T-PMTH-402 – Math. appliquées à l'info.

Chapitre 1 – Matrices

Jean-Sébastien Lerat
Jean-Sebastien.Lerat@heh.be

HEH.be Sciences et technologies

Haute École en Hainaut

2019-2020

Clef du cours sur e-Campus

Boole

Contenu

Matrices

Ensembles entiers, complexes, théorie naïve

Logique propositionnelle, des prédicats (1^{er} ordre

Récurrence/Induction

Complexité algorithmique

Relations binaires

Erreurs numériques

Objectifs

Acquérir les fondements mathématiques nécessaires à la programmation

- Comprendre les concepts de matrices, d'ensembles (en particulier les nombres), d'induction et de complexité algorithmique
- Maîtriser la logique du premier ordre
- Savoir résoudre un problème de manière récursive
- Savoir déterminer la complexité d'un algorithme

Moyens

Cours magistral de 25h présentant ces différents concepts

Les algorithmes seront présentés en `Python`

Pseudocode vs Python : tester et pratiquer !

Exercices sur papier (algorithmes sur PC si temps)

Lors des exercices : une rangée sur deux si possible

Évaluation : examen écrit

Plan

Introduction

Qu'est-ce qu'une *matrice* ?

Introduction

Qu'est-ce qu'une *matrice* ?

C'est un tableau de $n > 0$ ligne(s) et $m > 0$ colonne(s) contenant $n \times m$ valeurs.

Introduction

Qu'est-ce qu'une *matrice* ?

C'est un tableau de $n > 0$ ligne(s) et $m > 0$ colonne(s) contenant $n \times m$ valeurs.

Matrice 2×3 à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Introduction

Qu'est-ce qu'une *matrice* ?

C'est un tableau de $n > 0$ ligne(s) et $m > 0$ colonne(s) contenant $n \times m$ valeurs.

Matrice 2×3 à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Matrice-vecteur

A est une matrice-ligne de la forme $1 \times m$
B est une matrice-colonne de la forme $n \times 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Plan

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 1

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{matrix}$$

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{vmatrix}$$

utilisée aussi pour les déterminants

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 3

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{Vmatrix}$$

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 5

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{Bmatrix}$$

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

†. Les mathématiciens préfèreront utiliser les indices $i \in [1; n], j \in [1; m]$

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Les **majuscules** sont utilisées pour nommer les **matrices**.
Les **minuscules** sont utilisées pour nommer les **valeurs** appelées **coefficients**.

†. Les mathématiciens préfèreront utiliser les indices $i \in [1; n], j \in [1; m]$

Notation

Il existe 6 notations différentes.

La matrice vue précédemment – notation 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Les **majuscules** sont utilisées pour nommer les **matrices**.
Les **minuscules** sont utilisées pour nommer les **valeurs** appelées **coefficients**.

Dénomination

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \end{pmatrix} \qquad A = (a_{i,j})_{0 \leq i < n, 0 \leq j < m} \qquad \dagger$$

où $a_{i,j}$ correspond à l'élément de la ligne i, colonne j.

†. Les mathématiciens préfèreront utiliser les indices $i \in [1; n], j \in [1; m]$

Plan

Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice $n \times m$ telle que $n = m$ ($n \times n$ ou $m \times m$).

Matrice carrée

Une matrice carrée est une matrice $n \times m$ telle que $n = m$ ($n \times n$ ou $m \times m$).

Exemples

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 0,5 \\ 5 & 8,3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 0,5 & 0 \\ 5 & 8,3 & 9 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

La diagonale et matrice diagonale

La **diagonale** d'une matrice carrée A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.

La diagonale et matrice diagonale

La **diagonale** d'une matrice carrée A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.

appelés coefficients diagonaux
les autres sont les coefficients extradiagonaux

La diagonale et matrice diagonale

La **diagonale** d'une matrice carrée A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.

appelés coefficients diagonaux
les autres sont les coefficients extradiagonaux

L'**antidiagonale** de A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j = (n - 1) - i$.

La diagonale et matrice diagonale

La **diagonale** d'une matrice carrée A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.

appelés coefficients diagonaux
les autres sont les coefficients extradiagonaux

L'**antidiagonale** de A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j = (n-1) - i$.

A est une **matrice diagonale**, B est une **matrice antidiagonale**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8,3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8,3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La diagonale et matrice diagonale

La **diagonale** d'une matrice carrée A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $i = j$.

appelés coefficients diagonaux
les autres sont les coefficients extradiagonaux

L'**antidiagonale** de A sont les coefficients $a_{i,j}$ tels que $j = (n-1) - i$.

A est une matrice diagonale, B est une matrice antidiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8,3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8,3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A (resp. B) a une diagonale (resp. antidiagonale) non-nulle.
Les autres éléments sont nulles.
La matrice se résume à sa diagonale (resp. antidiagonale)
$\longrightarrow$ matrice diagonale (resp. antidiagonale)

Matrice triangulaire

Une matrice **triangulaire** est une matrice carrée telle que les coefficients au-dessus (resp. au-dessous) de la diagonale sont **nulls**

Matrice triangulaire

Une matrice **triangulaire** est une matrice carrée telle que les coefficients au-dessus (resp. au-dessous) de la diagonale sont **nulls**

Matrice triangulaire inférieure

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Matrice triangulaire

Une matrice **triangulaire** est une matrice carrée telle que les coefficients au-dessus (resp. au-dessous) de la diagonale sont **nulls**

Matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & \cdots & a_{0,n-1} \\ 0 & a_{1,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & a_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Identité

Une matrice identité, notée I_n, est une matrice carrée $n \times n$ telle que les coefficients diagonaux valent 1 et les extradiagonaux valent 0.

Exemples

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Plan

Addition

L'addition de deux matrices A, B de mêmes dimensions $n \times m$ est une matrice C de taille $n \times m$ telle que $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Addition

L'addition de deux matrices A, B de mêmes dimensions $n \times m$ est une matrice C de taille $n \times m$ telle que $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 \\ 1+7 & 0+5 \\ 1+2 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplication scalaire

La multiplication d'une matrice A de taille $n \times m$ par une constante k est une matrice B telle que $b_{i,j} = k \times a_{i,j}$

Multiplication scalaire

La multiplication d'une matrice A de taille $n \times m$ par une constante k est une matrice B telle que $b_{i,j} = k \times a_{i,j}$

Exemple

$$3,2 \times A = 3,2 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \times 0 & 3,2 \times 0 \\ 3,2 \times 7 & 3,2 \times 5 \\ 3,2 \times 2 & 3,2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 22,4 & 16 \\ 6,4 & 3,2 \end{pmatrix}$$

Transposition

La transposition d'une matrice A de taille $n \times m$, appelée transposée et notée A^t, est une matrice de taille $m \times n$ telle que $a^t_{i,j} = a_{j,i}$

Transposition

La transposition d'une matrice A de taille $n \times m$, appelée transposée et notée A^t, est une matrice de taille $m \times n$ telle que $a^t_{i,j} = a_{j,i}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 10 + 3 \times 13 + 4 \times 16 & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 130 & 1 \times 8 + 2 \times 11 + 3 \times 14 + 4 \times 17 & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Non commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 130 & 140 & 1 \times 9 + 2 \times 12 + 3 \times 15 + 4 \times 18 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Non commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 130 & 140 & 150 \\ 5 \times 7 + 6 \times 10 + 7 \times 13 + 8 \times 16 & ? & ? \end{pmatrix}$$

Non commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 130 & 140 & 150 \\ 314 & 5 \times 8 + 6 \times 11 + 7 \times 14 + 8 \times 17 & ? \end{pmatrix}$$

Non commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 130 & 140 & 150 \\ 314 & 340 & 5 \times 9 + 6 \times 12 + 7 \times 15 + 8 \times 18 \end{pmatrix}$$

Non commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Produit matriciel

Le produit d'une matrice A de taille $n \times m$ par une matrice B de taille $m \times p$ est une matrice C de taille $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m-1} a_{i,k} \times b_{k,j}$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 130 & 140 & 150 \\ 314 & 340 & 366 \end{pmatrix}$$

Non commutatif : $A \times B \neq B \times A$

Trace

La trace d'une matrice A carrée $n \times n$, notée $Tr(A)$, est $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,i}$

Trace

La trace d'une matrice A carrée $n \times n$, notée $Tr(A)$, est $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,i}$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 8,3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Tr(A) = 0 + 4 + 2 = 6$$

Plan

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Le déterminant d'une matrice 1×1 est l'unique coefficient.

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Le déterminant d'une matrice 1×1 est l'unique coefficient.

Mineur

Le mineur $m_{i,j}$ d'une matrice carrée A de taille $n \times n$, est le déterminant d'une matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Le déterminant d'une matrice 1×1 est l'unique coefficient.

Mineur

Le mineur $m_{i,j}$ d'une matrice carrée A de taille $n \times n$, est le déterminant d'une matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Cofacteur

Le cofacteur $c_{i,j}$ d'une matrice carrée A de taille $n \times n$, vaut $(-1)^{i+j} m_{i,j}$.

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Le déterminant d'une matrice 1×1 est l'unique coefficient.

Mineur

Le mineur $m_{i,j}$ d'une matrice carrée A de taille $n \times n$, est le déterminant d'une matrice carrée de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j de A.

Cofacteur

Le cofacteur $c_{i,j}$ d'une matrice carrée A de taille $n \times n$, vaut $(-1)^{i+j} m_{i,j}$.

Exemple de mineur/cofacteur

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad m_{0,0} = det\left(3\right) = 3 \quad m_{0,1} = 8 \quad m_{1,0} = 4 \quad m_{1,1} = 2$$

$$c_{0,0} = (-1)^{0+0} m_{0,0} = 3 \qquad c_{0,1} = -8 \qquad c_{1,0} = -4 \qquad c_{1,1} = 2$$

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Il correspond à $\sum_{0}^{n-1} = a_{i,k} \times c_{i,k} = \sum_{0}^{n-1} = a_{k,j} \times c_{k,j}$ (pour un i/j fixé)

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Il correspond à $\sum_{0}^{n-1} = a_{i,k} \times c_{i,k} = \sum_{0}^{n-1} = a_{k,j} \times c_{k,j}$ (pour un i/j fixé)

Exemple de déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad m_{0,0} = det\left(3\right) = 3 \quad m_{0,1} = 8 \quad m_{1,0} = 4 \quad m_{1,1} = 2$$

$$c_{0,0} = (-1)^{0+0} m_{0,0} = 3 \qquad c_{0,1} = -8 \qquad c_{1,0} = -4 \qquad c_{1,1} = 2$$

$$det(A) = 2 \times 3 + 4 \times (-8) = -26$$

Exercices : Exprimer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Il correspond à $\sum_{0}^{n-1} = a_{i,k} \times c_{i,k} = \sum_{0}^{n-1} = a_{k,j} \times c_{k,j}$ (pour un i/j fixé)

Exemple de déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad m_{0,0} = det\begin{pmatrix}3\end{pmatrix} = 3 \quad m_{0,1} = 8 \quad m_{1,0} = 4 \quad m_{1,1} = 2$$

$$c_{0,0} = (-1)^{0+0} m_{0,0} = 3 \qquad c_{0,1} = -8 \qquad c_{1,0} = -4 \qquad c_{1,1} = 2$$

$$det(A) = 2 \times 3 + 4 \times (-8) = -26$$

Exercices : Exprimer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad = a \times d - c \times b$$

Déterminant

Le déterminant d'une matrice A carrée de taille $n \times n$ est noté $det(A)$ ou $|A|$.

Il correspond à $\sum_{0}^{n-1} = a_{i,k} \times c_{i,k} = \sum_{0}^{n-1} = a_{k,j} \times c_{k,j}$ (pour un i/j fixé)

Exemple de déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad m_{0,0} = det\begin{pmatrix}3\end{pmatrix} = 3 \quad m_{0,1} = 8 \quad m_{1,0} = 4 \quad m_{1,1} = 2$$

$$c_{0,0} = (-1)^{0+0} m_{0,0} = 3 \qquad c_{0,1} = -8 \qquad c_{1,0} = -4 \qquad c_{1,1} = 2$$

$$det(A) = 2 \times 3 + 4 \times (-8) = -26$$

La règle de Sarus (matrice 3×3) s'obtient de manière similaire :

$$det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = (a \times e \times i + d \times h \times c + g \times b \times f) - (g \times e \times c + a \times h \times f + d \times b \times i)$$

Inversion

L'inverse d'une matrice A carrée de taille $n \times n$, noté A^{-1} est une matrice telle que

$$A\,A^{1} = I$$

Une méthode de calcul *simple* est $det(A)^{-1}co(A)^{t}$ où $co(A)$ est la comatrice

L'inverse existe donc si et seulement si $det(A) \neq 0$.
La comatrice de A est une matrice où chaque élément $co(A)_{i,j}$ est le cofacteur en i, j.

Inversion

L'inverse d'une matrice A carrée de taille $n \times n$, noté A^{-1} est une matrice telle que

$$A\,A^{1} = I$$

Une méthode de calcul *simple* est $det(A)^{-1} co(A)^t$ où $co(A)$ est la comatrice

L'inverse existe donc si et seulement si $det(A) \neq 0$.
La comatrice de A est une matrice où chaque élément $co(A)_{i,j}$ est le cofacteur en i, j.

Exemple d'inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \qquad det(A) = -26 \qquad co(A) = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{26} & \frac{2}{13} \\ \frac{4}{13} & -\frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

Plan

Exercices

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $B \times C$
2. Calculer la trace de A
3. Calculer la transposée de B
4. Calculer $2,5 \times C$
5. Calculer $B^t + C$
6. Calculer le déterminant de A
7. Inverser A

Exercices

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer $B \times C \; = \; \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 11 \\ 11 & 12 & 13 & 14 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$
2. Calculer la trace de $A = 4$
3. Calculer la transposée de $B = C$
4. Calculer $2,5 \times C = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$
5. Calculer $B^t + C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
6. Calculer le déterminant de $A = 96$
7. Inverser A , $co(A) = \begin{pmatrix} -20 & 4 & 4 & 28 \\ 4 & 4 & 28 & -20 \\ 4 & 28 & 20 & -4 \\ 28 & -20 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{24} \times \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 & -5 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 7 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Plan

Équations linéaires

Un système de n équations linéaires à m inconnues est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 \cdots a_{0,m-1} & = b_0 \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 \cdots a_{1,m-1} & = b_1 \\ \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots & = \vdots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 \cdots a_{n-1,m-1} & = b_{n-1} \end{array}\right.$$

Équations linéaires

Un système de n équations linéaires à m inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 \cdots a_{0,m-1} & = b_0 \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 \cdots a_{1,m-1} & = b_1 \\ \vdots \qquad \ldots \qquad \vdots & = \vdots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 \cdots a_{n-1,m-1} & = b_{n-1} \end{cases}$$

Comment le représenter sous forme matricielle ?

Équations linéaires

Un système de n équations linéaires à m inconnues est de la forme :

$$\left\{\begin{array}{cc} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 \cdots a_{0,m-1} & = b_0 \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 \cdots a_{1,m-1} & = b_1 \\ \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots & = \vdots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 \cdots a_{n-1,m-1} & = b_{n-1} \end{array}\right.$$

Comment le représenter sous forme matricielle ?

Équations linéaires

Un système de n équations linéaires à m inconnues est de la forme :

$$\begin{cases} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 \cdots a_{0,m-1} & = b_0 \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 \cdots a_{1,m-1} & = b_1 \\ \vdots \qquad \dots \qquad \vdots & = \vdots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 \cdots a_{n-1,m-1} & = b_{n-1} \end{cases}$$

Comment le représenter sous forme matricielle ?

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Opérations élémentaires sur les lignes L_i

- $L_i \leftarrow k \times L_i$
- $L_i \leftarrow L_i + L_j$
- $L_i, L_j \leftarrow L_j, L_i$

Équations linéaires

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m-1} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,m-1} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,m-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Opérations élémentaires sur les lignes L_i

- $L_i \leftarrow k \times L_i$
- $L_i \leftarrow L_i + L_j$
- $L_i, L_j \leftarrow L_j, L_i$

Méthode de Gauss

1. Choisir une ligne, dont la première valeur non-nulle est appelée pivot
2. Soustraire cette ligne afin de converger vers une matrice triangulaire
3. Répéter ces étapes jusqu'à obtenir une matrice **triangulaire**
4. Répéter ces étapes jusqu'à obtenir une matrice **diagonale**

Équations linéaires

Méthode de Gauss

1. Choisir une ligne, dont la première valeur non-nulle est appelée pivot
2. Soustraire cette ligne afin de converger vers une matrice triangulaire
3. Répéter ces étapes jusqu'à obtenir une matrice **triangulaire**
4. Répéter ces étapes jusqu'à obtenir une matrice **diagonale**

Exercice :

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 3y & + & 4z & = & 50 \\ 3x & + & 5y & - & 4z & = & 2 \\ 4x & + & 7y & - & 2z & = & 31 \end{array}$$

Équations linéaires

Exercice :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 50 \\ 3x & + & 5y & - & 4z & = & 2 \\ 4x & + & 7y & - & 2z & = & 31 \end{array}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 3 \times L_0$,
$L_2 \leftarrow L_2 - 4 \times L_0$,
$L_1 \leftarrow -\frac{1}{4} L_1$,
$L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1$,
$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$,
$L_0 \leftarrow L_0 - 3 \times L_1$,
$L_0 \leftarrow L_0 + 8 \times L_2$
et $L_1 \leftarrow L_1 - 4 \times L_2$.

$$x = 3 \qquad y = 5 \qquad z = 8$$

Simulation 3D

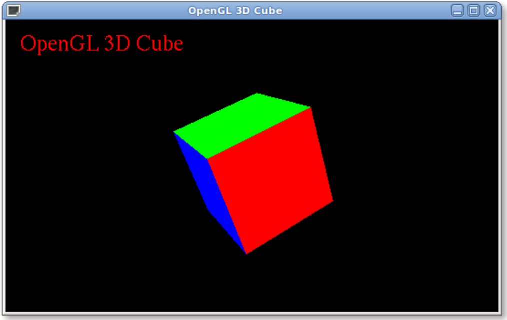
Dans les simulations 3D (ex : jeux vidéos), les formes (objets, personnages, ...) peuvent être représentés par un ensemble de coordonnées (points en 3 dimensions).

Soit $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$, comment faire une rotation d'angle θ autour de l'axe x ?

Simulation 3D

Dans les simulations 3D (ex : jeux vidéos), les formes (objets, personnages, ...) peuvent être représentés par un ensemble de coordonnées (points en 3 dimensions).

Soit $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$, comment faire une rotation d'angle θ autour de l'axe x ?



Simulation 3D

Dans les simulations 3D (ex : jeux vidéos), les formes (objets, personnages, ...) peuvent être représentés par un ensemble de coordonnées (points en 3 dimensions).

Soit $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$, comment faire une rotation d'angle θ autour de l'axe x ?

En multipliant P par une matrice de rotation R (projection) :

$$R_{\mathbf{x}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad R_{\mathbf{y}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$R_{\mathbf{z}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; T(t_x, t_y, t_z) = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}$$

où T est une matrice de translation (addition).
Rotation multiples : utiliser la multiplication matricielle.

Simulation 3D

Exercice : Soit $P = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$,

Effectuez

1. une rotation de 90° en x et de 45° en y
2. puis une translation de 50 en z

Simulation 3D

Exercice : Soit $P = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$,

Effectuez

1. une rotation de 90° en x et de 45° en y
2. puis une translation de 50 en z

Solution :

$$P\prime \leftarrow R_x(90^\circ) \times R_y(45^\circ) \times P + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Afin de détecter les lignes verticales (resp. horizontaux), un *masque* peut être appliqué à chaque point tel que $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$ (resp. $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$).

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Afin de détecter les lignes verticales (resp. horizontaux), un *masque* peut être appliqué à chaque point tel que $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$ (resp. $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$).

Ces opérations sont la **convolution** de I par un **gradient** noté $\triangledown g$.
Par exemple (lignes verticales) :

$$I_x = I * \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Afin de détecter les lignes verticales (resp. horizontaux), un *masque* peut être appliqué à chaque point tel que $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$ (resp. $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$).

Ces opérations sont la **convolution** de I par un **gradient** noté $\bigtriangledown g$.
Par exemple (lignes verticales) :

$$I_x = I * \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice : appliquer ce filtre sur

$$I = \begin{pmatrix} 254 & 123 & 0 & 12 \\ 23 & 234 & 234 & 32 \\ 0 & 12 & 21 & 112 \end{pmatrix}$$

Traitement de l'image – Détection de contour

La détection de contour consiste à faire ressortir les contours de chaque éléments d'une images. La situation la plus simple est de traiter une image en noir et blanc.

Soit I une image $n \times m$ prenant ses valeurs dans $[0, 255]$ où 0 correspond à du noir, et 255 à du blanc.

Afin de détecter les lignes verticales (resp. horizontaux), un *masque* peut être appliqué à chaque point tel que $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$ (resp. $p_{i,j} \leftarrow p_{i,j} - p_{i,j+1}$).

Ces opérations sont la **convolution** de I par un **gradient** noté $\bigtriangledown g$.
Par exemple (lignes verticales) :

$$I_x = I * \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice : appliquer ce filtre sur

$$I = \begin{pmatrix} 254 & 123 & 0 & 12 \\ 23 & 234 & 234 & 32 \\ 0 & 12 & 21 & 112 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow I\prime = \begin{pmatrix} 131 & 123 & 12 \\ 211 & 0 & 202 \\ 12 & 9 & 91 \end{pmatrix}$$