

# Mathématiques appliquée à l'informatique

Enseignant : Mr Lerat Sébastien

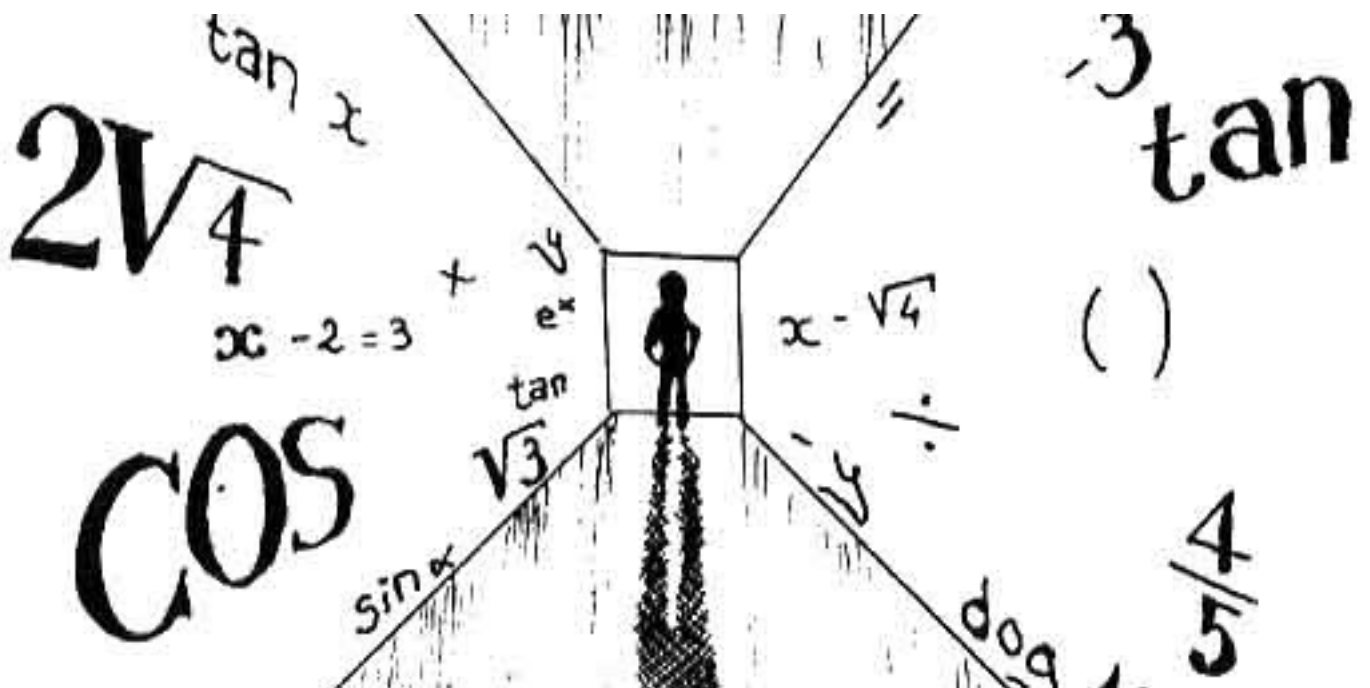
Août-Septembre 2020

# Table de Matières

<b>1</b>	<b>Mathématiques Théorie</b>	<b>2</b>
1.1	Matrices Théories . . . . .	3
1.1.1	Les propriétés . . . . .	3
1.1.2	Calcul du déterminants $2 \times 2$ . . . . .	4
1.1.3	Calcul du déterminants $4 \times 4$ ou $n \times n$ . . . . .	4
1.2	Nombres Complexes Théorie . . . . .	6
1.2.1	Conversion polaire - cartésienne . . . . .	6
1.2.2	Conversion Cartésienne - Polaire . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Mathématiques Exercices</b>	<b>8</b>
2.1	Exercice Matrices . . . . .	9
2.1.1	Enoncés des exercices . . . . .	9
2.1.2	Résolution des exercices . . . . .	10
2.2	Nombres Complexes Exercices . . . . .	14
2.2.1	Exercices : Enoncés . . . . .	14
2.2.2	Résoudre les équations suivantes : . . . . .	15
2.2.3	Trouver le conjugués : . . . . .	17
2.2.4	Identifier $\mathbb{R}$ et $\mathbb{I}$ . . . . .	17
2.2.5	Exprimer sous forme $a+bi$ . . . . .	17
2.2.6	Exprimer sous forme polaire . . . . .	17
2.2.7	Exprimer sous forme cartésienne . . . . .	18
2.2.8	Trouver la solution . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Exemple d'examen</b>	<b>21</b>
3.1	Q1 : Calcul du déterminant de la matrice . . . . .	21
3.2	Q2 : Calcul nombre complexe . . . . .	23
3.3	Q3 : Transformer en forme conjonctive . . . . .	26
3.4	Q4 : Théorie des ensembles naïfs . . . . .	26
3.5	Q5 : Induction forte/faibles . . . . .	27
3.6	Q6 : Nombre entiers . . . . .	27
3.7	Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec $n$ la taille du tableau . . . . .	28
3.8	Q8 : Ensemble Naturels . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Formules</b>	<b>30</b>
4.0.1	Tableau Trigonométrique . . . . .	30
4.0.2	NB Complex : Cartésienne vers Polaire . . . . .	31
4.0.3	NB Complex : Polaire vers Cartésienne . . . . .	31
4.0.4	Addition de nombre complexe . . . . .	31
4.0.5	Soustraction de nombre complexe . . . . .	31
4.0.6	Multiplication de nombre complexe . . . . .	31
4.0.7	Division de nombre complexe . . . . .	32

## Chapitre 1

## Mathématiques Théorie



## 1.1 Matrices Théories

### 1.1.1 Les propriétés

#### A) Linéarité

si on multiplie une matrice par  $\lambda$ , le déterminant est multiplié par  $\lambda^n$  et toutes les lignes et colonnes sont multiplié par  $\lambda = \det(A) * \lambda^n$

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)?$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = ab \text{ et } \det(B) = cd$$

Conclusion :

$$C = \begin{pmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = (a+c) * (b+d)$$

$\lambda^n \neq$  linéaire

$\lambda^n$  est exponentielle

#### B) Déterminant et transposée

$\det(A) = \det(A^T)$ , les déterminants sont égaux, il y a juste la signature (le signe) qui est modifiée.

Démonstration :

$$\det(A) = \sum_{o \in S} \varepsilon(o^{-1}), \dots$$

$$\det(T_a) = \sum_{o \in S} \varepsilon(o^1), \dots$$

#### C) Déterminant et produit

les déterminants sont compatible avec le produit  $\det(AB) = \det(A) * \det(B)$

$$\varphi_a(x_1, \dots, x_n) = \det(\varphi_c)(A * 1, \dots, A * N)$$

#### D) Déterminant et matrice inversible

Une matrice est inversible uniquement si le déterminant est différent de 0.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

### 1.1.2 Calcul du déterminants 2\*2

Le calcul du déterminants d'une matrice 2\*2 est le résultat d'une soustraction entre la multiplications croisée des 2 ensembles

Il faut utiliser la ligne avec le plus de 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (1*3) - (2*4)$$

$$\det(A) = (3-8)$$

$$\det(A) = (-5)$$

$$S = -5$$

### 1.1.3 Calcul du déterminants 4\*4 ou n\*n

Le calcul du déterminants d'une matrice n\*n est le résultat d'une série d'opération entre les sous matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices 3\*3

$$1 * (+1 * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 4 * \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} )$$

Extraction des matrices 2\*2

$$1 * (1 * (+1 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ) + 3 * (-1 * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 1 * \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ) - 4 * (-1 * \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 * \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ) )$$

Calcul du déterminants des matrices 2\*2

$$\begin{aligned} &1 * ( \\ &1 * (+1 * ((0 * 3) - (1 * 2)) - 2 * ((0 * 3) - (1 * 1)) + 1 * ((0 * 2) - (0 * 1))) \\ &+ 3 * (-1 * ((3 * 3) - (0 * 1)) + 1 * ((3 * 1) - (0 * 0))) \\ &- 4 * (-1 * ((3 * 2) - (0 * 0)) + 2 * ((3 * 1) - (0 * 0))) \\ &) \end{aligned}$$

Simplification de l'équation

$$\begin{aligned} &1 * ( \\ &1 * (+1 * (0 - 2) - 2 * (0 - 1) + 1 * (0 - 0)) \\ &+ 3 * (-1 * (9 - 0) + 1 * (3 - 0)) \\ &- 4 * (-1 * (6 - 0) + 2 * (3 - 0)) \\ &) \end{aligned}$$

Mise en équations et résolution

$$\begin{aligned} &1 * (1 * ((-2) - (-2)) + 3 * (-9 + 3) - 4 * (-6 + 6)) \\ &1 * (3 * (-9 + 3)) = -27 + 9 = -18 \end{aligned}$$

$$\det(A) = -18$$

## 1.2 Nombres Complexes Théorie

### 1.2.1 Conversion polaire - cartésienne

Définition du module :

le module noté  $|Z|$  est la longueur du segment (rayon). Elle peut être mesurée grâce à la formule de pythagore ( $\sqrt{a^2 + b^2}$ ).

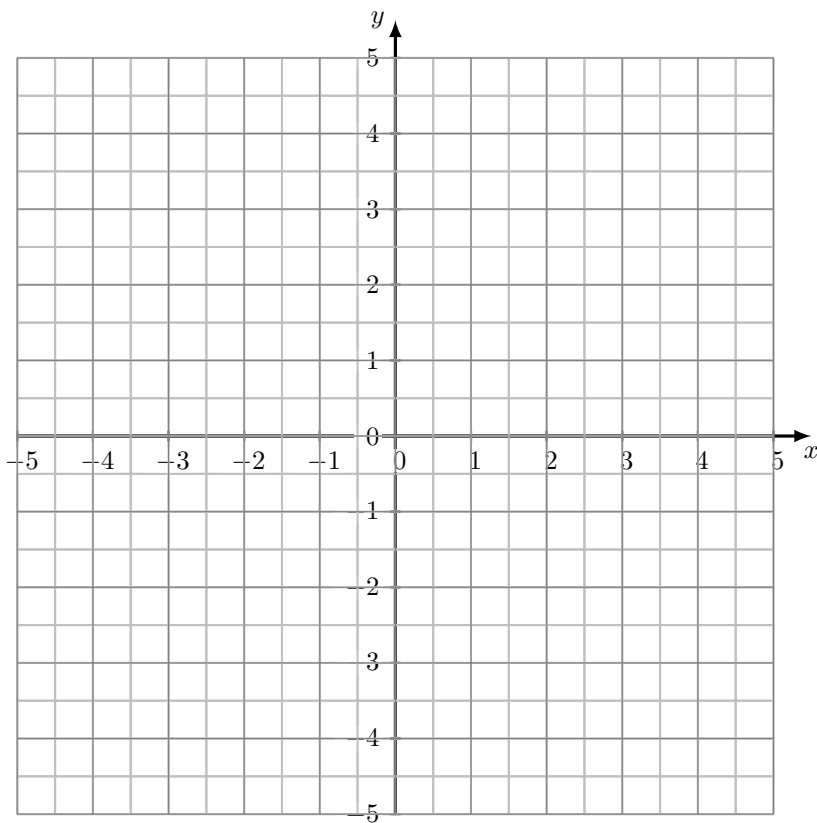
Démonstration :

$$\begin{aligned}|Z| &= \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) * i \\|Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2)} \\|Z| &= \sqrt{(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \sin(\theta))} * i \\|Z| &= \sqrt{(\rho^2)} \\|Z| &= \rho\end{aligned}$$

$\rho$  est le module et  $\theta$  est l'argument

$$Z = P(\cos(\theta) + \sin(\theta) * i) \text{ ou } Z = P(cis(\theta))$$

Représentation Géographique

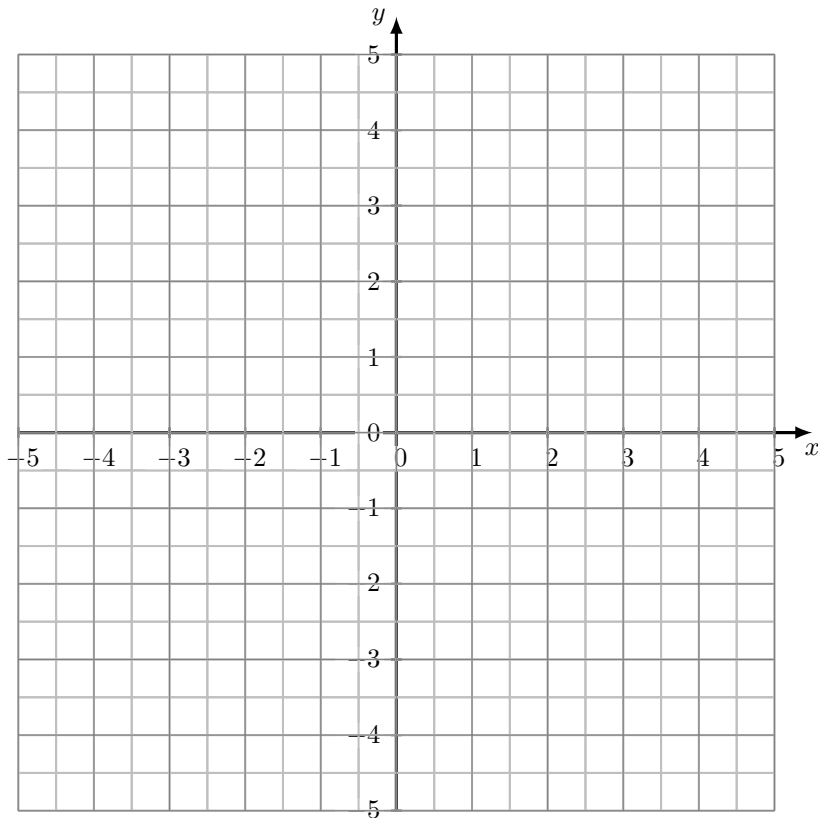


### 1.2.2 Conversion Cartésienne - Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Démonstration Géométriquement  $\theta$

Nous pouvons voir que  $\theta$  est modifié en fonction de X et de Y que si nous dessinons un cercle, nous pouvons voir que le segment Y est une tangente au cercle de rayon X.



$$X = \rho * \cos(\theta) \quad Y = \rho * \sin(\theta)$$

Démonstration Algébriquement  $\theta$

$$\begin{aligned} \frac{Y}{X} &= \frac{\rho * \sin(\theta)}{\rho * \cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ \frac{Y}{X} &= \text{tg}(\theta) \end{aligned}$$

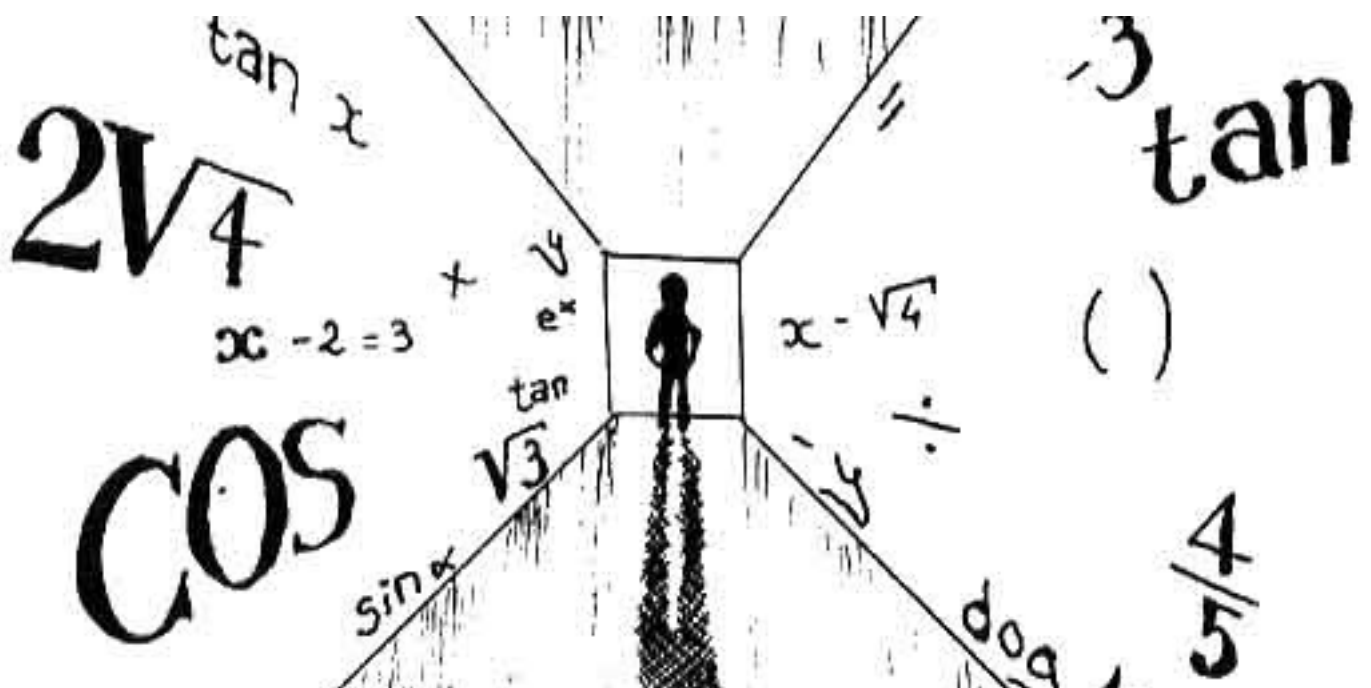
Conclusion :

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$



## Chapitre 2

### Mathématiques Exercices



## 2.1 Exercice Matrices

### 2.1.1 Enoncés des exercices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- A) Calculer  $B \cdot C$
- B) Calculer la trace de A
- C) Calculer la transposée de B
- D) Calculer  $2,5 \cdot C$
- E) Calculer  $B^t + C$
- F) Calculer le déterminants de A
- G) Exercices d'examens
- H) Exercices supplémentaire (Déplacement 3D)

## 2.1.2 Résolution des exercices

A) Calculer  $B * C$

$$B * C = \begin{pmatrix} 1*1+4*4 & 1*2+4*3 & 1*3+4*2 & 1*4+4*1 \\ 2*1+3*4 & 2*2+3*3 & 2*3+3*2 & 2*4+3*1 \\ 3*1+2*4 & 3*2+2*3 & 3*3+2*2 & 3*4+2*1 \\ 4*1+1*4 & 4*2+1*3 & 4*3+1*2 & 4*4+1*1 \end{pmatrix}$$

$$S = B * C = \begin{pmatrix} 17 & 14 & 11 & 8 \\ 14 & 13 & 12 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 15 \\ 8 & 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}$$

B) Calculer la trace de A

La trace d'une matrices est la somme de chaque éléments de sa diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La trace de la matrice A =  $0+2+0+2 = 4$   
S = 4

C) Calculer la transposée de la matrice B

La transposée de la matrice est d'invertir les lignes/colonnes de la matrice originale.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes :  $B^t$  est égale à C

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S =  $B^t$  ou C

D) Calculer  $2,5 * C$

$$2,5 * C = \begin{pmatrix} 1*2,5 & 2*2,5 & 3*2,5 & 4*2,5 \\ 4*2,5 & 3*2,5 & 2*2,5 & 1*2,5 \end{pmatrix}$$

$$S = 2,5 * C = \begin{pmatrix} 2,5 & 5 & 7,5 & 10 \\ 10 & 7,5 & 5 & 2,5 \end{pmatrix}$$

E) Calculer  $B^t + C$

$$B^t = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Notes :  $B^t = C = C+C$  ou  $2*C$

$$S = 2 * C = \begin{pmatrix} 1*2 & 2*2 & 3*2 & 4*2 \\ 4*2 & 3*2 & 2*2 & 1*2 \end{pmatrix}$$

$$S = B^t + C = 2*C = C+C =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

F) Calcul du déterminant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - & + \\ - & - & + & - \\ + & + & - & + \\ - & + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$-1 * (1 * \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 * \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}) - 2 * (1 * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}) + 3 * (1 * \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}) + 3 * \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix})$$

$$-1 * (1 * ((0 * 2) - (1 * 1)) - 3 * ((2 * 2) - (4 * 1))) - 2 * (1 * ((3 * 2) - (0 * 1)) - 2 * ((3 * 2) - (1 * 4))) + 3 * (1 * ((3 * 1) - (0 * 0)) - 2 * ((3 * 1) - (4 * 0))) + 3 * ((3 * 0) - (3 * 4))$$

$$-1 * (1 * ((0 * 2) - (1 * 1)) - 3 * ((2 * 2) - (4 * 1))) - 2 * (1 * ((3 * 2) - (0 * 1)) - 2 * ((3 * 2) - (1 * 4))) + 3 * (1 * ((3 * 1) - (0 * 0)) - 2 * ((3 * 1) - (4 * 0))) + 3 * ((3 * 0) - (3 * 4))$$

$$-1 * (1 * (-1) - 3 * (2)) - 2 * (1 * (6) - 2 * (2)) + 3 * (1 * (3) - 2 * (3)) + 3 * (-12)$$

$$-1 * (-1 - 6) - 2 * (6 - 4) + 3 * (3 - 6 - 12 - 36)$$

$$-1 * (-7) - 2 * (2) + 3 * (-39)$$

$$-7 - 4 - 117 = -128 - (-1) = 128$$

#### H) Déplacement 3D

$$R=10u$$

$$H=300l \text{ où } L=40cm + \text{ hauteur du casier}$$

$$P=((\frac{3}{5}) * R < R)$$

$$\theta = 0$$

$$Z= R + (\frac{B}{100} * R) = R + (\frac{2}{100}) * R = 20cm$$

Etape 0 : Coordonnées de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}R \\ 0 \\ 5l \end{pmatrix}$$

Etape 1 : Allongement de la pince :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 2 : Rétraction de la pince + marge :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 3 : Bras monté à 15l :

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15l \end{pmatrix}$$

Etape 4 : Mouvement à 45°

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\cos(45) - \sin(45)) & 0 \\ \sin(45) - \cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 5 : Allongement

$$\begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_4 \\ Y_4 \\ Z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{3}{5}R + \frac{13}{110}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 6 : Rétraction + marge :

$$\begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_5 \\ Y_5 \\ Z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\frac{R}{2} + \frac{B}{100}) * R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etape 7 : Rotation -45° :

$$\begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_6 \\ Y_6 \\ Z_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(45) - \sin(45) & 0 \\ +\sin(45)\cos(45) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Etape 8 : Retour à 0 :

$$\begin{pmatrix} X_8 \\ Y_8 \\ Z_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_7 \\ Y_7 \\ Z_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15l \end{pmatrix}$$

## 2.2 Nombres Complexes Exercices

### 2.2.1 Exercices : Enoncés

1) Résoudre les équations suivantes :

- a.  $x^2+1=0$
- b.  $3x^2+7=0$
- c.  $\frac{x^2}{2} - x = -2$
- d.  $-x^2-3x=3$
- e.  $x^3+7x^2+9x+63=0$
- f.  $x^4 + 15x^2=16$

2) Trouver le conjugués de :

- a.  $-11-8i$
- b.  $-0.3333i + 1$
- c.  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i$

3) Identifier  $\mathbb{R}$   $\mathbb{I}$

- a. 0
- b.  $-6+i$
- c.  $i^2$
- d.  $\frac{1+i}{2}$

4) Exprimer sous forme  $a+bi$  :

- a.  $(4-8i)-(3+2i)$
- b.  $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$
- c.  $(7-2i)(5+6i)$
- d.  $\frac{4}{(3+i)^3}$
- e.  $\frac{5+3i}{(2+2i)}$

5) Exprimer sous forme Polaire :

- a.  $3-\sqrt{3}i$
- b.  $-1+1i$

6) Exprimer sous forme cartésienne :

- a.  $4\cos(45) + \sin(45)i$
- b.  $5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$

7) Trouver la solution de :

- a.  $4\text{cis}(45^\circ)+5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$
- b.  $4\text{cis}(45^\circ)*5\text{cis}(\frac{\pi}{3})$

## 2.2.2 Résoudre les équations suivantes :

A.  $x^2+1=0$

$$x^2+1-1=0-1$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$$S = x = i$$

B.  $3x^2+7=0$

$$3x^2+7-7=0-7$$

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{-7}{3}$$

$$x^2 = \frac{-7}{3}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3} * -1}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

$$S = \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{7}{3}} \sqrt{-1}$$

C.  $\frac{x^2}{2} - x = -2$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x}{1} = -\frac{2}{1}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{2x}{2} = -\frac{4}{2}$$

$$x^2 - 2x = -4$$

$$x^2 - 2x + 4 = (-4) + 4$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * 1 * 4}}{2 * 1}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 * (-3)}}{2}$$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 * (-3)}}{2}$$

$$S = -1 \pm 1 \sqrt{-3}$$

D.  $-x^2-3x=3$

$$-x^2-3x-3=3-3$$

$$-x^2-3x-3=0$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 * 1 * 3}}{2 * 1}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3 * (-1)}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3 * \sqrt{-1}}}{2}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3i}}{2}$$

$$S = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}i}$$



$$E. x^3 + 7x^2 + 9x + 63 = 0$$

$$x^2 + (x+7) + 9(x+7) = 0$$

$$(x+7) * (x^2 + 9) = 0$$

Poser les CE pour que  $(x+7)$  ou  $(x^2+9)$  vaut 0

Résoudre pour  $(x+7)=0$

$$x = -7$$

$$(x^2 + 9) = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-3^2}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2 * (-1)}$$

$$x = 3\sqrt{-1}$$

$$x = 3i$$

$$S = X \text{ vaut } -7; 3i$$

$$F. x^4 + 15x^2 = 16$$

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$\text{Poser } t = x^2$$

$$t^2 + 15t - 16 = 0$$

$$t * (t+16) - (t+16) = 0$$

$$(t+16) - (t-1) = 0$$

CE : Les Possibilités que la solution vaut 0 quand :

$$(t+16) = 0$$

$$t = -16$$

$$\text{Restituer } t = x^2$$

$$x^2 = -16$$

$$x = \sqrt{-16}$$

$$x = \sqrt{16 * (-1)}$$

$$x = \sqrt{4^2 * (-1)}$$

$$x = 4\sqrt{-1}$$

$$x = 4i$$

$$t-1=0$$

$$t=1$$

$$\text{Restituer } t = x^2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1}$$

$$x = 1$$

$$S = 1; 4i$$

### 2.2.3 Trouver le conjugués :

- a.  $-11-8i = -11+8i$
- b.  $-0.3333i + 1 = 1+0.3333i$
- c.  $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)i = \cos(\omega t) - \sin(\omega t)i$

### 2.2.4 Identifier $\mathbb{R}$ $\mathbb{I}$

- a.  $0 : \mathbb{R}=0 \mathbb{I}=0$
- b.  $-6+i : \mathbb{R}=(-6) \mathbb{I}=1$
- c.  $i^2 : \mathbb{R}=(-1) \mathbb{I}=0$
- d.  $\frac{1+i}{2} : \mathbb{R}=(\frac{1}{2}) \mathbb{I}=(\frac{1}{2})$

### 2.2.5 Exprimer sous forme $a+bi$

- a.  $(4-8i)-(3+2i) : 1-10i$
- b.  $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i} : \frac{23-11i}{26}$
- c.  $(7-2i)(5+6i) : 47+32i$
- d.  $\frac{4}{(3+i)^3} : \frac{9-13i}{125}$
- e.  $\frac{5+3i}{(2+2i)} : 2-\frac{1}{2}i$

### 2.2.6 Exprimer sous forme polaire

a.  $3-\sqrt{3}i$

Calcul de l'arguments

$$\theta = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\theta = -30^\circ$$

$$\theta = -30^\circ + 360^\circ$$

$$\theta = 330^\circ$$

Calcul du module

$$\rho = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\rho = \sqrt{9+3}$$

$$\rho = \sqrt{12} \Rightarrow (12 = 4 * 3)$$

$$\rho = \sqrt{2^2 * 3}$$

$$\rho = 2\sqrt{3}$$

$$Z = \rho * \cos(\theta) + \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \text{cis}(\theta)$$

$$Z = 2\sqrt{3} * \text{cis}(330)^\circ$$

b.  $-1+i$

Calcul de l'arguments

$$\begin{aligned}\theta &= \arctg\left(-\frac{1}{1}\right) \\ \theta &= -45^\circ \\ \theta &= -45^\circ + 360^\circ \\ \theta &= 315^\circ\end{aligned}$$

Calcul du module

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{-1^2 + 1^2} \\ \rho &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z &= \rho * \cos(\theta) * \sin(\theta) * i \Rightarrow \rho * \text{cis}(\theta) \\ Z &= \sqrt{2} * \text{cis}(315^\circ)\end{aligned}$$

### 2.2.7 Exprimer sous forme cartésienne

a.  $4\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) * i$

Formules

$$\begin{aligned}\rho &= 4 * \text{cis}(45^\circ) \\ \theta &= \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \\ |Z| &= a + bi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Y}{X} &= \text{tg}(45^\circ) \\ \frac{Y}{X} &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \\ \rho &= \sqrt{(x^2 + y^2)^2} = 4^2 \\ \rho &= x^2 + y^2 = 16\end{aligned}$$

Notes :  $\frac{Y}{X} = 1 = \frac{1}{1}$  donc  $Y=X$

$$\begin{aligned}\rho &= 2x^2 = 16 \text{ ou } 2y^2 = 16 \\ \rho &= x^2 = \frac{16}{2} \\ \rho &= x^2 = 8 \\ \rho &= \sqrt{x^2} = \sqrt{8} = (2 * 4) \\ \rho &= x = \sqrt{(2 * 2^2)} \\ \rho &= x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$x=y \text{ donc } x = 2\sqrt{2} \text{ et } y = 2\sqrt{2}i$$

Conclusion :

$$S = 4 * \text{cis}(45^\circ) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

$$b. 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

Formules

$$\begin{aligned}\rho &= 5 \\ \theta &= arctg(\frac{Y}{X}) \\ |Z| &= a + bi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= tg(\frac{\pi}{3}) \\ \theta &= \sqrt{(3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \rho * \cos(\sqrt{3}) => \cos(\sqrt{3}) = \frac{1}{2} \\ y &= \rho * \sin(\sqrt{3}) => \sin(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 5 * \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y &= 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\begin{aligned}Z &= a+bi \\ S = Z &= \frac{5}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

## 2.2.8 Trouver la solution

$$a. 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ \rho &= \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 * 4 * 5 * \cos(45^\circ - 60^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{16 + 25 + 40 * \cos(-15^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{41 + 40 * \cos(-15^\circ)} \\ \rho &= \sqrt{81 * 0.965} \\ \rho &= \sqrt{79.637} \\ \rho &= 8.9239\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta &= arctg(\frac{Y}{X}) \\ \theta &= arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})\end{aligned}$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{\sqrt{3}}{2}}{4 * \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 * \frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

$$b. 4 * cis(45) * 5 * cis(\frac{\pi}{3})$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1 * \rho_2 (\cos(45^\circ + \theta_2) + i * \sin(45^\circ + \theta_2))}$$

$$\rho = \sqrt{4 * 5 (\cos(45^\circ + 60^\circ) + i * \sin(45^\circ + 60^\circ))}$$

$$\rho = \sqrt{20(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{24,1421 + 1,5731}$$

$$\rho = \sqrt{25,7152}$$

$$\rho = 5,07$$

$$\theta = arctg(\frac{Y}{X})$$

$$\theta = arctg(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4 * \sin(45^\circ) + 5 * \sin(60^\circ)}{4 * \cos(45^\circ) + 5 * \cos(60^\circ)})$$

$$\theta = arctg(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2}})$$

$$\theta = arctg(1,343)$$

$$\theta = 53,338^\circ$$

$$S = 4 * cis(45) + 5 * cis(\frac{\pi}{3}) = 8.9239 * cis(53.338^\circ)$$

## Chapitre 3

# Exemple d'examen

### 3.1 Q1 : Calcul du déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2^0 - 1 & 1 - 2^3 2^{-3} & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

A) Simplification de la matrice

$$2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \text{ et } 1 - 2^3 2^{-3} = 1 - 2^{3-3} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 9 & 9,5 & -9,5 & b \\ 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

B) Swap des zeros

$$8 * \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 9 & 9,5 & -9,5 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$$

C) Extraction des sous matrices

Matrices de signes

$$\begin{pmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ + & + & - \end{pmatrix}$$

Extraction des matrices

$$8 * (1 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} - 5 * \begin{pmatrix} 9,5 & -9,5 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} + 6 * \begin{pmatrix} 9 & 9,5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix})$$

D) Calcul des déterminants 2\*2

$$\begin{aligned} &8*( \\ &1*((9,5*16)-(8*-9,5)) \\ &-5*((9*16)-(4*-9,5)) \\ &+6*((9*8)-(4*9,5)) \\ &) \end{aligned}$$

E) Simplification des calculs

$$\begin{aligned} &8*( \\ &1*(152 - (-76)) \\ &-5*(144 - (-38)) \\ &+6*(72 - 38) \\ &) \end{aligned}$$

F) Mise en équation et résolution

$$8*( 228 -5*(182) + 6*(34))$$

$$8*( 228 - 910 + 204 )$$

$$8*( 228 + 204 - 910 )$$

$$8*( 432 - 910 )$$

$$8*( -478 ) = -3824$$

$$\det(A) = -3824$$

## 3.2 Q2 : Calcul nombre complexe

Que doit valoir a pour que l'argument soit  $135^\circ$  quand  $b=-5$ ,  $c=4$  et  $d=11$

$$\frac{a+bi}{c+di}$$

A) Utilisation des Binomes conjugués

$$\frac{c}{b+i} * \frac{b-i}{b-i}$$

Notes : le binomes conjugués est toujours utilisé par le dénominateur.

$$\frac{(a-5i)*(4-11i)}{4+11i*(4-11i)} = \frac{4a-11ai-20i+55i^2}{16-121i^2}$$

B) Simplifications de la fraction

Notes : par définition  $i^2 = -1$

$$\frac{4a-11ai-20i+(55*(-1))}{16-(121*(-1))}$$

$$\frac{4a-11ai-20i+(-55)}{16-(-121)}$$

$$\frac{4a-11ai-20i-55}{16+121}$$

$$\frac{4a+(-11a-20)i-55}{137}$$

$$\frac{4a-55+(11a-20)i}{137}$$

$$\frac{4a-55}{137} + \frac{55+(11a-20)}{137} * i$$

C) On calcule a par rapport à  $\theta$

Notes : Nous avons découvert la valeur de X et de Y :

$$\theta = \arctg \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

Remplacement de X et Y

$$\theta = \arctg \left( \frac{55+(11a-20)i}{\frac{4a-55}{137}} \right)$$

Notes : Diviser une fraction par une fraction c'est égale à la multiplier par l'inverse

$$\text{Ex : } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$$

$$\theta = \arctg \left( \left( \frac{55+(11a-20)i}{137} \right) * \left( \frac{137}{4a-55} \right) \right)$$



$$tg(\theta) = \left( \frac{55+(11a-20)}{137} \right) * \left( \frac{137}{4a-55} \right)$$

$$tg(\theta) = \left( \frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55} \right)$$

$$tg(135) = \left( \frac{55+(11a-20)*137}{137*4a-55} \right)$$

$$-1 = \left( \frac{-2685+1507a}{548a-55} \right)$$

D) Déterminer l'intervale définis

$$-1 = \left( \frac{-2685+1507a}{548a-55} \right), a \neq \frac{55}{548}$$

E) Simplifier l'équation

$$(-1) * (548a - 55) = (548a - 55) * \left( \frac{-2685+1507a}{548a-55} \right)$$

$$-(548a - 55) = -2685 + 1507a$$

Notes : lorsqu'il y a un un - devant l'expression entre parenthèse, changer le signe de chaque terme de l'expression.

$$-548a + 55 = -2685 + 1507a$$

$$-548a + 55 - 1507a = -2685 + 1507a - 1507a$$

$$-548a - 1507a + 55 - 55 = -2685 + 1507a - 55$$

$$-548a - 1507a = -2685 - 55$$

$$-2055a = -2740$$

$$-\frac{2055a}{2055} = -\frac{2740}{2055}$$

$$\frac{2055a}{2055} = \frac{2740}{2055}$$

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

F) Vérifier si la solution est dans l'intervale définis

$$a = \frac{4}{3}, a \neq \frac{55}{548}$$

G) Solution

$$S = \frac{4}{3}$$

H) Restituer a= $\frac{4}{3}$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$tg(\theta) = \frac{Y}{X}$$

$$X = \frac{4a-55}{137}$$

$$X = -0,362$$

$$Y = \frac{55+(11a-20)i}{137}$$

$$Y = 0,362$$

$$tg(\theta) = -\frac{0,362}{0,362}$$

$$tg(\theta) = -1$$

H) Démontrer que  $tg(\theta) = -1$

$$tg(\theta) = -1$$

$$tg(135) = -1$$

$$135^\circ - 180^\circ = -45^\circ$$

$$tg(-45) = -1$$

I) Conclusion :

$$tg(-45) = -1 \text{ et } -\frac{0,362}{0,362} = -1$$

$$\text{et } a = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{4}{3}$$

### 3.3 Q3 : Transformer en forme conjonctive

$$(A \wedge \neg B) \vee (C \implies a)$$

A) Simplifier l'implications

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \vee (C \wedge A))$$

B) Utilisation du théorème De Morgan

$$a + b = \neg a * \neg b$$

$$\neg (A \wedge \neg B) \wedge \neg (\neg A \vee (C \wedge A))$$

$$S = \text{NEG}(A \text{ ET } \text{NEG}(B)) \text{ ET } \text{NEG}(\text{NEG}(A) \text{ OU } (C \text{ OU } A))$$

### 3.4 Q4 : Théorie des ensembles naïfs

A) Soit  $A = \{\pi, 2, e\}$  et  $B = \{-1, 5\}$  Calculer  $|A \times B|$

1) Calculer  $A \times B$

$$A * B = \{(\pi, -1), (\pi, 5), (2, -1), (2, 5), (e, -1), (e, 5)\}$$

2) Calculer la cardinalité de  $|A \times B|$

$$|A| = 3 \quad |B| = 2$$

$$|A \times B| = |A| * |B| = 2 * 3 = 6$$

S = la cardinalité est le nombre de sous-ensembles (6)

B) Soit  $P \mid A \cup B \mid A = \{3, 4, 5\} \quad B = \{1, 2, 3\}$

1) Union des 2 ensembles

$$P(A) = \{\{\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{3, 5\}, \{3, 4, 5\}\}$$

2) Calcul de la cardinalité des ensembles

$$|P| = 8$$

### 3.5 Q5 : Induction forte/faibles

Notez que l'induction faible est égale à l'induction forte. Néanmoins il est plus naturel de démontrer les propriétés soit avec de l'induction simple, soit avec la forte comme réalisé durant le cours. Il vous est demandé de choisir entre les deux fonction de l'énoncé.

Soit  $n$  un nombre naturel, que faut-il pour démontrer que  $10^{n-1}$  est un multiple de 9 ?

Veillez choisir au moins une réponse : (Cochez ce qui est vrai)

- ☐ On peut utiliser l'induction faible ou forte
- ☐ Il faut au moins 3 cas de base
- ☐ il faut utiliser l'induction forte
- ☐ il faut au moins un unique cas de base
- ☐ il faut au moins 2 cas de base

### 3.6 Q6 : Nombre entiers

Soient  $a, b$  et  $m$  des nombre naturels. Est-ce que  
 $(a+b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$

a) Développement de l'égalité

$$\begin{aligned}(a+b) \bmod m &= ((a+b) \bmod m) \bmod m \\(8+10) \bmod 2 &= ((8 \bmod 2) + (10 \bmod 2)) \bmod 2 \\(18) \bmod 2 &= (0+0) \bmod 2 \\0 &= (0) \bmod 2 \\0 &= 0\end{aligned}$$

Sélectionnez une réponse :

- ☐ Vrai
- ☐ Faux

### 3.7 Q7 : Déterminer les complexités de l'algorithme suivant avec n la taille du tableau

Listing 3.1 – Python algorithme

```
def Apply(array , value , start=None , res=0):  
    if (start is None):  
        start = len(array)-1  
  
    if (start <0):  
        return res  
  
    if (array[start] == value):  
        return Apply(array , value , start -1, res+1)  
  
return Apply(array , value , start -1, res)
```

cochez ce qui est vrai concernant la complexités (au moins une réponse)

- ☐ a.  $\theta(1)$
- ☐ b.  $o(n^2)$
- ☐ c.  $O(\log(n))$
- ☐ d.  $o(\log(n))$
- ☐ e.  $\theta(\log(n))$
- ☐ f.  $o(n)$
- ☐ g.  $o(1)$
- ☐ h.  $O(1)$
- ☐ i.  $o(n\log(n))$
- ☐ j.  $O(n\log(n))$
- ☐ k.  $\theta(n)$
- ☐ l.  $\theta(n^2)$
- ☐ m.  $O(n^2)$
- ☐ n.  $O(n)$
- ☐ o.  $\theta(n\log(n))$

### 3.8 Q8 : Ensemble Naturels

Soit  $N$  est l'ensemble des naturels sauf 0

$R=(a,b)$ ,  $a \in N$ ,  $b \in N$  et  $a$  est un multiple de  $b$

cochez ce qui est vrai concernant  $R$ . (au moins une réponse)

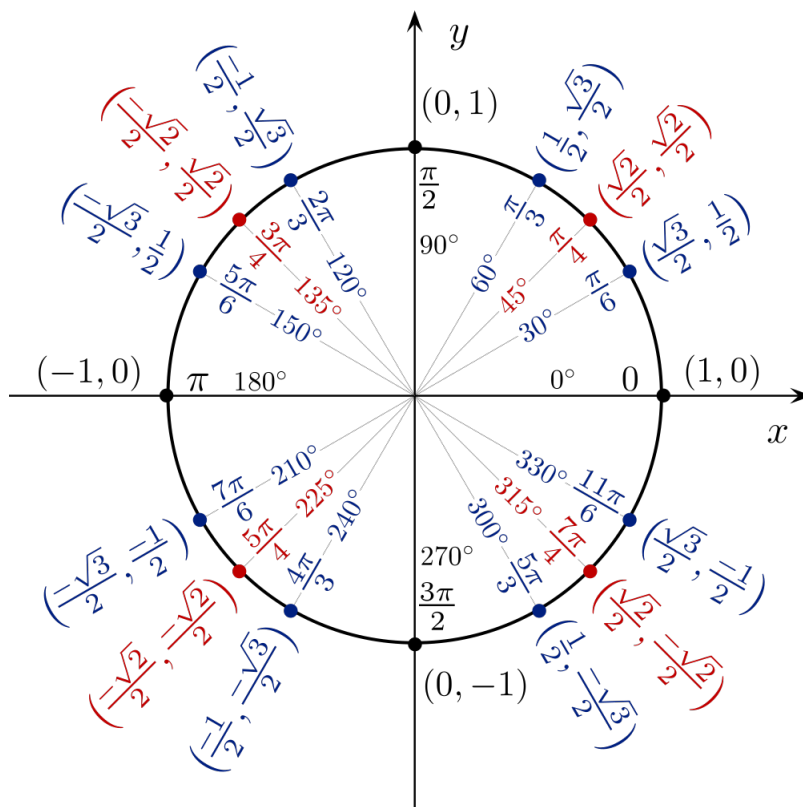
- ☐  $R$  est transitif
- ☐ Aucune réponse
- ☐  $R$  est réflexif
- ☐  $R$  est anti-symétrique
- ☐  $R$  est symétrique

# Chapitre 4

## Formules

### 4.0.1 Tableau Trigonométrique

Degree	0°	30°	45°	60°	90°
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	///
cotan	///	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



#### 4.0.2 NB Complex : Cartésienne vers Polaire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg}(\theta)$$

#### 4.0.3 NB Complex : Polaire vers Cartésienne

$$X = \rho * \cos(\theta)$$

$$Y = \rho * \sin(\theta)$$

$$Z = x + yi$$

$$\text{Notes : } \operatorname{cis} = \cos(\theta) * \sin(\theta) * i$$

#### 4.0.4 Addition de nombre complex

$$\operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

#### 4.0.5 Soustraction de nombre complex

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$

#### 4.0.6 Multilication de nombre complex

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} = \frac{\sin}{\cos}$$

$$\text{Exemple : } 4 * \operatorname{cis}(45) + 5 * \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$



#### 4.0.7 Division de nombre complex

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right) \Rightarrow tg = \frac{\sin}{\cos}$$

$$Exemple : 4 * cis(45) + 5 * cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2 * \rho_1 * \rho_2 * \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{\rho_1 * \sin(\theta_1) + \rho_2 * \sin(\theta_2)}{\rho_1 * \cos(\theta_1) + \rho_2 * \cos(\theta_2)}\right)$$