T-PMTH-402 – Math. appliquées à l'info.
Chapitre 4 - Théorie naïve des ensembles

Jean-Sébastien Lerat
Jean-Sebastien.Lerat@heh.be

Haute École en Hainaut

2019-2020

Plan

Introduction

- $\mathbb{N}$ les nombres naturels, exemple : 5
- $\mathbb{Z}$ les nombres entiers, exemple : -5
- $\mathbb{Q}$ les nombres rationnels, exemple : $\frac{2}{5}$
- $\mathbb{R}$ les nombres réels, exemple : π
- $\mathbb{C}$ les nombres complexes, exemple : $2 + 5i$

Plan

Éléments

Éléments

Un **éléments** est un objet

Par exemple, 4 (un nombre naturel) est un « objet ».

Par convention, un **élément** est noté à l'aide d'une lettre **minuscule**.

Ensemble

Ensemble

Un **ensemble** est une collection d'éléments

Il existe deux manières de définir un ensemble :

par extension donner explicitement tous les éléments de l'ensemble, par exemple $A = \{2, 3, 7, 11\}$

par compréhension donner une propriété qui définit les éléments, par exemple $B = \{\text{un nombre entier } n | n \text{ est pair}\}$

La théorie naîve des ensemble est définie informellement à l'aide du langage naturel.

Par convention, un **ensemble** est noté à l'aide d'une lettre **majuscule**.

Appartenance

Appartenance

L'**appartenance** d'un objet a à un ensemble A est notée $a \in A$. L'objet a fait partie de la collection d'objets nommée A.

La non-appartenance d'un objet b à un ensemble A est notée $b \notin A$.

$a \in A$ se lit « a appartient à A », « a est un élément de A » ou « a est dans A ». $A \ni a$ se lit « A possède a ».

Attention : $a \in A$ ne se lit pas « A contient a » car ceci correspond à l'inclusion.

Plan

Paradoxe de Russel

Paradoxe de Russel

L'ensemble R est l'ensemble des éléments x qui sont des ensembles, tel que x n'appartient pas à lui-même :

$$R = \{x | x \notin x\}$$

En quoi est-ce un paradoxe ?

Paradoxe de Russel

Paradoxe de Russel

L'ensemble R est l'ensemble des éléments x qui sont des ensembles, tel que x n'appartient pas à lui-même :

$$R = \{x | x \notin x\}$$

En quoi est-ce un paradoxe ?

Il y a deux possibilités :

- Soit $R \in R$ ce qui implique par définition de R que $R \notin R$
- Soit $R \notin R$ ce qui implique par définition de R que $R \in R$

Dans les deux cas c'est une **contradiction** !

Paradoxe de Russel

Paradoxe de Russel

L'ensemble R est l'ensemble des éléments x qui sont des ensembles, tel que x n'appartient pas à lui-même :

$$R = \{x | x \notin x\}$$

En quoi est-ce un paradoxe ?

Il y a deux possibilités :

- Soit $R \in R$ ce qui implique par définition de R que $R \notin R$
- Soit $R \notin R$ ce qui implique par définition de R que $R \in R$

Dans les deux cas c'est une **contradiction** !

Ceci caractérise donc la théorie naïve des ensembles : la compréhension non restreinte.

Plan

Inclusion

Inclusion

Soient deux ensembles A, B. L'ensemble A est **inclus** à B si et seulement si

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

A est alors appelé **sous-ensemble** de B qui est le **super ensemble** de A.

L'inclusion de A dans B (inclusion large) est notée $A \subseteq B$.
Lorsque A n'est pas inclus à B, la notation utilisée est $A \not\subset B$.

Note : $\forall A, A \subseteq A$

Exemples d'inclusion

$$\begin{array}{rcl} \{1,2\} & \subset & \{1,2,3\} \\ \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} \\ \{\mathbb{N}\} & \not\subset & \{\mathbb{Z}\} \\ \mathbb{N} & \not\subset & \{\mathbb{N},\mathbb{Z}\} \end{array}$$

Inclusion

Inclusion

Soient deux ensembles A, B. L'ensemble A est **inclus** à B si et seulement si

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

A est alors appelé **sous-ensemble** de B qui est le **super ensemble** de A.

L'inclusion de A dans B (inclusion large) est notée $A \subseteq B$.
Lorsque A n'est pas inclus à B, la notation utilisée est $A \not\subset B$.

Note : $\forall A, A \subseteq A$

Note : Lorsque A est inclus à B mais $A \neq B$, on écrit alors $A \subset B$ (inclusion stricte). C'est-à-dire lorsque $\exists x \in B, x \notin A$.

Ensemble vide

Ensemble vide

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$, est l'unique ensemble ne contenant pas d'élément.

Propriété 1 : $\forall A, \emptyset \subset A$

$$\forall x, \quad \underbrace{\overbrace{x \in \emptyset}^{\text{Faux par définition de } \emptyset} \Rightarrow x \in A}_{\text{Toujours vrai}}$$

Égalité

Égalité

Soient deux ensembles A, B. L'ensemble A est **égal** à B si et seulement si

$$A \subset B \qquad \text{et} \qquad B \subset A$$

L'égalité de A et B est notée $A = B$. Lorsque A n'est pas égal à B, la notation utilisée est $A \neq B$.

L'égalité est réciproque, c'est-à-dire que $A = B \iff B = A$.

Exemples d'égalité

$$\begin{aligned} \{1,2,3\} &= \{3,1,2\}^{a} \\ \{\mathbb{N}\} &\neq \{\mathbb{N},\mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

a. La relation d'ordre n'est pas prise en compte ici.

Ensemble vide

Ensemble vide

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$, est l'unique ensemble ne contenant pas d'élément.

Propriété 2 : $\emptyset$ est unique.

Soient $V_1 = \{\}$ et $V_2 = \{\}$.
Sur base de $\forall A, A \subseteq A$:

$$\left.\begin{array}{ccc} V_1 & \subseteq & V_2 \\ V_2 & \subseteq & V_1 \end{array}\right\} \Rightarrow V_1 = V_2$$

Cardinalité

Cardinalité

Soit A un ensemble, si A possède exactement n éléments ($n \in \mathbb{N}$), A est un ensemble **fini** de **cardinalité** n notée $|A| = n$.

Exemples de la cardinalité

$$\begin{aligned} |1, 2, 3| &= 3 \\ |\emptyset| &= 0 \\ |\{\emptyset\}| &= 1 \end{aligned}$$

Ensemble vide

Ensemble vide

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$, est l'unique ensemble ne contenant pas d'élément.

Propriété 3 : $|\emptyset| = 0$

$$|\emptyset| = \sum_{x \in \emptyset} 1$$

Or il n'y a aucune $x \in \emptyset \Rightarrow |\emptyset| = 0$

Ensemble des parties

Ensemble des parties

Soit un ensemble A, l'ensemble des parties de A noté $\mathscr{P}(A)$ ou 2^A, est l'ensemble des sous-ensembles de A :

$$\mathscr{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}$$

$\mathscr{P}(A)$ est de cardinalité $2^{|A|}$

Exemples d'ensemble des parties

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\{1,2,3\}) &= \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\} \\ \mathscr{P}(\emptyset) &= \Big\{\emptyset\Big\} \\ \mathscr{P}(\{\emptyset\}) &= \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}\Big\} \end{aligned}$$

Plan

Produit cartésien

Produit cartésien

Soient A, B deux ensembles. Le **produit cartésien** de A et B est l'ensemble des paires ordonnées de la forme (a, b) où $a \in A$, $b \in B$, noté $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemple de produit cartésien

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \\ B \times A &= \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2), (a, 3), (b, 3)\} \end{aligned}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \textbf{ fois}} = \prod_{i=1}^{n} A = A^n$$

Ensemble vide

Ensemble vide

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$, est l'unique ensemble ne contenant pas d'élément.

Propriété 4 : $\emptyset \times A = \emptyset = A \times \emptyset$.

$$\emptyset \times A = \emptyset : \ \{a_1, \ldots, a_n\} \times \{\} = \{\cancel{(a_1,)} \ldots, \cancel{(a_n,)}\} = \{\} = \emptyset$$
$$\Leftrightarrow A \times \emptyset$$

Union

Union

Soient A, B deux ensembles. L'**union** de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A ou à B, noté $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemple d'union

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$

$$\begin{aligned} A \cup B \quad & \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} = \{x \mid x \in \{1,2,3\} \text{ ou } x \in \{a, b\}\} \\ & = \{1, 2, 3, a, b\} \end{aligned}$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$\underbrace{A_1 \cup \ldots \cup A_n}_{n \textbf{ ensembles}} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Ensemble vide

Ensemble vide

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$, est l'unique ensemble ne contenant pas d'élément.

Propriété 5 : $\emptyset \cup A = A$.

$$\emptyset \cup A = \{x \mid x \in \{\} \text{ ou } x \in \{a_1, \ldots, a_n\}\} = \{a_1, \ldots, a_n\} = A$$

Intersection

Intersection

Soient A, B deux ensembles. L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments appartenant à A et à B, noté $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Exemple d'intersection

Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$

$$\begin{aligned} A \cap B \quad & \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\} = \{x \mid x \in \{1,2,3\} \text{ et } x \in \{a, b\}\} \\ & = \{\} = \emptyset \end{aligned}$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\underbrace{A_1 \cap \ldots \cap A_n}_{n \textbf{ ensembles}} = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Ensemble vide

Ensemble vide

L'**ensemble vide** noté $\emptyset$, est l'unique ensemble ne contenant pas d'élément.

Propriété 6 : $\emptyset \cap A = \emptyset$.

$$\emptyset \cap A = \{x \mid x \in \{\} \text{ et } x \in \{a_1, \ldots, a_n\}\} = \{\} = \emptyset$$

Complémentaire

Complémentaire

Soient A un ensemble qui est un sous-ensemble de l'univers U, ensemble de tous les éléments. Le **complémentaire** de A est l'ensemble des éléments du U n'appartenant pas à A, noté $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$

Exemple de complémentaire

Soient $U = [1, 10]$ et $A = \{1, 2, 3\}$.

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U, \notin A\} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Plan

Exercices – Vrai ou Faux

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $1 \in 2^{\mathbb{N}}$
3. $\emptyset \in \emptyset$
4. $\{1\} \in \mathbb{N}$
5. $\{1\} \in 2^{\mathbb{N}}$
6. $\emptyset \subseteq \emptyset$
7. $1 \subseteq \mathbb{N}$
8. $1 \subseteq 2^{\mathbb{N}}$
9. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
10. $\{1\} \subset \mathbb{N}$
11. $\{1\} \subset 2^{\mathbb{N}}$
12. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
13. $\emptyset \in \mathbb{N}$
14. $\emptyset \in 2^{\mathbb{N}}$
15. $A \in 2^{A}$
16. $\emptyset \subset \mathbb{N}$
17. $\emptyset \subset 2^{\mathbb{N}}$
18. $A \subset 2^{A}$

Exercices – Vrai ou Faux

1. $1 \in \mathbb{N}$ Vrai
2. $1 \in 2^{\mathbb{N}}$ Faux
3. $\emptyset \in \emptyset$ Faux
4. $\{1\} \in \mathbb{N}$ Faux
5. $\{1\} \in 2^{\mathbb{N}}$ Vrai
6. $\emptyset \subseteq \emptyset$ Vrai
7. $1 \subseteq \mathbb{N}$ Faux
8. $1 \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ Faux
9. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ Faux
10. $\{1\} \subset \mathbb{N}$ Vrai
11. $\{1\} \subset 2^{\mathbb{N}}$ Faux
12. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$ Vrai
13. $\emptyset \in \mathbb{N}$ Faux
14. $\emptyset \in 2^{\mathbb{N}}$ Vrai
15. $A \in 2^{A}$ Vrai
16. $\emptyset \subset \mathbb{N}$ Vrai
17. $\emptyset \subset 2^{\mathbb{N}}$ Vrai
18. $A \subset 2^{A}$ Faux

Exercices – Extension d'ensembles

Lister les éléments des ensembles :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$
2. $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$
3. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 2 = 0\}$

Exercices – Extension d'ensembles

Lister les éléments des ensembles :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 1 = 0\}$ $\{-1\}$
2. $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$ $\{-i, i\}$
3. $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 + 2 = 0\}$ $\emptyset$

Exercices – Égalité d'ensembles

Établissez les égalités entre :

1. $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 2, 3, 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ et $\{1\}$
3. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est premier}\}$ et $2\mathbb{N}$

Exercices – Égalité d'ensembles

Établissez les égalités entre :

1. $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 2, 3, 1\}$ égaux
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\}$ et $\{1\}$ égaux
3. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est premier}\}$ et $2\mathbb{N}$ inégaux

Exercices – Relation d'inclusion

Établissez la relation d'inclusion entre :

1. $2^A \cup 2^B$ et $2^{A \cup B}$
2. $2^A \cap 2^B$ et $2^{A \cap B}$

Exercices – Relation d'inclusion

Établissez la relation d'inclusion entre :

1. $2^A \cup 2^B$ et $2^{A\cup B}$ $2^A \cup 2^B \subset 2^{A\cup B}$
2. $2^A \cap 2^B$ et $2^{A\cap B}$ $2^A \cap 2^B \subseteq 2^{A\cap B}$ et $2^A \cap 2^B \supseteq 2^{A\cap B}$

Exercices – Produit cartésien

Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $C = \{7\}$, calculez :

1. $A \times B$
2. $2^{A \times C}$
3. $2^{A} \times C$

Exercices – Produit cartésien

Soient $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ et $C = \{7\}$, calculez :

1. $A \times B$ $\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$
2. $2^{A\times C}$ $A \times C = \{(1,7),(2,7)\}$
   $2^{A\times C} = \{\emptyset, \{(1,7)\}, \{(2,7)\}, \{(1,7),(2,7)\}\}$
3. $2^A \times C$ $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
   $2^A \times C = \{(\emptyset, 7), (\{1\}, 7), (\{2\}, 7), (\{1,2\}, 7)\}$

Exercices – Équivalence

Prouvez les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$

2. $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

Exercices – Équivalence

Prouvez les équivalences suivantes :

1. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = \emptyset$

   $\Rightarrow$ $\underbrace{(\forall x \in A \Rightarrow x \in B)}_{\text{par définition}} \Rightarrow (\underbrace{(x \in A \text{ et } x \in \bar{B})}_{\Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \notin B} = \emptyset)$

   or par définition $x \in A \Rightarrow x \in B$.

   $x \in A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \notin A$

   Or par définition de $\bar{A}$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$

   $\Leftarrow$ de manière similaire

2. $A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$ de manière similaire