T-PMTH-402 – Math. appliquées à l'info.
Chapitre 2 - Nombres Complexes

Jean-Sébastien Lerat
Jean-Sebastien.Lerat@heh.be

Haute École en Hainaut

2019-2020

Plan

Introduction

Les nombres ... Naturels ($\mathbb{N}$)

0 1 2 3 4

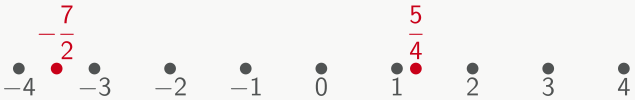
Introduction

Les nombres ... Entiers ($\mathbb{Z}$)

$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

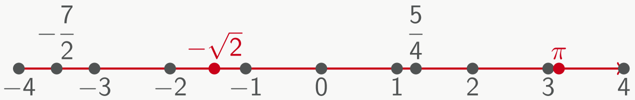
Introduction

Les nombres … Rationnels ($\mathbb{Q}$)



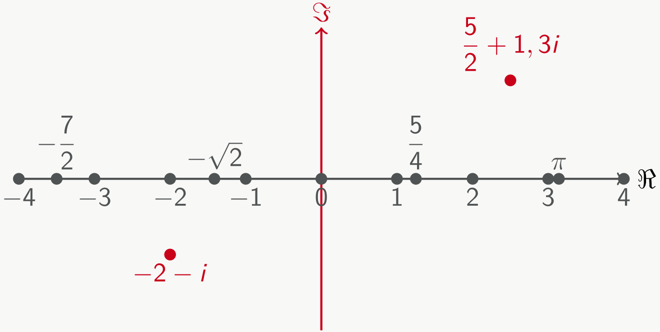
Introduction

Les nombres ... Réels ($\mathbb{R}$)



Introduction

Les nombres ... **Complexes** ($\mathbb{C}$)



La plan complexe

À quoi sert un nombre Complexe ?

Par exemple, l'équation du second degré

$$4x^2 + 8x + 5 = 0$$

possède un discriminant qui vaut

$$\rho = 8^2 - 4 \times 4 \times 5 = -16$$

Avec deux solutions de la forme :

$$\frac{-8 + \sqrt{\rho}}{8} \qquad \frac{-8 - \sqrt{\rho}}{8}$$

À quoi sert un nombre Complexe ?

Par exemple, l'équation du second degré

$$4x^2 + 8x + 5 = 0$$

possède un discriminant qui vaut

$$\rho = 8^2 - 4 \times 4 \times 5 = -16$$

Avec deux solutions de la forme :

$$\frac{-8 + \sqrt{\rho}}{8} \qquad \frac{-8 - \sqrt{\rho}}{8}$$

Imaginons un nombre i tel que $i^2 = -1$.

<u>Attention</u> : i « représente » $\sqrt{-1}$, jamais écrire $\sqrt{-1}$ car n'existe pas !

À quoi sert un nombre Complexe ?

Par exemple, l'équation du second degré

$$4x^2 + 8x + 5 = 0$$

possède un discriminant qui vaut

$$\rho = 8^2 - 4 \times 4 \times 5 = -16$$

Avec deux solutions de la forme :

$$\frac{-8 + \sqrt{\rho}}{8} \qquad \frac{-8 - \sqrt{\rho}}{8}$$

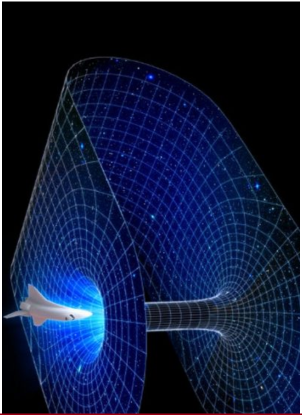
Imaginons un nombre i tel que $i^2 = -1$.

<u>Attention</u> : i « représente » $\sqrt{-1}$, jamais écrire $\sqrt{-1}$ car n'existe pas !

Dans $\mathbb{C}$, $\sqrt{-16} = 4i$, les solutions deviennent

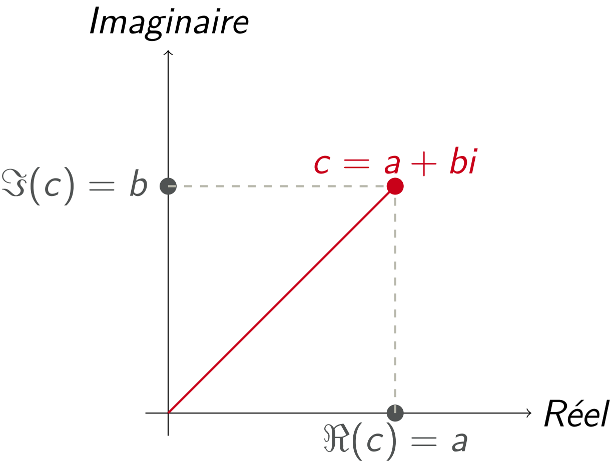
$$-1 + \frac{1}{2}i \qquad -1 - \frac{1}{2}i$$

Appréhender i

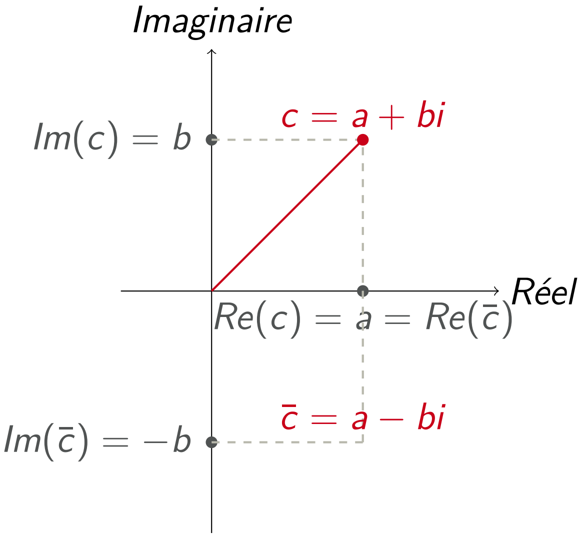


Plan

Forme cartésienne



Forme cartésienne



$\bar{c}$ est appelé le conjugué de c.

Forme cartésienne – Opérations – 1 / 3

Addition

$$c_1 + c_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$$

Forme cartésienne – Opérations – 1 / 3

Addition

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i \end{aligned}$$

Forme cartésienne – Opérations – 1 / 3

Addition

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i \\
&= a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 1 / 3

Addition

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i \\ &= a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i \\ &= \underbrace{a_1 + a_2}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\text{Partie imaginaire}} \; i \end{aligned}$$

Forme cartésienne – Opérations – 1 / 3

Addition

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i \\ &= a_1 + a_2 + b_1 i + b_2 i \\ &= \underbrace{a_1 + a_2}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{(b_1 + b_2)}_{\text{Partie imaginaire}} \; i \end{aligned}$$

Soustraction

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) \\ &= (a_1 + b_1 i) + (-a_2 - b_2 i) \\ &= \underbrace{a_1 - a_2}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\text{Partie imaginaire}} \; i \textit{ par addition de deux complexes} \end{aligned}$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$c_1 \times c_2 = (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i)$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$\begin{aligned} c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \end{aligned}$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + i \times (a_1 b_2) + i \times (b_1 a_2) + b_1 i \times b_2 i
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + i \times (a_1 b_2) + i \times (b_1 a_2) + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 i \times b_2 i
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + i \times (a_1 b_2) + i \times (b_1 a_2) + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 i^2
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + i \times (a_1 b_2) + i \times (b_1 a_2) + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 i^2 \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 \times (-1) \ car \ i^2 = -1
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + i \times (a_1 b_2) + i \times (b_1 a_2) + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 i^2 \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 \times (-1) \ car \ i^2 = -1 \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i - b_1 b_2
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 2 / 3

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 \times a_2 + a_1 \times b_2 i + b_1 i \times a_2 + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + i \times (a_1 b_2) + i \times (b_1 a_2) + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 i \times b_2 i \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 i^2 \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i + b_1 b_2 \times (-1) \ car\ i^2 = -1 \\
&= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i - b_1 b_2 \\
&= \underbrace{a_1 a_2 - b_1 b_2}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{(a_1 b_2 + b_1 a_2)}_{\text{Partie imaginaire}} i
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 3 / 3

Division

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}$$

Forme cartésienne – Opérations – 3 / 3

Division

$$\begin{aligned}\frac{c_1}{c_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 i) \times (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \times (a_2 - b_2 i)} \\ & \textit{multiplication par le conjugué de } c_2\end{aligned}$$

Forme cartésienne – Opérations – 3 / 3

Division

$$\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\
&= \frac{(a_1 + b_1 i) \times (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \times (a_2 - b_2 i)} \\
& \quad \textit{multiplication par le conjugué de } c_2 \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i}{a_2 a_2 + b_2 b_2 + (-a_2 b_2 + b_2 a_2) i} \\
& \quad \textit{multiplication de deux complexes}
\end{aligned}$$

Forme cartésienne – Opérations – 3 / 3

Division

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\
&= \frac{(a_1 + b_1 i) \times (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \times (a_2 - b_2 i)} \\
& \quad \textit{multiplication par le conjugué de } c_2 \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i}{a_2 a_2 + b_2 b_2 + (-a_2 b_2 + b_2 a_2) i} \\
& \quad \textit{multiplication de deux complexes} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Opérations – 3 / 3

Division

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\
&= \frac{(a_1 + b_1 i) \times (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \times (a_2 - b_2 i)} \\
& \quad \textit{multiplication par le conjugué de } c_2 \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (-a_1 b_2 + b_1 a_2) i}{a_2 a_2 + b_2 b_2 + (-a_2 b_2 + b_2 a_2) i} \\
& \quad \textit{multiplication de deux complexes} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} \\
&= \underbrace{\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\text{Partie réelle}} + \underbrace{\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}_{\text{Partie imaginaire}} i
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Exercices

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $x^2 + 1 = 0$
   (b) $3x^2 + 7 = 0$
   (c) $\frac{x^2}{2} - x = -2$
   (d) $-x^2 - 3x = 3$
   (e) $x^3 + 7x^2 + 9x + 63 = 0$
   (f) $x^4 + 15x^2 = 16$
2. Trouver le conjugué de :
   (a) $-11 - 8i$
   (b) $-0,3333i + 1$
   (c) $cos(\omega t) + sin(\omega t)i$
3. Identifier $\Re(c)$ et $\Im(c)$:
   (a) 0
   (b) $-6 + i$
   (c) i^2
   (d) $\frac{1 + i}{2}$
4. Exprimer sous la forme $a + bi$:
   (a) $(4 - 8i) - (3 + 2i)$
   (b) $\frac{3}{3 + 2i} + \frac{1}{5 - i}$
   (c) $(7 - 2i)(5 + 6i)$
   (d) $\frac{4}{(3 + i)^3}$
   (e) $\frac{5 + 3i}{2 + 2i}$

Forme cartésienne – Exercices

1. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $x^2 + 1 = 0$ $x = \pm i$
   (b) $3x^2 + 7 = 0$ $x = \frac{\pm\sqrt{84}i}{6}$
   (c) $\frac{x^2}{2} - x = -2$ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$
   (d) $-x^2 - 3x = 3$ $x = -\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}$
   (e) $x^3 + 7x^2 + 9x + 63 = 0$ $x = -7, \pm 3i$
   (f) $x^4 + 15x^2 = 16$ $x = \pm 1, \pm 4i$

2. Trouver le conjugué de :
   (a) $-11 - 8i$ $-11 + 8i$
   (b) $-0,3333i + 1$ $1 + 0,3333i$
   (c) $cos(\omega t) + sin(\omega t)i$ $cos(\omega t) - sin(\omega t)i$

3. Identifier $\Re(c)$ et $\Im(c)$:
   (a) 0 $\Re = 0, \Im = 0$
   (b) $-6 + i$ $\Re = -6, \Im = 1$
   (c) i^2 $\Re = -1, \Im = 0$
   (d) $\frac{1+i}{2}$ $\Re = \frac{1}{2}, \Im = \frac{1}{2}$

4. Exprimer sous la forme $a + bi$:
   (a) $(4 - 8i) - (3 + 2i)$ $1 - 10i$
   (b) $\frac{3}{3+2i} + \frac{1}{5-i}$ $\frac{23-11i}{26}$
   (c) $(7 - 2i)(5 + 6i)$ $47 + 32i$
   (d) $\frac{4}{(3+i)^3}$ $\frac{9-13i}{125}$
   (e) $\frac{5+3i}{2+2i}$ $2 - \frac{1}{2}i$

Forme cartésienne – Solution – 1(f)

$$\begin{aligned} x^4 + 15x^2 &= 16 \\ x^4 + 15x^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)^4 + 15(1)^2 - 16 &= 0 \Rightarrow 1 \textit{ est une solution évidente} \\ (-1)^4 + 15(-1)^2 - 16 &= 0 \Rightarrow -1 \textit{ est une solution évidente} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + 15^2 - 16 &= (x - s_1)(x - s_2)(x - s_3)(x - s_4) \\ x^4 + 15^2 - 16 &= (x + 1)(x - 1)(x - s_3)(x - s_4) \\ x^4 + 15^2 - 16 &= (x^2 - 1)(x^2 + s_3 s_4 - (s_3 + s_4)x) \\ x^4 + 15^2 - 16 &= x^4 - \underbrace{(s_3 + s_4)}_{0} x^3 + \underbrace{(s_3 s_4 - 1)}_{15} x^2 \\ &\quad + \underbrace{(s_3 + s_4)}_{0} x - \underbrace{s_3 s_4}_{16} \end{aligned}$$

Forme cartésienne – Solution – 1(f)

$$
\begin{aligned}
s_3 + s_4 &= 0 \Rightarrow s_3 = -s_4 \\
s_3 s_4 &= 16 \\
\\
s_3 &= \sqrt{16} = -s4 \\
&\mathit{ou} \\
s_3 &= \sqrt{16}i = -s4 \\
\\
4^4 + 15 \times 4^2 - 16 &= 480 \neq 0 \\
(4i)^4 + 15 \times (4i)^2 - 16 &= 0
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Solution – 1(f)

$$\begin{aligned} s_3 + s_4 &= 0 \Rightarrow s_3 = -s_4 \\ s_3 s_4 &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_3 &= \sqrt{16} = -s4 \\ &\mathit{ou} \\ s_3 &= \sqrt{16}i = -s4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4^4 + 15 \times 4^2 - 16 &= 480 \neq 0 \\ (4i)^4 + 15 \times (4i)^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Forme cartésienne – Solution – 4(d)

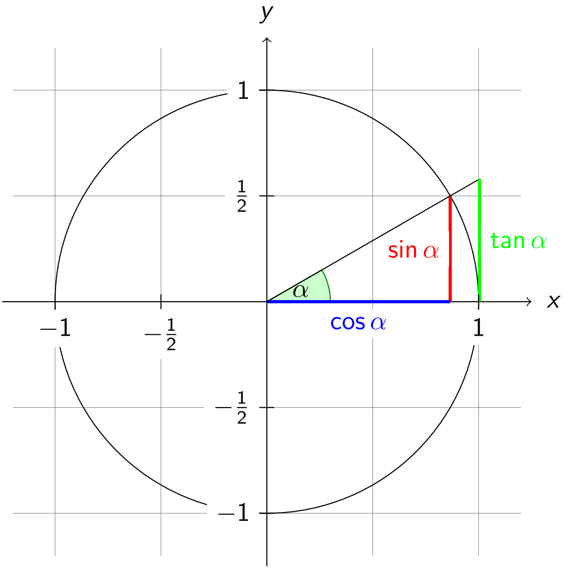
$$
\begin{aligned}
\frac{4}{(3+i)^3} &= \frac{4}{(3+i)^2(3+i)} \\
&= \frac{4}{(3^2+i^2+2\times 3\times i)(3+i)} \\
&= \frac{4}{(8+6i)(3+i)} \\
&= \frac{4}{8\times 3+8i+6i\times 3+6i\times i} \\
&= \frac{4}{24+8i+18i+6i^2} \\
&= \frac{4}{24+26i-6} \\
&= \frac{4}{18+26i}
\end{aligned}
$$

Forme cartésienne – Solution – 4(d)

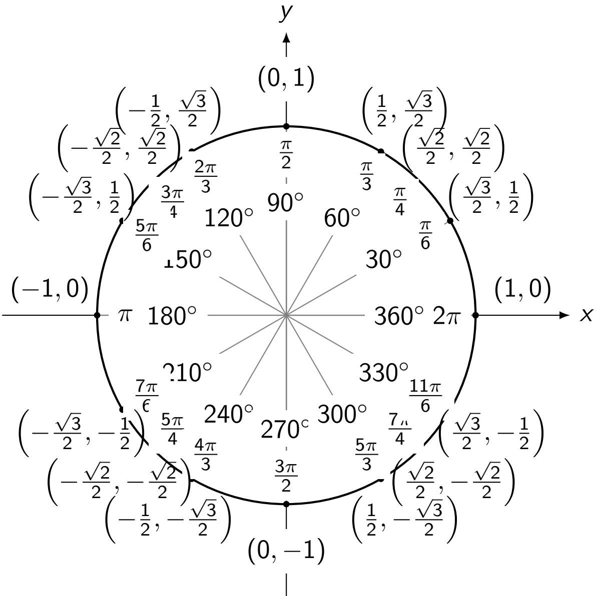
$$
\begin{aligned}
\frac{4}{(3+i)^3} &= \frac{4}{18+26i}\,\frac{18-26i}{18-26i} \\
&= \frac{4(18-26i)}{(18+26i)(18-26i)} \\
&= \frac{72-104i}{18^2-26i\times 18+18\times 26i-(26i)^2} \\
&= \frac{72-104i}{324-(26^2 i^2} \\
&= \frac{72-104i}{324+676} \\
&= \frac{72-104i}{1000} \\
&= \\
&= 0,072+0,104i
\end{aligned}
$$

Plan

Rappel – Trigonométrie – 1/3



Rappel – Trigonométrie – 2/3



Rappel – Trigonométrie – 3/3

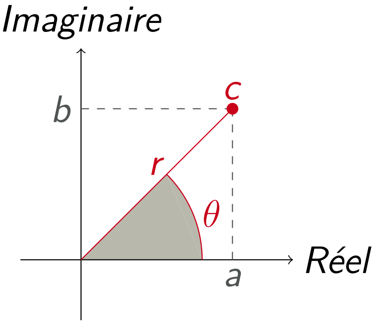
- **Pair/impair**
  - $sin(-x) = -sin(x)$
  - $cos(-x) = cos(x)$
  - $tan(-x) = -tan(x)$
- **Pythagore**
  $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
- **Co-fonction**
  - $sin(\frac{\pi}{2} - x) = cos(x)$
  - $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$
- **Somme et différence**
  - $sin(x+y) = sin(x)\ cos(y) + cos(x)\ sin(y)$
  - $sin(x-y) = sin(x)\ cos(y) - cos(x)\ sin(y)$
  - $cos(x+y) = cos(x)\ cos(y) - sin(x)\ sin(y)$
  - $cos(x-y) = cos(x)\ cos(y) + sin(x)\ sin(y)$
  - $tan(x+y) = \frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)\ tan(y)}$
  - $tan(x-y) = \frac{tan(x)-tan(y)}{1+tan(x)\ tan(y)}$

Somme et produit :

- $sin(x)\ sin(y) = \frac{1}{2}\left[cos(x-y) - cos(x+y)\right]$
- $cos(x)\ cos(y) = \frac{1}{2}\left[cos(x-y) + cos(x+y)\right]$
- $sin(x)\ cos(y) = \frac{1}{2}\left[sin(x+y) + sin(x-y)\right]$

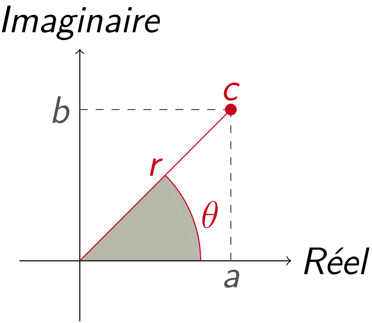
Forme polaire

Le module r et l'argument θ.



Forme polaire

Le module r et l'argument θ.

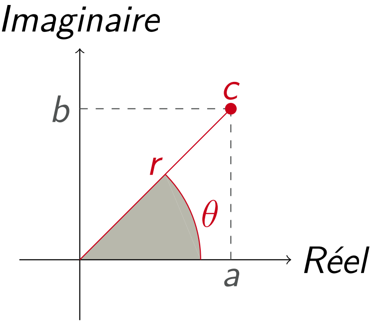


Conversion

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad$ $cos(\theta) = \frac{a}{r}$ $\quad$ $sin(\theta) = \frac{b}{r}$

Forme polaire

Le module r et l'argument θ.



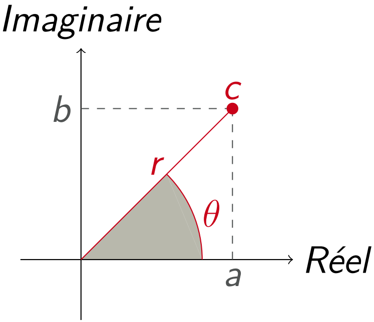
Conversion

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad cos(\theta) = \frac{a}{r} \qquad sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

$$\Longrightarrow tan(\theta) = \frac{b}{a} \qquad \text{car } tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

Forme polaire

Le module r et l'argument θ.



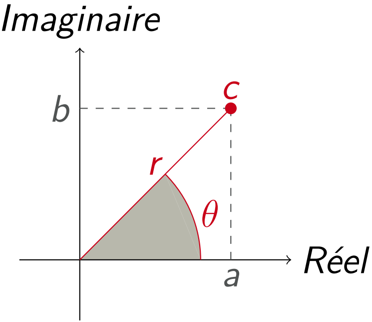
Conversion

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad cos(\theta) = \frac{a}{r} \qquad sin(\theta) = \frac{b}{r}$$

$$\Longrightarrow tan(\theta) = \frac{b}{a} \qquad \text{car } tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \qquad \Longrightarrow \theta = arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

Forme polaire

Le module r et l'argument θ.



Conversion

$$a + bi = r(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}) = r(cos(\theta) + i \times sin(\theta))$$

$\Longrightarrow$ $r \times cis(\theta)$ en abrégé.

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$c_1 + c_2 = r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i)$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\ &= r_1 cos(\theta_1) + r_1 sin(\theta_1)i + r_2 cos(\theta_2) + r_2 sin(\theta_2)i \end{aligned}$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 cos(\theta_1) + r_1 sin(\theta_1)i + r_2 cos(\theta_2) + r_2 sin(\theta_2)i \\
&= \underbrace{r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2)}_{rcos(\theta)} + \underbrace{(r_1 sin(\theta_1) + r_2 sin(\theta_2))}_{rsin(\theta)} i
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\ &= r_1 cos(\theta_1) + r_1 sin(\theta_1)i + r_2 cos(\theta_2) + r_2 sin(\theta_2)i \\ &= \underbrace{r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2)}_{rcos(\theta)} + \underbrace{(r_1 sin(\theta_1) + r_2 sin(\theta_2))}_{rsin(\theta)} i \end{aligned}$$

$$(rcos(\theta))^2 = (r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2))^2$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&= r_1cos(\theta_1) + r_1sin(\theta_1)i + r_2cos(\theta_2) + r_2sin(\theta_2)i \\
&= \underbrace{r_1cos(\theta_1) + r_2cos(\theta_2)}_{rcos(\theta)} + \underbrace{(r_1sin(\theta_1) + r_2sin(\theta_2))}_{rsin(\theta)}\, i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(rcos(\theta))^2 &= (r_1cos(\theta_1) + r_2cos(\theta_2))^2 \\
r^2cos^2(\theta) &= r_1^2cos^2(\theta_1) + r_2^2cos^2(\theta_2) + 2r_1cos(\theta_1)r_2cos(\theta_2)
\end{aligned}$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\ &= r_1 cos(\theta_1) + r_1 sin(\theta_1)i + r_2 cos(\theta_2) + r_2 sin(\theta_2)i \\ &= \underbrace{r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2)}_{rcos(\theta)} + \underbrace{(r_1 sin(\theta_1) + r_2 sin(\theta_2))}_{rsin(\theta)} i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (rcos(\theta))^2 &= (r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2))^2 \\ r^2 cos^2(\theta) &= r_1^2 cos^2(\theta_1) + r_2^2 cos^2(\theta_2) + 2r_1 cos(\theta_1) r_2 cos(\theta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (rsin(\theta))^2 &= (r_1 sin(\theta_1) + r_2 sin(\theta_2))^2 \\ r^2 sin^2(\theta) &= r_1^2 sin^2(\theta_1) + r_2^2 sin^2(\theta_2) + 2r_1 sin(\theta_1) r_2 sin(\theta_2) \end{aligned}$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$
\begin{aligned}
r^2 cos^2(\theta) + r^2 sin^2(\theta) &= r_1^2 cos^2(\theta_1) + r_2^2 cos^2(\theta_2) + 2 r_1 cos(\theta_1) r_2 cos(\theta_2) \\
&\quad + r_1^2 sin^2(\theta_1) + r_2^2 sin^2(\theta_2) + 2 r_1 sin(\theta_1) r_2 sin(\theta_2) \\
r^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 cos(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$\begin{aligned}
r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta) &= r_1^2cos^2(\theta_1) + r_2^2cos^2(\theta_2) + 2r_1cos(\theta_1)r_2cos(\theta_2) \\
&\quad +r_1^2sin^2(\theta_1) + r_2^2sin^2(\theta_2) + 2r_1sin(\theta_1)r_2sin(\theta_2) \\
r^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2) \\
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2)}
\end{aligned}$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$
\begin{aligned}
r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta) &= r_1^2cos^2(\theta_1) + r_2^2cos^2(\theta_2) + 2r_1cos(\theta_1)r_2cos(\theta_2) \\
&\quad + r_1^2sin^2(\theta_1) + r_2^2sin^2(\theta_2) + 2r_1sin(\theta_1)r_2sin(\theta_2) \\
r^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2) \\
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2)}
\end{aligned}
$$

$$
tan(\theta) = \frac{rsin(\theta)}{rcos(\theta)}
$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$
\begin{aligned}
r^2 cos^2(\theta) + r^2 sin^2(\theta) &= r_1^2 cos^2(\theta_1) + r_2^2 cos^2(\theta_2) + 2r_1 cos(\theta_1) r_2 cos(\theta_2) \\
&\quad + r_1^2 sin^2(\theta_1) + r_2^2 sin^2(\theta_2) + 2r_1 sin(\theta_1) r_2 sin(\theta_2) \\
r^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 cos(\theta_1 - \theta_2) \\
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 cos(\theta_1 - \theta_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tan(\theta) &= \frac{rsin(\theta)}{rcos(\theta)} \\
&= \frac{r_1 sin(\theta_1) + r_2 sin(\theta_2)}{r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2)}
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 1/4

Addition

$$
\begin{aligned}
r^2cos^2(\theta) + r^2sin^2(\theta) &= r_1^2cos^2(\theta_1) + r_2^2cos^2(\theta_2) + 2r_1cos(\theta_1)r_2cos(\theta_2) \\
&\quad + r_1^2sin^2(\theta_1) + r_2^2sin^2(\theta_2) + 2r_1sin(\theta_1)r_2sin(\theta_2) \\
r^2 &= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2) \\
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
tan(\theta) &= \frac{rsin(\theta)}{rcos(\theta)} \\
&= \frac{r_1sin(\theta_1) + r_2sin(\theta_2)}{r_1cos(\theta_1) + r_2cos(\theta_2)} \\
\theta &= arctan\left(\frac{r_1sin(\theta_1) + r_2sin(\theta_2)}{r_1cos(\theta_1) + r_2cos(\theta_2)}\right)
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 2/4

Soustraction

$$c_1 - c_2 \quad = \quad r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) - r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i)$$

par addition de deux complexes :

Forme polaire – Opérations – 2/4

Soustraction

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) - r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\ & \quad \textit{par addition de deux complexes :} \\ &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + (-r_2)(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \end{aligned}$$

Forme polaire – Opérations – 2/4

Soustraction

$$
\begin{aligned}
c_1 - c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) - r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&\quad \textit{par addition de deux complexes :} \\
&= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + (-r_2)(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(cos(\theta_2 - \theta_1))}
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 2/4

Soustraction

$$
\begin{aligned}
c_1 - c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) - r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&\quad \textit{par addition de deux complexes :} \\
&= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) + (-r_2)(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(cos(\theta_2 - \theta_1))} \\
\theta &= arctan\left(\frac{r_1 sin(\theta_1) - r_2 sin(\theta_2)}{r_1 cos(\theta_1) - r_2 cos(\theta_2)}\right)
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 3/4

Multiplication

$$c_1 \times c_2 = r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) \times r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i)$$

Forme polaire – Opérations – 3/4

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) \times r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + cos(\theta_1)sin(\theta_2)i \\
&\quad +sin(\theta_1)i \times cos(\theta_2) + sin(\theta_1)i \times sin(\theta_2)i)
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 3/4

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) \times r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + cos(\theta_1)sin(\theta_2)i \\
&\quad +sin(\theta_1)i \times cos(\theta_2) + sin(\theta_1)i \times sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + i \times [cos(\theta_1)sin(\theta_2) + sin(\theta_1) \times cos(\theta_2)) \\
&\quad +sin(\theta_1)sin(\theta_2)i^2]
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 3/4

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) \times r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + cos(\theta_1)sin(\theta_2)i \\
&\quad +sin(\theta_1)i \times cos(\theta_2) + sin(\theta_1)i \times sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + i \times [cos(\theta_1)sin(\theta_2) + sin(\theta_1) \times cos(\theta_2)) \\
&\quad +sin(\theta_1)sin(\theta_2)i^2] \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sin(\theta_1) \times sin(\theta_2) \\
&\quad +i \times [cos(\theta_1)sin(\theta_2) + sin(\theta_1) \times cos(\theta_2))]
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 3/4

Multiplication

$$
\begin{aligned}
c_1 \times c_2 &= r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i) \times r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + cos(\theta_1)sin(\theta_2)i \\
&\quad + sin(\theta_1)i \times cos(\theta_2) + sin(\theta_1)i \times sin(\theta_2)i) \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + i \times [cos(\theta_1)sin(\theta_2) + sin(\theta_1) \times cos(\theta_2)) \\
&\quad + sin(\theta_1)sin(\theta_2)i^2] \\
&= r_1 r_2(cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sin(\theta_1) \times sin(\theta_2) \\
&\quad + i \times [cos(\theta_1)sin(\theta_2) + sin(\theta_1) \times cos(\theta_2))] \\
&= \underbrace{r_1 r_2}_{r}(cos(\underbrace{\theta_1 + \theta_2}_{\theta}) + i \times (sin(\underbrace{\theta_1 + \theta_2}_{\theta}))
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Opérations – 4/4

Division

$$
\begin{aligned}
\frac{c_1}{c_2} &= \frac{r_1(cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i)}{r_2(cos(\theta_2) + sin(\theta_2)i)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1) + sin(\theta_1)i)(cos(\theta_2) - sin(\theta_2)i] \\
&= \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1)cos(\theta_2) - cos(\theta_1)sin(\theta_2)i + sin(\theta_1)i \times cos(\theta_2) \\
&\quad -sin(\theta_1)i \times sin(\theta_2)i] \\
&= \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sin(\theta_1) \times sin(\theta_2)i^2 \\
&\quad +i(sin(\theta_1) \times cos(\theta_2) - cos(\theta_1)sin(\theta_2))] \\
&= \underbrace{\frac{r_1}{r_2}}_{r}[cos(\underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\theta}) + i \times sin(\underbrace{\theta_1 - \theta_2}_{\theta})]
\end{aligned}
$$

Forme polaire – Exercices

1. Exprimer sous forme polaire :
   (a) $3 - \sqrt{3}i$
   (b) $-1 + 1i$
2. Exprimer sous forme cartésienne :
   (a) $4(cos(45°) + sin(45°)i)$
   (b) $5 \times cis(\frac{\pi}{3})$
3. Trouver la solution de :
   (a) $(4 \times cis(45°)) + (5 \times cis(\frac{\pi}{3}))$
   (b) $(4 \times cis(45°)) \times (5 \times cis(\frac{\pi}{3}))$

Degré	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos(angle)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(angle)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(angle)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Forme polaire – Solution 1(a)

$$\begin{aligned}
3-\sqrt{3}i &= r \times cis(\theta) \\
tan(\theta) &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \\
\theta &= arctan(-\frac{\sqrt{3}}{3}) \\
\theta &= -30^\circ \\
\theta &= 330^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{3^2+\sqrt{3}^2} \\
r &= \sqrt{9+3} \\
r &= \sqrt{12} \\
r &= 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$3-\sqrt{3}i = 2\sqrt{3}cis(330^\circ)$$

Forme polaire – Solution 2(a)

$$
\begin{aligned}
4cis(45^\circ) &= a + bi \\
\frac{b}{a} &= \tan(45^\circ) \\
\frac{b}{a} &= 1 \\
b &= a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2+b^2} &= 4 \\
a^2 + b^2 = 16 & \\
a^2 = \quad 8 &= b^2 \ comme\ b = a \\
a = \quad 2\sqrt{2} &= b
\end{aligned}
$$

$$4cis(45^\circ) = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

Forme polaire – Solution 3(a)

$$(4 \times cis(45^\circ)) + (5 \times cis(\frac{\pi}{3})) = (4 \times cis(45^\circ)) + (5 \times cis(60^\circ))$$

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 cos(\theta_1 - \theta_2)} \\
&= \sqrt{4^2 + 5^2 + 2 \times 4 \times 5cos(45^\circ - 60^\circ)} \\
&= \sqrt{41 + 40cos(-15^\circ)} \\
&= \sqrt{41 + 40 \times 0,96592582628} \\
&= \sqrt{79,6370330512} \\
&\approx 8,923958373457376
\end{aligned}$$

Forme polaire – Solution 3(a)

$$
\begin{aligned}
\theta &= arctan\left(\frac{r_1 sin(\theta_1) + r_2 sin(\theta_2)}{r_1 cos(\theta_1) + r_2 cos(\theta_2)}\right)\\
&= arctan\left(\frac{4sin(45^\circ) + 5sin(60^\circ)}{4cos(45^\circ) + 5cos(60^\circ)}\right)\\
&= arctan\left(\frac{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\frac{\sqrt{2}}{2} + 5\frac{1}{2}}\right)\\
&= arctan(1.3434647741399612)\\
&\approx 53.3380661^\circ
\end{aligned}
$$

$$
(4 \times cis(45^\circ)) + (5 \times cis(\frac{\pi}{3})) \quad \approx \quad 8,923\ cis(53.338^\circ)
$$

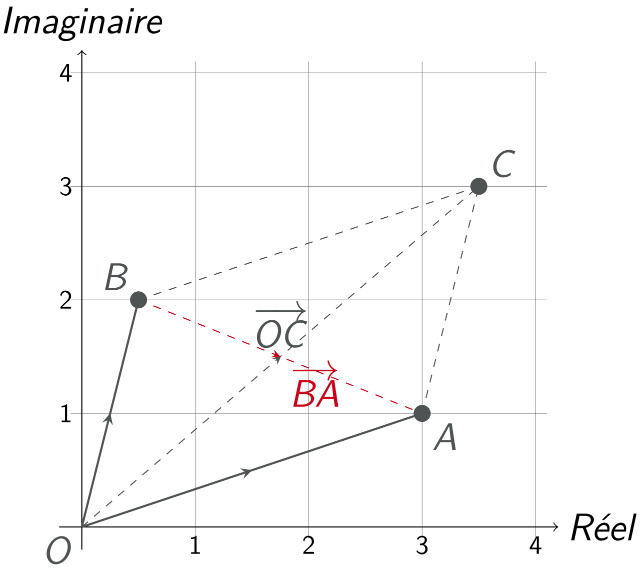
Forme polaire – Solutions 1(b), 2(b) et 3(b)

De manière similaire :

- 1b $\sqrt{2}\ cis(135^\circ)$
- 2b $\frac{1}{2}\left(5 + 5\sqrt{3}i\right)$
- 3b $20\ cis(105^\circ)$

Plan

Forme vectorielle



Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$c = r(cos(\theta) + i \times sin(\theta))$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned} c &= r(cos(\theta) + i \times sin(\theta)) \\ c &= r\left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots\right) + i \times sin(\theta)\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned} c &= r(cos(\theta) + i \times sin(\theta)) \\ &= r\left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série.
Par exemple :

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\
cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots
\end{aligned}
$$

En utilisant ces résultats :

$$
\begin{aligned}
c &= r(cos(\theta) + i \times sin(\theta)) \\
&= r\left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)\right] \\
&= r\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)\right]
\end{aligned}
$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned} c &= r(cos(\theta) + i \times sin(\theta)) \\ &= r\left[\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right)\right] \\ &= r\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned} c &= r\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \\ &= r\left[1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\
sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\
cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots
\end{aligned}
$$

En utilisant ces résultats :

$$
\begin{aligned}
c &= r\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots + i\theta - i\frac{\theta^3}{3!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \\
&= r\left[1 + i\theta {\color{red}-} \frac{\theta^2}{2!} {\color{red}-} i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \\
&= r\left[1 + i\theta {\color{red}+ i^2}\frac{\theta^2}{2!} {\color{red}+ i^2} \times i\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^4 \times i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right]
\end{aligned}
$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned} c &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^2 \times i\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^4 \times i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \\ &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned} c &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^2 \times i\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^4 \times i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right] \\ &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right] \\ &= r\left[1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \ldots\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\
sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \\
cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots
\end{aligned}$$

En utilisant ces résultats :

$$\begin{aligned}
c &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^2 \times i\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^4 \times i\frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right] \\
&= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right] \\
&= r\left[1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \ldots\right]
\end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^2 \times i\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^4 \times i\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \\ &= r\left[1 + i\theta + i^2\frac{\theta^2}{2!} + i^3\frac{\theta^3}{3!} + i^4\frac{\theta^4}{4!} + i^5\frac{\theta^5}{5!} + \dots\right] \\ &= r\left[1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \dots\right] \end{aligned}$$

Forme exponentielle

Beaucoup de fonctions peuvent s'exprimer par un développement en série. Par exemple :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \\ sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Tout complexe c peut donc s'écrire sous la forme

$$r \times e^{i\theta}$$

Autres formes – Exercices

1. Changer de forme :
   (a) $6 \times cis(30^\circ)$ en forme exp.
   (b) $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$ en forme cart.
   (c) $1+\sqrt{3}i$ en forme exp.
2. Donner la valeur de :
   (a) module de $3e^{\frac{\pi}{4}i}$
   (b) argument de $3e^{\frac{\pi}{4}i}$
   (c) $Re(2e^{-\pi i})$
   (d) $\Im(2e^{-\pi i})$

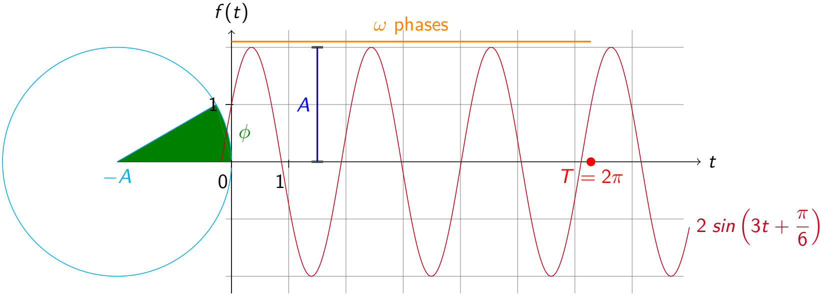
Autres formes – Exercices

1. Changer de forme :
   (a) $6 \times cis(30°)$ en forme exp. $6e^{\frac{pi}{6}i}$
   (b) $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$ en forme cart.
   $e^{1+i\frac{\pi}{2}} = e^1\ e^{i\frac{\pi}{2}} = e\ cis(\frac{\pi}{2}) = e\left[cos(\frac{\pi}{2}) + isin(\frac{\pi}{2})\right] = e * [0 + i\ 1] = e\ i$
   (c) $1 + \sqrt{3}i$ en forme exp. $r = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$
   $tan(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{1}, \theta = \frac{\pi}{3}$
   $2e^{\frac{\pi}{3}i}$

2. Donner la valeur de :
   (a) module de $3e^{\frac{\pi}{4}i}$ 3
   (b) argument de $3e^{\frac{\pi}{4}i}$ $\frac{\pi}{4}$
   (c) $Re(2e^{-\pi i})$ $Re(2e^{-\pi i}) = Re(-2e^{\pi i}) = Re(-2[cos(\pi) + i\ sin(\pi)]) =$
   $Re(-2[cos(\pi)]) = Re(-2) = -2$
   (d) $\Im(2e^{-\pi i})$ De manière similaire : $= 0$

Plan

Application – Forme d'onde sinusoïdale



En électronique, on renomme i en j car i correspond à l'intensité.

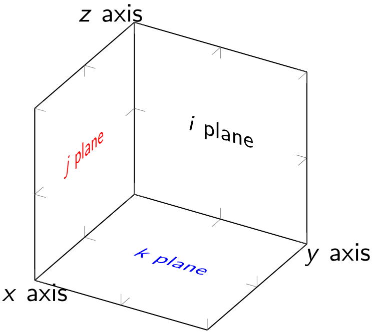
$$2sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Application – Déplacement 3D

Un quaternion q est de la forme

$$q = a + b\ i + c\ ij + d\ k, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

où $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ i, j et k sont les unités fondamentales des quaternions. Un quaternion est un peu comme un complexe à plusieurs composantes imaginaires.



Il est plus facile de travailler dans un plan donné ainsi qu'effectuer des rotations.