

Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

Août-Septembre 2020

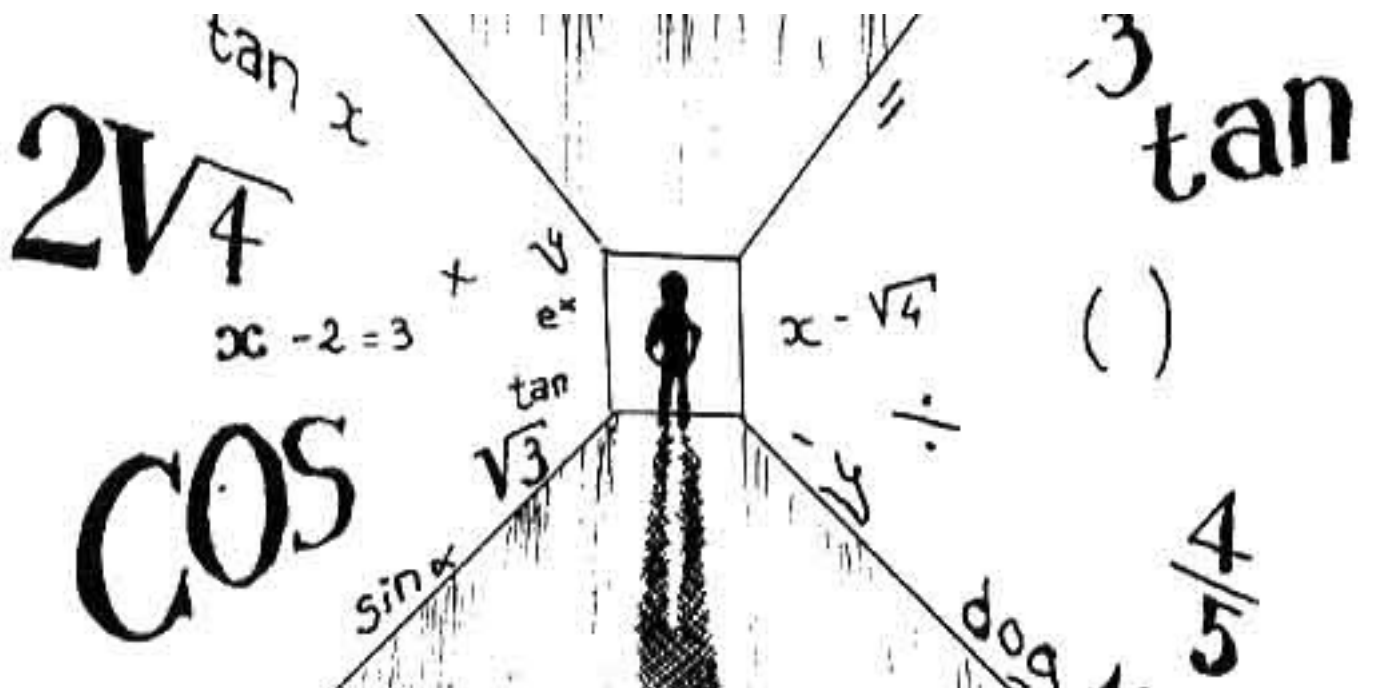
Table de Matières

1	Mathématiques Théorie	3
1.1	Matrices Théories	4
1.1.1	Les propriétés	4
1.1.2	Calcul du déterminants 2×2	5
1.1.3	Calcul du déterminants 4×4 ou $n \times n$	5
1.1.4	Méthode Elimination de Gauss	6
1.1.5	Autres Méthode	7
1.2	Nombres Complexes Théorie	9
1.2.1	Conversion polaire - cartésienne	9
1.2.2	Conversion Cartésienne - Polaire	10
1.3	Chaptire 3 : Logique	11
1.3.1	Logique propositionnelle	11
1.3.2	Proposition	11
1.3.3	L'implication	11
1.3.4	L'équivalence	11
1.3.5	Vocabulaire	11
1.3.6	Tableau priorités logique	12
1.3.7	Tautologie	12
1.3.8	Changement de forme	12
1.4	Théorie naïve des ensembles	13
1.4.1	Définition	13
1.4.2	Relation d'égalité	13
1.4.3	Relation d'inclusion	13
1.4.4	Propriété de l'inclusion	13
1.4.5	Relation d'inclusion	14
1.4.6	Opération d'union (\cup)	14
1.4.7	Opération d'intersection (\cap)	14
1.4.8	L'ensemble vide	14
1.4.9	La cardinalité	15
1.4.10	Identité	15
1.4.11	Commutativité	15
1.4.12	Associativité	15
1.4.13	Distributivité	15
1.4.14	De Morgans	15
2	Mathématiques Exercices	16
2.1	Exercice Matrices	17
2.1.1	Enoncés des exercices	17
2.1.2	Résolution des exercices	18
2.2	Nombres Complexes Exercices	29
2.2.1	Exercices : Enoncés	29
2.2.2	Résoudre les équations suivantes :	30
2.2.3	Trouver le conjugués :	32
2.2.4	Identifier \mathbb{R} \mathbb{I}	32
2.2.5	Exprimer sous forme $a+bi$	32
2.2.6	Exprimer sous forme polaire	32
2.2.7	Exprimer sous forme cartésienne	33
2.2.8	Trouver la solution	34
2.3	Logique propositionnelle exercices	36

2.3.1	Enoncé Exercices	36
2.3.2	Déterminer la véracité	36
2.3.3	Construire la table de vérité	36
2.4	Théorie naïve des ensembles Exercices	37
2.4.1	Enoncé d'exercices	37
2.4.2	Résolution	37
2.5	Nombre Entiers Exercices	40
2.5.1	Exemple Modulo	40
2.6	Relation Binaire Exercices	41
2.6.1	Exercices Examen	41
3	Exemple d'examen	44
3.1	Q1 : Calcul du déterminant de la matrice	44
3.2	Q2 : Calcul nombre complexe	46
3.3	Q3 : Transformer en forme conjonctive	49
3.4	Q4 : Théorie des ensembles naïfs	49
3.5	Q5 : Induction forte/faibles	51
3.6	Q6 : Nombre entiers	52
3.7	Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau	53
3.8	Q8 : Ensemble Naturels	54
4	Formules	55
4.1	Tableau Trigonométrie	55
4.2	NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne	56
4.3	Addition de nombres complex (cartésien)	56
4.4	Soustraction de nombres complex (cartésien)	56
4.5	Multilication de nombres complex (cartésien)	56
4.6	Division de nombres complex (cartésien)	56
4.7	NB Complex : Forme cartésienne vers polaire	57
4.8	Addition de nombres complex (Polaire)	57
4.9	Soustraction de nombres complex (Polaire)	57
4.10	Multilication de nombres complex (Polaire)	57
4.11	Division de nombres complex (Polaire)	57
4.12	Logique propositionnelle	58
4.13	Algorithmique symbole	58

Chapitre 1

Mathématiques Théorie



1.1 Matrices Théories

1.1.1 Les propriétés

A) Linéarité

si on multiplie une matrice par λ , le déterminant est multiplié par λ^n et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par $\lambda = \det(A) * \lambda^n$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)?$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ab \text{ et } \det(B) = cd$$

Conclusion :

$$C = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = (a+c) * (b+d)$$

$\lambda^n \neq$ linéaire

λ^n est exponentielle

B) Déterminant et transposée

$\det(A) = \det(A^T)$, les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$$\det(A) = \sum_{o \in S} \varepsilon(o^{-1}), \dots$$

$$\det(T_a) = \sum_{o \in S} \varepsilon(o^1), \dots$$

C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\varphi_a(x_1, \dots, x_n) = \det(\varphi_c)(A * 1, \dots, A * N)$$

D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différent de 0.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

1.1.2 Calcul du déterminants 2*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplications croisée des 2 ensembles

Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1*3) - (2*4)$$

$$\det(A) = (3-8)$$

$$\det(A) = (-5)$$

$$S = -5$$

1.1.3 Calcul du déterminants 4*4 ou n*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

$$L3 - (2*L1) = L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2-(1*2)} & \mathbf{3-(2*2)} & \mathbf{0-(2*3)} & \mathbf{1-(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{(2-2)} & \mathbf{3-4} & \mathbf{(0-6)} & \mathbf{1-0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-(3*1)} & \mathbf{0-(3*2)} & \mathbf{1-(3*3)} & \mathbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-3} & \mathbf{0-6} & \mathbf{1-9} & \mathbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

A partir de ce moment-ci, nous pouvons utiliser la formule de sarus, liebniz, ...

Exmples :

1.1.4 Méthode Elimination de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L3 = L3-1*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{4} \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

L4 = L4-6*L2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{20} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

L4-(-1)*L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$1 * (-1) * (-4) * 24 = 96$$

$$S = \det(A) = 96$$

1.1.5 Autres Méthode

Elimination en matrice 3*3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 * \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Création de la matrice de signe

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 2*2

$$A = 1 * \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - (-2) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

)

Mise en équation

$$\begin{aligned} A = & 1 * (\\ & + (-1) * ((6 * 2) - (8 * 1)) \\ & - (-2) * ((1 * 2) - (6 * 1)) \\ & + 3 * ((1 * 8) - (6 * 6)) \\ &) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * (\\ & + (-1) * ((12) - (8)) \\ & - (-2) * ((2) - (6)) \\ & + 3 * ((8) - (36)) \\ &) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A = & 1 * (\\ & (-1 * 4) \\ & (2 * (-4)) \\ & (3 * (-28)) \\ &) \end{aligned}$$

$$4 - (-8) - (-84) = \mathbf{96}$$

$$S = \det(A) = \mathbf{96}$$

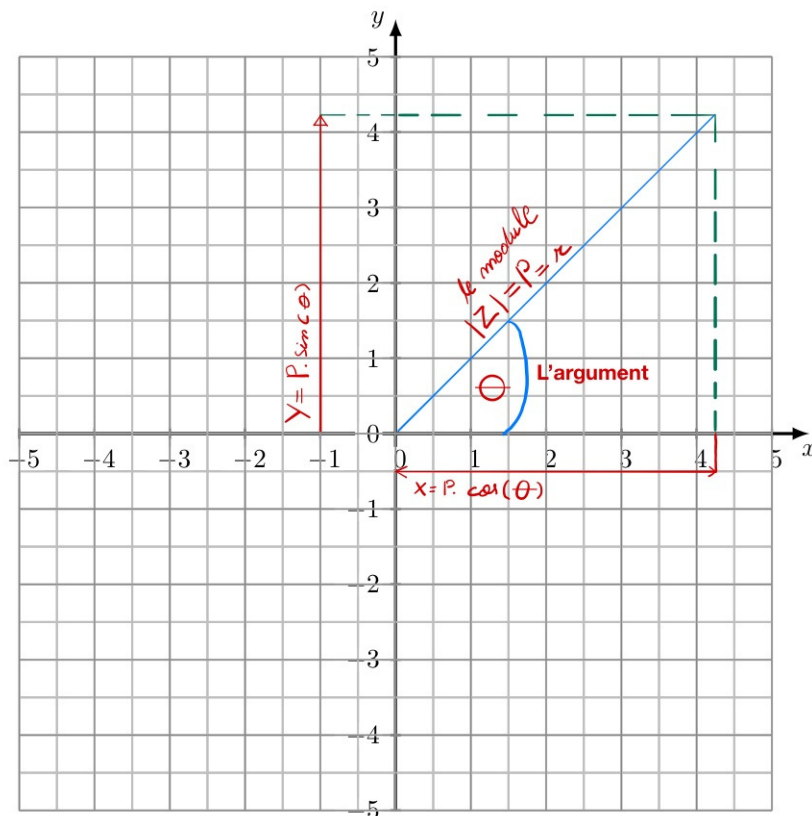
1.2 Nombres Complexes Théorie

1.2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module :

le module noté $|Z|$ est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ($\sqrt{a^2 + b^2}$).

Représentation Géographique



Démonstration :

$$\begin{aligned} |Z| &= \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2)} \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta))} * i \\ |Z| &= \sqrt{(\rho^2)} \\ |Z| &= \rho \end{aligned}$$

ρ est le module et θ est l'argument

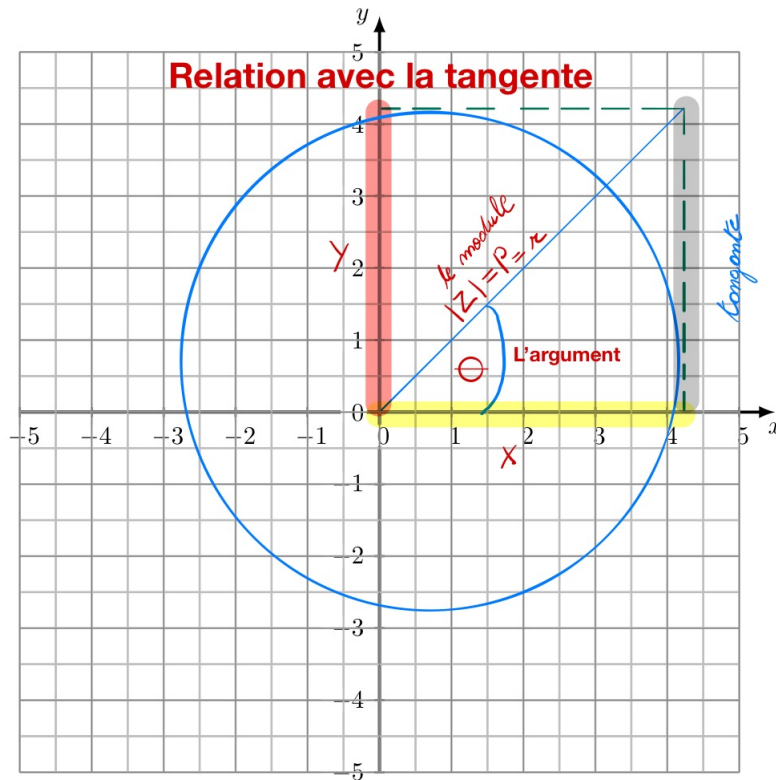
$$Z = P(\cos(\theta) + \sin(\theta) * i) \text{ ou } Z = P(\text{cis}(\theta))$$

1.2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration Géométriquement θ

Nous pouvons voir que θ est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangente au cercle de rayon X.



$$X = \rho * \cos(\theta) \quad Y = \rho * \sin(\theta)$$

Démonstration Algébriquement θ

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= \frac{\rho * \sin(\theta)}{\rho * \cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \text{tg}(\theta) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

1.3 Chapitre 3 : Logique

1.3.1 Logique propositionnelle

Règles pour déterminer si c'est vrai ou faux :

- 1) Principe d'identité : $A=A$
- 2) Non contradiction : On ne peut pas nier et affirmer la même chose $\neg A$ et A
- 3) Tiers Exlus : Quelques chose existe ou dois ne pas exister A ou $\neg A$

1.3.2 Proposition

C'est un énoncé, une phrase simple :

ex : Ceci est une vidéos \Rightarrow Vrai ou Faux

En logique propositionnelle les propositions ne peuvent qu'être vrai ou fausse

exemple de proposition :

$2+2 \Rightarrow$ Vrai ou Faux

Le mur est blanc \Rightarrow Vrai ou Faux

1.3.3 L'implication

Si j'ai une proposition A alors B

Exemple :

Une paire de chaussure \Rightarrow j'ai 2 chaussures

Une paire de chaussure implique que j'ai 2 chaussures

$A \Rightarrow B$: Faux (une paire nécessite d'avoir 2 même chaussures, 2 chaussures peuvent être différentes)

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A n'est pas forcément vrai

1.3.4 L'équivalence

Il faut que je n'ai pas une paires de chaussures.

$A=B$: vrai

Si A est vrai alors B est vrai

si B est vrai alors A est vrai

1.3.5 Vocabulaire

Proposition Atomique : Vrai et Faux à la fois

Tautologie : toujours vrai

prédicats : Pour tout il existe

1.3.6 Tableau priorités logique

Opérateur	Logic	priorités	Associativités .
\leq	Equalité	1	gauche
\Rightarrow	Implications	2	droite
\vee	OU	3	gauche
\wedge	ET	4	gauche
\neg	NON	5	gauche

1.3.7 Tautologie

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

1.3.8 Changement de forme

Commutativité :

$$p \vee q = q \vee p$$

$$p \wedge q = q \wedge p$$

Associativités :

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

Distributivités :

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

De Morgans :

$$a \vee b = \neg a \wedge \neg b$$

$$a \wedge b = \neg a \vee \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (\neg p \vee \neg q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive :

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \vee B) \wedge C$$

Forme conjonctive :

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \wedge B) \vee C$$

Transformation :

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

1.4 Théorie naïve des ensembles

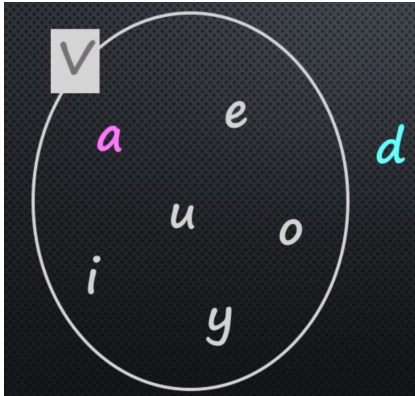
1.4.1 Définition

on appelle ensemble, une collection d'objets appelés éléments de cet ensemble.
un objet particulier appartient (\in) ou n'appartient pas (\notin) à un ensemble donné.

Exemple d'ensemble : l'ensemble des voyelles : $V = \{a, e, i, o, u, y\}$

$a \in V$: a appartient à l'ensemble V

$d \notin V$: d appartient à l'ensemble V

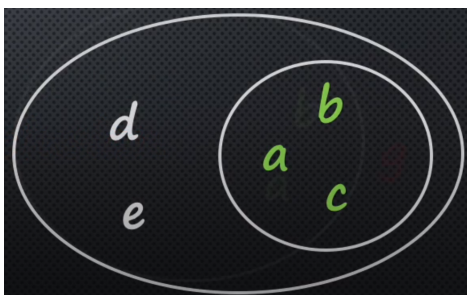


1.4.2 Relation d'égalité

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A égale B (Noté $A=B$), si tout les éléments de A appartient à B. Autrement dit ($X \in A$) et que ($X \in B$).

1.4.3 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté $A \subset B$), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit ($X \subset A$) et que ($X \subset B$).



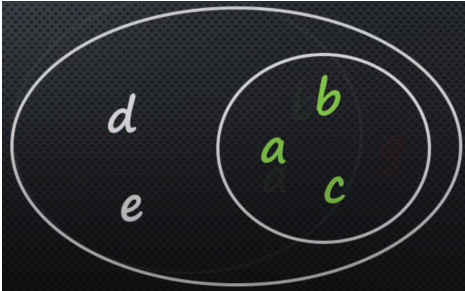
On peut dire que $\{a, b, c\} \subset \{a, b, d, e\}$

1.4.4 Propriété de l'inclusion

- a. Reflexivité : pour tout ensemble A ($A \subset A$)
- b. Anti-Symétrique : ($A \subset B$) et ($B \subset A$) $\Rightarrow A=B$
- c. Transitivité : ($A \subset B$) et ($B \subset C$) $\Rightarrow (A \subset C)$

1.4.5 Relation d'inclusion

Soient A et B sont deux ensembles, on dit que A est inclus dans B (Noté $A \subset B$), si tout les éléments de A sont des éléments de B. Autrement dit ($X \subset A$) et que ($X \subset B$).



On peut dire que $\{a,b,c\} \subset \{a,b,d,e\}$

1.4.6 Opération d'union (\cup)

1) L'union de 2 ensembles

$A = \{a,e\}$ et $B = \{b,c,d\}$

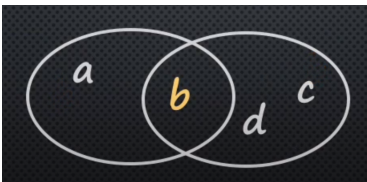
$C = A \cup B = \{a,e,b,c,d\}$

1.4.7 Opération d'intersection (\cap)

2) L'intersection de 2 ensembles

Soient A et B deux ensembles, on appelle ($A \cap B$) le nouvel ensemble contenant les éléments se trouvant dans A et B

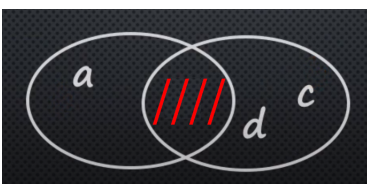
$A = \{a,b\}$ et $B = \{b,c,d\}$



$C = A \cap B = \{b\}$

1.4.8 L'ensemble vide

L'ensemble vide est une partie (un sous-ensemble) de n'importe quel ensembles. Il ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même



$C = A \cap B = \{\}$

1.4.9 La cardinalité

Soit A un ensemble, Si A possède exactement N éléments ($n \in \mathbb{N}$), A est un ensemble fini de cardinalité N.
Noté $|A| = n$

$$|1, 2, 3| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

1.4.10 Identité

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

1.4.11 Commutativité

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

1.4.12 Associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

1.4.13 Distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

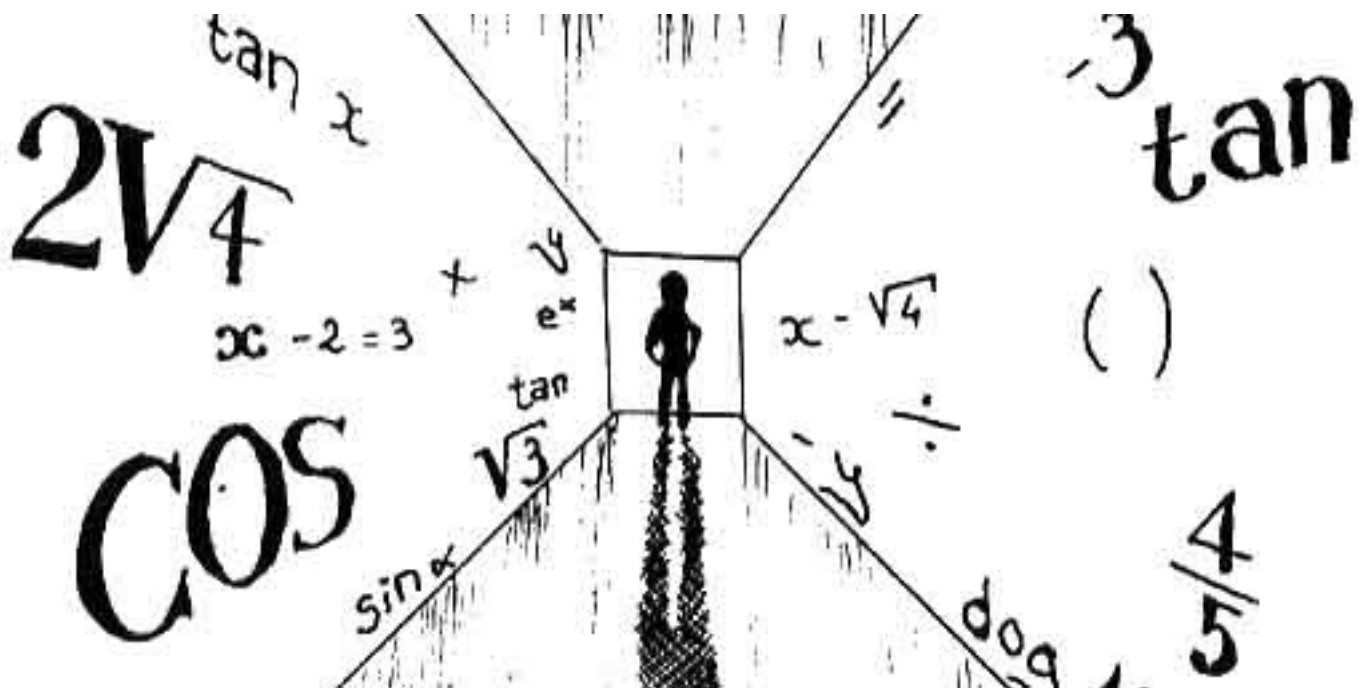
1.4.14 De Morgans

$$\neg(A \cup B) = \neg A \cap \neg B$$

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

Chapitre 2

Mathématiques Exercices



2.1 Exercice Matrices

2.1.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- A) Calculer $B \cdot C$
- B) Calculer la trace de A
- C) Calculer la transposée de B
- D) Calculer $2,5 \cdot C$
- E) Calculer $B^t + C$
- F) Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)
- G) Calculer le déterminants de A
- H) Exercices prépartion examen (déterminant)
- I) Exercices prépartion examen (déterminant)
- J) Exercices prépartion examen (déterminant)
- K) Exercices prépartion examen (déterminant)

2.1.2 Résolution des exercices

A) Calculer $B * C$

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix}$$

$$S = B * C = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice A = $0+2+0+2 = 4$
 $S = 4$

C) Calculer la transposée de la matrice B

La transposée de la matrice est d'invertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : B^t est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$S = B^t$ ou C

D) Calculer $2,5 * C$

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix}$$

$$S = 2,5 * C = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes : $B^t = C = C+C$ ou $2*C$

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix}$$

$$S = B^t + C = 2*C = C+C =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Déplacement 3D

R=10u H=300l où L=40cm + hauteur du casier

$$P = ((\frac{3}{5}) * R < R)$$

$$\theta = 0 \quad Z = R + (\frac{B}{100} * R) = R + (\frac{2}{100}) * R = 20cm$$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos(45) - \sin(45)) & 0 \\ \sin(45) - \cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 7 : Rotation -45° et Retour à 0 :

$$\begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(45) - \sin(45) & 0 \\ +\sin(45)\cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15l \end{pmatrix}$$

G) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Inversion de L1 avec L2

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthodes du pivot de Gauss

Mise à zero de L3

L3 - (2*L1) = L3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{2-(1*2)} & \mathbf{3-(2*2)} & \mathbf{0-(2*3)} & \mathbf{1-(2*0)} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ \mathbf{(2-2)} & \mathbf{3-4} & \mathbf{(0-6)} & \mathbf{1-0} \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mise à zero de L4

L4 - (3*L1) = L4

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-(3*1)} & \mathbf{0-(3*2)} & \mathbf{1-(3*3)} & \mathbf{2-(3*0)} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ \mathbf{3-3} & \mathbf{0-6} & \mathbf{1-9} & \mathbf{2-0} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L3 = L3-1*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L4 = L4-6*L2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$L4-(-1)*L3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Fin de la triangulaire Supérieures

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

$$1*(-1)*(-4)*24=96$$

$$S = \det(A) = 96$$

H) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

Extraction Matrice 3*3

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices 2*2

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

Calcul du déterminant des sous matrices

$$\begin{aligned} &8 * (\\ &1 * ((9,5 * 16) - (8 * -9,5)) \\ &- 5 * ((9 * 16) - (4 * -9,5)) \\ &+ 6 * ((9 * 8) - (4 * 9,5)) \\ &) \end{aligned}$$

Simplification des calculs

$$\begin{aligned} &8 * (\\ &1 * (152 - (-76)) \\ &- 5 * (144 - (-38)) \\ &+ 6 * (72 - 38) \\ &) \end{aligned}$$

Mise en équation et résolution

$$8*(228 - 5*(182) + 6*(34))$$

$$8*(228 - 910 + 204)$$

$$8*(228 + 204 - 910)$$

$$8*(432 - 910)$$

$$8*(-478) = -3824$$

$$\det(A) = -3824$$

I) Calcul du déterminant

$$a=3 \quad b=10 \quad c=5$$

$$\begin{pmatrix} a & 1337 \\ b & 42 \\ c & 8086 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer la multiplication

$$\begin{pmatrix} a * 2 + 1337 * 4 & a * 5 + 1337 * 0 & a * 6 + 1337 * 4 \\ b * 2 + 42 * 4 & b * 5 + 42 * 0 & b * 6 + 42 * 4 \\ c * 2 + 8086 * 4 & c * 5 + 8086 * 0 & c * 6 + 8086 * 4 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 3 * 2 + 1337 * 4 & 3 * 5 & 3 * 6 + 1337 * 4 \\ 10 * 2 + 42 * 4 & 10 * 5 & 10 * 6 + 42 * 4 \\ 5 * 2 + 8086 * 4 & 5 * 5 & 5 * 6 + 8086 * 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5354 & 15 & 5366 \\ 188 & 50 & 228 \\ 32354 & 25 & 32374 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des matrices 2*2

$$+5354 * \begin{pmatrix} 50 & 228 \\ 25 & 32374 \end{pmatrix} - 15 * \begin{pmatrix} 188 & 228 \\ 32354 & 32374 \end{pmatrix} + 5366 * \begin{pmatrix} 188 & 50 \\ 32354 & 25 \end{pmatrix}$$

$$+5354 * ((50 * 32374) - (228 * 25))$$

$$-15 * ((188 * 32374) - (32354 * 228))$$

$$+5366 * ((188 * 25) - (32354 * 50))$$

$$+5354 * ((1618700) - (5700))$$

$$-15 * ((6086312) - (7376712))$$

$$+5366 * ((4700) - (1617700))$$

$$8 \ 636 \ 002 \ 000 + 19 \ 356 \ 000 - 8 \ 655 \ 358 \ 000$$

$$8 \ 655 \ 358 \ 000 - 8 \ 655 \ 358 \ 000 = 0$$

J) Calcul du déterminant

a=3 b=10 c=5

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + (-1) * \begin{pmatrix} a & 40 & 0 & 1 \\ b & 80 & 1 & 2 \\ c & 62 & 2 & 0 \\ d & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -40 & 0 & -1 \\ -b & -80 & -1 & -2 \\ -c & -62 & -2 & 0 \\ -d & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Réalisation de l'opération

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-a & 5-40 & 6 & 7-1 \\ -b & -80 & -1 & 8-2 \\ 9-c & 9,5-62 & -9,5-2 & b \\ 4-d & 8 & 16-1 & 32-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ -10 & -80 & -1 & 6 \\ 4 & -52,5 & -11,5 & 10 \\ 2 & 8 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Méthodes du pivot de Gauss

$$L2 = L2 - (-5) * L1 = (0 \ -255 \ -31 \ 36)$$

$$L3 = L3 - (-2) * L1 = (0 \ -122,5 \ 0,5 \ 22)$$

$$L4 = L4 - (-1) * L1 = (0 \ 43 \ 9 \ 24)$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -35 & 6 & 6 \\ 0 & -255 & 29 & 36 \\ 0 & -122,5 & 0,5 & 22 \\ 0 & 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Extraction des sous matrice 2*2

$$-2 * \begin{pmatrix} -255 & 29 & 36 \\ -122.5 & 0.5 & 22 \\ 43 & 9 & 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$-2 * (+(-255) * \begin{pmatrix} 0.5 & 22 \\ 9 & 24 \end{pmatrix} (-29) * \begin{pmatrix} 122.5 & 22 \\ 43 & 24 \end{pmatrix} (36) * \begin{pmatrix} 122.5 & 0.5 \\ 43 & 9 \end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned} &-2 * (\\ &-255 * (12-198) \\ &-29 * ((-2940) - (946)) \\ &+36 * ((-1102.5) - 21.5) \\ &) \end{aligned}$$

$$47430 + 112694 - 40464 = 119660$$

K) Calcul du déterminant

$$a=3 \quad b=10 \quad c=5$$

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ b & 5 & 1 \\ c & 6 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Calculer l'addition

$$\begin{pmatrix} a+4 & 2+5 & 6 \\ b+4 & 5 & 1+4 \\ c+a & 6+b & 2+c \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Remplacement des valeurs

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Calcul du déterminant

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 14 & 5 & 5 \\ 8 & 16 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$+7 * \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} - 7 * \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$+7 * ((5*7) - (16*5))$$

$$-7 * ((14*7) - (8*5))$$

$$+6 * ((14*16) - (8*5))$$

$$+7 * (-45) - 15 * (58) + 6 * (184)$$

$$1104 - 406 - 315 = 383$$

2.2 Nombres Complexes Exercices

2.2.1 Exercices : Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes :

- a. $x^2+1=0$
- b. $3x^2+7=0$
- c. $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d. $-x^2-3x=3$
- e. $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f. $x^4 + 15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de :

- a. $-11-8i$
- b. $-0.3333i + 1$
- c. $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i$

3) Identifier \mathbb{R} \mathbb{I}

- a. 0
- b. $-6+i$
- c. i^2
- d. $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme $a+bi$:

- a. $(4-8i)-(3+2i)$
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c. $(7-2i)(5+6i)$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)}$

5) Exprimer sous forme Polaire :

- a. $3-\sqrt{3}i$
- b. $-1+1i$

6) Exprimer sous forme cartésienne :

- a. $4\cos(45) + \sin(45)i$
- b. $5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$

7) Trouver la solution de :

- a. $4\text{cis}(45^\circ)+5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$
- b. $4\text{cis}(45^\circ)*5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$

2.2.2 Résoudre les équations suivantes :

A. $x^2+1=0$

$$x^2+1-1=0-1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$S = x = i$$

B. $3x^2+7=0$

$$3x^2+7-7=0-7$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$x^2 = \frac{-7}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3} * -1}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

$$S = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

C. $\frac{x^2}{2} - x = -2$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} = -\frac{2}{1}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$x^2 - 2x = -4$$

$$x^2 - 2x + 4 = (-4) + 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 4}}{2 * 1}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 * (-3)}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 * (-3)}}{2}$$

$$S = -1 \pm 1 \sqrt{-3}$$

D. $-x^2-3x=3$

$$-x^2-3x-3=3-3$$

$$-x^2-3x-3=0$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 * 1 * 3}}{2 * 1}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3 * (-1)}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3 * \sqrt{-1}}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3i}}{2}$$

$$S = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}i}$$

$$E. x^3 + 7x^2 + 9x + 63 = 0$$

$$x^2 + (x+7) + 9(x+7) = 0$$

$$(x+7) * (x^2 + 9) = 0$$

Poser les CE pour que $(x+7)$ ou (x^2+9) vaut 0

Résoudre pour $(x+7)=0$

$$x = -7$$

$$(x^2 + 9) = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$$

$$x = 3\sqrt{-1}$$

$$x = 3i$$

$$S = X \text{ vaut } -7; 3i$$

$$F. x^4 + 15x^2 = 16$$

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\text{Poser } t = x^2$$

$$t^2 + 15t - 16 = 0$$

$$t * (t+16) - (t+16) = 0$$

$$(t+16) - (t-1) = 0$$

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

$$(t+16) = 0$$

$$t = -16$$

$$\text{Restituer } t = x^2$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \sqrt{-16}$$

$$x = \sqrt{16 * (-1)}$$

$$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$$

$$x = 4\sqrt{-1}$$

$$x = 4i$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$\text{Restituer } t = x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = 1$$

$$S = 1; 4i$$

2.2.3 Trouver le conjugués :

- a. $-11-8i = -11+8i$
- b. $-0.3333i + 1 = 1+0.3333i$
- c. $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i = \cos(\omega t) - \sin(\omega t)i$

2.2.4 Identifier \mathbb{R} \mathbb{I}

- a. $0 : \mathbb{R}=0 \mathbb{I}=0$
- b. $-6+i : \mathbb{R}=(-6) \mathbb{I}=1$
- c. $i^2 : \mathbb{R}=(-1) \mathbb{I}=0$
- d. $\frac{1+i}{2} : \mathbb{R}=(\frac{1}{2}) \mathbb{I}=(\frac{1}{2})$

2.2.5 Exprimer sous forme $a+bi$

- a. $(4-8i)-(3+2i) : 1-10i$
- b. $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i} : \frac{23-11i}{26}$
- c. $(7-2i)(5+6i) : 47+32i$
- d. $\frac{4}{(3+i)^3} : \frac{9-13i}{125}$
- e. $\frac{5+3i}{(2+2i)} : 2-\frac{1}{2}i$

2.2.6 Exprimer sous forme polaire

a. $3-\sqrt{3}i$

Calcul de l'arguments

$$\theta = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta = -30^\circ$$

$$\theta = -30^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 330^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{9+3}$$

$$\rho = \sqrt{12} \Rightarrow (12 = 4 * 3)$$

$$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$$

$$\rho = 2\sqrt{3}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) + \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \text{cis}(\theta)$$

$$Z = 2\sqrt{3} * \text{cis}(330)^\circ$$

b. $-1+i$

Calcul de l'arguments

$$\theta = \arctg(-\frac{1}{1})$$

$$\theta = -45^\circ$$

$$\theta = -45^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 315^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{-1^2 + 1^2}$$

$$\rho = \sqrt{2}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \text{cis}(\theta)$$

$$Z = \sqrt{2} * \text{cis}(315^\circ)$$

2.2.7 Exprimer sous forme cartésienne

a. $4\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) * i$

Formules

$$\rho = 4 * \text{cis}(45^\circ)$$

$$\theta = \arctg(\frac{Y}{X})$$

$$|Z| = a + bi$$

$$\frac{Y}{X} = \text{tg}(45^\circ)$$

$$\frac{Y}{X} = 1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2$$

$$\rho = x^2 + y^2 = 16$$

Notes : $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$ donc $Y=X$

$$\rho = 2x^2 = 16 \text{ ou } 2y^2 = 16$$

$$\rho = x^2 = \frac{16}{2}$$

$$\rho = x^2 = 8$$

$$\rho = \sqrt{x^2} = \sqrt{8} = (2 * 4)$$

$$\rho = x = \sqrt{(2 * 2^2)}$$

$$\rho = x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}$$

$$x=y \text{ donc } x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}i$$

Conclusion :

$$S = 4 * \text{cis}(45^\circ) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$b. 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

Formules

$$\begin{aligned}\rho &= 5 \\ \theta &= arctg(\frac{Y}{X}) \\ |Z| &= a + bi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= tg(\frac{\pi}{3}) \\ \theta &= \sqrt{(3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \rho * \cos(\sqrt{3}) => \cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \\ y &= \rho * \sin(\sqrt{3}) => \sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y &= 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}Z &= a+bi \\ S = Z &= \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

2.2.8 Trouver la solution

$$a. 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ \rho &= \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - 60^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{16 + 25 + 40 * \cos(-15^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{41 + 40 * \cos(-15^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{81 * 0.965} \\ \rho &= \sqrt{79.637} \\ \rho &= 8.9239\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= arctg(\frac{Y}{X}) \\ \theta &= arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})\end{aligned}$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

$$b. 4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2 (\cos(45^\circ + \theta_2) + i * \sin(45^\circ + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5 (\cos(45^\circ + 60^\circ) + i * \sin(45^\circ + 60^\circ))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

2.3 Logique propositionnelle exercices

2.3.1 Enoncé Exercices

1) Déterminer la véracité

$$P_1 = 1+1=2$$

$$P_2 = 1>5$$

$$P_3 = 1+1=3$$

- a. $P_1 \vee P_3$
- b. $P_2 \Rightarrow P_1$
- c. $P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$

2) Construire la Table de vérité de $p_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$

2.3.2 Déterminer la véracité

a. $P_1 \vee P_3 = T$

$$1 \text{ OU } 1 = 1$$

b. $P_2 \Rightarrow P_1$

$$\neg P_2 \vee (P_2 \wedge P_1)$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge 1)$$

$$1 \vee (0)$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$$S = P_2 \Rightarrow P_1 = T$$

c. $P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3)$

$$\neg P_3 \vee (P_3 \wedge (P_1 \vee P_3))$$

$$P_3=0$$

$$P_1=1 \text{ ou insertion}$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge (1 \vee 0))$$

$$1 \vee (1 \wedge 0)$$

$$1 \vee 0 = T$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

$$S = P_3 \Rightarrow (P_1 \vee P_3) = T$$

2.3.3 Construire la table de vérité

$$p_1 \Leftrightarrow P_2 \Rightarrow P_3$$

$$P_2 \Rightarrow P_3$$

$$\neg P_2 \vee (P_2 \wedge P_3)$$

$$\neg 0 \vee (0 \wedge 0)$$

$$1 \vee 0 = T$$

$$1 \text{ OU } 0 = 1$$

P_1	P_2	P_3	$P_2 \Rightarrow P_3$
T	\perp	\perp	T

2.4 Théorie naïve des ensembles Exercices

2.4.1 Enoncé d'exercices

- a. Soit $A=\{\pi, 2, e\}$ et $B=\{-1, 5\}$ Calculer $|A \times B|$
- b. Soit $P \mid A \cup B \mid A = \{3, 4, 5\}$ $B = \{1, 2, 3\}$
- c. Soit $A=\{\pi, 2, e\}$ et $B=\{-1, 5\}$ Calculer $|A \cup B|$

2.4.2 Résolution

A) Calculer $A \times B$

$$A * B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = $6 + (3*5) + 1 = 22$

$$P \mid A \cup B \mid = 22$$

$$S=22$$

B) Soit $P \mid A \cup B \mid A = \{3,4,5\}$ $B = \{1,2,3\}$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Total des ensembles = 7

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}\}$$

Total des ensembles = 6

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5\}, \{4,5,1\}, \{5,1,2\}, \{1,2,3\}, \{2,3,3\}, \{3,3,4\}\}$$

Total des ensembles = 6

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1\}, \{4,5,1,2\}, \{5,1,2,3\}, \{1,2,3,3\}, \{2,3,3,4\}, \{3,3,4,5\}\}$$

Total des ensembles = 6

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1,2\}, \{4,5,1,2,3\}, \{5,1,2,3,3\}, \{1,2,3,3,4\}, \{2,3,3,4,5\}, \{3,3,4,5,1\}\}$$

Total des ensembles = 6

6) Union des 2 ensembles a 6 membres

$$P(A) = \{\{3,4,5,1,2,3\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

$$\text{La somme de la cardinalité des sous ensembles} = 7 + (4 \cdot 6) + 1 = 32$$

$$P \mid A \cup B \mid = 32$$

$$S = 32$$

c) Soit $A = \{\pi, 2, e\}$ et $B = \{-1, 5\}$ Calculer $|A \cup B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

La sommes de la cardinalité des sous ensembles = $6 + (3 \cdot 5) + 1 = 22$

$$P | A \cup B | = 22$$

$$S=22$$

2.5 Nombre Entiers Exercices

2.5.1 Exemple Modulo

Soient a, b et m des nombre naturels. Est-ce que
 $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

Sélectionnez une réponse :

☐ a. Vrai

☐ b. Faux

$$(8+15) \bmod 3 = ((8 \bmod 3) + (15 \bmod 3)) \bmod 3$$

$$(23) \bmod 3 = (2+0) \bmod 3$$

$$2 = 2$$

VRAI

2.6 Relation Binaire Exercices

- a. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$
- b. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$
- c. $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible a}\}$

2.6.1 Exercices Examen

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est un multiple de } b\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symétrique
- ☐ e. R est symétrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI

b multiple de b = VRAI

R est réflexif

Test de la symétrie \Rightarrow Exemple (a=2 ou b=6)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = FAUX

R est n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie \Rightarrow (a=b) Exemple (a=3 ou b=3)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = VRAI

R est est anti-symétrique

Test de Transitivité \Rightarrow (a=b) Exemple (a=3 ou b=9 Z=18)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?

a est dans la table de 18 ? \Rightarrow VRAI

R est transitif

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0
 $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid a \text{ est } > b\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symétrique
- ☐ e. R est symétrique

Test de la réflexivité

A est plus grand que A \Rightarrow FAUX
B est plus grand que B \Rightarrow FAUX
il faut que A et B soit vrai

Test de la symétrie

A est plus grand que B \Rightarrow VRAI
B est plus grand que A \Rightarrow FAUX
il faut que A et B soit vrai

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symétrique pas car $A=1$ $B=2$
 R est anti-symétrique $a \text{ est } > b$ car $a \neq b$

Test de la transitivité

Si A est $>$ B et que B est $>$ Z est-ce que $a > Z$?
 R est transitif car A est $>$ Z

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0
 $R = \{(a, b), a \in N, b \in N \mid b \text{ est divisible } a\}$

cochez ce qui est vrai concernant R :

- ☐ a. R est transitif
- ☐ b. Aucune réponse
- ☐ c. R est réflexif
- ☐ d. R est anti-symétrique
- ☐ e. R est symétrique

Test de la réflexivité

A est divisible par A \Rightarrow VRAI
B est divisible par B \Rightarrow VRAI
 R est réflexif

Test de la symétrie

A est divisible par B \Rightarrow VRAI

B est divisible par A \Rightarrow FAUX

il faut que A et B soit vrai

R n'est pas symétrique

Test de l'anti-symétrie

R n'est Symétrique pas car A=1 B=2

R est anti-symétrique *cest* $a > b$ car $a \neq b$

Test de la transitivité

Si A est divisible par B et que B est divisible par Z est-ce que a divisible par Z ?

R est transitif car A est divisible par Z

Chapitre 3

Exemple d'examen

3.1 Q1 : Calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A) Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ et } 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

B) Swap des zeros

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

C) Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

D) Calcul des déterminants 2*2

$$\begin{aligned} &8*(\\ &1*((9,5*16)-(8*-9,5)) \\ &-5*((9*16)-(4*-9,5)) \\ &+6*((9*8)-(4*9,5)) \\ &) \end{aligned}$$

E) Simplification des calculs

$$\begin{aligned} &8*(\\ &1*(152 - (-76)) \\ &-5*(144 - (-38)) \\ &+6*(72 - 38) \\ &) \end{aligned}$$

F) Mise en équation et résolution

$$\begin{aligned} &8*(228 -5*(182) + 6*(34)) \\ &8*(228 - 910 + 204) \\ &8*(228 + 204 - 910) \\ &8*(432 - 910) \\ &8*(-478) = -3824 \\ &\det(A) = -3824 \end{aligned}$$

3.2 Q2 : Calcul nombre complexe

Que doit valoir a pour que l'argument soit 135° quand $b=-5$, $c=4$ et $d=11$

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

A) Utilisation de la formule division cartésienne

$$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} *i$$

B) Remplacement dans la formule

$$\frac{(a_1*4)-((-5)*(-11))}{4^2+(-11)^2} + \frac{((-5)*4)-(a_1*(-11))}{4^2+(-11)^2} *i$$

$$\frac{4a_1-55}{16+121} + \frac{((-20)-((-11)a_1))}{16+121} *i$$

$$\frac{4a_1-55}{137} + \frac{((-20)-(-11a_1))}{137} *i$$

$$\frac{4a_1-55}{137} + \frac{11a_1-20}{137} *i$$

C) On calcule a par rapport à θ

Notes : Nous avons découvert la valeur de X et de Y :

$$\theta = \arctg \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

Remplacement de X et Y

$$\theta = \arctg\left(\frac{\frac{55+(11a-20)i}{137}}{\frac{4a-55}{137}}\right)$$

Notes : Diviser une fraction par une fraction c'est égale à la multiplier par l'inverse

$$\text{Ex : } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

$$\theta = \arctg\left(\left(\frac{55+(11a-20)}{137}\right) * \left(\frac{137}{4a-55}\right)\right)$$

$$\text{tg}(\theta) = \left(\frac{55+(11a-20)}{137}\right) * \left(\frac{137}{4a-55}\right)$$

$$\text{tg}(\theta) = \left(\frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55}\right)$$

$$\text{tg}(135) = \left(\frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55}\right)$$

$$-1 = \left(\frac{-2685+1507a}{548a-55}\right)$$

D) Déterminer l'intervalle définis

$$-1 = \left(\frac{-2685+1507a}{548a-55} \right)$$
$$a \neq \frac{55}{548}$$

E) Simplifier l'équation

$$(-1) * (548a - 55) = (548a - 55) * \left(\frac{-2685+1507a}{548a-55} \right)$$

$$-(548a - 55) = -2685 + 1507a$$

Notes : lorsqu'il y a un un - devant l'expression entre parenthèse, changer le signe de chaque terme de l'expression.

$$-548a + 55 = -2685 + 1507a$$

$$-548a + 55 - 1507a = -2685 + 1507a - 1507a$$

$$-548a - 1507a + 55 - 55 = -2685 + 1507a - 55$$

$$-548a - 1507a = -2685 - 55$$

$$-2055a = -2740$$

$$-\frac{2055a}{2055} = -\frac{2740}{2055}$$

$$\frac{2055a}{2055} = \frac{2740}{2055}$$

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

F) Vérifier si la solution est dans l'intervalle définis

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

G) Solution

$$S = \frac{4}{3}$$

H) Restituer a= $\frac{4}{3}$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$X = -0,362$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

$$Y = 0,362$$

$$tg(\theta) = -\frac{0,362}{0,362}$$

$$tg(\theta) = -1$$

H) Démontrer que $tg(\theta) = -1$

$$tg(\theta) = -1$$

$$tg(135) = -1$$

$$135^\circ - 180^\circ = -45^\circ$$

$$tg(-45) = -1$$

I) Conclusion :

$$tg(-45) = -1 \text{ et } -\frac{0,362}{0,362} = -1$$

$$\text{et } a = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{4}{3}$$

3.3 Q3 : Transformer en forme conjonctive

$$(A \wedge \neg B) \vee (C \implies a)$$

A) Simplifier l'implications

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A))$$

B) Utilisation du théorème De Morgan

$$a + b = \neg a * \neg b$$

$$\neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg (\neg A \vee (A \wedge C))$$

C) Simplification des parenthèse

$$(\neg A \wedge B) \wedge (A \vee (\neg A \wedge \neg C))$$

$$S = (\text{NEG}(A) \text{ ET } B) \text{ ET } (A \text{ OU } (\text{NEG}(A) \text{ ET } \text{NEG}(C)))$$

3.4 Q4 : Théorie des ensembles naïfs

A) Soit $A = \{\pi, 2, e\}$ et $B = \{-1, 5\}$ Calculer $|A \times B|$

1) Calculer $A \times B$

$$A * B = \{ (\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5) \}$$

2) Calculer la cardinalité de $|A \times B|$

1) Union des 2 ensembles a 1 membre

$$P(A) = \{\{\}, \{\pi\}, \{2\}, \{e\}, \{-1\}, \{5\}\}$$

Total des ensembles = 6

2) Union des 2 ensembles a 2 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2\}, \{2, e\}, \{e, -1\}, \{-1, 5\}, \{5, \pi\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 3 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e\}, \{2, e, -1\}, \{e, -1, 5\}, \{-1, 5, \pi\}, \{5, \pi, 2\}\}$$

Total des ensembles = 5

3) Union des 2 ensembles a 4 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1\}, \{2, e, -1, 5\}, \{e, -1, 5, \pi\}, \{-1, 5, \pi, 2\}, \{5, \pi, 2, e\}\}$$

Total des ensembles = 5

4) Union des 2 ensembles a 5 membres

$$P(A) = \{\{\pi, 2, e, -1, 5\}\}$$

Total des ensembles = 1

7) Calculer la cardinalité de $P(A)$:

$$\text{La somme de la cardinalité des sous ensembles} = 6 + (3 \cdot 5) + 1 = 22$$

$$P(A \cup B) = 22$$

$$S=22$$

3.5 Q5 : Induction forte/faibles

Notez que l'induction faible est égale à l'induction forte. Néanmoins il est plus naturel de démontrer les propriétés soit avec de l'induction simple, soit avec la forte comme réalisé durant le cours. Il vous est demandé de choisir entre les deux fonction de l'énoncé.

Soit n un nombre naturel, que faut-il pour démontrer que 10^{n-1} est un multiple de 9 ?

Veillez choisir au moins une réponse : (Cochez ce qui est vrai)

- ☐ On peut utiliser l'induction faible ou forte
- ☐ Il faut au moins 3 cas de base
- ☐ il faut utiliser l'induction forte
- ☐ il faut au moins un unique cas de base
- ☐ il faut au moins 2 cas de base

9,18,27,36,45,..., $n = 10^{n-1}$

Cas de base $n=1$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 10^{1-1}$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 10^0$

9,18,27,36,45,54,... $\neq 1$

[X] On peut utiliser l'induction faible ou forte

[X] Il faut au moins 3 cas de bases

3.6 Q6 : Nombre entiers

Soient a, b et m des nombre naturels. Est-ce que $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

Sélectionnez une réponse :

☐ Vrai

☐ Faux

Choisir un pair(a) et un impair(b) et tester au moins 2 fois

a) Développement de l'égalité

$$(a+b) \bmod m = ((a+b) \bmod m) \bmod m$$

$$(8+10) \bmod 2 = ((8 \bmod 2) + (10 \bmod 2)) \bmod 2$$

$$(18) \bmod 2 = (0+0) \bmod 2$$

$$0 = (0) \bmod 2$$

$$0 = 0$$

b) Développement de l'égalité

$$(a+b) \bmod m = ((a+b) \bmod m) \bmod m$$

$$(8+15) \bmod 4 = ((8 \bmod 4) + (15 \bmod 4)) \bmod 4$$

$$(8+15) \bmod 4 = ((0) + (15-12)) \bmod 4$$

$$(23) \bmod 4 = (3) \bmod 4$$

$$23 - (4*5) = 3$$

$$3 = 3$$

Conclusion c'est [X] Vrai

3.7 Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau

Listing 3.1 – Python algorithme

```
def Apply(array, value, start=None, res=0):  
    if (start is None):  
        start = len(array)-1  
  
    if (start < 0):  
        return res  
  
    if (array[start] == value):  
        return Apply(array, value, start-1, res+1)  
  
return Apply(array, value, start-1, res)
```

cochez ce qui est vrai concernant la complexités (au moins une réponse)

- ☐ a. $\theta(1)$
- ☐ b. $o(n^2)$
- ☐ c. $O(\log(n))$
- ☐ d. $o(\log(n))$
- ☐ e. $\theta(\log(n))$
- ☐ f. $o(n)$
- ☐ g. $o(1)$
- ☐ h. $O(1)$
- ☐ i. $o(n\log(n))$
- ☐ j. $O(n\log(n))$
- ☐ k. $\theta(n)$
- ☐ l. $\theta(n^2)$
- ☐ m. $O(n^2)$
- ☐ n. $O(n)$
- ☐ o. $\theta(n\log(n))$

g. $o(1) \Rightarrow$ Meilleur des cas

c. $O(n) \Rightarrow$ Cas Moyen

e. $\theta(n) \Rightarrow$ Pire des cas

3.8 Q8 : Ensemble Naturels

Soit N est l'ensemble des naturels sauf 0

$R=(a,b)$, $a \in N$, $b \in N$ et a est un multiple de b

cochez ce qui est vrai concernant R . (au moins une réponse)

- ☐ R est transitif
- ☐ Aucune réponse
- ☐ R est réflexif
- ☐ R est anti-symétrique
- ☐ R est symétrique

Test de la Réflexivité

a multiple de a = VRAI

b multiple de b = VRAI

R est réflexif

Test de la symétrie \Rightarrow Exemple ($a=2$ ou $b=6$)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = FAUX

R n'est pas symétrique

Test de Anti-symétrie \Rightarrow ($a=b$) Exemple ($a=3$ ou $b=3$)

a multiple de b = VRAI

b multiple de a = VRAI

R est anti-symétrique

Test de Transitivité \Rightarrow ($a=b$) Exemple ($a=3$ ou $b=9$ $Z=18$)

a multiple de b et b multiple de Z est-ce que A est multiple de Z ?

a est dans la table de 18? \Rightarrow VRAI

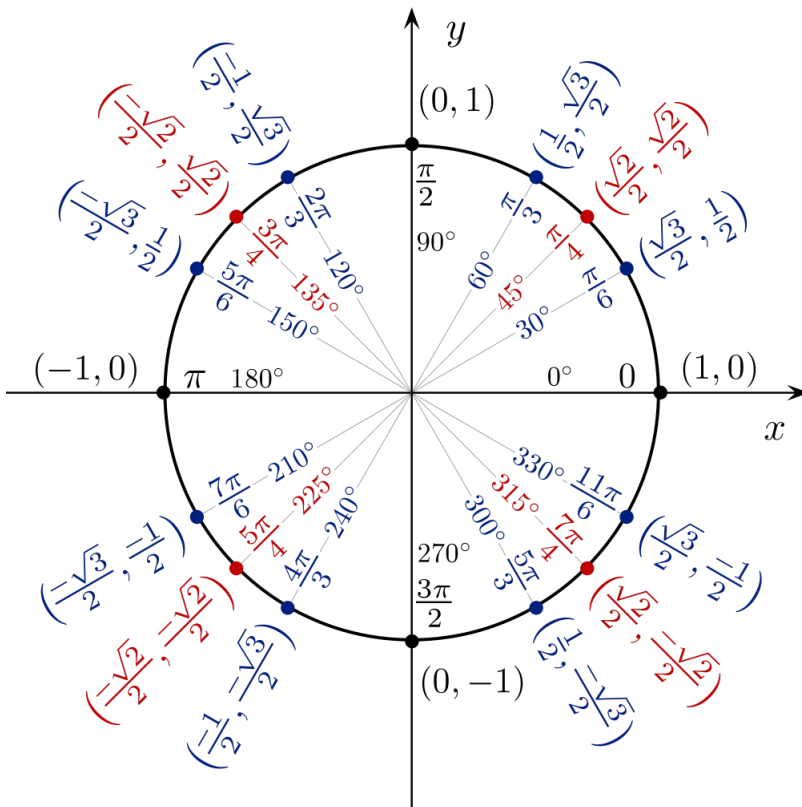
R est transitif

Chapitre 4

Formules

4.1 Tableau Trigonométrique

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	\nexists
cotan	\nexists	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



4.2 NB Complex : Forme Polaire vers Cartésienne

$$X = \rho * \cos(\theta)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta)$$

$$Z = x + yi$$

$$\text{Notes : } cis = \cos(\theta) * \sin(\theta) * i$$

4.3 Addition de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) + (a+di)$$

$$(a_1+a_2) + (b_1+b_2) * i$$

4.4 Soustraction de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) - (a+di)$$

$$(a_1-a_2) + (b_1-b_2) * i$$

4.5 Multilication de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } (a+bi) * (a+di)$$

$$(a_1*a_2) - (b_1*b_2) + ((a_1 * b_2) + (b_1*a_2)) * i$$

4.6 Division de nombres complex (cartésien)

$$\text{Exemple : } \frac{(a+bi)}{(a+di)}$$

$$\frac{(a_1*a_2)-(b_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} + \frac{(b_1*a_2)-(a_1*b_2)}{a_2^2+b_2^2} * i$$

4.7 NB Complex : Forme cartésienne vers polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\theta)$$

4.8 Addition de nombres complex (Polaire)

Exemple : $4 * \operatorname{cis}(45^\circ) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

4.9 Soustraction de nombres complex (Polaire)

Exemple : $4 * \operatorname{cis}(45^\circ) - 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

4.10 Multilication de nombres complex (Polaire)

Exemple : $4 * \operatorname{cis}(45^\circ) * 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$c1 * c2 = \rho_1 * \rho_2 * (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i * \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

4.11 Division de nombres complex (Polaire)

Exemple : $\frac{(a+bi)}{(c+di)}$

$$\frac{c1}{c2} = \frac{r1}{r2} * \cos(\theta_1 + \theta_2) + i * \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Notes : Selon l'énoncé et les préférences de chacun il est conseillé de transformer en forme polaire ou cartésien, afin de pouvoir appliquer les formules ci-dessus.

4.12 Logique propositionnelle

De Morgans :

$$a \vee b = \neg a * \neg b$$

$$a * b = \neg a + \neg b$$

$$(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$(p \vee q) = \neg (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \wedge q) = (p \vee q)$$

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A)) = \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \vee (C \wedge A))$$

Forme disjonctive

$$(A \wedge B) \vee C$$

$$(A \text{ ET } B) \text{ OU } C$$

Forme conjonctive

$$(A \vee B) \wedge C$$

$$(A \text{ OU } B) \text{ ET } C$$

Transformation :

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = (\neg A \vee (A \wedge B)) \wedge (\neg B \vee (B \wedge A))$$

4.13 Algorithmique symbole

o = meilleur des cas

O = Pire des cas

θ = Cas moyen

Θ = Meilleur des cas, cas moyen, pire des cas