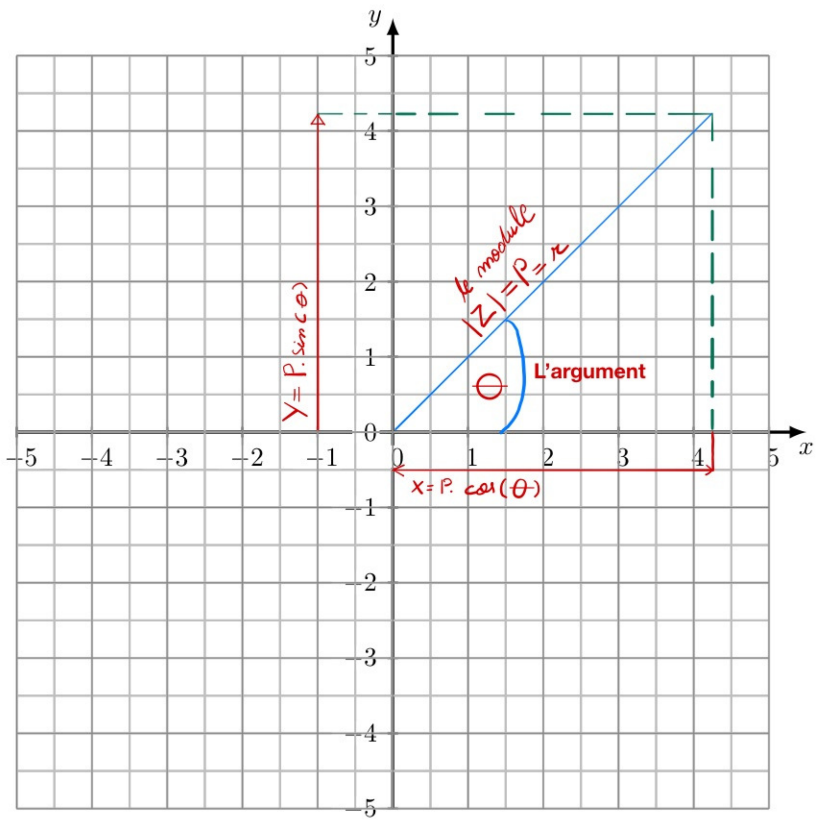
Chapitre 2: Nombres Complexes

2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module

le module noté $|Z|$ est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ($\sqrt{a^2 + b^2}$).

Représentation Géographique



Démonstration

$|Z| = \rho cos(\theta) + \rho sin(\theta) * i$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2 cos(\theta)^2 + \rho^2 sin(\theta)^2)$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2 cos(\theta)^2 + sin(\theta)) * i$
$|Z| = \sqrt{(}\rho^2)$
$|Z| = \rho$

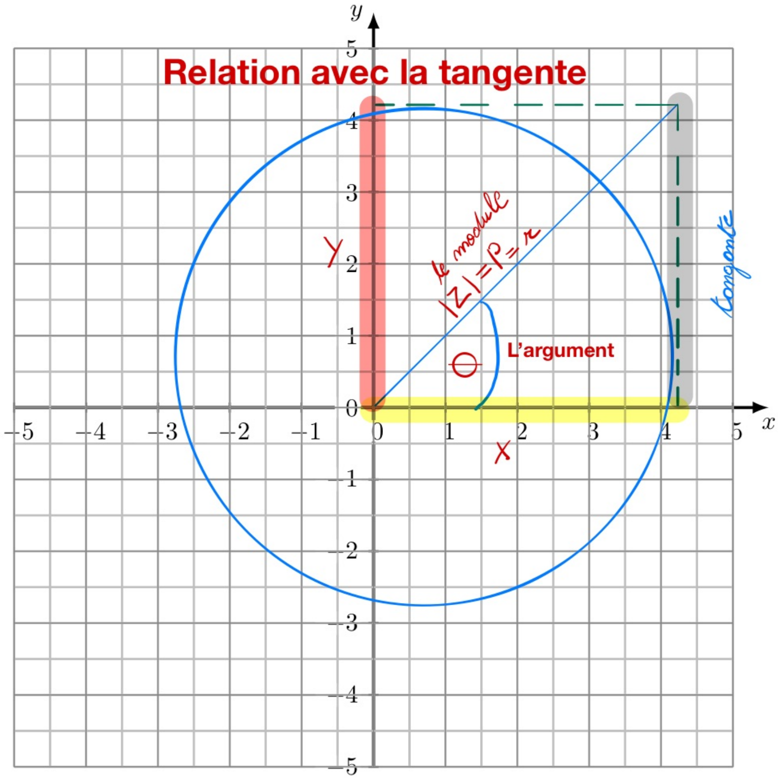
ρ est le module et θ est l'argument
$Z = P(cos(\theta) + sin(\theta) * i)$ ou $Z = P(cis(\theta))$

2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

Démonstration Géométriquement

Nous pouvons voir que θ est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangeante au cercle de rayon X.



$X = \rho * cos(\theta)$ $Y = \rho * sin(\theta)$

Démonstration Algébriquement

$\frac{Y}{X} = \frac{\rho * sin(\theta)}{\rho * cos(\theta)}$
$\frac{Y}{X} = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}$
$\frac{Y}{X} = \mathrm{tg}(\theta)$

Conclusion

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$

2.3 Conversion cartésienne/polaire - exponentielle

tout nombre complexes peut s'écrire sous la formes : $\rho * e^{i\theta}$

Ecriture cartésienne

$1 + \sqrt{3}i$ = x + yi

Etape 1 : Trouver ρ (calcul du module)

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$\rho = \sqrt{1 + 3}$

$\rho = \sqrt{4 => 2^2}$

$\rho = 2$

Etape 2 : Trouver θ (calcul de l'argument)

$\theta = artg(\frac{y}{x})$

$\theta = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})$

$tg(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$tg(\theta) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2}$

$tg(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{\pi}{6}$

$tg(\theta) = \frac{\pi}{6}$

Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle

$2e^{\frac{\pi}{6}i}$

2.4 Conversion exponentielle - polaire/cartésienne

Ecriture exponentielle

$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

Simplification

$e^{1+\frac{\pi}{2}i}$

$e^1 + e^{\frac{\pi}{2}i}$

$e * cis(\frac{\pi}{2})$

$e * (cos(\frac{\pi}{2}) + i * sin(\frac{\pi}{2}))$

$e * (cos(\frac{\pi}{2}) + i * sin(\frac{\pi}{2}))$

$e * (0 + i * 1)$

$e * i$

2.5 Nombres Complexes addition

$(4 * cis(45°)) + (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_1\rho_2 cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5cos(45° - 60°)}$

$\rho = \sqrt{41 + 40 * 0,96592582628}$

$\rho = \sqrt{79,6370330512}$

$\rho = 8,923958373457376$

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 sin(\theta_1)+\rho_2 sin(\theta_2)}{\rho_1 cos(\theta_1)+\rho_2 cos(\theta_2)})$

$\theta = arctg(\frac{4sin(45°)+5sin(60°)}{4cos(45°)+5cos(60°)})$

$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2})+5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2})+5\frac{1}{2}})$

$\theta = arctg(1.3434647741399612)$

$\theta = arctg(53.3380661°)$

Solution

$|Z| = 8,923cis(53.338°)$

2.6 Nombres Complexes soustraction

$(4 * cis(45°)) - (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$

Calcul du modules

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 cos(\theta_1 - \theta_2)}$

$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * cos(45° - \frac{\pi}{3})}$

$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 40 * cos(45° - 60°)}$

$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * 0,965925826}$

$\rho = \sqrt{79,637033052}$

$\rho = 8,923958374$

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) - \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) - \rho_2 * cos(\theta_2)})$

$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) - 5 * sin(\frac{\pi}{3})}{4 * cos(45°) - 5 * cos(\frac{\pi}{3})})$

$tg(\theta) = \frac{4 * sin(45°) - 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) - 5 * cos(60°)}$

$tg(\theta) = \frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} - 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{1}{2} - 5 * \frac{\sqrt{2}}{2}}$

$tg(\theta) = \frac{2\sqrt{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{5\sqrt{2}}{2}}$

$tg(\theta) = \frac{\frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{2}}{\frac{4 - 5\sqrt{3}}{2}}$

$tg(\theta) = \frac{4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}}{4 - 5\sqrt{3}}$

$tg(\theta) = -\frac{(4\sqrt{2} - 5\sqrt{3}) * (4\sqrt{2} - 5\sqrt{3})}{59}$

$tg(\theta) = -\frac{(16\sqrt{2} + 20\sqrt{6} - 20\sqrt{3} - 75)}{59}$

$tg(\theta) = 0,644471$

$tg(\theta) = 36,93°$

Solution

$|Z| = 8,923958374 * cis(36,93°)$

2.7 Nombres Complexes multiplication

$(4 * cis(45°)) * (5 * cis(\frac{\pi}{3}))$

$|Z| = \rho_1\rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + i * (sin(\theta_1 + \theta_2)))$

$|Z| = (\rho_1\rho_2) * cis(\theta_1 + \theta_2)$

Calcul du modules

$\rho = \rho_1\rho_2$

$\rho = 4 * 5$

$\rho = 20$

Calcul de l'argument

$\theta = \theta_1 + \theta_2$

$\theta = 45° + \frac{\pi}{3}$

$\theta = 45° + 60°$

$\theta = 105°$

Solution

$|Z| = 20 * cis(105°)$

2.8 Nombres Complexes division

$\frac{(4*cis(45°))}{(5*cis(\frac{\pi}{3}))}$

$|Z| = (\frac{\rho_1}{\rho_2}) * cis(\theta_1 - \theta_2)$

Calcul du modules

$\rho = \frac{4}{5}$

Calcul de l'argument

$\theta = 45° - \frac{\pi}{3}$

$\theta = 45° - 60°$

$\theta = -15°$

Solution

$|Z| = \frac{4}{5} * cis(-15°)$

Chapitre 3: Logique propositionnelle

Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux

1) Principe d'identité : A=A

2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose $\neg$A et A

3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister A ou $\neg$A

3.1 Proposition

En logique propositionnelle les propositions, énoncés, phrases, ne peuvent qu'être vrai ou fausse

Exemple

2+2 => Vrai ou Faux

Le mur est blanc => Vrai ou Faux

3.2 L'implication

Si j'ai une proposition A alors B

Exemple

Une paire de chaussure (implique que "=>") j'ai 2 chaussures

une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes

A=>B : Faux

Si A est vrai alors B est vrai

Si B est vrai alors A n'est pas forcément vrai

3.3 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.

A=B : vrai

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A est vrai

3.4 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois

Tautologie : toujours vrai

prédicats : Pour tout il existe

3.5 Tableau priorités logique

Opérateur	Logique	priorités	Associativités
<=>	Equalité	1	gauche
=>	Implications	2	droite
V	OU	3	gauche
$\wedge$	ET	4	gauche
$\neg$	NON	5	gauche

3.6 Implication

P	Q	P => Q
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

3.7 Equivalence

P	Q	P <=> Q
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T

3.8 Changement de forme

Commutativité

$pvq = qvp$
$p \wedge q = q \wedge p$

Associativités

$(pvq)vr = pv(qvr)$
$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$

Distributivités

$pv(q \wedge r) = (pvq) \wedge (pvr)$
$pv(qvr) = (p \wedge q)v(p \wedge r)$

De Morgans

$a \text{ v } b = \neg a * \neg b$
$a*b = \neg a + \neg b$
$(p \wedge q) = \neg p \text{ v } \neg q$
$(pvq) = \neg\ (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \wedge q) = (p \text{ v } q)$
$(A \wedge \neg B) \text{ V } (\neg A \text{ V } (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \text{ V } (C \wedge A))$

Forme disjonctive

$(A \wedge B) \text{ V } C$
(A ET B) OU C

Forme conjonctive

$(A \text{ V } B) \wedge C$
(A OU B) ET C

Transformation

$A => B = \neg A \text{ v } (A \wedge B)$
$A <=> B : = (A => B) \wedge (B => A)$
$(A => B) \wedge (B => A) = (\neg A \text{ v } (A \wedge B)) \wedge (\neg B \text{ v } (B \wedge A))$

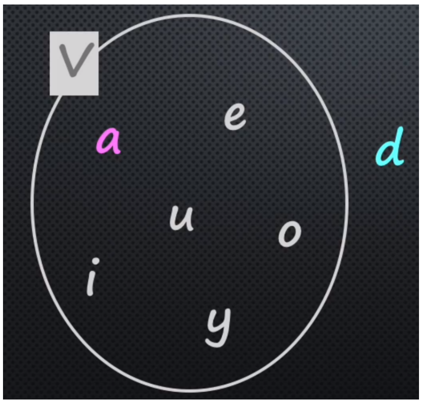
Chapitre 4: Théorie naïve des ensembles

4.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appellés éléments de cet ensemble.
un objet particulier appartient ($\in$) ou n'appartient pas ($\notin$) à un ensemble donné.

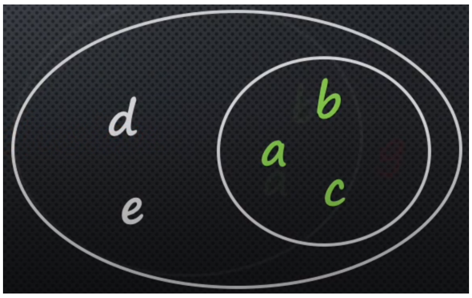
Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles : V={a,e,i,o,u,y}

a $\in$ V : a appartient à l'ensemble V
d $\notin$ V : d n'appartient pas à l'ensemble V



4.2 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté A$\subset$ B), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit (X$\subset$A) et que (X$\subset$B).



On peut dire que {a,b,g}$\in${a,b,d,e}

4.3 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A (A$\in$B)
- b. Anti-Symétrique : (A$\in$B) et (B$\in$A) => A=B
- c. Transitivité : (A$\in$B) et (B$\in$C) => (A$\in$C)

4.4 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté A=B), si tout les éléments de A appartient à B. Autrement dit ($X \in A$) et que ($X \in B$).

4.5 Opération d'union ($\cup$)

1) L'union de 2 ensembles

A= $\{a,e\}$ et B = $\{b,c,d\}$

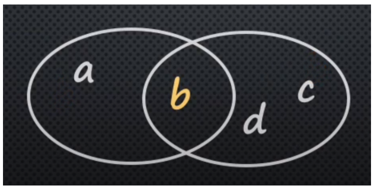
C = A $\cup$ B = $\{a,e,b,c,d\}$

4.6 Opération d'intersection ($\cap$)

Intersection de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles, on appelle ($A \cap B$) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B.

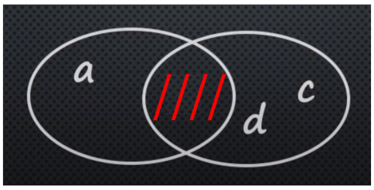
A= $\{a,b\}$ et B = $\{b,c,d\}$



C = A $\cap$ B = $\{b\}$

4.7 Ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles.
Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



C = A $\cap$ B = $\{\varnothing\}$

4.8 Cardinalité

Soit A un ensemble, Si A possède exactement N éléments ($n \in \mathbb{N}$), A est un ensemble fini de cardinalité N.

Noté $|A| = n$

$|1, 2, 3| = 3$

$| \oslash | = 0$

$|\{\oslash\}| = 1$

$|P(A)| = 2^k$ ou K est le nombre d'éléments dans A

P(A) est l'ensemble des parties

4.9 Identité

$A \cup A = A$
$A \cap A = A$

4.10 Commutativité

$A \cap B = B \cap A$
$A \cup B = B \cup A$

4.11 Associativité

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

4.12 Distributivité

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

4.13 De Morgans

$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B)$
$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B)$

Chapitre 5: Nombre Entiers Théorie

5.1 Modulo

Le modulo est le reste de la division entière de A par B.

Modulo exemple

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que (a+b) mod m = ((a mod m)+(b mod m)) mod m

(8+15) mod 3 = ((8 mod 3)+(15 mod 3)) mod 3
(23) mod 3 = (2+0) mod 3
2 = 2

5.2 Transformation

Il faudra tester les un après les autres les nombre premier par ordre croissant.

(2,3,5,7,11,13,17)

exemple de la décomposition

tout nombre se finissant par 0 est divisible par 2

17640/2
8820/2
4410/2
735/3 => 7+3+5 = 15 et 15 est divisible par 3
245/5 => 2+4+5 = 11 mais 245 est divisible par 5
49/7
7/7
1
17640 = 2*2*2*3*3*3*5*7*7 ou $2^3 * 3^2 * 5 * 7^2$

411600/2
205800/2
102900/2
51450/2
25725/3 => 2+5+7+2+5 = 21 et 21 est divisible par 3
8575/5 => 8+5+7+5 = 25 et 25 est divisible par 5
1715/5 => est divisible par 5
343/7 => 343=7^4 est divisible par 7
49/7
7/7
1
411600 = 2*2*2*2*5*5*7*7*7 ou $2^4 * 3 * 5^2 * 7^3$

5.3 PGCD

il faut toujours prendre l'exposant le plus petit pour être sur de pouvoir être divisible par les 2 nombres.

$17640 = 2^3 * 3^2 * 5 * 7^2$
$411600 = 2^4 * 3 * 5^2 * 7^3$

PGCD = $2^3 * 3 * 5 * 7^2$ **= 5880**

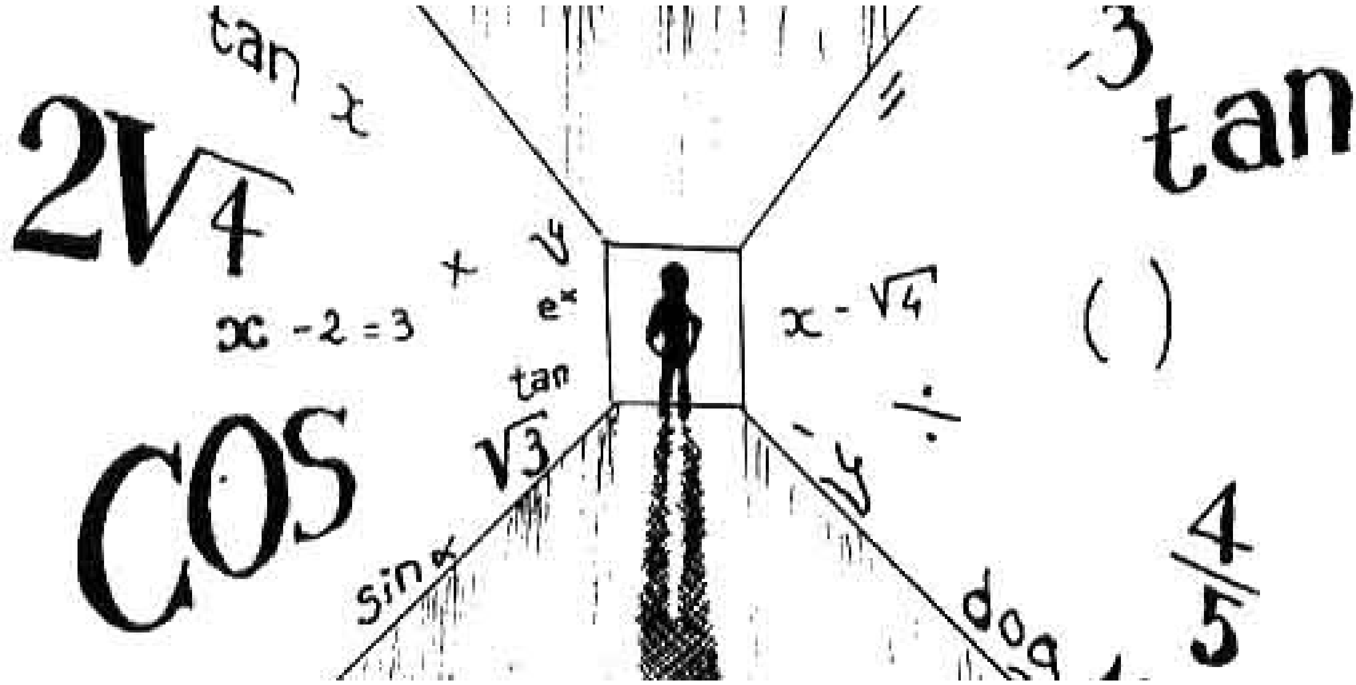
5.4 PPCM

il faut toujours prendre l'exposant le plus grand pour être sur qu'il soit un multiple des 2 nombres.

$17640 = 2^3 * 3^2 * 5 * 7^2$
$411600 = 2^4 * 3 * 5^2 * 7^3$

PPCM = $2^4 * 3^2 * 5^2 * 7^3$ **= 1 234 800**

Mathématiques Exercices



Chapitre 6: Matrices Exercices

6.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A) **Calculer B*C**

B) **Calculer la trace de A**

C) **Calculer la transposée de B**

D) **Calculer 2,5*C**

E) **Calculer** $B^t + C$

F) **Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)**

G) **Calculer le déterminants de A**

H) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

I) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

J) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

K) **Exercices prépartion examen (déterminant)**

6.2 Résolution des exercices

A) Calculer B*C

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale. La trace de la matrice A = 0+2+0+2 = 4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \mathbf{2} & 3 & 0 \\ 2 & 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 3 & 0 & 1 & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

C) Calculer la transposée de la matrice B La transposée de la matrice est d'intervertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \ B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

D) Calculer 2,5*C

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t +C = 2*C = C+C

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Déplacement 3D

R=10u H=300l où L=40cm + hauteur du casier
P=$((\frac{3}{5}) * R < R)$
$\theta = 0$ Z= $R + (\frac{B}{100} * R) = R + (\frac{2}{100}) * R = 20cm$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (cos(45) - sin(45) & 0 \\ sin(45) - cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3
L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2\text{-}(1*2)} & \mathbf{3\text{-}(2*2)} & \mathbf{0\text{-}(2*3)} & \mathbf{1\text{-}(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2\text{-}2} & \mathbf{3\text{-}4} & \mathbf{0\text{-}6} & \mathbf{1\text{-}0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4
L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}(3*1)} & \mathbf{0\text{-}(3*2)} & \mathbf{1\text{-}(3*3)} & \mathbf{2\text{-}(3*0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3\text{-}3} & \mathbf{0\text{-}6} & \mathbf{1\text{-}9} & \mathbf{2\text{-}0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{-4} & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Suppérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

1*(-1)*(-4)*24=**96**

S= det(A) = **96**

H) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Simplification de la matrice

$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ 9 & 9,5 & -9,5 & \mathbf{b} \\ 4 & 8 & 16 & \mathbf{32} \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 3*3

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices 2*2

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9.5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} -5 * \begin{pmatrix} 9 & -9.5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} +6 * \begin{pmatrix} 9 & 9.5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

Calcul du déterminant des sous matrices

8*(
1*((9,5*16)-(8*-9,5))
-5*((9*16)-(4*-9,5))
+6*((9*8)-(4*9,5)))

Simplification des calculs

8*(1*(152 – (-76))
-5*(144 – (-38))
+6*(72 – 38))

Mise en équation et résolution

8*(228 -5*(182) + 6*(34))
8*(228 - 910 + 204)
8*(228 + 204 - 910)
8*(432 - 910)
8*(-478) = -3824

det(A) = **-3824**

I) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 1337 \\ b & 42 \\ c & 8086 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer la multiplication

$$\begin{pmatrix} a*2+1337*4 & a*5+1337*0 & a*6+1337*4 \\ b*2+42*4 & b*5+42*0 & b*6+42*4 \\ c*2+8086*4 & c*5+8086*0 & c*6+8086*4 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 3*2+1337*4 & 3*5 & 3*6+1337*4 \\ 10*2+42*4 & 10*5 & 10*6+42*4 \\ 5*2+8086*4 & 5*5 & 5*6+8086*4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5354 & 15 & 5366 \\ 188 & 50 & 228 \\ 32354 & 25 & 32374 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des matrices 2*2

$$+5354*(\begin{pmatrix} 50 & 228 \\ 25 & 32374 \end{pmatrix}) -15*(\begin{pmatrix} 188 & 228 \\ 32354 & 32374 \end{pmatrix}) +5366*(\begin{pmatrix} 188 & 50 \\ 32354 & 25 \end{pmatrix})$$

+5354 *((50*32374) - (228*25))

-15 *((188*32374) - (32354*228))

+5366 *((188*25) - (32354*50))

+5354 *((1618700) - (5700))

-15 *((6086312) - (7376712))

+5366 *((4700) - (1617700))

8 636 002 000 + 19 356 000 - 8 655 358 000

8 655 358 000 - 8 655 358 000 = **0**

J) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8\\ 9 & 9,5 & -9,5 & b\\ 4 & 8 & 16 & 32\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a & 40 & 0 & 1\\ b & 80 & 1 & 2\\ c & 62 & 2 & 0\\ d & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'opération

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8\\ 9 & 9,5 & -9,5 & b\\ 4 & 8 & 16 & 32\end{pmatrix} +(-1)* \begin{pmatrix}a & 40 & 0 & 1\\ b & 80 & 1 & 2\\ c & 62 & 2 & 0\\ d & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8\\ 9 & 9,5 & -9,5 & b\\ 4 & 8 & 16 & 32\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a & -40 & 0 & -1\\ -b & -80 & -1 & -2\\ -c & -62 & -2 & 0\\ -d & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

Etape 2 : Réalisation de l'opération

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 7\\ 0 & 2^0-1 & 2^3 2^{-3} & 8\\ 9 & 9,5 & -9,5 & b\\ 4 & 8 & 16 & 32\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1-a & 5-40 & 6 & 7-1\\ -b & -80 & -1 & 8-2\\ 9-c & 9.5-62 & -9.5-2 & b\\ 4-d & 8 & 16-1 & 32-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -35 & 6 & 6\\ -10 & -80 & -1 & 6\\ 4 & -52.5 & -11.5 & 10\\ 2 & 8 & 15 & 30\end{pmatrix}$$

Etape 3 : Méthodes du pivot de Gauss

L2 = L2-(-5)*L1=(0 -255 -31 36)
L3 = L3-(-2)*L1=(0 -122.5 0.5 22)
L4 = L4-(-1)*L1=(0 43 9 24)

$$\begin{pmatrix}-2 & -35 & 6 & 6\\ 0 & -255 & 29 & 36\\ 0 & -122.5 & 0.5 & 22\\ 0 & 43 & 9 & 24\end{pmatrix} \begin{pmatrix}+ & - & + & -\\ - & + & - & +\\ + & - & + & -\\ - & + & - & +\end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des sous matrice 2*2

$$-2*\begin{pmatrix}-255 & 29 & 36\\ -122.5 & 0.5 & 22\\ 43 & 9 & 24\end{pmatrix} \begin{pmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{pmatrix}$$

-2*($+(-255)*\begin{pmatrix}0.5 & 22\\ 9 & 24\end{pmatrix}$ $(-29)*\begin{pmatrix}122.5 & 22\\ 43 & 24\end{pmatrix}$ $(36)*\begin{pmatrix}122.5 & 0.5\\ 43 & 9\end{pmatrix}$)

-2 *(-255* (12-198) -29* ((-2940) - (946)) +36* ((-1102.5) - 21.5))
47430 + 112694 - 40464= 119660

K) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 5 & 1 \\ c & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'addition

$$\begin{pmatrix} a+4 & 2+5 & 6 \\ b+4 & 5 & 1+4 \\ c+a & 6+b & 2+c \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Calcul du déterminant

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$+7 * (\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix}) -7 * (\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}) +6 * (\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix})$$

+7 *((5*7) - (16*5))

-7 *((14*7) - (8*5))

+6 *((14*16) - (8*5))

+7 *(-45) -15 *(58) + 6 *(184)

1104-406-315 = 383

Chapitre 7: Nombres Complexes Exercices

7.1 Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes

- a. $x^2+1=0$
- b. $3x^2+7=0$
- c. $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d. $-x^2-3x=3$
- e. $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f. $x^4 +15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de

- a. -11-8i
- b. -0.3333i + 1
- c. $cos(\omega t) + sin(\omega t)i$

3) Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a. 0
- b. -6+i
- c. i^2
- d. $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme a+bi

- a. (4-8i)-(3+2i)
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$
- f. $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

- g. $(\frac{1+i}{2-i})^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$
- h. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$
- i. Nombre de modules 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$
- j. Nombre de modules 3 et d'argument $\frac{-\pi}{8}$

5) Exprimer sous forme Polaire

- a. 3-$\sqrt(3i)$
- b. -1+1i

6) Exprimer sous forme cartésienne

- a. 4cos(45) + sin(45)i
- b. $5cis(\frac{\pi}{3})$

7) Trouver la solution de

- a. 4cis(45°)+5cis($\frac{\pi}{3}$)
- b. 4cis(45°)*5cis($\frac{\pi}{3}$)

8) changer de formes

- a. $6 * cis(30°)$ en forme exp
- b. $e^{e^{1+\frac{\pi}{2}*i}}$
- c. $1 + \sqrt{3i}$ en forme exp

8) donner la valeure de

- a. module de $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$
- b. argument de $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$
- c. Re($2e^{-\pi*i}$)
- c. $I(2e^{-\pi*i})$

7.2 Résoudre les équations suivantes

A. $x^2+1 = 0$

$x^2+1-1=0-1$
$x^2= -1$
$x=\sqrt{-1}$
S = x=i

B. $3x^2+7 = 0$

$3x^2+7-7=0-7$

$\frac{3x^2}{3}= \frac{-7}{3}$

$x^2 = \frac{-7}{3}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}*-1}$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\ \sqrt{-1}$
S = $\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}\ \sqrt{-1}$

C. $\frac{x^2}{2}$ -x = -2

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{x}{1}$ = - $\frac{2}{1}$

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{2x}{2}$ = - $\frac{4}{2}$

$\frac{x^2}{2}$ - $\frac{2x}{2}$ = - $\frac{4}{2}$

x^2 - 2x = -4
x^2 - 2x + 4 = (-4)+4
x^2 - 2x + 4 = 0

$\frac{-2+-\sqrt{(-2)^2-4*1*4}}{2*1}$
$\frac{-2+-\sqrt{4-16}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{-12}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{4*(-3)}}{2}$
$\frac{-2+-\sqrt{(2)^2*(-3)}}{2}$
S= -1 +- 1 $\sqrt{-3}$

D. -x^2-3x = 3

-x^2-3x -3 = 3-3
-x^2-3x -3 = 0

$\frac{-3+-\sqrt{(3)^2-4*1*3}}{2*1}$

$\frac{-3+-\sqrt{9-12}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{-3}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{3*(-1)}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{3}*\sqrt{-1}}{2}$

$\frac{-3+-\sqrt{3i}}{2}$ = -$\frac{3}{2} + -\sqrt{\frac{3}{2}i}$

E. x^3+7x^2+9x+63 = 0

x^2+(x+7)+9(x+7)=0

(x+7)*(x^2+9)=0

Poser les CE pour que (x+7) ou (x^2+9) vaut 0

Résoudre pour (x+7)=0

x=-7

(x^2+9)=0

x^2=-9

$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$

$x = 3\sqrt{-1}$

$x = 3i$

S= X vaut -7 ;3i

F. x^4 **+15x² = 16**

x^4+15x^2-16=0

Poser t = x^2

t^2+15t-16=0

t*(t+16)-(t+16) = 0

(t+16)*(t-1)=0

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

- t+16=0
- t-1=0

(t+16) = 0

t = (-16)

Restituer t=x^2

x^2=-16

$x = \sqrt{-16}$

$x = \sqrt{16 * (-1)}$

$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$

$x = 4\sqrt{-1}$

x=4i

t-1=0
t=1

Restituer t=x^2

x^2=1
$x = \sqrt{1}$
x=1

S = 1 ; 4i

7.3 Trouver le conjugués

- a. -11-8i = -11+8i
- b. -0.3333i + 1 = 1+0.3333i
- c. $cos(\omega t) + sin(\omega t)i = cos(\omega t) - sin(\omega t)i$

7.4 Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a. 0 : $\mathbb{R}$=0 $\mathbb{I}$=0
- b. -6+i : $\mathbb{R}$=(-6) $\mathbb{I}$=1
- c. i^2 : $\mathbb{R}$=(-1) $\mathbb{I}$=0
- d. $\frac{1+i}{2}$: $\mathbb{R}$=($\frac{1}{2}$) $\mathbb{I}$=($\frac{1}{2}$)

7.5 Exprimer sous forme a+bi

- a. (4-8i)-(3+2i) : 1-10i
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$: $\frac{23-11i}{26}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$: 47+32i
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$: $\frac{9-13i}{125}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$: 2-$\frac{1}{2}i$

f. $\frac{3+6i}{(3-4i)}$

Etape 1 : Binomes conjugués

$\frac{3+6i}{(3-4i)} * \frac{3+4i}{(3+4i)} = \frac{9+12i+18i+24i^2}{9-16i^2}$

Etape 2 : Par définition $i^2 = (-1)$

$\frac{9+30i+(24*(-1)}{9-16*(-1)} = \frac{9+30i+(-24)}{9-(-16)}$

$\frac{9+(-24)+30i}{9+16} = \frac{-15+30i}{25}$

Etape 3 : Factoriser

$\frac{5*(-3+6i)}{5*5} = \frac{(-3+6i)}{5}$

Etape 4 : Exprimer sous la forme a+bi

$\frac{-3}{5} + \frac{6i}{5}$

g. $(\frac{1+i}{2-i})^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$

Etape 1 : utilisation de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} * i)$ - $\frac{3}{5} + \frac{6}{5} * i$

Etape 2 : Mise au même dénominateur

$(\frac{1}{25} + \frac{6}{25} * i)$ - $\frac{9}{25} * (-1)$ - $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$

$(\frac{-23}{25} + \frac{6}{25} * i) + \frac{6}{5}i$

$\frac{-23}{25} + \frac{36}{25}i$

h. $\frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$

Etape 1 : Réduire au même dénominateur (1-i)*(1+i)

$\frac{(1+i)*(2+5i)+(1-i)*(2-5i)}{(1-i)*(1+i)}$

Etape 2 : Distributivités

$\frac{2+2i+5i+5i^2+2-2i-5i+5i^2}{1-i+i-i^2}$

$\frac{4+10i^2}{1-i^2}$

Etape 3 : Par définition $i^2 = -1$

$\frac{4+(10*(-1))}{1-(1*(-1))}$

$\frac{4-10}{2} = -\frac{6}{2} = -3$

i. Nombre de modules 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$

$|Z| = 2 * cis(\frac{\pi}{3})$

$X = \rho * cos(\theta) => X = 2 * cos(\frac{\pi}{3})$
$Y = \rho * sin(\theta) => Y = 2 * sin(\frac{\pi}{3})$

$X = 2 * \frac{1}{2} = 1$
$Y = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$

Exprimer sous la forme a+bi

$S = 1 + \sqrt{\frac{6}{2}}i = 1 + \sqrt{3}i$

7.6 Exprimer sous forme polaire

a. 3-$\sqrt{3i}$

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(\frac{-\sqrt{3}}{3})$
$\theta = -30°$
$\theta = -30° + 360°$
$\theta = 330°$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$
$\rho = \sqrt{9+3}$
$\rho = \sqrt{12 => (12 = 4 * 3)}$
$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$
$\rho = 2\sqrt{3}$

Z=$\rho * cos(\theta) * sin(\theta) * i => \rho * cis(\theta)$

Z=$2\sqrt{3} * cis(330)°$

b. -1+1i

Calcul de l'argument

$\theta = arctg(-\frac{1}{1})$
$\theta = -45°$
$\theta = -45° + 360°$
$\theta = 315°$

Calcul du module

$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$
$\rho = \sqrt{2}$

Z=$\rho * cos(\theta) * sin(\theta) * i => \rho * cis(\theta)$

Z=$\sqrt{2} * cis(315°)$

7.7 Exprimer sous forme cartésienne

a. $4cos(45°) + sin(45°) * i$

Formules
$\rho = 4 * cis(45°)$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$|Z| = a + bi$

$\frac{Y}{X} = tg(45°)$
$\frac{Y}{X} = 1$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$
$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$
$\rho = x^2 + y^2 = 16$

Notes : $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$ donc Y=X

$\rho = 2x^2 = 16$ ou $2y^2 = 16$
$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$
$\rho = x^2 = 8$
$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8 = (2 * 4)}$
$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$
$\rho = x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2}$

x=y donc $x = 2\sqrt{2}$ et $y = 2\sqrt{2i}$

Conclusion

$S = 4 * cis(45°) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2i}$

b. $5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Formules

$\rho = 5$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$|Z| = a + bi$

$\theta = tg(\frac{\pi}{3})$
$\theta = \sqrt(3)$

$x = \rho * cos(\sqrt{3}) => cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$
$y = \rho * sin(\sqrt{3}) => sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
$y = 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}$

Conclusion

Z= a+bi

$S = Z = \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3i}}{2}$

7.8 Trouver la solution

$a.4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * cos(45° - 60°))}$$

$$\rho = \sqrt{16 + 25 + 40 * cos(-15°))}$$

$$\rho = \sqrt{41 + 40 * cos(-15°))}$$

$$\rho = \sqrt{81 * 0.965}$$

$$\rho = \sqrt{79.637}$$

$$\rho = 8.9239$$

Calcul de l'argument

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) + 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) + 5 * cos(60°)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2})})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338°$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338°)$$

$b.4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2(cos(45° + \theta_2) + i * sin(45° + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5(cos(45° + 60°) + i * sin(45° + 60°))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

Calcul de l'argument

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * sin(45°) + 5 * sin(60°)}{4 * cos(45°) + 5 * cos(60°)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2})})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338°$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338°)$$

7.9 changement de forme (exp)

a. $6 * cis(30°)$ **en forme exp**

$\rho * cis(\theta) = \rho * e^{\theta i}$

$6cis(30°) = 6e^{30° i} = 6e^{\frac{\pi}{6} i}$

$S = 6e^{\frac{\pi}{6} i}$

b. $e^{1+\frac{\pi}{2} i}$

Mettre sous la forme a + bi

$e^1 + e^{\frac{\pi}{2} i}$

Calculer $e * cis(\frac{\pi}{2})$

$e * (cos(\frac{\pi}{2}) + i * sin(\frac{\pi}{2}))$

$e * (0 + 1i)$

$S = e * i$

c. $1 + \sqrt{3i}$ **en forme exp**

Etape 1 : Trouver ρ **(calcul du module)**

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}$

$\rho = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{2^2}$

$\rho = 2$

Etape 2 : Trouver θ **(calcul de l'argument)**

$tg(\theta) = arctg(\frac{1}{\sqrt{3}})$

$tg(\theta) = (\frac{1}{\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) = \frac{1\sqrt{3}}{\sqrt{3}^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{\pi}{6}$

Etape 3 : Ecriture sous le format exponentielle

$\rho * cis(\theta) = \rho * e^{i\theta} = 2e^{\frac{\pi}{6} i}$

7.10 Recherche valeures (exponentielle)

a. module de $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$

formule générique $\rho * e^{\theta i}$ et le module est ρ

$\rho = 3$

b. argument de $3e^{\frac{\pi}{4}*i}$

formule générique $\rho * e^{\theta i}$ et l'argument est θ

$\theta = \frac{\pi}{4}$

c. Re$(2e^{-\pi*i})$

Trouver la partie Réelle (x)

Re$(2e^{-\pi*i}) = Re(-2cis(\pi))$

$Re(-2cis(\pi)) = Re(-2(cos(\pi) + i * sin(\pi))$

$X = \rho * cos(\theta)$

$X = -2 * cos(\pi)$

$X = -2 * (-1) = 2$

d. $I(2e^{-\pi*i})$

Trouver la partie Imaginaire (y)

$I(2e^{-\pi*i}) = 2cis(-\pi)$

$Y = \rho * sin(\theta)$

$Y = 2 * sin(-\pi)$

Y = 2*0 = 0

Chapitre 8: Logique propositionnelle exercices

8.1 Enoncé Exercices

P1=(1+1=2) P2=(1>5) P3=(1+1=3)

1) Déterminer la véracité

a. P_1 v P_3
b. P_2 => P_1
c. P_3 => (P_1 v P_3)

2) Construire la Table de vérité de P_1 <=> P_2 => P_3

3) Prouver l'équivalence

a. P V P <=> P
b. P ∧ P <=> P
c. P V (q ∧ r) <=> (p v r) ∧ (q v r)

4) Déterminer la véracité

Soit A = {1, 2, 3, 4, 5} le domaine des prédicats (liste exhaustive des prédicats). Vérifiez la véracité de

a) $\exists x$, $(x + 3 = 5)$
b) $\exists x$, $(x + 1 = 15)$
c) $\forall x$, $(x < 4)$
d) $\forall x$, $(x + 10 < 25)$
e) $\forall x$, $((x > 6) => (x < 2))$
f) $\exists x$, $((x^2 = 121) \wedge (x > 0))$

Soient x i ∈ A, P(x_i, x_j) (toutes valeurs possibles), vérifiez les tautologies

8.2 Déterminer la véracité

P_1	P_2	P_3	P_1 v P_3	P_2 => P_1	(P_1 v P_3)	P_3 => (P_1 v P_3)
T	⊥	⊥	T	T	T	T

8.3 Construire la table de vérité

P_1 <=> P_2 => P_3

P_1	P_2	P_3	P_2 => P_3	P_1 <=> (P_2 => P_3)
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

8.4 Prouver l'équivalence

a. P V P <=> P

P	P V P	P <=> P V P
0	0	0
1	1	1

b. P ∧ P <=> P

P	P ∧ P	P <=> P ∧ P
0	0	0
1	1	1

c. P v (q ∧ r) <=> (p v r) ∧ (q v r)

utilisation de la distributivités

P v (q ∧ r) <=> (p v r) ∧ (q v r)

(p v r) ∧ (q v r) <=> (p v r) ∧ (q v r)

8.5 Déterminer la véracité

a) $\exists x$, $(x + 3 = 5)$

x+3=5
x=5-3
x=2

x=2, il existe bien un x appartenant à A

b) $\exists x$, $(x + 1 = 15)$

x+1=15
x=14

Il n'existe pas de x compris dans A, car 14 n'est pas compris dans A

c) $\forall x$, $(x < 4)$

$1 < 4$	T
$2 < 4$	T
$3 < 4$	T
$4 < 4$	$\perp$
$5 < 4$	$\perp$

x=4 ou x=5 n'est pas inférieure à 4, donc tout x n'est pas inférieure à 4

d) $\forall x$, $(x + 10 < 25)$

$(1 + 10 < 25)$	T
$(2 + 10 < 25)$	T
$(3 + 10 < 25)$	T
$(4 + 10 < 25)$	T
$(5 + 10 < 25)$	T

x+10 = 25
x = 15

Tout x appartenant à A, ou x+10 est toujours inférieure a 25.

De plus X >= 15 n'appartient pas à A.

e) $\forall x$, $((x > 6) => (x < 2))$

x	$A = (x > 6)$	$B = (x < 2)$	$A => B$
1	$\perp$	$\perp$	T
2	$\perp$	$\perp$	T
3	$\perp$	$\perp$	T
4	$\perp$	$\perp$	T
5	$\perp$	$\perp$	T

Quand quelques chose de chose de faux est impliqué, le résultat est toujours vrai.

$\perp$ => T <=> T
$\perp$ => $\perp$ <=> T

P	Q	P => Q
T	T	T
T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T
$\perp$	$\perp$	T

f) $\exists x$, $((x^2 = 121) \wedge (x > 0))$

$x^2 = 121$
x = 11

x n'appartient pas a A, $x > \forall x$ appartenant à A

$\forall x$ appartenant à A > 0

$\perp \wedge$ T = T

x	$A = (x^2 = 121)$	$B = (x > 0)$	$A \wedge B$
1	$\perp$	T	T
2	$\perp$	T	T
3	$\perp$	T	T
4	$\perp$	T	T
5	$\perp$	T	T

2) Soient x i $\in$ A, P(x_i , x_j) (toutes valeurs possibles), vérifiez les tautologies suivantes :

a) $\forall x_1$ $\exists x_2$ P(x_1, x_2) <=> $\exists x_2$ $\forall x_1$ P(x_1, x_2) **Faux**

b) $\exists x_1$, $\forall x_2$ P(x_1, x_2) => $\forall x_2$ $\exists x_1$ P(x_1, x_2) **Vrai**

c) $\forall$x, P(x) => $\exists$x, P(x) **Vrai**

Lorsque les prédicats sont dans N, Z, Q et R, vérifiez :

a) $\forall$x, $\exists$y, (y < x)

N = -1 ¡ 0 et -1 $\notin$ N : **Faux**
Z = -1 ¡ 0 et -1 $\in$ Z : **Vrai**
Q = 1/2 ¡ 1 et 1/2 $\in$ Q : **Vrai**
R = 0.60 ¡ 1 et 0.60 $\in$ R : **Vrai**

b) $\forall$x$_1$, $\forall$x$_2$ ((x_1 < x x_2) => $\exists$y (x_1 < y < x_2))

N = 0 ¡ 1 => 0 < y < 1 : **Faux**
Z = 0 ¡ 1 => 0 < y < 1 : **Faux**
Q = 0.11 ¡ 0.12 => 0.11 < 0.115 < 0.12 : **Vrai**
R **Vrai**

c)$\exists$x, ($x_2 = 2$)

x=$\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}$
N = $\sqrt{2} \notin$ N : **Faux**
Z = $\sqrt{2} \notin$ Z : **Faux**
Q = $\sqrt{2} \notin$ Q : **Faux**
R = $\sqrt{2} \in$ R : **Vrai**

d)$\exists$x, ($x^2 + 1 = 0$)

$\exists$x => x^2 = -1)

N = x^2 = -1 $\notin$ N : **Faux**
Z = x^2 = -1 $\notin$ Z : **Faux**
Q = x^2 = -1 $\notin$ Q : **Faux**
R = x^2 = -1 $\notin$ R : **Faux**

Soient P(x) = x est un multiple de 2 et Q(x) = x est un multiple de 4, les deux prédicats de domaine N

P(x) = x est un multiple de 2
Q(x) = x est un multiple de 4

a) $\forall$x,(P(x) $\Rightarrow$ Q(x))

Tout x multiple de 2 est un multiple de 4, si x=2, x est multiple de 2 mais pas de 4 : **Faux**

b) $\forall$x,(Q(x) $\Rightarrow$ P(x))

Tout x multiple de 4 est un multiple de 2 : **Vrai**

c) $\exists$x,(P(x) $\Rightarrow$ Q(x))

Il existe au moins 1x qui est multiple de 2 et de 4 Vrai car si x=4, x est multiple de 2 et de 4

d) $\neg(\forall$x (P(x) $\Rightarrow \neg$Q(x)))

Il faut montrer que $\forall$x (P(x) => $\neg$Q(x)) est faux :

il faut $\exists$x, (P(x) $\Rightarrow \neg\neg$Q(x)) = $\exists$x (P(x) <=> Q(x))

$\exists$x (P(x) <=> Q(x)) : Il existe au moins 1x qui est multiple de 2 et de 4 Vrai car si x=4, x est multiple de 2 et de 4

Soit R le domaine des prédicats. Trouvez des formules de la logique des prédicats ne faisant pas apparaître de quantificateurs ($\forall$,$\exists$) équivalentes aux formules suivantes :

a) $\exists$x, ax + b = 0

ax = - b
x = $\frac{-b}{a}$

b) (a $\neq$ 0) $\wedge$ ($\exists$x, ax^2 + bx + c = 0)

(a $\neq$ 0) V (b^2 -4ac $\geq$ 0) où a, b et c sont dans R

8.6 Théorie naïve des ensembles Exercices

8.6.1 Enoncé d'exercices

Soient A = {1, 2}, B = {3, 4, 5} et C = {7}, calculez :

- a. A × B
- b. $2^{A \times C}$
- c. 2^A × C
- d. Soit A={pi,2,e} et B={-1, 5} Calculer $|A \times B|$
- e. Soit P | A U B | A ={3,4,5} B={1,2,3}
- f. Soit P(A ∩ B) A ={3,4,5} B={2,3,4}
- g. Soit | P(A ∩ B) | A ={3,4,5} B={2,3,4}

8.6.2 Résolution

a) Calculer $A \times B$

$A \times B = \{(1, 3) ; (1, 4) ; (1, 5) ; (2, 3) ; (2, 4) ; (2, 5)\}$

b) Calculer $2^{A \times C}$

$A \times C = \{(1, 7), (2, 7)\}$

$2^{A \times C} = \{\emptyset, \{(1, 7)\}, \{(2, 7)\}, \{(1, 7), (2, 7)\}\}$

c) Calculer $2^A \times C$

$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

$2^A \times C = \{(\emptyset, 7), (\{1\}, 7), (\{2\}, 7), (\{1, 2\}, 7)\}$

d) Calculer $2^A \times C$

Card(AxB) = Card(A) x Card(B)

Card(A) = 3 Card(B) = 2

Card(AxB) = 2x3 = 6

e) Soit P | A U B | A ={3,4,5} B={1,2,3}

2^k où k est le nombre d'élement des ensembles | {3,4,5,1,2} |

k = | {3,4,5,1,2} | = 5

P | A U B | = 2^5 = 32

S=32

f. Soit P(A ∩ B) A ={3,4,5} B={2,3,4}

A ∩ B = {3,4}

P(A ∩ B) = {∅,3,4,{3,4}}

g. Soit | P(A ∩ B) | A ={3,4,5} B={2,3,4}

A ∩ B = {3,4}

P(A ∩ B) = {∅,3,4,{3,4}}

| P(A ∩ B) | = 4

Chapitre 9: Preuve par induction Exercices

9.1 Prouver par induction

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2, dansN$$

Cas de base : n = 0

1er parties :

(2k + 1) où k = 0
(2*0 + 1) = 1

2e parties :

$(n+1)^2$ où n = 0
$(0+1)^2 = 1$

Conclusion : la première partie $((2*0+1) = 1)$ **== la deuxième parties** $((0+1)^2 = 1)$

Cas général : on suppose que pour n c'est vérifié, on va essayer pour n+1

1e parties :

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1) + (2k+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = (n+1)^2 + (2(n+1)+1)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = n^2 + 2*n*1 + 1^2 + 2n + 2 + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) = n^2 + 4n + 4$$

2e parties :

$((n+1)+1)^2$
$(n+2)^2$
$(n+2)^2$
$n^2 + 4n + 4$

Conclusion : la première partie $(n^2 + 4n + 4)$ **== la deuxième parties** $(n^2 + 4n + 4)$

2) Prouvez par induction

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1, dansN$$

Cas de base : n = 0

1er parties :

$2^{n+1} - 1$
$2^1 - 1 = 1$

2e parties :

$2^0 = 1$

Conclusion : la première partie (2^0=1) == la deuxième parties ($2^1 - 1 = 1$)

Cas général : on suppose que pour n c'est vérifié, on va essayer pour n+1

1e parties :

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \sum_{k=0}^{n} 2^k + 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = 2^{n+2} - 1$$

2e parties :

$2^{n+1+1} - 1$
$2^{n+2} - 1$

Conclusion : la première partie ($2^{n+2} - 1$) == la deuxième parties ($2^{n+2} - 1$)

Chapitre 10: Nombre Entiers Exercices

10.1 Exercices Modulo

- 1. Prouver que si a $\in$ N, a $>$ 0, alors 1 divise a et a divise 0.
- 2. Soient a, b $\in$ Z, a$\neq$0, b$\neq$0, prouvez que si a|b et b|a alors a=b ou a=$-$b
- 3. Déterminez le quotient et le reste de 111 divisé par 11 ; 123 par 7 ; 777 divisé par 21 ; 1434 divisé par 13 et 1025 divisé par 15.
- 4.Calculez 7 mod 5 ; 789 mod 5672 ; 77 mod 11 ; 55 mod 7 ; 72 mod 13
- 5. Soient a, b, n, m $\in$ N tels que n $\geq$ 2, m $\geq$ 2 et n|m.
  Prouvez que si a $\equiv_m$ b alors a $\equiv_n$ b.
- 6. Soit n $\in$ N. Prouvez que si n est impair alors $n^2 \equiv_2 1$.
- 7. Soient a, b, c, d $\in$ Z, m $\in$ N, m $>$ 0.
  Prouvez que si a $\equiv_m$ b et c $\equiv_m$ d alors (a + c) $\equiv_m$ (b + d) et (ac) $\equiv_m$ (bd).
- 8. Déduire de l'exercice précédent que :
  (a + b) mod m = ((a mod m) + (b mod m)) mod m
  (ab) mod m = ((a mod m)(b mod m)) mod m
- 9. Prouvez que les deux égalités suivantes sont fausses :
  (a + b) mod m = (a mod m) + (b mod m)
  (ab) mod m = (a mod m)(b mod m)

10.2 Exercices PPCM-PGCD

- 1. Soient m, n $\in$ Z et p un nombre premier. Prouvez que si p|mn alors p|m ou p|n. Ce résultat est-il toujours vrai si p n'est pas premier ?
- 2. Déterminez lesquels de ces nombres sont premiers : 21, 71, 111 et 143.
- 3. Décomposez les nombres suivants en facteurs premiers : 88, 124, 289 et 402.
- 4. Calculez pgcd(15, 36), ppcm(21, 49), pgcd(121, 125) et ppcm(31, 81).
- 5. Prouvez que le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6.
- 6. Écrire en notation binaire les nombres suivants : 7, 9, 11, 31 et 65.
- 7. Écrire en notation hexadécimale les nombres suivants : 13, 31 et 65.

10.3 Exercices changement de base

- 1. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au décimal : A0B1 et F 0A02.
- 2. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au binaire : ABBA et FACE .
- 3. Convertir les entiers suivants du binaire en hexadécimal : 11111011 et 10011101.
- 4. Prouvez qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses digits en décimal est divisible par 3.
- 5. Trouvez l'inverse de 5 modulo 11 ainsi que l'inverse de 3 modulo 7.
- 6. Prouvez que 2 240 mod 11 = 1

1. Prouver que si a $\in$ N, a $>$ 0, alors 1 divise a et a divise 0

Cela peut s'écrire simplement : soit a un naturel $>$ 0 => $\frac{1}{a}$ et $\frac{a}{0}$

première partie

$\frac{1}{a}$ <=> a = 1*x (par définition)

$\frac{a}{0}$ <=> 0 = a*x (par définition)

deuxième partie

il faut donc lorsque a est posé, trouver un x et un y qui vérifie les expressions suivantes :

Soit a $>$ 0, on sait que a un naturel, prenons x=a
on a bien a = 1 x a, ce qui vérifie $\frac{1}{a}$

Soit a $>$ 0, on sait que a un naturel, prenons y=0
on a bien 0 = a*0, ce qui vérifie $\frac{a}{0}$

2. Soient a, b $\in$ Z, a$\neq$0, b$\neq$0, prouvez que si a|b et b|a alors a=b ou a=$-$b

soit a, b un entier positif ou négatif, si a|b et b|a => a=b ou a=$-$b

première partie

$\frac{a}{b}$ <=> b = a*x (par définition)

$\frac{b}{a}$ <=> a = b*y (par définition)

deuxième partie

il faut donc lorsque a est posé, trouver un x et un y qui vérifie les expressions suivantes :

Soit b $\neq$ 0, on sait que b un entier positif ou négatif, prenons x=1

b = a*1

b=a <=> a=b
ce qui vérifie l'expressions a=b

Soit a $\neq$ 0, on sait que a un entier positif ou négatif, prenons y=-1

a = b*-1
a=-b
ce qui vérifie l'expressions a=-b

3. Déterminez le quotient et le reste de 111 divisé par 11 ; 123 par 7 ; 777 divisé par 21 ; 1434 divisé par 13 et 1025 divisé par 15.

$\frac{111}{11}$ Q=10 R=1

$\frac{123}{16}$ Q=17 R=4

$\frac{777}{21}$ Q=37 R=0

$\frac{1437}{13}$ Q=110 R=7

$\frac{1025}{15}$ Q=68 R=5

4. Calculez 7 mod 5 ; 789 mod 5672 ; 77 mod 11 ; 55 mod 7 ; 72 mod 13

7 mod 5 = 2

789 mod 5672 = 789

77 mod 11 = 0

55 mod 7 = 6

72 mod 13 = 7

5. Soient a, b, n, m $\in$ N tels que n $\geq$ 2, m $\geq$ 2 et n $|$ m. Prouvez que si a $\equiv_m$ b alors a $\equiv_n$ b

a = b + k*n (par définition)

$\frac{a=k*n+b}{c=l*n+b}$

6. Soit n $\in$ N. Prouvez que si n est impair alors $n^2 \equiv_2 1$

impair = 2x + 1 (par définition)

n^2 = $(2x+1)^2$ = $4x^2$ + 2*2x*1 + 1^2
$4x^2$ + 4x + 1

$4x^2$ est pair
4x est pair
1 est impair

PAIR + PAIR + IMPAIR = IMPAIR

7. Soient a, b, c, d $\in$ Z, m $\in$ N, m $>$ 0. Prouvez que si

a $\equiv_m$ b et c $\equiv_m$ d alors (a + c) $\equiv_m$ (b + d) et (ac) $\equiv_m$ (bd)

a = b + k*n (par définition)

première expression

(a + c) $\equiv_m$ (b + d)
(a + c) = (m $*$ k + b) + (m $*$ l + d)
m * lk + (b + d)
(b + d) + m * lk

on peut dire que y = lk et x=(b+d), ce qui vérifie l'expression : a = x + m*y

deuxième expression

(ac) $\equiv_m$ (bd)
(ac) = (mk + b) $*$ (ml + d)
(bd) + m $*$ (mkl + ld + bl)

on peut dire que y = (mkl + ld + bl) et x= b*d, ce qui vérifie l'expression : x + m$*$y

8. Déduire de l'exercice précédent que

(a + b) mod m = ((a mod m) + (b mod m)) mod m
(ab) mod m = ((a mod m)(b mod m)) mod m

a $\equiv_m$ b <=> a= b + m*k
(a + b) mod m = ((a mod m) + (b mod m)) mod m

première partie

(a + b) mod m
(2b) mod m

deuxième partie

((a mod m) + (b mod m)) mod m
((b + mk) mod m) (b mod m)) mod m

(b + mk) mod m) = b
(b + (b mod m)) mod m

(b mod m) = b
(b + b) mod m
(2b) mod m

Conclusion La première partie == la deuxième partie => OK

(ab) mod m = ((a mod m)(b mod m)) mod m

première partie

(ab) mod m
((mk + b) b) mod m
(mkb + b^2) mod m
b^2 mod m

deuxième partie

((a mod m)(b mod m)) mod m

(a mod m) = b
(b mod m) = b

(b*b) mod m
(b^2) mod m

Conclusion La première partie == la deuxième partie => OK

9. Prouvez que les deux égalités suivantes sont fausses

(a + b) mod m = (a mod m) + (b mod m)
(ab) mod m = (a mod m)(b mod m)

(a + b) mod m = (a mod m) + (b mod m)

première partie

(a+b) mod m
(b+b) mod m
(2b) mod m

deuxième partie

((a mod m) + (b mod m)) mod m
((b + mk) mod m) (b mod m)) mod m

(b + mk) mod m) = b
(b + (b mod m)) mod m

(b mod m) = b
(b + b) = 2b

Conclusion : la première parties est différentes de la deuxième (2b $\neq$ 2b mod m)

(ab) mod m = (a mod m)(b mod m)

première partie

(ab) mod m
((mk + b) b) mod m
(mkb + b^2) mod m
b^2 mod m

deuxième partie

((a mod m)(b mod m)) mod m

(a mod m) = b
(b mod m) = b

(b*b) = b^2

Conclusion : la première parties est différentes de la deuxième (b^2 mod m $\neq$ b^2)

1. Soient m, n $\in$ Z et p un nombre premier. Prouvez que si p|mn alors p|m ou p|n. Ce résultat est-il toujours vrai si p n'est pas premier ?

Nombre premier = nombre divisible par 1 et par lui-même

Donc P=x*y car x=$\frac{P}{y}$ y=$\frac{P}{x}$

Vérifier si $\frac{p}{m*n}$ => p|m ou p|n

p = m*n
m=$\frac{P}{n}$
n=$\frac{P}{m}$

ce qui vérifie l'expression P=x*y et donc n'est pas premier

2. Déterminez lesquels de ces nombres sont premiers : 21, 71, 111 et 143

a) 21 est divisible par 3,7,21 => NON
b) 71 est divisible par 71,1 => OUI
c) 111 est divisible par 3,111,1 => NON
d) 143 est divisible par 143,11,1 => NON

3. Décomposez les nombres suivants en facteurs premiers : 88, 124, 289 et 402

a) 88 = 2*2*2*11 = 2^3 * 11
b) 124 = 2*2*31 = 2^2 * 31
c) 289 = 17^2
d) 402 = 2*3*67

4. Calculez pgcd(15, 36), ppcm(21, 49), pgcd(121, 125) et ppcm(31, 81)

A) pgcd(15, 36)

15=3*5 31=31
pgcd(15, 36) = 3

b) ppcm(21, 49)

21=3*7 49=7^2
ppcm(21, 49) = 147

c) pgcd(121, 125)

121 = 1*121 125 = 1*5*5*5
pgcd(121, 125) = 1

d) ppcm(31, 81)

31=1*31 81=1*81
ppcm(31, 81) = 31*81 = 2511

5. Prouvez que le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 6.

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$\frac{6n^3+18n^2+12n}{6}$

$n^3 + 3n^2 + 2\text{n}$

il faut qu'il est la forme $6 * n$ ou $2 * 3 * n$

Divisible par 2

Si n est pair alors n^3 est pair sinon il est impair.

2n^2 est pair, ce qui donne un nombre pair

Divisible par 3

Montrer que $n^3 + 3n^2 + 2\text{n}$ est divisible par 3 :

Soit $\frac{n}{3}$ Sinon il manque 1 ou 2 unités.

Donc n+1 ou n+2 sera divisible par 3 d'où leur produit est divisible par 3.

6. Écrire en notation binaire les nombres suivants : 7, 9, 11, 31 et 65

$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0111$

$9 = 2^3 + 2^0 = 1001$

$11 = 2^6 + 2^0 = 1001$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0001\ 1111$

$65 = 2^6 + 2^0 = 0010\ 0001$

7. Écrire en notation hexadécimale les nombres suivants : 13, 31 et 65

$13 = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1101 = \text{D}$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 0001\ 1111 = 1\text{F}$

$65 = 2^6 + 2^0 = 0010\ 0001 = 41$

1. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au décimal : A0B1 et F0A02

A0B1 = 10 0 11 1

F0A02 = 15 0 10 0 2

2. Convertir les entiers suivants de l'hexadécimal au binaire : ABBA et FACE

ABBA = 1010 1011 1011 1010

FACE = 1111 1010 1100 1110

3. Convertir les entiers suivants du binaire en hexadécimal : 11111011 et 10011101

1111 1011 = FB

1001 1101 = 9D

4. Prouvez qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses digits en décimal est divisible par 3

Montrer que la sommes des 3 digits est divisible par 3

Z= $\sum_{i>0} a + b + c = 3$
Z=3x ou x $\geq$ 1
$\frac{z}{3}$ = x

tout nombre ayant la sommes des digits est divisible par 3 car
tout nombre multiplié par 3 ou x $\geq$ 1 est divisible par 3

5. Trouvez l'inverse de 5 modulo 11 ainsi que l'inverse de 3 modulo 7

5 modulo 11 = 2 et 11-2 = 9

3 modulo 7 = 2 et 7-2 = 5

6. Prouvez que 2^{240} mod 11 = 1

$2^{240} = 2^{2*2*2*2*15}$

$(((((b^2)^2)^2)^2)mod11)^{15}$

$b^{15}mod11$

Prenons b=9

$9^{15}mod11$

(9 * 9^{14}) mod 11

(9 * ((9^2 mod 11)^7) mod 11) mod 11

9^2 mod 11 = 4

(9 * (4* (4^6 mod 11) mod11) mod 11

(9 * (4* ((4^2 mod 11)^3 mod 11) mod11) mod 11

4^2 mod 11 = 5

(9 * (4* (5^3 mod 11) mod 11) mod 11

(9 * (4* (5^3 mod 11) mod 11) mod 11

5^3 mod 11 = 4

(9 * (4*4 mod 11) mod 11

(9 * (16 mod 11) mod 11

(9 * 5) mod 11

(45) mod 11 = 1

10.4 Relation Binaire Exercices

- a. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est un multiple de b $\}$
- b. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est $>$ b $\}$
- c. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ b est divisible a $\}$

10.4.1 Exercices Examen

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est un multiple de b $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symètrique
- ☐ e. R est symètrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI
b multiple de b = VRAI
R est réflexif

Test de la symétrie => Exemple (a=2 ou b=6)

a multiple de b = VRAI
b multiple de a = FAUX
R est n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie => (a=b) Exemple (a=3 ou b=3)

a multiple de b = VRAI
b multiple de a = VRAI
R est est anti-symétrique

Test de Transitivité => (a=b) Exemple (a=3 ou b=9 Z=18)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?
a est dans la table de 18 ? => VRAI
R est transitif

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ a est > b $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symètrique
- ☐ e. R est symètrique

Test de la réfléxivité

A est plus grand que A => FAUX
B est plus grand que B => FAUX
il faut que A et B soit vrai

Test de la symétrie

A est plus grand que B => VRAI
B est plus grand que A => FAUX
il faut que A et B soit vrai

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symètrique pas car A=1 B=2
R est anti-symétrique $aest > b$ car a $\neq$ b

Test de la transitivité

Si A est > B et que B est > Z est-ce que a > Z ?
R est transitif car A est > Z

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
$R = \{(a, b), a \in N, b \in N|$ b est divisible a $\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif

☐ d. R est anti-symètrique

☐ e. R est symètrique

Test de la réfléxivité

A est divisible par A => VRAI
B est divisible par B => VRAI
R est réflexif

Test de la symétrie

A est divisible par B => VRAI
B est divisible par A => FAUX
il faut que A et B soit vrai
R n'est pas symétrique

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symètrique pas car A=1 B=2
R est anti-symétrique $aest > b$ car a $\neq$ b

Test de la transitivité

Si A est divisible par B et que B est divisible par Z est-ce que a divisible par Z ?
R est transitif car A est divisible par Z

Chapitre 11: Exemple d'examen

11.1 Q1 : Calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0-1 & 1-2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A) Simplification de la matrice

$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ et $1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \\ 9 & 9,5 & -9,5 & \mathbf{b} \\ 4 & 8 & 16 & \mathbf{32} \end{pmatrix}$$

B) Swap des zeros

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

C) Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9.5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} -5 * \begin{pmatrix} 9 & -9.5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} +6 * \begin{pmatrix} 9 & 9.5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

D) Calcul des déterminants 2*2

8*(

1*((9,5*16)-(8*-9,5))

-5*((9*16)-(4*-9,5))

+6*((9*8)-(4*9,5))

)

E) Simplification des calculs

8*(

1*(152 – (-76))

-5*(144 – (-38))

+6*(72 – 38)

)

F) Mise en équation et résolution

8*(228 -5*(182) + 6*(34))

8*(228 - 910 + 204)

8*(228 + 204 - 910)

8*(432 - 910)

8*(-478) = -3824

det(A) = -3824

11.2 Q2 : Calcul nombre complex

Que doit valoir a pour que l'argument soit 135° quand b=-5, c=4 et d=11

$\frac{a+bi}{c+di}$

A) Utilisation de la formule division cartésienne

$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2}$ *i

B) Remplacement dans la formule

$\frac{(a*4)-((-5)*(-11))}{4^2+(-11)^2} + \frac{((-5)*4)-(a*(-11))}{4^2+(-11)^2}$ *i

$\frac{4a-55}{16+121} + \frac{((-20)-((-11)a)}{16+121}$ *i

$\frac{4a-55}{137} + \frac{((-20)-(-11a)}{137}$ *i

$\frac{4a-55}{137} + \frac{11a-20}{137}$ *i

(a+bi) $= \frac{4a-55}{137} + \frac{11a-20}{137}$ *i

C) On calcule a par rapport à $\theta = 135°$

$X = \frac{4a-55}{137}$

$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$

$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$

Remplacement de X et Y

Notes : $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}$

$\theta = \text{arctg}(\frac{55+(11a-20)i}{4a-55})$

$tg(\theta) = \frac{55+(11a-20)i}{4a-55}$

$\theta = 135°$

$tg(135) = \frac{55+(11a-20)i}{4a-55}$

-1 $= \frac{55+(11a-20)i}{4a-55}$

D) Déterminer l'intervale définis

$a \neq \frac{20}{11}$

E) Simplifier l'équation

$\frac{4a-55*(-20)}{11a-20*(-20)}$

$4a - 55 = -11a + 20$

$4a + 11a = 20 + 55$

$15a = 75$

a = 5

F) Conclusion

Pour que $\theta = 135°$, il faut que a $\neq \frac{20}{11}$, a=5 et $5 \neq \frac{20}{11}$

S = 5

11.3 Q3 : Transformer en forme conjonctive

(A ∧¬ B) V $(C \implies a)$

A) Simplifier l'implications

(A ∧¬ B) V (¬ C V (A ∧ C))

B) Utilisation du théorème De Morgan

$a + b = \neg a * \neg b$

¬ (A ∧¬ B) ∧ ¬ (¬ C V (C ∧ A))

C) Simplification des parenthèse

(¬A ∧ B) ∧ (C V (¬C ∧ ¬A))

D) Utilisation de De Morgan

(A V ¬B) ∧ (C V (C V A))

D) Ecrire sous le format recommandé

S=(A OU NEG(B)) ET (C OU (A OU C))

11.4 Q4 : Théorie des ensembles naïfs

A) Soit A={pi,2,e} et B={-1, 5} Calculer $|A \times B|$

1) Calculer $A \times B$

A*B = { (pi,-1),(pi,5), (2,-1),(2,5), (e,-1),(e,5) }

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

P(A) = {{}, {π}, {2}, {e}, {-1}, {5}}

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

P(A) = {{π,2}, {2,e}, {e,-1}, {-1,5}, {5,π}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

P(A) = {{π,2,e}, {2,e,-1}, {e,-1,5}, {-1,5,π}, {5,π,2}}

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

P(A) = {{π,2,e,-1}, {2,e,-1,5}, {e,-1,5,π}, {-1,5,π,2}, {5,π,2,e}}

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

P(A) = {{π,2,e,-1,5}}

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de P(A) :

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = 6 + (3*5) +1 = 22

P | A U B | = 22

S=22

11.5 Q5 : Induction forte/faibles

Notez que l'induction faible est égale à l'induction forte. Néanmoins il est plus naturel de démontrer les propriétés soit avec de l'induction simple,soit avec la forte comme réalisé durant le cours. Il vous est demandé de choisir entre les deux fonction de l'énoncé.

Soit n un nombre naturel, que faut-il pour démontrer que 10^{n-1} est un multiple de 9 ?

Veuillez choisir au moins une réponse : (Cochez ce qui est vrai)

- ☐ On peut utiliser l'induction faible ou forte
- ☐ Il faut au moins 3 cas de base
- ☐ il faut utiliser l'induction forte
- ☐ il faut au moins un unique cas de base
- ☐ il faut au moins 2 cas de base

9,18,27,36,45,..., n $= 10^{n-1}$

Cas de base n=1

9,18,27,36,45,54,... $\neq 10^{1-1}$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 10^{0}$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 1$

[X] On peut utiliser l'induction faible ou forte

[X] Il faut au moins 3 cas de bases

11.6 Q6 : Nombre entiers

Soient a,b et m des nombre naturels. Est-ce que (a+b) mod m = ((a mod m)+(b mod m)) mod m

Sélectionnez une réponse :

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

Choisir un pair(a) et un impair(b) et tester au moins 2 fois

a) Développement de l'égalité

(a+b) mod m = ((a+b) mod m) mod m

(8+10) mod 2 = ((8 mod 2)+(10 mod 2)) mod 2

(18) mod 2 = (0+0) mod 2

0 = (0) mod 2

0 = 0

b) Développement de l'égalité

(a+b) mod m = ((a+b) mod m) mod m
(8+15) mod 4 = ((8 mod 4)+(15 mod 4)) mod 4
(8+15) mod 4 = ((0)+(15-12) mod 4
(23) mod 4 = (3) mod 4
23-(4*5) = 3
3 = 3

Conclusion c'est [X] Vrai

11.7 Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau

Listing 11.1 – Python algorithme

```
def Apply(array, value, start=None, res=0):

        if(start is None):
            start = len(array)-1

        if(start <0):
            return res

        if(array[start] == value):
            return Apply(array, value, start -1, res+1)

return Apply(array, value, start -1, res)
```

cochez ce qui est vrai concernant la complexités (au moins une réponse)

- ☐ a. $\theta(1)$
- ☐ b. $o(n^2)$
- ☐ c. $O(log(n))$
- ☐ d. $o(log(n))$
- ☐ e. $\theta(log(n))$
- ☐ f. $o(n)$
- ☐ g. $o(1)$
- ☐ h. $O(1)$
- ☐ i. $o(nlog(n))$
- ☐ j. $O(nlog(n))$
- ☐ k. $\theta(n)$
- ☐ l. $\theta(n^2)$
- ☐ m. $O(n^2)$
- ☐ n. $O(n)$
- ☐ o. $\theta(nlog(n))$

g. o(1) => Meilleur des cas

c. O(n) => Cas Moyen

e. $\theta(n)$ => Pire des cas

11.8 Q8 : Ensemble Naturels

Soit N est l'esemble des naturels sauf 0
R=(a,b), a $\in$ N, b $\in$ N et a est un multiple de b

cochez ce qui est vrai concernant R. (au moins une réponse)

- ☐ R est transitif
- ☐ Aucune réponse
- ☐ R est réflexif
- ☐ R est anti-symètrique
- ☐ R est symètrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI
b multiple de b = VRAI
R est réflexif

Test de la symétrie => Exemple (a=2 ou b=6)

a multiple de b = VRAI
b multiple de a = FAUX
R est n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie => (a=b) Exemple (a=3 ou b=3)

a multiple de b = VRAI
b multiple de a = VRAI
R est est anti-symétrique

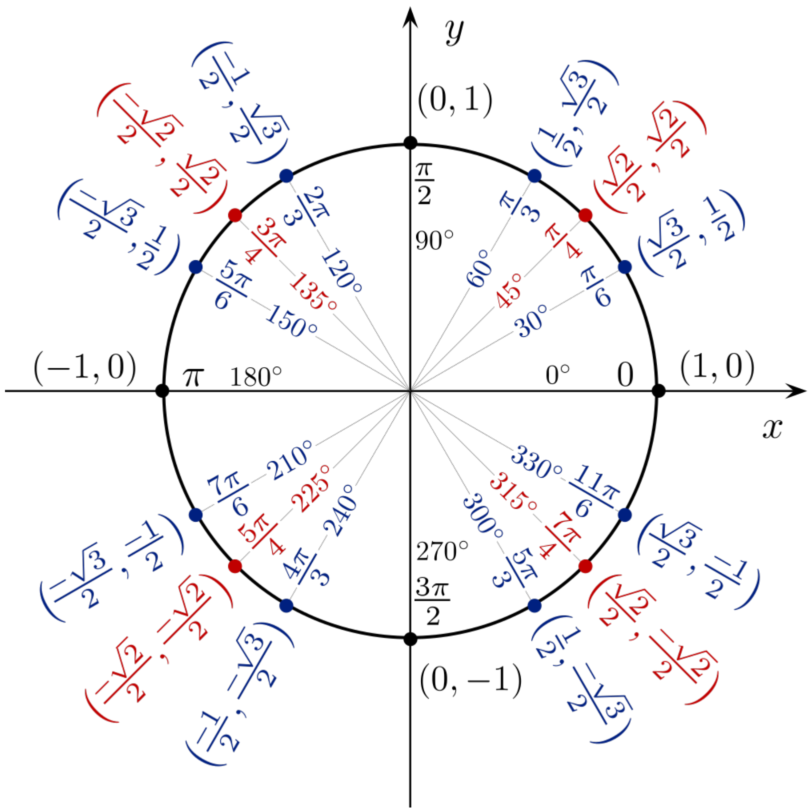
Test de Transitivité => (a=b) Exemple (a=3 ou b=9 Z=18)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?
a est dans la table de 18 ? => VRAI
R est transitif

Chapitre 12: Formules

12.1 Tableau Trigonométrique

Degree Radians	$0°$ 0	$30°$ $\frac{\pi}{6}$	$45°$ $\frac{\pi}{4}$	$60°$ $\frac{\pi}{3}$	$90°$ $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotan	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



12.2 NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne

$X = \rho * cos(\theta)$
$Y = \rho * sin(\theta)$
$Z = x + yi$
Notes : $cis = cos(\theta) * sin(\theta) * i$

12.3 Addition de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) + (a+di)

(a_1+a_2) + (b_1+b_2) *i

12.4 Soustraction de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) - (a+di)

(a_1-a_2) + (b_1-b_2) *i

12.5 Multilication de nombres complex (cartésien)

Exemple : (a+bi) * (a+di)

(a_1*a_2) - (b_1*b_2) + ((a_1 * b_2) + (b_1*a_2)) *i

12.6 Division de nombres complex (cartésien)

Exemple : $\frac{(a+bi)}{(a+di)}$

$\frac{(a_1 * a_2) - (b_1 * b_2)}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(b_1 * a_2) - (a_1 * b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$ *i

12.7 NB Complex : Forme cartésienne vers polaire

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$
$\frac{Y}{X} = tg(\theta)$

12.8 Addition de nombres complex (Polaire)

$Exemple : 4 * cis(45°) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

12.9 Soustraction de nombres complex (Polaire)

$Exemple : 4 * cis(45°) - 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * cos(\theta_1 - \theta_2))}$

$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * sin(\theta_1) + \rho_2 * sin(\theta_2)}{\rho_1 * cos(\theta_1) + \rho_2 * cos(\theta_2)})$

12.10 Multilication de nombres complex (Polaire)

$Exemple : 4 * cis(45°) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$

c1*c2 = ρ_1*ρ_2 *(cos(θ_1 + θ_2) + i * sin(θ_1 + θ_2))

12.11 Division de nombres complex (Polaire)

$Exemple : \frac{(a+bi)}{(c+di)}$

$\frac{c1}{c2} = \frac{r1}{r2} * cos(\theta_1 + \theta_2) + i * sin(\theta_1 - \theta_2)$

Notes : Selon l'énoncé et les préférences de chacun il est conseillé de transformer en forme polaire ou cartésien,
afin de pouvoir appliquer les formules ci-dessus.

12.12 Logique propositionnelle

De Morgans :
a v b= ¬a * ¬b
a*b= ¬a + ¬b
(p∧q) = ¬p v ¬q
(pvq) = ¬ (¬p ∧ ¬q)
¬(p∧q) = (p v q)
(A ∧¬ B) V (¬ A V (C ∧ A)) = ¬(A ∧¬ B) ∧ ¬(¬ A V (C ∧ A))

Forme disjonctive
(A ∧ B) V C
(A ET B) OU C

Forme conjonctive
(A V B) ∧ C
(A OU B) ET C

Transformation :
A=>B = ¬A v (A∧B)
A<=>B = (A=>B)∧(B=>A)
(A=>B)∧(B=>A) = (¬A v (A∧B)) ∧ (¬B v (B∧A))

12.13 Algorithmique symbole

o = meilleur des cas

O = Pire des cas

θ = Cas moyen

Θ = Meilleur des cas, cas moyen, pire des cas